8 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ І ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

6.1 (II ч.) Імовірність влучання в ціль для стрільця за один постріл рівна 0,8. Стрілець зробив 4 постріли. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості влучань за 4 постріли.

►

Нехай X — кількість влучань за 4 постріли. Це дискретна випадкова вели-

x_k	0	1	2	3	4
p_k	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

чина, розподілена за біномним законом. Використовуючи ймовірності $p_k = P_n(k)$ ($k = \overline{0,\ 4}$), зобразимо у вигляді таблиці закон розподілу випадкової величини X. Тут x_k — значення випадкової величини X; $p_k = P\{X = x_k\}$ — відповідні ймовірності.

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X за формулою математичного сподівання дискретної випадкової величини:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{4} x_k p_k = 0 \cdot 0,0016 + 1 \cdot 0,0256 + 2 \cdot 0,1536 + (3+4)0,4096 = 3,2.$$

Шукаємо дисперсію

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2; \quad E(X^2) = \sum_{k=0}^{4} x_k^2 p_k =$$
$$= 0^2 \cdot 0,0016 + 1^2 \cdot 0,0256 + 2^2 \cdot 0,1536 + (3^2 + 4^2)0,4096 = 10,88;$$
$$D(X) = 10,88 - 3,2^2 = 10,88 - 10,24 = 0,64.$$

Перевіримо отримані результати за допомогою формул для $E(X)$ і $D(X)$ для випадкової величини, розподіленої за біномним законом: $E(X) = np = 4 \cdot 0,8 = = 3,2$; $D(X) = npq = 3,2 \cdot 0,2 = 0,64$. □

6.4. Монету кидають 3 рази. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості випадань "герба".

►

Нехай X — кількість випадань "герба" при трьох киданнях монети. Маємо: $n = 3$; $p = q = 1/2$; $E(X) = np = 1,5$; $D(X) = npq = 0,75$. Імо-

x_k	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

вірності p_k обчислюємо за біномною формулою:

$$p_k = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (k = \overline{0,\,3}); \qquad p_0 = C_3^0 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\,;$$

$$p_1 = C_3^1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}\,; \qquad p_2 = C_3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}\,; \qquad p_3 = C_3^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\,. \quad \square$$

6.8. У скриньці 4 білих і 3 чорних кулі. Навмання витягають одну кулю, потім кладуть назад у скриньку. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих білих куль у 4-х таких експериментах.

▶

Оскільки кулю кожен раз повертають назад у скриньку, то маємо випробування за схемою Бернуллі, тому випадкова величина X (кількість витягнутих білих куль) розподілена за біномним законом. Маємо: $n = 4$; $p = 4/7$; $q = 3/7$;

x_k	0	1	2	3	4
p_k	$\frac{81}{2401}$	$\frac{432}{2401}$	$\frac{864}{2401}$	$\frac{768}{2401}$	$\frac{256}{2401}$

$E(X) = np = 16/7$; $D(X) = npq = 48/49$. Імовірності p_k обчислюємо за біномною формулою:

$$p_k = C_4^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{4-k} \quad (k = \overline{0,\,4}); \qquad p_0 = C_4^0 \left(\frac{4}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 = \frac{81}{2401}\,;$$

$$p_1 = C_4^1 \cdot \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{432}{2401}\,; \qquad p_2 = C_4^2 \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{864}{2401}\,;$$

$$p_3 = C_4^3 \left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{768}{2401}\,; \qquad p_4 = C_4^4 \left(\frac{4}{7}\right)^4 = \frac{256}{2401}\,. \quad \square$$

6.6. У скриньці 4 білих і 3 чорних кулі. Навмання витягають 3 кулі. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих білих куль.

▶

Нехай X — кількість витягнутих білих куль. Оскільки кулі не повертають, то закон розподілу цієї випадкової величини відрізняється від біномного. Імовірності p_k шукаємо за допомогою класичного означення ймовірності:

$$p_0 = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}\,; \quad p_1 = \frac{C_4^1\,C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}\,; \quad p_2 = \frac{C_4^2\,C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}\,; \quad p_3 = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}\,.$$

Отримані результати записуємо у таблицю:

x_k	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Шукаємо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} x_k p_k = \frac{1}{35}\,(1 \cdot 12 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 4) = \frac{60}{35} = \frac{12}{7}\,;$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2; \quad E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} x_k^2\, p_k =$$

$$= \frac{1}{35}\left(1^2 \cdot 12 + 2^2 \cdot 18 + 3^2 \cdot 4\right) = \frac{120}{35} = \frac{24}{7}\,; \qquad D(X) = \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}\,.$$

Функцію розподілу випадкової величини X шукаємо за формулою для функції розподілу дискретної випадкової величини:

$$F(x) = \sum_{k:\ x_k < x} p_k.$$

Отримуємо:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{35}\,, & 0 < x \le 1; \\ \frac{13}{35}\,, & 1 < x \le 2; \\ \frac{31}{35}\,, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases} \qquad \square$$

6.10. Довести, що математичне сподівання дискретної випадкової величини, яка може набувати скінченну кількість значень, міститься між її найменшим і найбільшим можливими значеннями.

►

Нехай X — дискретна випадкова величина, яка задана законом розподілу

x_k	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Введемо позначення: $m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тоді

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \le M(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = M.$$

Отже, $E(X) \le M$. Аналогічно доводиться, що $E(X) \ge m$. Остаточно маємо, що $m \le E(X) \le M$. $\square$

6.11. Кидають 10 кубиків. Знайти математичне сподівання і дисперсію суми очок, які випадуть на всіх кубиках.

▶

Введемо позначення: X — сума очок, що випали на десяти кубиках; X_i — кількість очок, що випали на i-му кубику ($i = \overline{1,\,10}$). Тоді $X = \sum\limits_{i=1}^{10} X_i$. Випадкові величини X_i однаково розподілені за законом

x_k	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Отже,

$$E(X_i) = \sum_{k=1}^{6} x_kp_k = \frac{1}{6}\,(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\,;$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 10 \cdot E(X_i) = 35; \qquad D(X_i) = E(X_i^2) - \big(E(X_i)\big)^2;$$

$$E(X_i^2) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2p_k = \frac{1}{6}\,(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6}\,;$$

$$D(X_i) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}\,; \quad D(X) = \sum_{i=1}^{10} D(X_i) = 10 \cdot D(X_i) = \frac{350}{12} = \frac{175}{6}\,. \ \square$$

6.7. Прилад складається з п'яти малонадійних деталей. Відмови деталей незалежні, а ймовірності відмови за час T відповідно рівні 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 і 0,6. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості деталей, що вийшли з ладу за час T.

▶

Введемо позначення: X — кількість деталей, що вийшли з ладу за час T, X_i — кількість виходів з ладу i-ої деталі ($i = \overline{1,\,5}$); α_i — імовірність відмови i-ої деталі за час T. Закон розподілу випадкової величини X_i має вигляд

Отже, $E(X_i) = 0\cdot(1-\alpha_i) + 1\cdot\alpha_i = \alpha_i$. Користуючись рівністю $X = \sum\limits_{i=1}^{5} X_i$,

k	0	1
p_{k_i}	$1-\alpha_i$	α_i

знаходимо: $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{5}E(X_i)=\sum\limits_{i=1}^{5}\alpha_i=0,2+0,3+0,4+0,5+0,6=2$. Шукаємо дисперсії: $D(X_i)=E(X_i^2)-\big(E(X_i)\big)^2$; $E(X_i^2)=0^2\cdot(1-\alpha_i)+1^2\cdot\alpha_i=\alpha_i$; $D(X_i)=\alpha_i-\alpha_i^2=\alpha_i(1-\alpha_i)$. Оскільки відмови деталей незалежні, то

$$D(X)=\sum_{i=1}^{5}D(X_i)=\sum_{i=1}^{5}\alpha_i(1-\alpha_i)=$$
$$=0,2\cdot 0,8+0,3\cdot 0,7+0,4\cdot 0,6+0,5^2+0,6\cdot 0,4=1,1. \quad \square$$

6.46. Імовірність виготовлення стандартної деталі із заготовки дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості заготовок, витрачених на виготовлення однієї стандартної деталі.

▶

Нехай X — кількість заготовок, витрачених на виготовлення однієї стандартної деталі. Тоді $P\{X=1\}=3/4$. Подія $\{X=2\}$ — це добуток двох незалежних подій: "з першої заготовки виготовлено нестандартну деталь" та "з другої заготовки виготовлено стандартну деталь". Отже, $P\{X=2\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4^2}$; $P\{X=3\}=\frac{3}{4^3}$; $\ldots$; $P\{X=k\}=\frac{3}{4^k}$; $\ldots$. Закон розподілу випадкової величини X має вигляд

x_k	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
p_k	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4^2}$	$\frac{3}{4^3}$	$\ldots$	$\frac{3}{4^k}$	$\ldots$

X — дискретна випадкова величина зі зліченною кількістю можливих значень. Перевіримо рівність $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$. За формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії знаходимо: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=3\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1$.

Для обчислення $E(X)$ і $E(X^2)$ використаємо формули нескінченних сум, справедливі для $|x|<1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty}k^2x^k=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

Виконаємо обчислення:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{3}{4^k} = 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\,;$$

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2; \quad E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k = 3 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{4}\right)^k =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{20}{9}\,; \qquad D(X) = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} = \frac{4}{9}\,. \quad \square$$

6.47. Проводяться незалежні випробування, в кожному з яких імовірність появи події A рівна p, а ймовірність її непояви відповідно рівна $q = 1 - p$. Випробування завершуються, як тільки відбудеться подія A. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості випробувань, які треба провести до першої появи події A.

▶

Нехай X — кількість випробувань, які треба провести до першої появи події A. Міркуючи так само як під час розв'язування попередньої задачі, отримаємо закон розподілу випадкової величини X (*геометричний розподіл*)

x_k	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
p_k	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{k-1}	$\ldots$

Виконаємо обчислення:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = \frac{p}{q} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}\,;$$

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2; \quad E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} =$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{q(q+1)}{(1-q)^3} = \frac{q+1}{p^2}\,; \qquad D(X) = \frac{q+1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}\,. \quad \square$$

6.48. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості кидань монети до першої появи "герба".

▶

Нехай X — кількість кидань монети до першої появи "герба". Ця випадкова величина має геометричний розподіл ($p = q = 1/2$), тому

$$E(X) = \frac{1}{p} = 2; \qquad D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2\,. \quad \square$$

6.50. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю $p = 0,2$ може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

►

Нехай Y — кількість виробів, виготовлених інструментом до його заміни. $Y = 0$, якщо при виготовленні першого виробу інструмент буде пошкоджено; $P\{Y = 0\} = p$. Якщо інструмент буде пошкоджено при виготовленні другого виробу, то $Y = 1$; $P\{Y = 1\} = p(1 - p) = pq$. Аналогічно $P\{Y = 2\} = pq^2$; $P\{Y = k\} = pq^k$. Закон розподілу випадкової величини Y має вигляд

y_k	0	1	2	...	k	...
p_k	p	pq	pq^2	...	pq^k	...

Порівнюючи цей закон розподілу з геометричним законом (випадкова величина X), бачимо, що $Y = X-1$. Тому $E(Y) = E(X-1) = E(X)-1 = \frac{1}{p}-1 = = \dfrac{q}{p} = \dfrac{0,8}{0,2} = 4$. $D(Y) = D(X-1) = D(X) + 0 = D(X) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{0,8}{0,04} = 20$. □