Инвариантность характеристик систем обслуживания

Исследование с использованием аналитических методов и имитационных моделей

Юрий Жерновый

ISBN: 978-3-659-61328-9

Монография посвящена исследованию свойства инвариантности стационарных характеристик систем обслуживания с использованием аналитических методов и имитационных моделей. Для систем с отказами и неоднородными каналами рассмотрены три способа распределения заявок по обслуживающим каналам (равновероятное распределение по всем каналам, равновероятное распределение по свободным каналам и упорядоченное распределение) и исследована инвариантность характеристик относительно вида функций распределения времени обслуживания. Для систем с ожиданием определены стационарные характеристики, инвариантные относительно вида функций распределения времени обслуживания и интервалов времени между моментами прибытия заявок. Для некоторых систем обслуживания с пороговыми переключениями режимов функционирования установлена инвариантность стационарных характеристик относительно вида функции распределения времени обслуживания в состоянии режима перегрузки. Монография предназначена для научных сотрудников, аспирантов и студентов, занимающихся исследованием систем массового обслуживания.

Купить книгу

Чтобы скопировать адрес, нажмите «просмотр текста»

https://www.ljubljuknigi.ru/store/gb/book/%D0%98%D0%BD%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C-%D1%85%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA-%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC-%D0%BE%D0%B1%D1%81%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F/isbn/978-3-659-61328-9

Buy the book

To copy the address, click "Text Viewer"

https://www.morebooks.de/store/gb/book/%D0%98%D0%BD%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C-%D1%85%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA-%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC-%D0%BE%D0%B1%D1%81%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F/isbn/978-3-659-61328-9

Монография посвящена исследованию свойства инвариантности стационарных характеристик систем обслуживания с использованием аналитических методов и имитационных моделей. Для систем с отказами и неоднородными каналами рассмотрены три способа распределения заявок по обслуживающим каналам (равновероятное распределение по всем каналам, равновероятное распределение по свободным каналам и упорядоченное распределение) и исследована инвариантность характеристик относительно вида функций распределения времени обслуживания. Для систем с ожиданием определены стационарные характеристики, инвариантные относительно вида функций распределения времени обслуживания и интервалов времени между моментами прибытия заявок. Для некоторых систем обслуживания с пороговыми переключениями режимов функционирования установлена инвариантность стационарных характеристик относительно вида функции распределения времени обслуживания в состоянии режима перегрузки. Монография предназначена для научных сотрудников, аспирантов и студентов, занимающихся исследованием систем массового обслуживания.

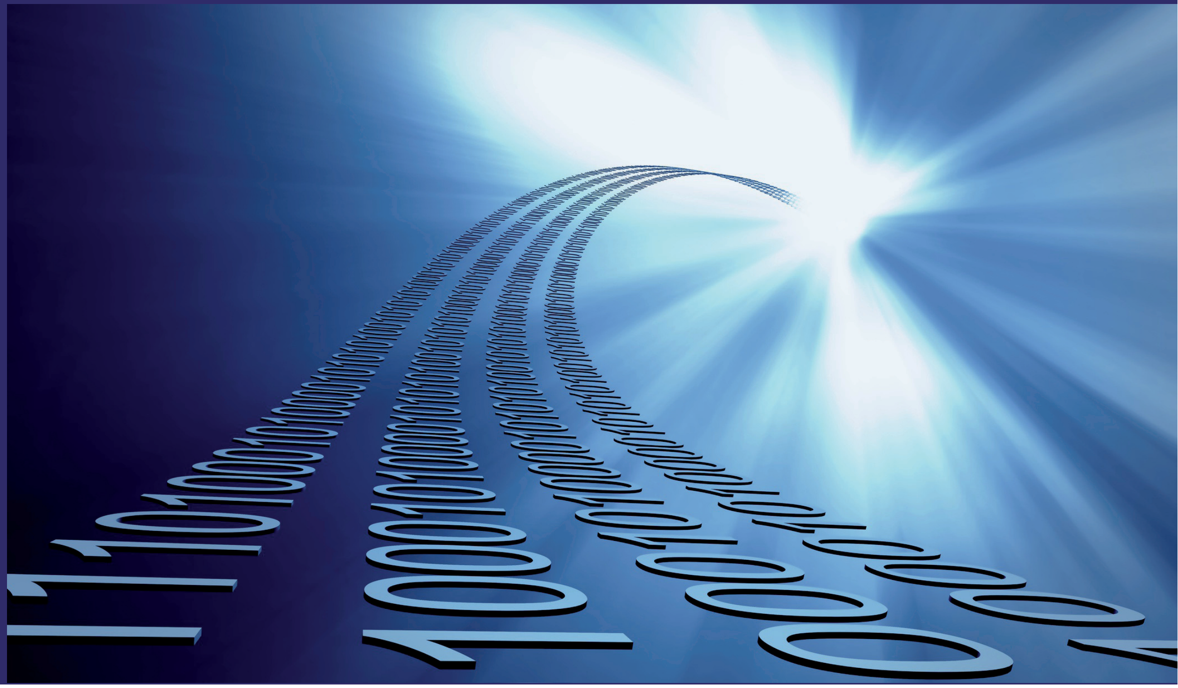
Юрий Жерновый

Жерновый Юрий Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и прикладной статистики Львовского национального университета имени Ивана Франко, Львов, Украина. Автор более 85 научных работ и 3-х учебных пособий.

978-3-659-61328-9

Инвариантность характеристик

Жерновый



Юрий Жерновый

Инвариантность характеристик систем обслуживания

Исследование с использованием аналитических методов и имитационных моделей

LAP LAMBERT Academic Publishing

Юрий Жерновый

Инвариантность характеристик систем обслуживания

Юрий Жерновый

Инвариантность характеристик систем обслуживания

Исследование с использованием аналитических методов и имитационных моделей

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-61328-9

Содержание

ВВЕДЕНИЕ ... 3
1 СИСТЕМЫ С ОТКАЗАМИ ... 6
1.1 Система с неоднородными каналами и равновероятным распределением заявок по свободным каналам ... 7
1.1.1 Инвариантность характеристик системы $M_{1/n(free)}/G_1,\dots,G_n/n/0$ ... 7
1.1.2 Пример вычисления стационарных характеристик ... 10
1.1.3 Система $M^X_{1/n(free)}/G_1,\dots,G_n/n/0$ ... 14
1.2 Система с неоднородными каналами и равновероятным распределением заявок по всем каналам ... 16
1.2.1 Инвариантность характеристик системы $M_{1/n}/G_1,\dots,G_n/n/0$ ... 16
1.2.2 Пример вычисления стационарных характеристик ... 19
1.2.3 Система $M^X_{1/n}/G_1,\dots,G_n/n/0$ ... 21
1.2.4 Система $M^X_{1/n}/M/n/0$ ... 23
1.2.5 Системы $M^X_{1/2}/M/2/0$ и $M^X_{1/2}/E_2/2/0$ ... 26
1.2.6 Система $M^X_{1/3}/M/3/0$ ... 29
1.3 Система с неоднородными каналами и упорядоченным распределением заявок ... 32
1.3.1 Система $M/G_1,\dots,G_n/n/0$ ... 32
1.3.2 Система $M^X/G/n/0$ ... 34
1.3.3 Система $M^X/G/n/0$ в случае $a_n = 1$ ... 35
1.3.4 Система $M^X/G_1,\dots,G_n/n/0$ в случае $a_n = 1$ ... 37
1.3.5 Система G/G/n/0 ... 40
2 СИСТЕМЫ С ОЖИДАНИЕМ ... 42
2.1 Система $M^X/G/1$ ... 42
2.2 Системы $G^X/G/1$ и $G^X/G/1/m$ ... 45
2.2.1 Система $G^X/G/1$ ... 45
2.2.2 Система $G^X/G/1/m$ ... 48
2.3 Системы $G^X/G/n$ и $G^X/G/n/m$ ... 52
2.3.1 Система $G^X/G/n$ ... 52
2.3.2 Система $G^X/G/n/m$ ... 55

3 СИСТЕМЫ С ПОРОГОВЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ 59
3.1 Системы с пороговым переключением времени обслуживания 59
3.1.1 Система $G^X/G,\tilde{G}/1$ 59
3.1.2 Система $M^X/G,\tilde{G}/1$ 63
3.2 Системы с гистерезисным переключением времени обслуживания 65
3.2.1 Система $G^X/G(h_1,h_2),\tilde{G}(h_1,h_2)/1$ 65
3.2.2 Система $M^X/G(h_1,h_2),\tilde{G}(h_1,h_2)/1$ 68
3.2.3 Система $G^X/G(h_1,h_2),\tilde{G}(h_1,h_2)/n$ 70
3.3 Системы с пороговым переключением времени обслуживания и блокировкой входящего потока 73
3.3.1 Система $G_h^X/G,\tilde{G}/n$ 73
3.3.2 Система $M_h^X/G,\tilde{G}/1/m$ 77
3.3.3 Система $M_h^X/G,\tilde{G}/1$ 78
3.3.4 Система $M_h/M,\tilde{G}/1/m$ 79
3.3.5 Система $M_h/M,\tilde{G}/1$ 80
3.3.6 Система $G_h/M,\tilde{G}/1/m$ 81
3.3.7 Система $M_h/M,\tilde{G}/n/m$ 84
3.4 Системы с гистерезисным переключением времени обслуживания и блокировкой входящего потока 87
3.4.1 Система $G_{h_1,h_2}^X/G(h_1,h_2),\tilde{G}(h_1,h_2)/n$ 87
3.4.2 Система $M_{h_1,h_2}^X/G(h_1,h_2),\tilde{G}(h_1,h_2)/1/m$ 91
3.4.3 Система $M_{h_1,h_2}^X/G(h_1,h_2),\tilde{G}(h_1,h_2)/1$ 95
3.4.4 Система $M_{h_1,h_2}/M(h_1,h_2),\tilde{G}(h_1,h_2)/1/m$ 97
3.4.5 Система $M_{h_1,h_2}/M(h_1,h_2),\tilde{G}(h_1,h_2)/1$ 99
Заключение 101
Список литературы 103

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим *n*-канальную систему обслуживания с отказами типа M/M/n/0. Это система с простейшим (стационарным пуассоновским) потоком заявок интенсивности λ и показательно распределённым временем обслуживания с параметром μ. Стационарное распределение (p_k) числа занятых каналов является функцией от λ и μ. Введя обозначение $\tau = 1/\mu$, можно записать, что $(p_k) = f(\lambda, \tau)$. Возникает вопрос: сохранится ли эта формула для произвольного распределения $G(x)$ времени обслуживания заявки при фиксированном среднем τ? Это свойство получило название *инвариантности* или *нечувствительности* (распределения (p_k) относительно вида функции распределения времени обслуживания с неизменным средним значением τ).

Проблемой инвариантности интересовались исследователи ещё с середины XX века. Свойство инвариантности для системы M/G/n/0 было установлено Б. А. Севастьяновым, как следствие эргодической теоремы [22], доказанной методом интегро-дифференциальных уравнений. Позднее появились другие доказательства независимости распределения (p_k) многоканальной системы с отказами от вида распределения $G(x)$ при фиксированном среднем времени обслуживания [5, 15, 19].

Оказалось, что в некоторых системах, весьма близких к M/G/n/0, установить инвариантность не удаётся. Этот факт побудил И. Н. Коваленко к поиску условий, необходимых и достаточных для инвариантности. Он нашёл такие условия для системы M/G/∞, в которую поступают заявки различных типов [16]. Обобщения теоремы Коваленко рассмотрены в работах [24, 25].

В первой главе настоящей монографии, состоящей из трёх глав, доказана инвариантность стационарных характеристик относительно вида функций распределения времени обслуживания для двух систем типа M/G/n/0 с неоднородными каналами и различными способами распределения заявок по обслуживающим каналам: равновероятным распределением заявок по всем каналам (свободным и занятым) и равновероятным распределением заявок по свободным каналам. Установлено, что для ряда систем с отказами, близких к системам этих двух типов, свойство инвариантности не сохраняется.

Для любой открытой системы обслуживания со стационарными потоками заявок и обслуживаний, для которой существует стационарный режим, справедлива формула Литтла, связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $\mathrm{E}(W)$ со средним числом заявок, ожидающих обслуживания, $\mathrm{E}(Q)$:

$$\mathrm{E}(W) = \frac{\mathrm{E}(Q)}{\lambda_{\mathrm{sv}}}.$$

Здесь $\lambda_{\mathrm{sv}} = \lambda \mathrm{P}_{\mathrm{sv}}$ – интенсивность потока обслуженных заявок, P_{sv} – стационарная вероятность обслуживания для прибывшей заявки, λ – интенсивность входящего потока. Если рассматривается система без потерь заявок, то $\mathrm{P}_{\mathrm{sv}} = 1$ и $\lambda_{\mathrm{sv}} = \lambda$. Из формулы Литтла следует, что стационарная характеристика $\omega_{\mathrm{sv}} = \mathrm{E}(Q)/(\mathrm{P}_{\mathrm{sv}}\mathrm{E}(W))$ инвариантна относительно вида функций распределения времени обслуживания и интервалов между соседними моментами поступления заявок. Инвариантность некоторых других стационарных характеристик можно доказать, используя уравнение баланса для среднего числа прибывших и обслуженных заявок за единицу времени, справедливое в стационарном режиме.

Однако для сложных систем обслуживания (например, для систем с произвольными распределениями и с групповым поступлением заявок), как правило, не удаётся доказать существование предельного стационарного режима аналитическими методами. В этом случае можно попытаться проверить предполагаемое условие существования стационарного распределения и инвариантность стационарных характеристик с помощью имитационных моделей. Такой подход предлагается во второй главе настоящей работы. Для построения имитационных моделей мы используем систему моделирования GPSS World [1, 3, 11, 17, 23]. Имитационные модели применяются нами также для проверки и иллюстрации результатов, полученных аналитическими методами.

Самым распространённым способом установления инвариантности стационарных характеристик систем обслуживания является получение рекуррентных соотношений или явных формул для их вычисления. В третьей главе монографии мы приводим такие соотношения, полученные в недавних работах [8-10, 26] для систем обслуживания с пороговыми стратегиями функционирования. Некоторые из полученных нами явных формул публикуются впервые.

Если для некоторой системы инвариантность характеристик доказана, то возникает вопрос о проверке свойства инвариантности этих характеристик для близкой к рассмотренной, но более общей системы (например, с входящим потоком более общего типа). В некоторых случаях удаётся доказать неинвариантность характеристик такой системы, используя распределения Эрланга и метод фаз. Этот метод основан на том, что случайная величина, распределённая по закону Эрланга k-го порядка, является суммой k независимых показательно распределённых случайных величин, и используется нами для исследования инвариантности в первой и третьей главах.

Остановимся на основных предположениях и обозначениях, используемых в настоящей работе.

Интервалы времени между соседними моментами прибытия заявок (или групп заявок) T_{ar} и длительности обслуживания одной заявки T_{sv} предполагаются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами с конечными средними значениями: $\mathrm{E}(T_{\text{ar}}) = 1/\lambda < \infty$, $\mathrm{E}(\mathrm{T}_{\text{sv}}) = \tau < \infty$.

Введём обозначения: $F(x)$ – функция распределения вероятностей случайной величины T_{ar}, $G(x)$ – функция распределения вероятностей случайной величины T_{sv}, X – число заявок в группе, a_k $(1 \le k < \infty)$ – вероятность события $\{X=k\}$, причём $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$.

Для обозначения систем с групповым поступлением заявок будем использовать верхний индекс X. Например, $\mathrm{G}^{\mathrm{X}}/\mathrm{G}/1$ – это система $\mathrm{G}/\mathrm{G}/1$, в которую заявки прибывают группами численностью X.

Будем рассматривать следующие стационарные характеристики систем обслуживания: N_{c} – число заявок в системе, p_k – вероятность события $\{N_{\text{c}}=k\}$, $\mathrm{E}(Q)$ – средняя длина очереди, $\mathrm{E}(W)$ – среднее время ожидания в очереди, P_{sv} – вероятность обслуживания прибывшей заявки, P_{rej} – вероятность отказа ($\mathrm{P}_{\text{sv}} = 1 - \mathrm{P}_{\text{rej}}$), $\rho = \lambda \tau \mathrm{E}(X)$ – коэффициент загрузки, $\mathrm{E}(n_{\text{oc}}) = \overline{U}$ – среднее число занятых каналов, $\mathrm{E}(T_0)$ – средняя длительность периода простоя (периода времени, когда отсутствуют заявки в системе), $\mathrm{E}(T_{\text{oc}})$ – средняя длительность периода занятости.

Результаты исследований, представленные в настоящей монографии, были изложены в статьях автора [10, 13, 26, 27]. В третьей главе используются рекуррентные соотношения для стационарных характеристик систем обслуживания с пороговыми стратегиями функционирования, полученные в работах [8, 9]. Результаты, изложенные в пп. 1.2.3, 1.2.5, 1.3.1-1.3.4, 3.3.4-3.3.7, 3.4.4, 3.4.5, публикуются впервые.

1 СИСТЕМЫ С ОТКАЗАМИ

Системы обслуживания с отказами (без ожидания) используются для расчёта числа каналов связи (физических или логических), необходимого для обеспечения заданного качества обслуживания при передаче потоков информации в современных телекоммуникационных сетях [6], а также для решения проблем исследования сетей коммутации каналов, цифровых сетей интегрального обслуживания, адаптивных терминальных измерительных систем [20].

В данной главе мы исследуем свойство инвариантности стационарных характеристик систем с отказами, состоящих из неоднородных каналов. Будут рассмотрены три способа распределения заявок по каналам системы: равновероятное распределение по свободным каналам, равновероятное распределение по всем каналам, упорядоченное распределение.

Система с равновероятным распределением заявок по всем каналам может служить моделью процесса обслуживания при нарушенном управлении в распределении заявок по обслуживающим каналам. Такая система, состоящая из однородных каналов, рассматривалась в работе [21] в случае показательного распределения длительности обслуживания. Системы обслуживания с неоднородными каналами возникают в различных приложениях, в частности могут служить адекватной моделью работы узла сети передачи данных [7].

Для системы $M/G/n/0$ с равновероятным распределением заявок по всем каналам будем использовать обозначение $M_{1/n}/G/n/0$, а через $M_{1/n}/G_1,\ldots,G_n/n/0$ обозначим соответствующую систему с неоднородными каналами. Под неоднородностью каналов мы подразумеваем неодинаковые распределения времени обслуживания в разных каналах системы. Через $M/G_1,\ldots,G_n/n/0$ обозначим систему с неоднородными каналами и упорядоченным распределением заявок по свободным каналам. При упорядоченном распределении предпочтение отдаётся каналу с меньшим номером, и в случае однородных каналов система $M/G_1,\ldots,G_n/n/0$ превращается в систему $M/G/n/0$.

Систему с неоднородными каналами, в которой применяется равновероятное распределение заявок по свободным каналам, обозначим через $M_{1/n(free)}/G_1,\ldots,G_n/n/0$. В случае однородных каналов системы $M_{1/n(free)}/G/n/0$ и $M/G/n/0$ совпадают.

1.1 Система с неоднородными каналами и равновероятным распределением заявок по свободным каналам

1.1.1 Инвариантность характеристик системы $\mathbf{M_{1/n(free)}/G_1,\ldots,G_n/n/0}$

Рассмотрим систему обслуживания $\mathrm{M_{1/n(free)}/G_1,\ldots,G_n/n/0}$. Это система с отказами, состоящая из n неоднородных каналов (с неодинаковыми функциями распределения времени обслуживания), на вход которой поступает простейший поток заявок интенсивности λ. Если заявка застаёт все n каналов занятыми, то она получает отказ и покидает систему необслуженной. При наличии k занятых каналов заявка направляется с одинаковой вероятностью $1/(n-k)$ в любой из свободных каналов. Время обслуживания заявки в i-м канале – случайная величина с функцией распределения $G_i(x)$ и математическим ожиданием τ_i.

Нас интересуют стационарные характеристики

$$p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t), \qquad 0 \le k \le n,$$

где $p_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t заняты обслуживанием заявок k каналов.

Пусть $\nu(t)$ обозначает число каналов, занятых в момент времени t. Предположим, что в некоторый момент времени случайная величина $\nu(t)$ приняла значение k $(1 \le k \le n)$, причём $\nu(t-0) \ne k$. Присвоим тем каналам, которые заняты в момент t, номера от 1 до k в случайном порядке. Присвоенные номера будут иметь силу, пока $\nu(t)$ не примет нового значения. Обозначим через $\xi_j(t)$ длительность промежутка времени с момента t до того момента, когда в канале с номером j завершится обслуживание, длящееся в момент t, и рассмотрим случайный процесс $\zeta(t) = \{\nu(t); \xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_{\nu(t)}(t)\}$.

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}
&F_k(t; x_1, x_2, \ldots, x_k) = \mathbf{P}\{\nu(t) = k; \xi_1(t) < x_1, \xi_2(t) < x_2, \ldots, \xi_k(t) < x_k\},\\
&F_{k(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(t; x_1, x_2, \ldots, x_k) =\\
&= \mathbf{P}\{\nu(t) = k; \xi_{1i_1}(t) < x_1, \xi_{2i_2}(t) < x_2, \ldots, \xi_{ki_k}(t) < x_k\}, \quad 0 \le k \le n.
\end{aligned}$$

Здесь $\xi_{ji_j}(t)$ – длительность промежутка времени с момента t до того момента, когда в канале с номером j завершится обслуживание при условии, что время обслуживания в этом канале распределено по закону $G_{i_j}(x)$, причём во всевозможных упорядоченных наборах $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ нет одинаковых номеров и $1 \le i_j \le n$ для каждого j.

Очевидно, что $p_k(t) = F_k(t;\infty,\infty,\dots,\infty)$, а значит

$$p_k = \lim_{t\to\infty} F_k(t;\infty,\infty,\dots,\infty),$$

поэтому для определения стационарных вероятностей p_k необходимо найти функции F_k.

Введём обозначения: $A_n^k = n!/(n-k)!$ – число размещений из n по k,

$$F_k(x_1,x_2,\dots,x_k) = \lim_{t\to\infty} F_k(t;x_1,x_2,\dots,x_k),$$

$$F_{k(i_1,i_2,\dots,i_k)}(x_1,x_2,\dots,x_k) = \lim_{t\to\infty} F_{k(i_1,i_2,\dots,i_k)}(t;x_1,x_2,\dots,x_k).$$

Теорема 1.1. *Если* $\tau_i < \infty$, $1 \le i \le n$, *то случайный процесс* $\zeta(t)$ *обладает эргодическим стационарным распределением, а стационарные вероятности* p_k *определяются по формулам*

$$p_k = p_0 \tilde{p}_k, \qquad 1 \le k \le n; \qquad \frac{1}{p_0} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k;$$
$$\tilde{p}_k = \frac{\lambda^k}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_k=1;\\ i_1<i_2<\dots<i_k}}^{n} \prod_{j=1}^{k} \tau_{i_j}, \qquad 1 \le k \le n. \tag{1.1}$$

Доказательство. Поскольку $\zeta(t)$ – кусочно-линейный процесс [5, с. 383], то утверждение первой части теоремы вытекает из эргодической теоремы для кусочно-линейных марковских процессов [5, с. 211].

Поведение процесса $\zeta(t)$ в установившемся режиме сводится к изучению всех случаев, благоприятствующих событию A, состоящему в том, что

$$\nu(t+h) = k; \quad \xi_1(t+h) < x_1, \quad \xi_2(t+h) < x_2,\dots, \xi_k(t+h) < x_k,$$

где $x_i > 0$, $1 \le i \le k$. Поскольку для простейшего входящего потока вероятность поступления более одной заявки за время h есть $o(h)$, то остаётся рассмотреть случаи, благоприятствующие событию A, когда в интервале времени $(t, t+h)$: 1) не было поступления заявок, 2) была обслужена одна заявка, 3) поступила одна заявка. Что же касается возможности окончания обслуживания более одной заявки или окончания обслуживания в сочетании с поступлением заявки, то для этих случаев, учитывая равенство

$$F_k(x_1,x_2,\dots,x_k) = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_k=1;\\ i_1\ne i_2\ne\dots\ne i_k}}^{n} F_{k(i_1,i_2,\dots,i_k)}(x_1,x_2,\dots,x_k),$$

таким же способом, как в [5, с. 384-385], выводим оценку

$$\mathbf{P}\{\nu(t)=k; x_1 \le \xi_1(t) < x_1+h, x_2 \le \xi_2(t) < x_2+h, \ldots, x_k \le \xi_k(t) < x_k+h\} \le$$
$$\le \frac{(\lambda h)^k}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=1;\\ i_1\ne i_2\ne\ldots\ne i_k}}^{n} \prod_{j=1}^{k} \left(1-G_{i_j}(x_j)\right). \tag{1.2}$$

Повторяя рассуждения, изложенные в [5, с. 383-386], с учётом оценки (1.2) для определения функций $F_k(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ получим равенства, справедливые почти всюду,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \lambda(1-\delta_{kn})F_k +$$
$$+\frac{\lambda}{k(n-k+1)} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=1;\\ i_1\ne i_2\ne\ldots\ne i_k}}^{n} F_{k-1(i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_k)G_{i_k}(x_j) = \tag{1.3}$$
$$=\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_k(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_k)}{\partial x_j} - (1-\delta_{kn})(k+1)\frac{\partial F_{k+1}(x_1,\ldots,x_k,0)}{\partial x_{k+1}}, \ 1 \le k \le n,$$

где δ_{kn} – символы Кронекера.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что системе уравнений (1.3) удовлетворяет (почти всюду) неотрицательное, абсолютно непрерывное решение вида

$$F_k(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \frac{\lambda^k}{k!A_n^k} F_0 \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=1;\\ i_1\ne i_2\ne\ldots\ne i_k}}^{n} \prod_{j=1}^{k} \int_0^{x_j} \left(1-G_{i_j}(u)\right)du. \tag{1.4}$$

Так как

$$\lim_{\substack{x_j\to\infty,\\ 1\le j\le k}} F_k(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \frac{\lambda^k}{A_n^k}F_0,$$

то при условии нормировки

$$F_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{A_n^k} = 1$$

равенства (1.4) представляют эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$. В частности, устремив к бесконечности все координаты, придём к формулам (1.1). Теорема доказана. □

Замечание 1.1. *Из соотношений* (1.1) *следует, что стационарные характеристики системы* $\mathrm{M}_{1/\mathrm{n(free)}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{n}/\mathrm{n}/0$ *инвариантны относительно вида функций распределения времени обслуживания.*

Стационарная вероятность отказа для системы $\mathrm{M}_{1/\mathrm{n(free)}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{n}/\mathrm{n}/0$ равна

$$\mathrm{P}_{\mathrm{rej}} = p_n = p_0 \lambda^n \prod_{j=1}^{n} \tau_j . \tag{1.5}$$

Если среднее время обслуживания для всех n каналов одинаково, то есть $\tau_i = \tau,\ 1 \le i \le n,$ то из (1.1) следуют формулы Севастьянова [22] для системы M/G/n/0.

Для системы с неоднородными каналами представляет интерес вычисление коэффициента использования каждого канала. Пусть U_i – коэффициент использования канала, среднее время обслуживания в котором равно τ_i, $\overline{U}$ – среднее число занятых каналов. Поскольку

$$\overline{U} = \sum_{k=1}^{n} k p_k = p_0 \sum_{i=1}^{n} \tau_i \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} = 1 (\ne i); \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1}}}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \tau_{i_j} + \frac{\lambda}{n} \right)$$

и, с другой стороны,

$$\overline{U} = \sum_{i=1}^{n} U_i , \tag{1.6}$$

то

$$U_i = p_0 \tau_i \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} = 1 (\ne i); \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1}}}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \tau_{i_j} + \frac{\lambda}{n} \right), \qquad 1 \le i \le n. \tag{1.7}$$

1.1.2 Пример вычисления стационарных характеристик

Пусть $n = 4,\ \lambda = 2,\ \tau_1 = 4,\ \tau_2 = 3,\ \tau_3 = 2,\ \tau_4 = 1.$ В табл. 1.1 приведены значения стационарных характеристик системы $\mathrm{M}_{1/\mathrm{n(free)}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{n}/\mathrm{n}/0$, вычисленные по формулам (1.1), (1.5)-(1.7). Здесь же для сравнения представлены значения этих характеристик, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World для значения времени моделирования $T_{\mathrm{mod}} = 10^5$. Результаты имитационного моделирования, представленные в табл. 1.1, получены для следующих вариантов распределения времени обслуживания:

1) равномерного распределения на промежутках: [3,5] (первый канал), [2,4] (второй канал), [1,3] (третий канал) и [0,5; 1,5] (четвёртый канал);

2) показательного распределения со средними значениями $\tau_1 = 4$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 2$, $\tau_4 = 1$;

3) детерминированных значений $\tau_1 = 4$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 2$, $\tau_4 = 1$;

4) равномерного распределения на промежутке [3,5] (первый канал), показательного распределения со средним значением $\tau_2 = 3$, детерминированного значения $\tau_3 = 2$, равномерного распределения на промежутке [0,5; 1,5] (четвёртый канал).

Таблица 1.1

Метод, вариант распределений	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	U_1	U_2	U_3	U_4	$\overline{U}$	P_{rej}
Аналитический	0,020	0,099	0,232	0,331	0,318	0,808	0,765	0,695	0,560	2,828	0,318
GPSS World, 1	0,019	0,100	0,233	0,330	0,318	0,809	0,765	0,694	0,560	2,828	0,319
GPSS World, 2	0,021	0,995	0,230	0,332	0,318	0,806	0,765	0,696	0,559	2,828	0,319
GPSS World, 3	0,020	0,098	0,235	0,330	0,316	0,809	0,763	0,695	0,557	2,823	0,317
GPSS World, 4	0,020	0,100	0,232	0,333	0,316	0,809	0,761	0,696	0,559	2,825	0,318

Полученные данные подтверждают инвариантность стационарных характеристик системы $M_{1/n(free)}/G_1,\ldots,G_n/n/0$ относительно вида функций распределения времени обслуживания.

Приведём текст используемой программы GPSS World.

```
; Модель 1.1
Lam   EQU 2
Prej   VARIABLE 1-N$LT/N$L0
Tmod   EQU 100000
; Булевые переменные
Ver1234   BVARIABLE F1'AND'F2'AND'F3'AND'F4
Ver123   BVARIABLE F1'AND'F2'AND'F3
Ver124   BVARIABLE F1'AND'F2'AND'F4
Ver134   BVARIABLE F1'AND'F3'AND'F4
Ver234   BVARIABLE F2'AND'F3'AND'F4
Ver12   BVARIABLE F1'AND'F2
Ver13   BVARIABLE F1'AND'F3
Ver14   BVARIABLE F1'AND'F4
Ver23   BVARIABLE F2'AND'F3
Ver24   BVARIABLE F2'AND'F4
Ver34   BVARIABLE F3'AND'F4
```

```
Ver1   BVARIABLE F1
Ver2   BVARIABLE F2
Ver3   BVARIABLE F3
Ver4   BVARIABLE F4
Dis   TABLE (F1+F2+F3+F4),0,1,7
GENERATE 1
TABULATE Dis
TERMINATE
GENERATE (Exponential(1,0,(1/Lam)))
; Распределение заявок между каналами
L0   TEST E BV$Ver1234,0,OUT
TEST E BV$Ver123,0,L4
TEST E BV$Ver124,0,L3
TEST E BV$Ver134,0,L2
TEST E BV$Ver234,0,L1
TEST E BV$Ver12,0,L5
TEST E BV$Ver13,0,L6
TEST E BV$Ver14,0,L7
TEST E BV$Ver23,0,L8
TEST E BV$Ver24,0,L9
TEST E BV$Ver34,0,L10
TEST E BV$Ver1,0,L11
TEST E BV$Ver2,0,L14
TEST E BV$Ver3,0,L17
TEST E BV$Ver4,0,L20
TRANSFER PICK,L23,L24
L23   TRANSFER ,L1
TRANSFER ,L2
TRANSFER ,L3
L24   TRANSFER ,L4
L5   TRANSFER 500,L3,L4
L6   TRANSFER 500,L2,L4
L7   TRANSFER 500,L2,L3
L8   TRANSFER 500,L1,L4
L9   TRANSFER 500,L1,L3
L10   TRANSFER 500,L1,L2
L11   TRANSFER PICK,L12,L13
L12   TRANSFER ,L2
TRANSFER ,L3
L13   TRANSFER ,L4
L14   TRANSFER PICK,L15,L16
L15   TRANSFER ,L1
TRANSFER ,L3
```

```
L16   TRANSFER ,L4
L17   TRANSFER PICK,L18,L19
L18   TRANSFER ,L1
TRANSFER ,L2
L19   TRANSFER ,L4
L20   TRANSFER PICK,L21,L22
L21   TRANSFER ,L1
TRANSFER ,L2
L22   TRANSFER ,L3
; Канал 1
L1   TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 1
ADVANCE  (Uniform(1,3,5))
;ADVANCE  (Exponential(1,0,4))
;ADVANCE  4
RELEASE 1
TRANSFER ,LT
; Канал 2
L2   TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 2
ADVANCE  (Uniform(1,2,4))
;ADVANCE  (Exponential(1,0,3))
;ADVANCE  3
RELEASE 2
TRANSFER ,LT
; Канал 3
L3   TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 3
ADVANCE  (Uniform(1,1,3))
;ADVANCE  (Exponential(1,0,2))
;ADVANCE  2
RELEASE 3
TRANSFER ,LT
; Канал 4
L4   TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 4
ADVANCE (Uniform(1,0.5,1.5))
;ADVANCE  (Exponential(1,0,1))
;ADVANCE  1
RELEASE 4
LT   TERMINATE
OUT   TERMINATE
GENERATE Tmod
```

```
SAVEVALUE Prj,V$Prej
TERMINATE 1
START 1
```

1.1.3 Система $\mathbf{M^{X}_{1/n(free)}/G_1,\ldots,G_n/n/0}$

Рассмотрим систему $\mathrm{M^{X}_{1/n(free)}/G_1,\ldots,G_n/n/0}$, в которую заявки поступают группами. Промежутки времени между моментами поступления групп заявок – независимые показательно распределённые случайные величины с параметром λ. Введём обозначения: X – число заявок в группе, $\mathrm{E}(X)$ – математическое ожидание случайной величины X, a_k $(1\le k\le L)$ – вероятность события $\{X=k\}$, причём $a_1+a_2+\ldots+a_L=1$.

Докажем, что *стационарные характеристики системы* $\mathrm{M^{X}_{1/n(free)}/G_1,\ldots,G_n/n/0}$ *не обладают свойством инвариантности относительно вида функций распределения времени обслуживания*.

Пусть $n=2$, $L=2$. Вычислим стационарные характеристики для двух вариантов задания распределений времени обслуживания в двух каналах системы.

Вариант I. Распределения показательные с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно.

Введём обозначения для состояний системы: s_0 – система свободна; s_1 – один канал занят, $s_{1,0}$ – I канал занят, II свободный; $s_{0,1}$ – II канал занят, I свободный; s_2 – оба канала заняты. Стационарные вероятности пребывания системы в состояниях s_i и $s_{i,j}$ обозначим через p_i и $p_{i,j}$ соответственно, $p_1 = p_{1,0} + p_{0,1}$. Для вычисления стационарных вероятностей получим систему:

$$\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + \mu_1 p_{1,0} + \mu_2 p_{0,1} = 0;\\
&-(\lambda+\mu_1)p_{1,0} + 0{,}5\lambda a_1 p_0 + \mu_2 p_2 = 0;\\
&-(\lambda+\mu_2)p_{0,1} + 0{,}5\lambda a_1 p_0 + \mu_1 p_2 = 0;\\
&p_0 + p_{1,0} + p_{0,1} + p_2 = 1.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

Вариант II. В I канале – распределение Эрланга второго порядка с параметром $2\mu_1$, во II канале – показательное распределение с параметром μ_2.

Воспользовавшись методом фаз, представим время обслуживания в первом канале, распределённое по закону Эрланга второго порядка, в виде T_1+T_2. Здесь случайные величины T_1 и T_2 распределены показательно с параметром $2\mu_1$.

Введём обозначения для состояний системы: s_0 – система свободна; $s_{1,0}^{(1)}$ – I канал занят, II свободный, обслуживание в первой фазе; $s_{0,1}$ – II канал занят, I свободный; $s_{1,0}^{(2)}$ – I канал занят, II свободный, обслуживание во второй фазе; $s_2^{(1)}$ – оба канала заняты, в первом – обслуживание в первой фазе; $s_2^{(2)}$ – оба канала заняты, в первом – обслуживание во второй фазе. Стационарные вероятности пребывания системы в каждом из перечисленных состояний обозначим через p_0, $p_{1,0}^{(1)}$, $p_{0,1}, p_{1,0}^{(2)}, p_2^{(1)}$ и $p_2^{(2)}$ соответственно. Для вычисления этих вероятностей получим систему:

$$
\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + 2\mu_1 p_{1,0}^{(2)} + \mu_2 p_{0,1} = 0;\\
&-(\lambda + \mu_2) p_{0,1} + 0{,}5\lambda a_1 p_0 + 2\mu_1 p_2^{(2)} = 0;\\
&-(\lambda + 2\mu_1) p_{1,0}^{(1)} + 0{,}5\lambda a_1 p_0 + \mu_2 p_2^{(1)} = 0;\\
&-(\lambda + 2\mu_1) p_{1,0}^{(2)} + 2\mu_1 p_{1,0}^{(1)} + \mu_2 p_2^{(2)} = 0;\\
&-(2\mu_1 + \mu_2) p_2^{(1)} + \lambda a_2 p_0 + \lambda (p_{1,0}^{(1)} + p_{0,1}) = 0;\\
&p_0 + p_{0,1} + p_{1,0}^{(1)} + p_{1,0}^{(2)} + p_2^{(1)} + p_2^{(2)} = 1.
\end{aligned} \qquad (1.9)
$$

Пусть $\lambda = 2;\ \mu_1 = 1;\ \mu_2 = 0{,}1;\ a_1 = 0{,}25;\ a_2 = 0{,}75.$ В табл. 1.2 приведены значения стационарных характеристик системы $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}_{1/2(\mathrm{free})}/\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2/2/0$, вычисленные с использованием решений систем (1.8) и (1.9).

Таблица 1.2

Вариант распределений	p_0	p_1	p_2	$\mathrm{E}(N_c)$	$\mathrm{P}_{\mathrm{rej}}$
I	0,027233	0,331998	0,640769	1,613536	0,216946
II	0,028264	0,330143	0,641593	1,613329	0,216918

Отметим, что $\overline{U} = \mathrm{E}(N_c)$, поскольку для системы с отказами коэффициент использования равен математическому ожиданию стационарного значения числа заявок в системе N_c. Стационарное значение вероятности отказа вычисляется как отношение взвешенных по времени чисел потерянных и поступивших заявок. Формулы для определения $\mathrm{P}_{\mathrm{rej}}$ для случаев I и II записываются в виде

$$\mathrm{P}_{\mathrm{rej}} = 1 - \frac{1}{\lambda \mathrm{E}(X)}\left(\mu_1 p_{1,0} + \mu_2 p_{0,1} + (\mu_1 + \mu_2) p_2\right); \qquad (1.10)$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{rej}} = 1 - \frac{1}{\lambda \mathrm{E}(X)}\left(2\mu_1 (p_{1,0}^{(2)} + p_2^{(2)}) + \mu_2 (p_{0,1} + p_2)\right). \qquad (1.11)$$

Данные табл. 1.2 свидетельствуют, что для системы $M^X_{1/n(free)}/G_1,\ldots,G_n/n/0$ свойство инвариантности стационарных характеристик относительно вида функций распределения времени обслуживания не сохраняется.

Замечание 1.2. *В случае, когда* $a_2 = 1$, *система* $M^X_{1/2(free)}/G_1,G_2/2/0$ *обладает свойством инвариантности значений* $E(N_c)$ *и* P_{rej}. *Однако в этом случае равновероятное распределение заявок по свободным каналам, это то же самое, что и упорядоченное распределение заявок в системе* $M^X/G_1,G_2/2/0$, *поэтому доказательство инвариантности мы приведём при рассмотрении этой системы.*