6.58. Задача Банаха. Один математик носить з собою дві коробки сірників. Кожен раз, коли він хоче дістати сірник, він вибирає одну з коробок навмання. Знайти ймовірність того, що коли він вперше витягне порожню коробку, в іншій коробці виявиться k сірників ($k = 0; 1; 2;...;n;$ $n -$ початкова кількість сірників у кожній з цих коробок).

Розв'язання

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що витягається сірник з коробки, яка в кінці виявилась порожньою (вперше витягнута порожньою). Якщо вибрана коробка порожня, а в іншій є k сірників, то це означає, що сірники брались всього $m = 2n - k$ разів. При цьому подія A настала рівно n разів, оскільки коробка стала порожньою. Оскільки кожного разу коробка вибирається навмання, то $P(A) = 0,5$. Отже, подія A настає n разів в $2n - k$ незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі з імовірністю, яку визначаємо за формулою Бернуллі

$$P_{2n-k}(n) = C_{2n-k}^{n}(0,5)^{n}(0,5)^{2n-k-n} = C_{2n-k}^{n}(0,5)^{2n-k} = \frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!2^{2n-k}}, \quad k = 0;1;2;...;n. \ \square$$

7. ЗАДАЧІ НА ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

Рівномірний розподіл

7.1. Ціна поділки шкали вимірювального пристрою 0,2. Покази пристрою округлюються до найближчого цілого числа. Знайти ймовірність того, що при вимірюванні буде зроблено похибку:

а) меншу за 0,04; б) більшу за 0,05.

Розв'язання

а) Нехай A – при вимірюванні буде зроблено похибку меншу за 0,04. Похибку округлення відліку можна розглядати як випадкову величину X, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми поділками. Щільність рівномірного розподілу

$$p(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{0,2} = 5.$$

При відліку буде зроблено похибку, меншу за 0,04, якщо покази приладу округлені до попередньої з двох сусідніх поділок, тобто до 0, тоді випадкова величина $X \in (0;\ 0,04)$ – подія A_1 або покази округлені до наступної поділки, тобто до 0,2, тоді $X \in (0,16;\ \ 0,2)$ – подія A_2. Таким чином $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$, як сума ймовірностей несумісних подій. Оскільки

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b p(x)dx,$$

то

$$P(A) = P\{0 < X < 0,04\} + P\{0,16 < X < 0,2\} =$$

$$= 5\int_0^{0,04} dx + 5\int_{0,16}^{0,2} dx = 5x\Big|_0^{0,04} + 5x\Big|_{0,16}^{0,2} = 10\cdot 0,04 = 0,4.$$

б) Похибка відліку перевищить 0,05, якщо вона буде знаходитись в інтервалі $(0{,}05;\quad 0{,}15)$. Імовірність такої події дорівнює

$$P\{0,05 < X < 0,15\} = 5\int_{0,05}^{0,15} dx = 5x\Big|_{0,05}^{0,15} = 5\cdot 0,1 = 0,5. \ \square$$

7.2. Годинникова стрілка електричного годинника рухається стрибками в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент часу годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більше, ніж на 20 с.

Розв'язання

Істинний час є випадковою величиною X, яка рівномірно розподілена в інтервалі між двома сусідніми хвилинними поділками. Щільність рівномірного розподілу $p(x) = \dfrac{1}{60}$. Тоді

$$P(A) = P\{0 < X < 20\} + P\{40 < X < 60\} =$$

$$= \frac{1}{60}\int_0^{20} dx + \frac{1}{60}\int_{40}^{60} dx = \frac{1}{60}x\Big|_0^{20} + \frac{1}{60}x\Big|_{40}^{60} = \frac{2}{3}. \ \square$$

Показниковий розподіл

7.3. Довести, що якщо проміжок часу T, розподілений за показниковим законом, вже тривав деякий час τ, то це ніяк не впливає на закон розподілу проміжку $T_1 = T - \tau$.

Розв'язання

Функція розподілу проміжку часу T визначається за формулою $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Функція розподілу частини, що залишилася ($T_1 = T - \tau$), за умови, що подія $\{T > \tau\}$ відбулась, є умовною ймовірністю події $\{T_1 < t\}$ відносно події $\{T > \tau\}$, тобто $F_1(t) = P_{\{T>\tau\}}\{T_1 < t\}$. Оскільки умовна ймовірність довільної події B відносно події A визначається за формулою $P_A(B) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$, то взявши $A = \{T > \tau\}$, $B = \{T_1 < t\}$ отримаємо

$$F_1(t) = P_{\{T>\tau\}}\{T_1 < t\} = \frac{P\big(\{T > \tau\}\{T_1 < t\}\big)}{P\{T > \tau\}}.$$

Добуток подій $\{T > \tau\}$ та $\{T - \tau < t\}$ рівносильний події $\{\tau < T < t + \tau\}$, ймовірність якої

$$P\{\tau < T < t + \tau\} = F(t+\tau) - F(\tau).$$

Оскільки $P\{T > \tau\} = 1 - P\{T \le \tau\} = 1 - F(\tau)$, то $F_1(t) = P_{\{T>\tau\}}\{T_1 < t\}$ можна подати у вигляді:

$$F_1(t) = \frac{F(t+\tau) - F(\tau)}{1 - F(\tau)}.$$

Враховуючи, що $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, отримуємо

$$F_1(t) = \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}} = 1 - e^{-\lambda t} = F(t). \quad \square$$

Нормальний розподіл

7.4. Випадкові похибки вимірювання розподілені нормально з середнім квадратичним відхиленням σ=20 мм і з математичним сподіванням *a*=0. Знайти ймовірність того, що із трьох незалежних вимірювань похибка хоча б одного не перевищуватиме за абсолютною величиною 4 мм.

Розв'язання

Імовірність того, що похибка одного вимірювання не перевищить 4 мм, обчислюється за формулою $P\{|X-a| \le \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$. Отже, маємо

$$P\{|X| \le 4\} = 2\Phi\left(\frac{4}{20}\right) = 2\Phi(0,2) = 2 \cdot 0,0793 = 0,1586.$$

Імовірність того, що похибка вимірювання перевищує 4 мм, становить $1 - 0,1586 = 0,8414$. Таким чином, імовірність того, що із трьох вимірювань похибка хоча б одного не перевищуватиме 4 мм (подія A), дорівнює

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,8414^3 = 1 - 0,5957 = 0,4043. \quad \square$$

7.5. Випадкова величина *X* розподілена нормально з математичним сподіванням *a* = 10. Імовірність потрапляння *X* в інтервал (10; 20) дорівнює 0,3. Знайти ймовірність потрапляння *X* в інтервал (0; 10).

Розв'язання

Використовуючи формулу

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

отримуємо

$$P\{10 < X < 20\} = \Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,3.$$

З іншого боку, враховуючи непарність функції Лапласа,

$$P\{0 < X < 10\} = \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right) = -\Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,3. \quad \square$$

Функції випадкових аргументів. Випадкові вектори

7.6. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X має вигляд

$$p_X(x) = \begin{cases} kx, & x \in [0;\,3]; \\ 0, & x \notin [0;\,3]. \end{cases}$$

Випадкова величина Y зв'язана з X функціональною залежністю $Y = 2X^2 - 5.$ Знайти:

1) константу k;

2) $E(Y), D(Y)$, використовуючи щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X;

3) функцію розподілу і щільність розподілу ймовірностей випадкової величини Y;

4) $E(Y), D(Y)$, використовуючи щільність розподілу ймовірностей випадкової величини Y.

Розв'язання

1) Константа k.

Використаємо основну властивість щільності розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1 \;\Rightarrow\; \int_0^3 k\,xdx = 1 \;\Rightarrow\; \left.\frac{k\,x^2}{2}\right|_0^3 = \frac{9k}{2} = 1 \;\Rightarrow\; k = \frac{2}{9}.$$

2) Використаємо властивості математичного сподівання і дисперсії:

$$E(Y) = E(aX^2 + b) = aE(X^2) + b;$$

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2 p_X(x)dx = \int_0^3 kx^3dx = \left.\frac{kx^4}{4}\right|_0^3 = \frac{k\cdot 3^4}{4} = \frac{9}{2};$$

$$E(Y) = \frac{9a}{2} + b = 9 - 5 = 4;$$

$$E(Y^2) = E\left((aX^2 + b)^2\right) = E(a^2X^4 + 2abX^2 + b^2) = a^2E(X^4) + 2abE(X^2) + b^2;$$

$$E(X^4) = \int_0^3 x^4 p_X(x)dx = \int_0^3 kx^5dx = \left.\frac{kx^6}{6}\right|_0^3 = \frac{k\cdot 3^6}{6} = 27;$$

$$E(Y^2) = 27a^2 + 9ab + b^2 = 43, \quad D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 43 - 16 = 27.$$

3) Функція розподілу і щільність розподілу ймовірностей випадкової величини Y.

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{2X^2-5<y\}=P\left\{X<\sqrt{\frac{y+5}{2}}\right\}=$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{y+5}{2}}} p_X(x)dx=\int_0^{\sqrt{\frac{y+5}{2}}} \frac{2x}{9}dx=\left.\frac{x^2}{9}\right|_0^{\sqrt{\frac{y+5}{2}}}=\frac{y+5}{18};$$

$y=2x^2-5;\quad x=0 \Rightarrow y=-5;\quad x=3 \Rightarrow y=13;$

$$F_Y(x)=\begin{cases}0, & x\le -5;\\ \dfrac{x+5}{18}, & -5\le x\le 13;\\ 1, & x\ge 13.\end{cases}\qquad p_Y(x)=\frac{dF_Y(x)}{dx} \Rightarrow p_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{18}, & x\in(-5;13);\\ 0, & x\notin(-5;13).\end{cases}$$

Випадкова величина Y рівномірно розподілена на відрізку $[-5;13]$.

4) Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини Y, використовуючи її щільність розподілу.

$$E(Y)=\int_{-5}^{13} xp_Y(x)dx=\int_{-5}^{13}\frac{x}{18}dx=\left.\frac{x^2}{36}\right|_{-5}^{13}=\frac{1}{36}(13^2-(-5)^2)=4;$$

$$E(Y^2)=\int_{-5}^{13} x^2p_Y(x)dx=\int_{-5}^{13}\frac{x^2}{18}dx=\left.\frac{x^3}{54}\right|_{-5}^{13}=\frac{1}{54}(13^3-(-5)^3)=43;$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=43-16=27. \qquad \square$$

7.7. Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини задано таблицею $p_{ik}=P\{X=x_i, Y=y_k\}$:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$i=1$	0,05	0,12	0,10	0
$i=2$	0,04	0,15	0,08	0,10
$i=3$	0	0,18	0,06	0,12

$x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=5,\quad y_1=-1,\ y_2=0,\ y_3=1,\ y_4=2.$

Знайти:

1) Закони розподілу випадкових величин X **і** Y.

2) Математичні сподівання і дисперсії випадкових величин X **і** Y.

3) Коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

4) Умовні розподіли $p(x_i\,|\,y_2),\ p(y_k\,|\,x_2)$.

5) Умовні математичні сподівання $E(X\,|\,y_2),\ E(Y\,|\,x_2)$.

Розв'язання

1) Закони розподілу випадкових величин X і Y.

Використаємо рівності:

$$p_i = P\{X = x_i\} = p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + p_{i4}, \quad i = 1,2,3;$$
$$q_k = P\{Y = y_k\} = p_{1k} + p_{2k} + p_{3k}, \quad k = 1,2,3,4;$$
$$p_1 = 0,05 + 0,12 + 0,10 + 0 = 0,27; \quad p_2 = 0,04 + 0,15 + 0,08 + 0,10 = 0,37;$$
$$p_3 = 0 + 0,18 + 0,06 + 0,12 = 0,36;$$
$$q_1 = 0,05 + 0,04 + 0 = 0,09; \quad q_2 = 0,12 + 0,15 + 0,18 = 0,45;$$
$$q_3 = 0,10 + 0,08 + 0,06 = 0,24; \quad q_4 = 0 + 0,10 + 0,12 = 0,22.$$

Закон розподілу X:

x_i	2	3	5
p_i	0,27	0,37	0,36

Закон розподілу Y:

y_k	-1	0	1	2
q_k	0,09	0,45	0,24	0,22

2) Математичні сподівання і дисперсії випадкових величин X і Y.

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = 2 \cdot 0,27 + 3 \cdot 0,37 + 5 \cdot 0,36 = 3,45;$$
$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = 2^2 \cdot 0,27 + 3^2 \cdot 0,37 + 5^2 \cdot 0,36 = 13,41;$$
$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 13,41 - 3,45^2 = 1,5075;$$
$$E(Y) = \sum_k y_k q_k = (-1) \cdot 0,09 + 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,24 + 2 \cdot 0,22 = 0,59;$$
$$E(Y^2) = \sum_k y_k^2 q_k = (-1)^2 \cdot 0,09 + 0^2 \cdot 0,45 + 1^2 \cdot 0,24 + 2^2 \cdot 0,22 = 1,21;$$
$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1,21 - 0,59^2 = 0,8619.$$

3) Коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

Використаємо формулу для $\rho(X,Y)$:

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}, \quad \operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y);$$
$$E(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_i y_k p_{ik} = x_1(y_1 p_{11} + y_2 p_{12} + y_3 p_{13} + y_4 p_{14}) +$$
$$+ x_2(y_1 p_{21} + y_2 p_{22} + y_3 p_{23} + y_4 p_{24}) + x_3(y_1 p_{31} + y_2 p_{32} + y_3 p_{33} + y_4 p_{34}) = 2,32;$$
$$\operatorname{cov}(X,Y) = 2,32 - 3,45 \cdot 0,59 = 0,2845; \quad \rho(X,Y) = \frac{0,2845}{\sqrt{1,5075 \cdot 0,8619}} = 0,2496.$$

4) Умовні розподіли $p(x_i \mid y_2)$, $p(y_k \mid x_2)$.

Використаємо формули для умовних розподілів дискретних випадкових величин:

$$p(x_i \mid y_2) = \frac{p_{i2}}{q_2}, \quad p(y_k \mid x_2) = \frac{p_{2k}}{p_2};$$

$$p(x_1 \mid y_2) = \frac{p_{12}}{q_2} = \frac{0,12}{0,45} = \frac{4}{15}, \quad p(x_2 \mid y_2) = \frac{p_{22}}{q_2} = \frac{0,15}{0,45} = \frac{1}{3},$$

$$p(x_3 \mid y_2) = \frac{p_{32}}{q_2} = \frac{0,18}{0,45} = \frac{2}{5}, \quad p(y_1 \mid x_2) = \frac{p_{21}}{p_2} = \frac{0,04}{0,37} = \frac{4}{37},$$

$$p(y_2 \mid x_2) = \frac{p_{22}}{p_2} = \frac{0,15}{0,37} = \frac{15}{37}, \quad p(y_3 \mid x_2) = \frac{p_{23}}{p_2} = \frac{0,08}{0,37} = \frac{8}{37},$$

$$p(y_4 \mid x_2) = \frac{p_{24}}{p_2} = \frac{0,1}{0,37} = \frac{10}{37}.$$

5) Умовні математичні сподівання $E(X \mid y_2)$, $E(Y \mid x_2)$.

Використаємо формули для умовних математичних сподівань дискретних випадкових величин:

$$E(X \mid y_2) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i \mid y_2) = 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{53}{15};$$

$$E(Y \mid x_2) = \sum_{k=1}^{4} y_k p(y_k \mid x_2) = (-1) \cdot \frac{4}{37} + 0 \cdot \frac{15}{37} + 1 \cdot \frac{8}{37} + 2 \cdot \frac{10}{37} = \frac{24}{37}. \quad \square$$

7.8. Двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена рівномірно в області D, обмеженій лініями $x = 1$, $y = 0$, $y = -2x^2$. Знайти:

1) щільність розподілу $p(x, y)$ випадкового вектора (X, Y);

2) щільності розподілу випадкових величин *X* і *Y*;

3) $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$;

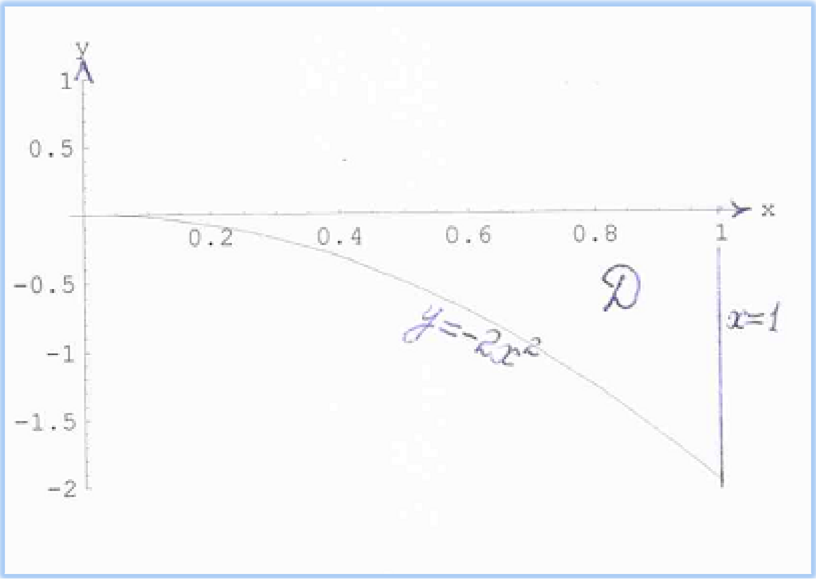
4) коефіцієнт кореляції $\rho(X, Y)$;

5) умовні щільності розподілу $p_X(x \mid y)$, $p_Y(y \mid x)$;

6) умовні математичні сподівання $E(X \mid y)$, $E(Y \mid x)$ і рівняння прямої регресії *Y* на *X*.

Розв'язання

1) Область D:



Використаємо формулу для щільності рівномірного розподілу в двовимірній області:

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Обчислюємо площу області D:

$$S_D=\int_0^1 dx\int_{-2x^2}^{0}dy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}.$$

Таким чином,

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

2) Щільності розподілу випадкових величин X и Y.

Використовуємо формули для щільностей розподілу компонент двовимірної випадкової величини:

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\frac{3}{2}\int_{-2x^2}^{0}dy=\frac{3y}{2}\bigg|_{-2x^2}^{0}=\frac{3}{2}\Big(0-(-2x^2)\Big)=3x^2,\ \ x\in(0;1);$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\frac{3}{2}\int_{\sqrt{-\frac{y}{2}}}^{1}dx=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{y}{2}}\right),\ \ y\in(-2;0).$$

3) Математичні сподівання і дисперсії випадкових величин X и Y.

Використаємо формули для математичного сподівання неперервної випадкової величини, а потім знайдемо дисперсії:

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx=\int\limits_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4};\quad E\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2p_X(x)dx=\int\limits_0^1 3x^4dx=\frac{3}{5};$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80};$$

$$E(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy=\int\limits_{-2}^{0}\frac{3y}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{y}{2}}\right)dy=-\frac{3}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}(-y)^{5/2}-y^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}=-\frac{3}{5};$$

$$E\left(Y^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2p_Y(y)dy=\int\limits_{-2}^{0}\frac{3y^2}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{y}{2}}\right)dy=\frac{3}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}}{7}(-y)^{7/2}+\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0}=\frac{4}{7};$$

$$D(Y)=E\left(Y^2\right)-E^2(Y)=\frac{4}{7}-\frac{9}{25}=\frac{37}{175}.$$

4) Коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)$.

Використаємо формулу для $\rho(X,Y)$:

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}},\quad \operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y);$$

$$E(XY)=\iint\limits_D xyp(x,y)dxdy=\frac{3}{2}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{-2x^2}^{0} ydy=\frac{3}{2}\int\limits_0^1 x\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-2x^2}^{0}dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int\limits_0^1(-4x^5)dx=-3\cdot\frac{x^6}{6}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{20},$$

$$\rho(X,Y)=\frac{-1/20}{\sqrt{(3/80)(37/175)}}=-\sqrt{\frac{35}{111}}=-0{,}5615.$$

5) Умовні щільності розподілу $p_X(x\,|\,y)$, $p_Y(y\,|\,x)$.

Використаємо формули для умовних щільностей:

$$p_X(x\,|\,y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\frac{3/2}{\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{y}{2}}\right)}=\frac{1}{1-\sqrt{-\frac{y}{2}}};\quad p_Y(y\,|\,x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\frac{3/2}{3x^2}=\frac{1}{2x^2}.$$

6) Умовні математичні сподівання $E(X\,|\,y)$, $E(Y\,|\,x)$. Рівняння прямої регресії *Y* на *X*.

Використаємо формули для умовних математичних сподівань неперервних випадкових величин:

$$E(X\,|\,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_X(x\,|\,y)dx=\int\limits_{\sqrt{-\frac{y}{2}}}^{1}\frac{x}{1-\sqrt{-\frac{y}{2}}}dx=\frac{1-\left(-\frac{y}{2}\right)}{2\left(1-\sqrt{-\frac{y}{2}}\right)}=\frac{y+2}{4\left(1-\sqrt{-\frac{y}{2}}\right)};$$

$$E(Y\,|\,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y\,|\,x)dy=\int\limits_{-2x^2}^{0}\frac{y}{2x^2}dy=\frac{1}{4x^2}\left(0-(-2x^2)^2\right)=-x^2.$$

Рівняння прямої регресії Y на X шукаємо у вигляді

$$y=\alpha x+\beta,\ \ \alpha=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}=-\frac{1}{20}\cdot\frac{80}{3}=-\frac{4}{3},\ \ \beta=E(Y)-\alpha E(X)=-\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{3}{4}=\frac{2}{5}.$$

Таким чином, рівняння прямої регресії Y на X таке:

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{5}.\quad \square$$

7.9. 1) Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z=-2X+7Y-3,$ де $(X,Y)-$ двовимірна випадкова величина із задачі 7.8.

2) Знайти функцію розподілу, щільність і математичне сподівання площі прямокутника з вершинами в точках $(0,0),\,(0,Y),\,(X,0),\,(X,Y),$ де $(X,Y)-$ двовимірна випадкова величина із задачі 7.8.

Розв'язання

1) Використаємо властивості математичного сподівання:

$$E(Z)=E(-2X+7Y-3)=-2E(X)+7E(Y)-3=(-2)\cdot\frac{3}{4}+7\left(-\frac{3}{5}\right)-3=-8,7;$$

$$E\left(Z^2\right)=E\left((-2X+7Y-3)^2\right)=E\left(4X^2+49Y^2+9-28XY+12X-42Y\right)=$$

$$=4E\left(X^2\right)+49E\left(Y^2\right)+9-28E(XY)+12E(X)-42E(Y)=$$

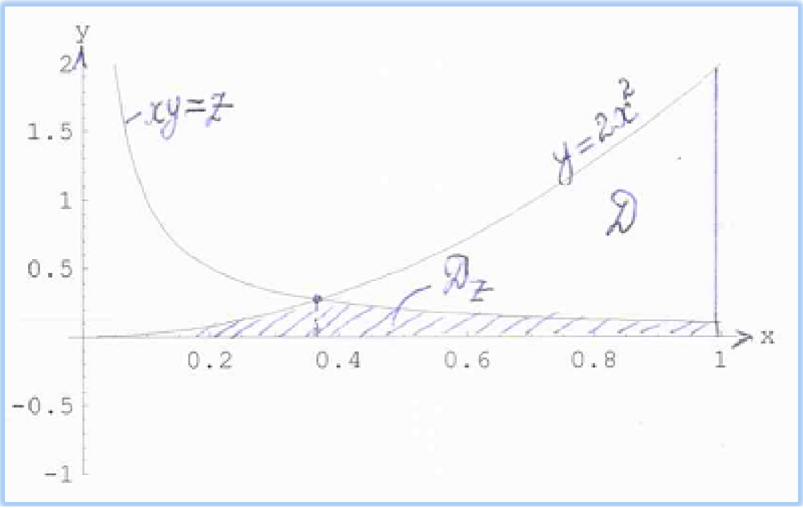
$$=4\cdot 0,6+49\cdot\frac{4}{7}+9-28(-0,5)+12\cdot 0,75-42(-0,6)=87,6;$$

$$D(Z)=E\left(Z^2\right)-E^2(Z)=87,6-(-8,7)^2=11,91.$$

2) Площа прямокутника $S=X\,|\,Y\,|,$ тому область D отримуємо в результаті симетричного відносно осі Ox відображення області із задачі 7.8. Таким чином, область D обмежена лініями

$$x=1,\ \ y=0,\ \ y=2x^2,$$

а новий випадковий вектор (X,Y) рівномірно розподілений в D. Отже, $S=XY.$



Абсциса точки перетину кривих $xy = z$ і $y = 2x^2$ дорівнює

$$x = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}.$$

Позначимо через D_z область, обмежену лініями

$$y = 0,\ y = 2x^2,\ xy = z$$

(заштрихована на рисунку). Шукаємо функцію розподілу випадкової величини S:

$$F(z) = P\{XY < z\} = \iint\limits_{xy<z} p(x,y)dxdy = \frac{3}{2}\iint\limits_{D_z} dxdy = \frac{3}{2}S(D_z) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\int\limits_0^{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}} 2x^2dx + \int\limits_{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}}^{1} \frac{z}{x}dx\right) = \frac{3}{2}\left(2\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}} + z\ln x\Big|_{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}}^{1}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{2} + z\ln 1 - z\ln\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}\right) = \frac{z}{2}\left(1 - \ln\frac{z}{2}\right),\quad 0 < z < 2.$$

Шукаємо щільність розподілу випадкової величини S:

$$p(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{2}\left(1 - \ln\frac{z}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{z}{2} - \frac{z}{4}\cdot\frac{2}{z} = -\frac{1}{2}\ln\frac{z}{2},\quad 0 < z < 2.$$

Шукаємо математичне сподівання випадкової величини S:

$$E(S) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz = -\int\limits_0^2 \frac{z}{2}\ln\frac{z}{2}dz = \left(\frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{4}\ln\frac{z}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

$E(S)$ можна також визначити, використовуючи значення $E(XY)$ із задачі 7.8:

$$E(S) = |E(XY)| = |-0{,}5| = 0{,}5.\quad \square$$

7.10. Задана функція розподілу випадкового вектора (X,Y)

$$F(x,y) = \sin x \sin y,\ \ 0 \le x \le \pi/2,\ \ 0 \le y \le \pi/2.$$

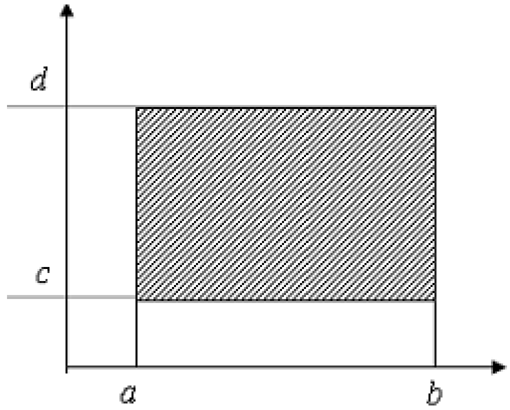
Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X,Y) **в прямокутник, обмежений прямими**

$$x=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{6},\quad y=\frac{\pi}{4},\quad y=\frac{\pi}{3}.$$

Розв'язання

Використаємо властивості функції $F(x,y)$:

$$P\{a\le X\le b,\ c\le Y\le d\}=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c).$$



Отже,

$$P\left\{\frac{\pi}{6}\le X\le\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\le Y\le\frac{\pi}{3}\right\}=\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}.\quad\square$$

7.11. Закон розподілу випадкового вектора (X,Y) заданий в таблиці:

X	Y		
	3	8	12
5	0,2	0,1	0,3
8	0,1	0,2	0,1

Знайти закони розподілу випадкових величин *X* і *Y*.

Розв'язання

Оскільки подія $\{X=5\}$ є сумою попарно несумісних подій

$$\{X=5\}=\{X=5,Y=3\}+\{X=5,Y=8\}+\{X=5,Y=12\},$$

то

$$P\{X=5\}=P\{X=5,Y=3\}+P\{X=5,Y=8\}+P\{X=5,Y=12\}=0,2+0,1+0,3=0,6.$$

Аналогічно:

$$P\{X=8\}=P\{X=8,Y=3\}+P\{X=8,Y=8\}+P\{X=8,Y=12\}=0,1+0,2+0,1=0,4.$$

Отже, закон розподілу випадкової величини X знайдено:

x_i	5	8
p_i	0,6	0,4

Додаючи ймовірності по стовпцях, одержимо:

$$P\{Y=3\}=P\{X=5,Y=3\}+P\{X=8,Y=3\}=0,2+0,1=0,3;$$

$$P\{Y=8\}=P\{X=5,Y=8\}+P\{X=8,Y=8\}=0,1+0,2=0,3;$$

$$P\{Y=12\}=P\{X=5,Y=12\}+P\{X=8,Y=12\}=0,3+0,1=0,4.$$

Отже, закон розподілу випадкової величини Y знайдено:

y_k	3	8	12
q_k	0,3	0,3	0,4

7.12. Здійснюються два постріли по мішені. Для кожного пострілу ймовірність влучання *p*, а ймовірність невлучання *q*=1-*p*. Випадкова величина X – кількість влучань при першому пострілі, випадкова величина Y – кількість влучань при другому пострілі. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкового вектора (X,Y).

Розв'язання

Закон розподілу випадкового вектора (X,Y) має вигляд:

X	Y	
	0	1
0	q^2	qp
1	pq	p^2

Побудуємо функцію розподілу $F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}$.

При $x\le 0,\ y\le 0$ подія $\{X<x,Y<y\}$ неможлива, тому $F(x,y)=0$. При $x>1,\ y>1$ подія $\{X<x,Y<y\}$ вірогідна, тому $F(x,y)=1$.

При $0<x\le 1,\ 0<y\le 1$ подія $\{X<x,Y<y\}=\{X=0,Y=0\}$, тому

$$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}=q^2.$$

При $0<x\le 1,\ y>1$ подія $\{X<x,Y<y\}=\{X=0,Y=0\}+\{X=0,Y=1\}$, тому

$$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=q^2+pq=q(q+p)=q.$$

При $x>1,\ 0<y\le 1$ подія $\{X<x,Y<y\}=\{X=0,Y=0\}+\{X=1,Y=0\}$, тому

$$F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=q^2+pq=q(q+p)=q.$$

Таким чином,

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0,\ y\le 0;\\ q^2, & 0<x\le 1,\ 0<y\le 1;\\ q, & 0<x\le 1,\ y>1;\\ q, & x>1,\ 0<y\le 1;\\ 1, & x>1,\ y>1.\end{cases}$$

□

7.13. Двовимірна випадкова величина (X,Y) має щільність розподілу

$$p(x,y)=\begin{cases}a(x+y), & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Область $D-$ трикутник, обмежений прямими $x+y-3=0,\ x=0,\ y=0$. Знайти коефіцієнт a.

Розв'язання

Згідно з властивістю щільності розподілу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dxdy=1.$$

Оскільки лише в області D підінтегральна функція відмінна від нуля, то маємо рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dxdy=\int_0^3 dx\int_0^{3-x} a(x+y)dy=a\int_0^3 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3-x}=$$

$$=a\int_0^3\left(x(3-x)+\frac{(3-x)^2}{2}\right)dx=a\int_0^3\left(3x-x^2+4{,}5-3x+0{,}5x^2\right)dx=$$

$$=a\left(\frac{9x}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^3=a\left(\frac{27}{2}-\frac{9}{2}\right)=9a=1,$$

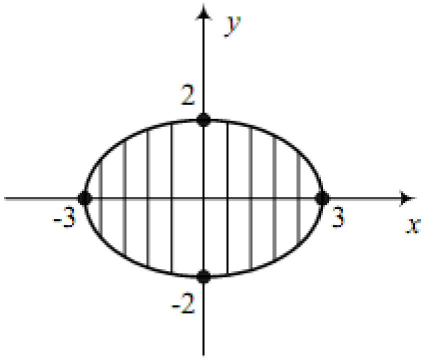
звідки $a=1/9$. □

7.14. Двовимірна випадкова величина (X,Y) має щільність розподілу

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi}, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1;\\[2mm] 0, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1.\end{cases}$$

Знайти щільності розподілу випадкових величин *X* і *Y*.

Розв'язання



Очевидно, що якщо $|x|>3$, то $p_X(x)=0$. Для $|x|\le 3$

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy=\frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy=\frac{2}{6\pi}\int_{0}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{9\pi}.$$

Отже,

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{9-x^2}}{9\pi}, & |x|\le 3;\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$$

Очевидно, що якщо $|y|>2$, то $p_Y(y)=0$. Для $|y|\le 2$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx=\frac{1}{6\pi}\int_{-3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} dx=\frac{2}{6\pi}\int_{0}^{3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} dx=\frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}.$$

Отже,

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}, & |y|\le 2;\\ 0, & |y|>2.\end{cases}$$ □

7.15. Закон розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) заданий таблицею:

X	Y		
	2	4	6
–1	0,08	0,12	0,20
1	0,12	0,18	0,30

Перевірити, чи є залежними випадкові величини *X* і *Y*.

Розв'язання

Закони розподілу випадкових величин X і Y запишемо в таблицях:

X	-1	1	Y	2	4	6
P	$0{,}4$	$0{,}6$	P	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}5$

Маємо рівності:

$$P\{X=-1, Y=2\}=0{,}08; \quad P\{X=-1\}P\{Y=2\}=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08;$$
$$P\{X=-1, Y=4\}=0{,}12; \quad P\{X=-1\}P\{Y=4\}=0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}12;$$
$$P\{X=-1, Y=6\}=0{,}2; \quad P\{X=-1\}P\{Y=6\}=0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}2;$$
$$P\{X=1, Y=2\}=0{,}12; \quad P\{X=1\}P\{Y=2\}=0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}12;$$
$$P\{X=1, Y=4\}=0{,}18; \quad P\{X=1\}P\{Y=4\}=0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}18;$$
$$P\{X=1, Y=6\}=0{,}3; \quad P\{X=1\}P\{Y=6\}=0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}3.$$

Отже, випадкові величини X і Y незалежні. □

7.16. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) задана у вигляді:

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$$

де область $D=\{(x,y): -1\le x\le 2;\ 0\le y\le 2\}$. Перевірити, чи є залежними випадкові величини *X* і *Y*.

Розв'язання

Знайдемо щільності розподілів $p_X(x)$ і $p_Y(y)$:

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^2 dy=\dfrac{1}{3}, & x\in[-1;2];\\ 0, & x\notin[-1;2];\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\displaystyle\int_{-1}^2 dx=\dfrac{1}{2}, & y\in[0;2];\\ 0, & y\notin[0;2].\end{cases}$$

Очевидно, що рівність $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ виконується для всіх точок координатної площини, а це означає, що випадкові величини X і Y незалежні. □

7.17. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) **задана у вигляді:**

$$p(x,y)=\begin{cases}24xy, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$$

де область $D-$ **трикутник, обмежений прямими** $x+y=1,\ x=0,\ y=0.$ **Знайти** $E(X),\ D(X),\ E(Y),\ D(Y),\ \operatorname{cov}(X,Y),\ \rho(X,Y).$ **Перевірити, чи є залежними випадкові величини *X* і *Y*.**

Розв'язання

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)dxdy=24\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x^2ydy=12\int_0^1 x^2(1-x)^2dx=$$

$$=12\int_0^1\left(x^2-2x^3+x^4\right)dx=12\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{30}=0,4;$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x,y)dxdy=24\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x^3ydy=12\int_0^1 x^3(1-x)^2dx=$$

$$=12\int_0^1\left(x^3-2x^4+x^5\right)dx=12\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{12}{60}=0,2;$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0,2-0,16=0,04.$$

У зв'язку з симетрією за змінними x і y

$$E(Y)=E(X)=0,4,\quad D(Y)=D(X)=0,04.$$

Обчислимо коваріацію і коефіцієнт кореляції:

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x,y)dxdy=24\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x^2y^2dy=8\int_0^1 x^2(1-x)^3dx=$$

$$=8\int_0^1\left(x^2-3x^3+3x^4-x^5\right)dx=8\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{8}{60}=\frac{2}{15};$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{15}-\frac{4}{25}=-\frac{2}{75};$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{2}{75}\cdot 25=-\frac{2}{3}.$$

Оскільки випадкові величини X і Y корельовані ($\rho(X,Y)\neq 0$), то вони залежні. Інший спосіб переконатися в цьому – перевірка рівності $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$, яка є необхідною і достатньою умовою незалежності неперервних випадкових величин. Обчислимо $p_X(x)$ і $p_Y(y)$:

$$p_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy=24x\int\limits_{0}^{1-x} ydy=12x(1-x)^2,\ \ x\in[0;\,1];\quad p_X(x)=0,\ \ x\notin[0;\,1];$$

$$p_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx=24y\int\limits_{0}^{1-y} xdx=12y(1-y)^2,\ \ y\in[0;\,1];\quad p_Y(y)=0,\ \ y\notin[0;\,1].$$

Отже, для $(x,y)\in D$ рівність $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ не виконується, тому випадкові величини X і Y залежні. □

7.18. Двовимірна випадкова величина (X,Y) рівномірно розподілена в прямокутнику $D=\{(x,y):0\le x\le a,\,0\le y\le b\}$, тобто

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S},\ (x,y)\in D;\\ 0,\ \ (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Знайти $E(X),\,E(Y),\,D(X),\,D(Y),\,p_X(x),\ p_Y(y),\,\mathrm{cov}(X,Y),\,\rho(X,Y).$

Розв'язання

Оскільки $S=ab$, то

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{ab},\ (x,y)\in D;\\ 0,\ \ (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Отже,

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x,y)dxdy=\frac{1}{ab}\int\limits_{0}^{a} xdx\int\limits_{0}^{b} dy=\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{a} xdx=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2};$$

$$E(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yp(x,y)dxdy=\frac{1}{ab}\int\limits_{0}^{b} ydy\int\limits_{0}^{a} dx=\frac{1}{b}\int\limits_{0}^{b} ydy=\frac{b^2}{2b}=\frac{b}{2};$$

$$p_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy=\frac{1}{ab}\int\limits_{0}^{b} dy=\frac{1}{a},\ \ x\in[0;\,a];\quad p_X(x)=0,\ x\notin[0;\,a];$$

$$p_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx=\frac{1}{ab}\int\limits_{0}^{a} dx=\frac{1}{b},\ \ y\in[0;\,b];\quad p_Y(y)=0,\ y\notin[0;\,b];$$

$$E(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2p_X(x)dx=\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{a} x^2dx=\frac{a^3}{3a}=\frac{a^2}{3};$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{12};$$

$$E(Y^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2p_Y(y)dy=\frac{1}{b}\int\limits_{0}^{b} y^2dy=\frac{b^3}{3b}=\frac{b^2}{3};$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{b^2}{3}-\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{12};$$

$$E(XY)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xyp(x,y)dxdy=\frac{1}{ab}\int\limits_{0}^{a}xdx\int\limits_{0}^{b}ydy=\frac{a^2b^2}{4ab}=\frac{ab}{4};$$

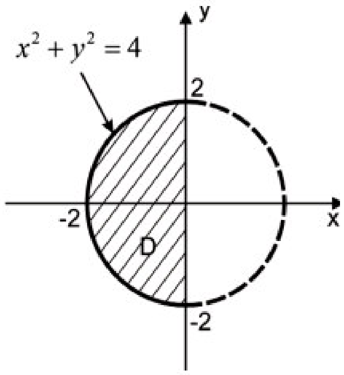
$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{ab}{4}-\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=0,$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0.$$

Таким чином, $\rho(X,Y)=0$, тобто випадкові величини X і Y некорельовані. Вони також і незалежні, оскільки $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$, і розподілені рівномірно на проміжках [0; a] і [0; b] відповідно. □

7.19. Двовимірна випадкова величина (X,Y) рівномірно розподілена в області D, де $D-$ половина круга $x^2+y^2\le 4$, $x\le 0$. Визначити $p(x,y)$, $p_X(x)$, $p_Y(y)$, залежність чи незалежність випадкових величин *X* і *Y*.

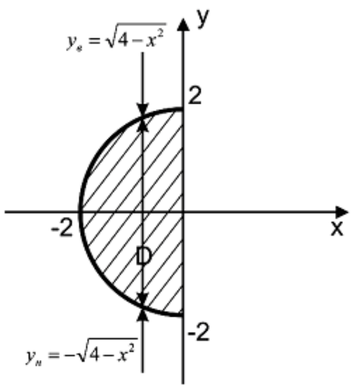
Розв'язання

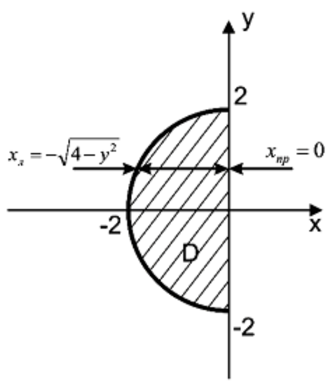


Оскільки площа області $S(D)=\pi R^2/2=4\pi/2=2\pi$, то

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Знайдемо $p_X(x)$ і $p_Y(y)$:





$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\pi},\ \ x\in[-2;\,0];\quad p_X(x)=0,\ \ x\notin[-2;\,0];$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0}dx=\frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi},\ \ y\in[-2;\,2];\quad p_Y(y)=0,\ \ y\notin[-2;\,2].$$

Оскільки $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y),\ (x,y)\in D,$ то випадкові величини X і Y залежні. □

7.20. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-2;\,4]$, а випадкова величина Y розподілена нормально з параметрами $a=-1,\ \sigma=2.$ Відомо, що коефіцієнт кореляції $\rho(X,Y)=0{,}5.$ Знайти $E(XY).$

Розв'язання

Для випадкової величини, рівномірно розподіленої на проміжку $[a,\,b]$,

$$E(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{-2+4}{2}=1,\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(4+2)^2}{12}=\frac{36}{12}=3.$$

Для нормально розподіленої випадкової величини Y

$$E(Y)=a=-1,\quad D(Y)=\sigma^2=4.$$

Використаємо умову $\rho(X,Y)=0{,}5$:

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0{,}5;$$

$$E(XY)=\frac{\sqrt{D(X)D(Y)}}{2}+E(X)E(Y)=\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{2}+1\cdot(-1)=\sqrt{3}-1.\qquad □$$

7.21. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=aX+b$ $(a\neq 0),$ якщо відома щільність розподілу $p_X(x)$ випадкової величини $X.$

Розв'язання

Якщо $Y=f(X),$ де $f(x)-$гладка строго монотонна функція, то щільність розподілу випадкової величини Y можна знайти за формулою:

$$p_Y(y)=p_X(g(y))\cdot|g'(y)|,$$

де $g(y)-$ обернена функція до функції $f(x).$

Функція $f(x)=ax+b\quad (a\neq 0)-$ гладка строго монотонна функція. Обернена до неї функція

$$g(y)=\frac{y-b}{a},\qquad g'(y)=\frac{1}{a}.$$

Отже,

$$p_Y(y)=\frac{1}{|a|}p_X\left(\frac{y-b}{a}\right).\qquad □$$

7.22. Знайти функцію розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, якщо відома функція розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X, для випадків: 1) $Y = 3X + 2$; **2)** $Y = -\dfrac{2X}{3} + 2$.

Розв'язання

1) Згідно з означенням функції розподілу

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{3X + 2 < y\} = P\{X < (y-2)/3\} = F_X\left((y-2)/3\right).$$

2) Маємо:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{-2X/3 + 2 < y\} = P\{X \geq 3(2-y)/2\} =$$
$$= 1 - P\{X < 3 - 1{,}5y\} = 1 - F_X(3 - 1{,}5y). \quad \square$$

7.23. Закон розподілу випадкового вектора (X, Y) заданий у таблиці:

X	Y		
	-1	0	1
-1	0,07	0,1	0,13
1	0,2	0,23	0,27

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X^2 + Y^2 - 1$.

Розв'язання

Знайдемо значення функції $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$:

$$f(-1,-1) = (-1)^2 + (-1)^2 - 1 = 1; \quad f(-1,0) = (-1)^2 + 0^2 - 1 = 0;$$
$$f(-1,1) = (-1)^2 + 1^2 - 1 = 1; \quad f(1,-1) = 1^2 + (-1)^2 - 1 = 1;$$
$$f(1,0) = 1^2 + 0^2 - 1 = 0; \quad f(1,1) = 1^2 + 1^2 - 1 = 1.$$

Отже, випадкова величина Z має два можливі значення: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Обчислимо ймовірності цих значень:

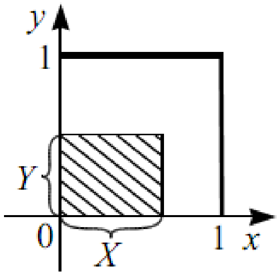
$$P\{Z = 0\} = P\{X = -1, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 0\} = 0{,}1 + 0{,}23 = 0{,}33;$$
$$P\{Z = 1\} = P\{X = -1, Y = -1\} + P\{X = -1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 1\} =$$
$$= 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}2 + 0{,}27 = 0{,}67.$$

Записуємо закон розподілу випадкової величини Z:

z_k	0	1
p_k	0,33	0,67

Це біномний закон розподілу для $n = 1$, $p = 0{,}67$, $q = 0{,}33$. $\square$

7.24. Випадкова точка (X,Y) розподілена рівномірно в квадраті зі стороною 1. Знайти закон розподілу площі $Z = XY$ прямокутника зі сторонами X і Y.



Розв'язання

Якщо (X,Y) – двовимірна неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу $p(x,y)$, то функція розподілу випадкової величини $Z = f(X,Y)$ визначається формулою

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = \iint\limits_{f(x,y)<z} p(x,y)dxdy.$$

Введемо позначення: $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. Очевидно,що

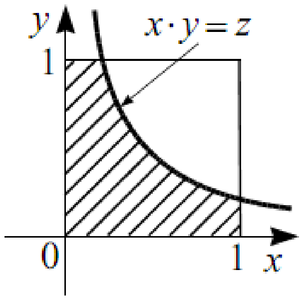
$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D; \end{cases} \quad p_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;\,1]; \\ 0, & x \notin [0;\,1]; \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0;\,1]; \\ 0, & y \notin [0;\,1]; \end{cases}$$

оскільки

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy, \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx.$$

Отже, випадкові величини X і Y незалежні, тому що $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$.

Область інтегрування $xy < z$ заштрихована на рисунку



Тоді

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = \iint\limits_{xy<z} dxdy = 1 - \iint\limits_{xy \ge z} dxdy = 1 - \int_z^1 dx \int_{\frac{z}{x}}^1 dy = 1 - \int_z^1 \left(1 - \frac{z}{x}\right)dx =$$

$$= 1 - \left(1 - z - z(\ln 1 - \ln z)\right) = z(1 - \ln z), \quad 0 < z \le 1.$$

Остаточно одержимо:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0; \\ z(1 - \ln z), & 0 < z \le 1; \\ 1, & z \ge 1. \end{cases}$$

Після диференціювання цієї функції за змінною z одержимо щільність розподілу випадкової величини Z

$$p_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ -\ln z, & 0<z\le 1;\\ 0, & z>1.\end{cases} \quad \square$$

7.25. Розглянемо випадкову величину Z – сумарну кількість успіхів у двох незалежних випробуваннях з імовірністю успіху p у кожному випробуванні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Z.

Розв'язання

Нехай X – кількість успіхів у першому випробуванні, Y – кількість успіхів у другому випробуванні, тоді $Z=X+Y$ і випадкові величини X і Y незалежні і розподілені за біномним законом з $n=1,\, q=1-p$. Отже,

$$E(X)=E(Y)=np=p,\ D(X)=D(Y)=npq=pq,$$

$$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=p+p=2p,$$

$$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=pq+pq=2pq.$$

Оскільки випадкові величини X і Y можуть набувати лише значення 0 і 1, то випадкова величина $Z=f(X,Y)=X+Y$ набуває значення:

$$f(0,0)=0+0=0,\quad f(0,1)=0+1=1,\quad f(1,0)=1+0=1,\quad f(1,1)=1+1=2$$

з імовірностями q^2, qp, pq, p^2 відповідно. Отже, закон розподілу випадкової величини Z має вигляд

z_k	0	1	2
p_k	q^2	$2pq$	p^2

7.26. Закон розподілу випадкового вектора (X,Y) заданий таблицею:

X	Y		
	1	2	3
–1	1/6	0	1/3
1	1/3	1/6	0

Не використовуючи закон розподілу випадкової величини $Z=X+Y$, обчислити $E(Z)$ і $D(Z)$.

Розв'язання

Використаємо формули:

$$E(f(X,Y)) = \sum_i \sum_k f(x_i, y_k) p_{ik}, \quad D(f(X,Y)) = \sum_i \sum_k \left(f(x_i, y_k) - E(Z) \right)^2 p_{ik}.$$

Отже,

$$E(Z) = \sum_i \sum_k (x_i + y_k) p_{ik} = (-1+1) \cdot \frac{1}{6} + (-1+2) \cdot 0 + (-1+3) \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+ (1+1) \cdot \frac{1}{3} + (1+2) \cdot \frac{1}{6} + (1+3) \cdot 0 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6};$$

$$D(Z) = \sum_i \sum_k \left((x_i + y_k) - E(Z) \right)^2 p_{ik} = \left((-1+1) - \frac{11}{6} \right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left((-1+2) - \frac{11}{6} \right)^2 \cdot 0 +$$

$$+ \left((-1+3) - \frac{11}{6} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left((1+1) - \frac{11}{6} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left((1+2) - \frac{11}{6} \right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left((1+3) - \frac{11}{6} \right)^2 \cdot 0 =$$

$$= \frac{121}{216} + \frac{1}{108} + \frac{1}{108} + \frac{49}{216} = \frac{29}{36}. \qquad \square$$