7. ЗАДАЧІ НА СХЕМУ БЕРНУЛЛІ

6.1 (І ч.) Імовірність влучання в ціль для стрільця за один постріл рівна 0,8. Стрілець зробив 4 постріли. Знайти ймовірності того, що він влучив у ціль k разів ($k = 0, 1, 2, 3, 4$). Знайти найімовірнішу кількість влучань за 4 постріли.

▶

Використовуючи біномну формулу, отримуємо:

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 0,0016; \qquad P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^3 = 0,0256;$$
$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536; \qquad P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 = 0,4096;$$
$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096.$$

Найімовірніша кількість успіхів в n випробуваннях за схемою Бернуллі задовольняє умову $np - q \le k_0 \le np + p$. У нашому випадку: $4 \cdot 0,8 - 0,2 \le k_0 \le$ $\le 4 \cdot 0,8 + 0,8$, звідки $k_0 = 3$; $k_0 = 4$. □

6.2. Монету кидають 50 разів. Знайти найімовірнішу кількість випадань "герба".

▶

Скористаємось формулою, за якою визначається найімовірніша кількість появ події: $np - q \le k_0 \le np + p$. Підставимо значення відомих величин: $50 \cdot 0,5 - 0,5 \le k_0 \le 50 \cdot 0,5 + 0,5$, звідки $k_0 = 25$. □

6.15. Із партії, в є якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруть 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей: 1) усі три стандартні; 2) не більш як одна нестандартна; 3) принаймні одна нестандартна.

▶

Маємо схему трьох незалежних випробувань. Нехай подія A — "узята щоразу деталь стандартна", тоді $P(A) = p = 12/16 = 0,75$. Імовірності обчислюватимемо за формулою Бернуллі:

1) $P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0,75^3 = 0,421875$.

2) Подію "із трьох деталей не більш як одна нестандартна" можна розглядати як суму подій "узято 3 стандартні деталі" і "узято 2 стандартні і одну нестандартну деталь". У позначеннях формули Бернуллі (k — кількість взятих стандартних деталей) одержимо:

$$P\{k \ge 2\} = P_3(3) + P_3(2) = 0,421875 + C_3^2 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 = 0,84375.$$

3) Протилежною до даної буде подія "усі три деталі стандартні". Їй рівно-

сильна подія $\{k < 3\}$. Обчислимо її ймовірність

$$P\{k < 3\} = 1 - P_3(3) = 1 - 0,421875 = 0,578125. \quad \Box$$

6.16. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

▶

За формулою $np - q \le k_0 \le np + p$ знаходимо:

$$0,6n - 0,4 \le 40 \le 0,6n + 0,6; \qquad -0,4 - 40 \le -0,6n \le 0,6 - 40;$$
$$\frac{39,4}{0,6} \le n \le \frac{40,4}{0,6}; \qquad 65,7 \le n \le 67,3.$$

Отже, задача має два розв'язки: $n = 66$ і $n = 67$. $\Box$

Задачі на схему Бернуллі для великої кількості випробувань

6.26. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

▶

Нехай подія A — "виріб пошкоджено", її ймовірність $P(A) = p = 0,003$. Розглядається схема незалежних випробувань, $n = 1000$, $k = 3$. Оскільки $\lambda = np = 1000 \cdot 0,003 = 3 < 30$, то використовуємо наближену формулу Пуассона: $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Отже, $P_{1000}(3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0,224$. $\Box$

6.17. З умов випуску лотереї відомо, що виграшними є 1/40 всіх випущених лотерейних квитків. Яка ймовірність, що з 200 куплених лотерейних квитків виграшними будуть 5? Не менше 5-ти?

▶

1) Маємо випробування за схемою Бернуллі: $n = 200$, $p = 1/40$; $\lambda = np = 5 < 30$. Використовуючи наближену формулу Пуассона, за таблицею розподілу Пуассона для $k = \lambda = 5$ знаходимо $P_{200}(5) = 0,175467$.

2) Треба знайти $P\{k \ge 5\}$. Оскільки $\{k \ge 5\} = \{k = 5\} + \{k = 6\} + \ldots + \{k = 200\}$, то використовуючи *таблицю значень* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ при $m = \lambda = 5$, знаходимо

$$P\{k \ge 5\} = \sum_{k=5}^{200} P_{200}(k) = \sum_{k=5}^{200} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \approx \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0,559507. \quad \Box$$

6.18. Кубик кидають 6000 разів. Знайти ймовірність того, що "двійка" випаде 900 разів.

▶

Маємо випробування за схемою Бернуллі: $n = 6000$; $k = 900$; $p = 1/6$; $q = 5/6$; $np = 1000 > 30$; $npq = 833,3 > 10$, тому використовуємо локальну формулу Муавра-Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}}, \qquad x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Отже,

$$x_0 = \frac{900 - 1000}{28,87} = -3,46; \quad P_{6000}(900) \approx \frac{\varphi(-3,46)}{28,87} = \frac{\varphi(3,46)}{28,87} = 0,0000346.$$

Значення $\varphi(3,46) = 0,001$ можна обчислити безпосередньо або знайти за допомогою *таблиці значень функції Гаусса.* □

6.27. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

▶

Подія A — "зерно пшениці зійшло". Її імовірність $p = 0,95$, кількість незалежних випробувань $n = 2000$. Оскільки $np = 1900 > 30$, то застосовуємо формулу, яка випливає з інтегральної теореми Муавра-Лапласа:

$$P\{k_1 \le \mu_n \le k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Тут $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функція Лапласа. Виконаємо обчислення:

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1880 - 1900}{\sqrt{1900 \cdot 0,05}} \approx -2,05; \qquad \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1920 - 1900}{\sqrt{95}} \approx 2,05;$$

$$P\{1880 \le \mu_n \le 1920\} \approx \Phi(2,05) - \Phi(-2,05) = 2\Phi(2,05) = 2 \cdot 0,4798 = 0,9596.$$

Значення функції $\Phi(x)$ беремо з *таблиці значень функції Лапласа.* □

6.30. Під час дослідження легованої сталі на вміст вуглецю ймовірність того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищить допустимий рівень, рівна 0,01. Обчислити, скільки в середньому треба дослідити зразків, щоб з імовірністю 0,95 вказаний ефект спостерігався хоча б один раз.

▶

Розглянемо події A — "вказаний ефект спостерігається хоча б один раз",

$\overline{A}$ — "жодного разу". Тоді

$$P(A) = 0,95; \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,05; \quad P(\overline{A}) = P_n(0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = 0,05;$$

$$\lambda = -\ln 0,05 \approx 3 \implies \lambda = np = 3 \implies n = \frac{3}{p} = \frac{3}{0,01} = 300.$$

Отже, в середньому треба дослідити 300 зразків. □

6.31. Імовірність того, що куплений лотерейний квиток є виграшним $p = 0,01$. Скільки треба купити квитків, щоб серед них був хоча б один виграшний з імовірністю не меншою, ніж 0,98?

▶

Розглянемо події: A — "купили хоча б один виграшний квиток", $\overline{A}$ — "жоден з куплених квитків не є виграшним". Тоді

$$P(A) \geq 0,98, \quad P(\overline{A}) = P_n(0) = e^{-\lambda}, \quad P(A) = 1 - e^{-\lambda} \geq 0,98; \quad e^{-\lambda} \leq 0,02$$

$$\implies -\lambda \leq \ln 0,02 \approx -3,91 \implies \lambda = np \geq 3,91 \implies n \geq \frac{3,91}{p} = \frac{3,91}{0,01} = 391.$$

Отже, треба купити не менше 391-го квитка, щоб серед них був хоча б один виграшний. □

6.33. Кубик кидають 6000 разів. Знайти ймовірність того, що відносна частота випадання "шістки" відхилиться від імовірності $p = 1/6$ не більше, ніж на 0,01.

▶

Використовуючи формулу для знаходження ймовірності відхилення відносної частоти від сталої ймовірності в незалежних випробуваннях $P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$, отримуємо

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{6000} - \frac{1}{6}\right| \leq 0,01\right\} \approx 2\Phi\left(0,01 \cdot \sqrt{\frac{6000}{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right) = 2\Phi(0,01 \cdot \sqrt{43200}) =$$
$$= 2\Phi(2,08) = 2 \cdot 0,4812 = 0,9624. \quad \square$$

6.34. Скільки разів треба кинути кубик, щоб з імовірністю 0,997 відносна частота випадання "шістки" відхилилася від імовірності $p = 1/6$ не більше, ніж на 0,001.

▶

Введемо позначення $t = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$. З умови $2\Phi(t) = 0,997$ знаходимо $\Phi(t) = 0,4985$. З *таблиці значень функції Лапласа* отримуємо, що $t \approx 2,96$. Тому

$$n = \frac{t^2pq}{\varepsilon^2} = \frac{2,96^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{0,001^2} = 1\,216\,889.$$

Отже, кубик потрібно кинути 1 216 889 разів. □

Послідовність незалежних випробувань з різними ймовірностями появи події у кожному випробуванні

6.29. Маємо три партії деталей. Перша складається з 9 стандартних і 3 нестандартних; друга — з 12 стандартних і 3 нестандартних; третя — з 18 стандартних і 9 нестандартних деталей. З кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що ввзяли 0, 1, 2, 3 стандартні деталі.

Вказівка. Якщо проводяться n незалежних випробувань, в яких подія A відбувається з імовірністю $p_i\,(i=1,2,...,n)$, то ймовірність настання цієї події k разів визначається за допомогою твірної функції $\varphi_n\,(z)=\prod\limits_{i=1}^{n}(p_i z+q_i)$. Якщо перетворити праву частину функції і звести подібні члени, то коефіцієнт при z^k визначає $P_n(k)$.

►

Нехай подія A — "поява стандартної деталі в кожному випробуванні". Позначимо через $p_i\,(i=1,2,3)$ імовірності взяття стандартної деталі з i-ої партії. Для обчислення ймовірностей складемо твірну функцію:

$$\varphi\,(z)=\prod_{i=1}^{3}(p_i z+q_i)=\left(\frac{3}{4}z+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}z+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{5}z^2+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{20}\right)z+\frac{1}{20}\right)\left(\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{5}z^3+\frac{13}{30}z^2+\frac{3}{20}z+\frac{1}{60}\,.$$

Отже,

$$P_3\,(0)=\frac{1}{60}\,;\qquad P_3\,(1)=\frac{3}{20}\,;\qquad P_3\,(2)=\frac{13}{30}\,;\qquad P_3\,(3)=\frac{2}{5}\,.\quad\square$$