1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

1.18. Скільки партій буде зіграно на шаховому турнірі, якщо кожні двоє з 10-ти учасників зустрінуться лише по разу?

▶

$C_{10}^2 = 45.$ □

1.2. У першості країни з футболу беруть участь 16 команд.

1) Скільки існує можливих послідовностей цих команд, складених у порядку спадання кількості очок після закінчення чемпіонату?

2) Скількома способами може бути розподілено 3 комплекти нагород?

3) Скільки існує можливих пар невдах, складених з команд, які зайняли два останні місця?

▶

1) $P_{16} = 16! = 2,092278989 \cdot 10^{13}.$

2) $A_{16}^3 = \frac{16!}{13!} = 3360.$

3) $C_{16}^2 = \frac{16!}{2!14!} = 15 \cdot 8 = 120.$ □

1.11. Банк випускає кредитні картки, кожна з яких має серію з трьох букв англійського алфавіту і номер з чотирьох цифр. Скільки можна випустити кредитних карток, використовуючи 26 букв англійського алфавіту, якщо відомо, що номера 0000 немає?

▶

3 букви з 26 можна вибрати $\overline{A_{26}^3} = 26^3 = 17576$ способами. Цифри в номері можна вибрати 9999 способами. За правилом добутку: карток можна випустити $17576 \cdot 9999 = 175\,742\,424$ штук. □

1.12. Скільки підмножин має множина, яка складається з n елементів?

▶

З n-множини можна утворити C_n^k $(k = \overline{0,n})$ підмножин з k елементів (враховуючи порожню множину). Маємо $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ підмножин. □

1.14. У камері схову встановлено кодовий замок, код якого складається з 4-х цифр. Скільки різних кодів можна скласти з цифр 1; 2; 3; 4; 5, якщо:

1) цифри у коді можуть повторюватися;

2) цифри у коді не повторюються;

3) код починається з цифри 3;

4) код - парне число;

5) код - парне число, цифри якого не повторюються?

▶

1) $\overline{A_5^4} = 5^4 = 625.$

2) $A_5^4 = 5! = 120.$

3) $\overline{A_5^3} = 5^3 = 125.$

4) $2 \cdot \overline{A_5^3} = 2 \cdot 5^3 = 250.$

5) $2 \cdot A_4^3 = 2 \cdot 4! = 48.$ $\square$

1.21. На книжковій полиці розміщено 10 томів. Скількома способами можна розставити їх так, щоб перший і другий томи не стояли поруч?

▶

$10!$ – кількість способів розташування 10-ти томів;

$2 \cdot 9!$ – кількість способів розташування 10-ти томів так, щоб перший і другий томи стояли поруч;

$10! - 2 \cdot 9! = 9! \cdot 8 = 2\,903\,040$ – кількість способів розташування 10-ти томів так, щоб перший і другий томи не стояли поруч. $\square$

1.20. Скількома способами можна розподілити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримала по 5 предметів?

▶

Кількість способів розбиття множини з 15-ти елементів на 3 підмножини по 5 елементів дорівнює

$$P_{15}(5,\,5,\,5) = \frac{15!}{5!\,5!\,5!} = 756\,756. \quad \square$$

1.26. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,\,2,\ldots,\,2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

▶

Парні і непарні числа впорядковуємо незалежно відповідно на парних і непарних номерах. Кількість таких впорядкувань для кожної з цих n-множин дорівнює $P_n = n!$ Згідно з правилом добутку загальна кількість впорядкувань дорівнює $n! \cdot n! = (n!)^2$. $\square$

1.27. Скількома способами можна вибрати навмання 2 чорні і 3 білі кулі зі скриньки, що містить 10 чорних та 6 білих куль?

▶

Під час витягання куль нас цікавить лише їх склад. а порядок не важливий. Кількість способів вибору двох чорних куль з десяти дорівнює C_{10}^2, а трьох білих з шести – відповідно C_6^3. Згідно з правилом добутку загальна кількість способів дорівнює

$$C_{10}^2 \cdot C_6^3 = \frac{10!}{8!\,2!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = 45 \cdot 20 = 900. \quad \square$$