6. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ІМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ БАЄСА

5.1. Кидають монету. Якщо випаде "герб", то витягають кулю з першої скриньки, у протилежному випадку — з другої. У першій скриньці 3 червоних і 1 біла куля, у другій — 1 червона і 4 білих.

1) Яка ймовірність того, що витягнута куля — червона?

2) Витягнули червону кулю. Яка ймовірність, що її витягнули з першої скриньки?

▶

Введемо події: A — "витягнули червону кулю", H_1 — "кулю витягали з першої скриньки", H_2 — "кулю витягали з другої скриньки". Події H_1 і H_2 несумісні і $A = AH_1 + AH_2$. Імовірність події A шукаємо за формулою повної ймовірності: $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)$. Обчислюємо ймовірності: $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$; $P(A/H_1) = 3/4$; $P(A/H_2) = 1/5$;

$$P(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{19}{40}\,.$$

Якщо витягнули червону кулю, то це означає, що відбулась подія A. Імовірність того, що кулю витягнули з першої скриньки шукаємо за формулою Баєса

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{19}{40}} = \frac{15}{19}\,. \quad \square$$

5.2. У першій скриньці 10 куль, з них — 8 білих. У другій — 20 куль, з них — 4 білих. З кожної скриньки навмання витягнули по одній кулі, а потім з двох витягнутих навмання вибрали одну кулю.

1) Знайти ймовірність, що вибрали білу кулю.

2) Вибрали білу кулю. Яка ймовірність, що з першої скриньки витягнули білу кулю і з другої — білу?

▶

Введемо події: A — "з двох витягнутих вибрали білу кулю", H_1 — "з першої скриньки витягнули білу кулю і з другої білу", H_2 — "з першої скриньки витягнули білу кулю, а з другої небілу", H_3 — "з першої скриньки витягнули небілу кулю, а з другої білу". Події H_1, H_2 і H_3 попарно несумісні і $A = AH_1 + AH_2 + AH_3$. Імовірність події A шукаємо за формулою повної ймовірності: $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$. Обчислюємо ймовірності:

$$P(H_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{20}=\frac{4}{25}\,;\qquad P(H_2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{16}{20}=\frac{16}{25}\,;\qquad P(H_3)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}\,;$$

$$P(A/H_1)=1;\qquad P(A/H_2)=P(A/H_3)=\frac{1}{2}\,;$$

$$P(A)=\frac{4}{25}+\frac{1}{2}\left(\frac{16}{25}+\frac{1}{25}\right)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}\,.$$

Якщо вибрали білу кулю, то це означає, що відбулась подія A. Імовірність того, що з першої скриньки витягнули білу кулю і з другої білу шукаємо за формулою Баєса

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{25}\,.\quad\square$$

5.5. Маємо N партій деталей, по n_i деталей у кожній. Відомо, що серед n_i деталей m_i стандартних ($i=\overline{1,\,N}$). Із навмання взятої партії беремо одну деталь. Знайти ймовірність того, що вибрана деталь: а) стандартна; б) нестандартна.

▶

Введемо події: H_i ($i=\overline{1,\,N}$) — "деталь узято з i-ої партії"; A — "узята деталь стандартна". Події H_i попарно несумісні, утворюють повну групу і $A=$ $=AH_1+AH_2+\ldots+AH_N$. Задача розв'язується за формулою повної ймовірності:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{N}P(H_i)P(A/H_i);\qquad P(H_i)=\frac{1}{N}\,;\qquad P(A/H_i)=\frac{m_i}{n_i}\implies$$

$$\implies P(A)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{n_i}\,.\quad\square$$

5.8. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга — з 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб з тої самої партії також буде стандартним.

▶

Розглянемо події: H_1 — "перший виріб взято з першої партії"; H_2 — "перший виріб узято з другої партії"; A — "перший узятий виріб стандартний"; B — "другий узятий виріб стандартний". Отже, $A=AH_1+AH_2$. За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність події A:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{19}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{23}=\frac{687}{874}\,.$$

Виведемо формулу для умовної ймовірності $P(B/A)$:

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B(AH_1+AH_2)}{P(A)}=\frac{P(AH_1)}{P(A)}P(B/AH_1)+$$

$$+\frac{P(AH_2)}{P(A)}P(B/AH_2)=P(H_1/A)P(B/AH_1)+P(H_2/A)P(B/AH_2).$$

За формулою Баєса знаходимо

$$P(H_1/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{19}:\frac{687}{874}=\frac{115}{229}\,; \qquad P(H_2/A)=1-\frac{115}{229}=\frac{114}{229}\,.$$

Умовні ймовірності такі: $P(B/AH_1)=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}\,;$ $P(B/AH_2)=\frac{17}{22}\,.$ Отже,

$$P(B/A)=\frac{115}{229}\cdot\frac{7}{9}+\frac{114}{229}\cdot\frac{17}{22}=0,3906+0,3847\approx 0,775. \quad \square$$