5. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ПОДІЙ

4.1. Монету кидають 3 рази. Знайти ймовірність того, що "герб" випаде 2 рази, використавши теореми додавання та множення ймовірностей.

▶

Позначимо: A — випадання 2-х "гербів" при 3-х киданнях монети; A_i — випадання "герба" при i-му киданні. Тоді $A = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3$. Доданки цієї суми попарно несумісні події, тому $P(A) = P(A_1A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3)$. Події A_1, A_2, A_3 незалежні, тому $P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$. Оскільки $P(A_i) = P(\overline{A_i}) = 1/2$, то $P(A) = 3/8$. □

4.2. Нехай $P(A) \geq 0,8$; $P(B) \geq 0,8$. Довести, що $P(AB) \geq 0,6$.

▶

Запишемо теорему додавання ймовірностей: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Оскільки $P(A+B) \leq 1$, а $-P(A+B) \geq -1$, то $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) \geq 0,8 + 0,8 - 1 = 0,6$, тобто $P(AB) \geq 0,6$. □

4.3. Користуючись теоремою додавання для двох подій, вивести формулу для ймовірності суми трьох подій.

▶

$$P(A+B+C) = P\big((A+B)+C\big) = P(A+B) + P(C) - P\big((A+B)C\big) =$$
$$= P(A+B) + P(C) - P(AC+BC) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(AC \cdot BC) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad \square$$

4.4. У першій скриньці 5 білих і 10 чорних куль, у другій — 10 білих і 5 чорних. З кожної скриньки навмання витягнули по одній кулі. Знайти ймовірність, що витягнули хоча б одну білу кулю.

▶

Подія A_1 — з першої скриньки витягнули білу кулю; подія A_2 — з другої скриньки витягнули білу кулю; подія $A_1 + A_2$ — витягнули хоча б одну білу кулю. Оскільки $P(A_1) = 5/15 = 1/3$, $P(A_2) = 10/15 = 2/3$, і події A_1 і A_2 незалежні, то

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}. \quad \square$$

4.8. Кубик кинули двічі. Знайти умовну ймовірність того, що випало дві "п'ятірки", якщо відомо, що сума очок, що випали, ділиться на 5.

▶

Подія A — випало дві "п'ятірки", подія B — сума очок, що випали, ділиться на 5. Отже,

$$A = \{\,(5,\,5)\,\}; \quad B = \{\,(1,\,4),\,(2,\,3),\,(3,\,2),\,(4,\,1),\,(5,\,5),\,(4,\,6),\,(6,\,4)\,\};$$
$$AB = A; \quad N(AB) = N(A) = 1; \quad N(B) = 7; \quad P(A/B) = \frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{1}{7}\,. \quad \square$$

4.14. Кинули монету і кубик. Визначити залежні, чи незалежні події: A={випав "герб"}, B={випала парна кількість очок}.

▶

$$A = \{\,(\text{Г},\,i) : \, i = \overline{1,6}\,\}; \quad B = \{\,((\text{Г},\,i),\,(\text{Ц},\,k) : \, i,\,k = 2,\,4,\,6\,\};$$
$$AB = \{\,(\text{Г},\,i) : \, i = 2,\,4,\,6\,\}; \quad \Omega = \{\,((\text{Г},\,i),\,(\text{Ц},\,k) : \, i,\,k = \overline{1,6}\};$$
$$N(A) = N(B) = 6; \quad N(AB) = 3; \quad N(\Omega) = 12 \implies$$
$$P(A) = P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\,; \quad P(AB) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \implies P(AB) = P(A)P(B).$$

Отже, події A і B незалежні. $\square$

4.16. Імовірність влучання в ціль для першого стрільця рівна 0,8, а для другого — 0,6. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність, що в ціль влучить хоча б один з них?

▶

Подія A_1 — влучить перший, подія A_2 — влучить другий, подія A — влучить хоча б один. $P(A_1) = 0,8$; $P(A_2) = 0,6$; $P(\overline{A_1}) = 0,2$; $P(\overline{A_2}) = 0,4$.

I спосіб. $A = A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2+A_1A_2$. Події-доданки попарно несумісні, а події-множники незалежні. Тому $P(A) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) + P(A_1)P(A_2) = 0,92$.

II спосіб. $A = A_1 + A_2 \implies P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = P(A_1)+P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,92$.

III спосіб. Розглянемо подію $\overline{A}$ — не влучить жоден. $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \implies P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 0,92$. $\square$

4.19. Імовірність хоча б одного влучання в ціль за 3 постріли рівна 0,875. Знайти ймовірність влучання за один постріл.

▶

Введемо події: A — хоча б одне влучання в ціль за 3 постріли; A_k — влучання при k-му пострілі, $k = 1,\,2,\,3$. Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1-(1-p)^3 = 0,875$, де $p = P(A_k)$, $k = 1,\,2,\,3$. Маємо рівняння $1-(1-p)^3 = 0,875$, тобто $(1-p)^3 = 0,125$. Отже, $1-p = 0,5$ і $p = 0,5$. $\square$

4.22. Партія містить 12 стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей: 1) не менш як дві стандартні; 2) усі три нестандартні; 3) хоча б одна стандартна.

►

1) Нехай подія A — "серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні". Тоді її можна подати як суму двох подій: A_1 — "серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна" і A_2 — "усі три взяті деталі стандартні". Події A_1 і A_2 несумісні, тому $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$. Імовірності подій A_1 і A_2 знайдемо згідно з класичним означенням імовірності: $N(\Omega) = C_{16}^3 = 560$; $N(A_1) = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264$; $N(A_2) = C_{12}^3 = 220$. Отже, $P(A) = \frac{464}{560} = \frac{121}{140}$.

2) Подія B — "усі три взяті деталі нестандартні". Тоді $N(B) = C_4^3 = 4$; $P(B) = \frac{4}{560} = \frac{1}{140}$. Знайдемо тепер $P(B)$ другим способом. Подію B можна записати як добуток трьох залежних подій B_k — "k-та взята деталь нестандартна", $k = 1, 2, 3$. Тоді за теоремою множення для трьох подій $P(B) = P(B_1)P(B_2/B_1)P(B_3/B_1B_2) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{140}$. Отже, взяти три деталі разом — це те саме, що брати їх по одній без повернення.

3) Подія C — "із трьох деталей принаймні одна стандартна". Протилежна подія $\overline{C}$ — "усі три деталі нестандартні". Імовірність цієї події щойно знайдено: $P(\overline{C}) = P(B)$. Остаточно маємо: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{140} = \frac{139}{140}$. □

4.23. Маємо 3 партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і 3 нестандартних деталей, друга — із 15 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. З кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей: 1) лише одна стандартна; 2) лише дві стандартні.

►

Нехай згідно з умовою з кожної партії взято по одній деталі. При цьому можуть відбутися події A_1, A_2, A_3, які полягають в тому, що деталь, яку взяли з першої, другої і третьої партії відповідно, виявилась стандартною.

1) Подію A — "тільки одна із трьох деталей виявилась стандартною" можна записати так: $A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,A_2\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3$. Групи подій, сумою яких є подія A, попарно несумісні, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність події A обчислюємо так:

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) =$$
$$= \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{133}{1235}.$$

2) Подію B — "тільки дві деталі із трьох виявились стандартними" запишемо у вигляді: $B = A_1A_2\,\overline{A_3} + A_1\,\overline{A_2}\,A_3 + \overline{A_1}\,A_2A_3$. Групи подій, сумою яких є подія B, попарно несумісні, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність

події B обчислюємо так:

$$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$
$$= \frac{10}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{490}{1235}. \quad \square$$

4.25. Прилад складається з трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Імовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

▶

Розглянемо події: A — "прилад працює протягом заданого часу"; B_1 — "перший вузол працює"; B_2 — "другий вузол працює"; B_3 — "третій вузол працює". Подія A настає, якщо відбувається подія B_1 і хоча б одна з подій B_2 або B_3. Отже, $A = B_1(B_2 + B_3)$. Згідно з умовою задачі, події B_1 і $B_2 + B_3$ незалежні, а події B_2 і B_3 можуть відбуватися одночасно. Тому, враховуючи, що $P(B_1) = 0,8$; $P(B_2) = 0,7$, а $P(B_3) = 0,6$, одержимо

$$P(A) = P\big(B_1(B_2 + B_3)\big) = P(B_1)\big(P(B_2) + P(B_3) - P(B_2B_3)\big) = P(B_1)\big(P(B_2)+$$
$$+P(B_3) - P(B_2)P(B_3)\big) = 0,8\,(0,7 + 0,6 - 0,7 \cdot 0,6) = 0,8 \cdot 0,88 = 0,704. \quad \square$$