

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Кёниг, В. В. Рыков, Ф. Шмидт, Стационарные системы массового обслуживания с зависимостями, *Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.*, 1981, том 18, 95–186

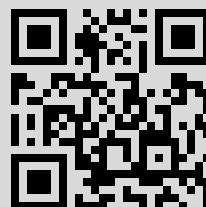
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 194.44.247.218

28 мая 2017 г., 16:37:44



СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЗАВИСИМОСТЯМИ

Д. Кёниг, В. В. Рыков, Ф. Шмидт

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе И. Н. Коваленко [61] «Теория массового обслуживания», опубликованной в сб. «Итоги науки» за 1971 г., дан широкий обзор литературы, включающий более тысячи наименований, в этой области вплоть до 1970 г.

За минувшие 10 лет теория массового обслуживания (ТМО) получила дальнейшее развитие, она пополнилась как обширными монографиями, так и новыми тысячами научно-исследовательских и прикладных работ. За это время фундаментальные успехи были получены как в ставших уже классическими областях, так и в развитии новых направлений исследований.

Целью настоящей статьи является обзор одного из этих новых направлений, а именно, мы сосредоточиваем свое внимание на исследованиях, в которых допускаются стохастические зависимости между исходными случайными величинами, определяющими поведение систем массового обслуживания, например, для семейств интервалов между моментами поступлений требований или длительностей их обслуживания. В течение десятилетий все исходные случайные величины, рассматриваемые в ТМО, предполагались независимыми. Однако за последние 15—20 лет все более широкое внимание исследователей и прикладников привлекают системы массового обслуживания с зависимыми случайными величинами. Действительно, с одной стороны, выяснилось, что исследование данных систем существенно для практических приложений теории массового обслуживания, так как предположения независимости управляющих случайных величин часто оказываются слишком далекими от реальности, стало быть, системы с зависимостями значительно точнее отражают реальность. С другой стороны, теоретическое исследование таких систем требует более тонких методов и, следовательно, более интересно.

Для исследования систем обслуживания с зависимостями потребовалось ввести новые математические понятия и построить соответствующую теорию. Таким образом, теория массового обслуживания явилась одним из источников, стимули-

ровавших в течение последних 20 лет быстрое и успешное развитие теории случайных точечных процессов. Между тем теория точечных процессов, как показывают обзорные статьи и монографии (см., например, [18, 47, 151, 215, 225, 278, 295, 324, 373]), имеет самостоятельное важное значение, выходящее за рамки теории массового обслуживания. Из монографий, где методы теории точечных процессов используются для исследования систем с зависимостями, рассматриваемых в настоящей статье, упомянем книгу Кёнига, Маттеса и Навроцки [240], а также их дополнение [241] к немецкому изданию книги Б. В. Гнеденко и И. Н. Коваленко [28], монографии А. А. Боровкова [19, 23] Бремо [119] и Франкена, Кёнига, Арндта и Шмидта [171]. Среди более ранних публикаций, стимулировавших развитие данного направления, сошлемся на монографии Пальма [329] и А. Я. Хинчина [97].

В настоящем обзоре в сжатой форме приводятся основные результаты, относящиеся к системам обслуживания с зависимостями, содержащиеся как в упомянутых монографиях, так и разбросанные по большому количеству оригинальных статей. Мы ограничиваемся, главным образом, результатами для стационарных характеристик, которые действительно преобладают в литературе, посвященной исследованию упомянутого класса систем. Особое внимание уделяется при этом распространению результатов, полученных ранее для классических систем, на системы с зависимостями, и только в связи с этим обсуждаются некоторые ранние классические результаты теории массового обслуживания.

Во 2-ом параграфе приводятся необходимые понятия и результаты теории точечных маркированных процессов, на языке этой теории описываются системы обслуживания с зависимостями, вводятся соответствующие обозначения и приводятся некоторые предварительные сведения.

В § 3 приводятся теоремы существования стационарных процессов обслуживания и теоремы устойчивости (непрерывной зависимости) характеристик систем относительно малых изменений, в некоторой метрике, соответствующих управляющих последовательностей. Сначала рассматриваются системы с потерями, ожиданием и смешанные системы, управляемые общими стационарными последовательностями, затем системы со специальными видами зависимостей и, наконец, затрагиваются вопросы скорости сходимости к стационарному режиму.

В 4-ом параграфе мы останавливаемся на вопросах взаимосвязи между характеристиками систем, стационарными по времени (невложенными) и по некоторой последовательности вложенных моментов (вложенными), см. § 2. Для классических систем массового обслуживания с управляющими последовательностями из независимых случайных величин эта проблема имеет долгую историю. С помощью методов теории точечных

процессов и, в частности, путем специального построения класса случайных процессов с вложенными маркированными точечными процессами для систем с зависимостями можно получить соотношения между этими вложенными и невложенными характеристиками, аналогичные классическим. В § 4 приводится большинство важных соотношений для различных типов систем обслуживания. Заметим, что упомянутая конструкция с помощью вложенного маркированного точечного процесса является обобщением хорошо известного метода вложенных марковских цепей, введенного А. Я. Хинчиным и Кендаллом.

§ 5 посвящен новым исследованиям вопроса, поставленного уже 70 лет назад основоположником теории массового обслуживания датским инженером и математиком Эрлангом [156]. А именно, для каких систем обслуживания и при каких условиях стационарные по времени вероятности состояний зависят лишь от средних значений некоторых случайных величин (например, длительностей обслуживания) и не зависят от их функций распределения. Все более широкие ответы на этот вопрос стали традиционными в исследованиях по теории массового обслуживания. В частности, среди советских исследователей этому вопросу были посвящены публикации Б. А. Севастьянова, И. Н. Коваленко, Б. В. Гнеденко, А. Д. Соловьева и др. В § 5 приводится обзор современного состояния исследований этого вопроса для систем массового обслуживания с зависимостями, описываемых стационарными маркированными точечными процессами.

Естественно, не все результаты в области систем массового обслуживания с зависимостями получили достаточно полное отражение в настоящей статье. Например, относительно кратко обсуждаются системы с групповым поступлением и обслуживанием, ненадежные системы. С другой стороны, в обзоре отражены такие актуальные направления, как сети массового обслуживания, и мы надеемся, что в выбранном направлении исследований систем с зависимостями нам удалось охватить большинство существенных результатов.

Авторы признательны Всесоюзному институту научно-технической информации за поддержку и предоставленную возможность опубликовать данный обзор.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.0. Вводные замечания. В этом разделе вводятся основные понятия, обозначения и сокращения, используемые в дальнейшем. Основными случайными величинами (СВ), определяющими поведение всякой системы массового обслуживания (СМО), являются последовательности интервалов α_i между моментами поступления требований и длительностей их обслуживания β_i , дополненные, возможно, некоторым вектором признаков χ_i , опи-

сывающим, например, типы требований или обслуживания, ограничения на время ожидания или пребывания и т. п. Следуя А. А. Боровикову [19], последовательность $(\alpha_i, \beta_i, \kappa_i)$ будем называть управляющей последовательностью СМО, и при необходимости отделять входящий поток от обслуживания, последовательность (α_i, κ_i) будем называть последовательностью управляющей входящим потоком или, короче, просто входящим потоком, а последовательность (β_i, κ_i) — последовательностью, управляющей обслуживанием, или механизмом обслуживания.

Подавляющее большинство приведенных в обзоре результатов относится к СМО, относительно которых не предполагается независимости СВ $\alpha_i, \beta_j, \kappa_k, i, j, k=1, 2, \dots$. Основное предположение состоит в том, что последовательность $(\alpha_i, \beta_i, \kappa_i)$ строго стационарна и метрически транзитивна.

Рассматриваются две разновидности управляющих последовательностей, в которых длительности обслуживания связываются либо с требованиями, либо с обслуживающими приборами (или объектами системы, см. п. 3.3 и § 5). В обоих случаях управляющая последовательность описывается стационарным маркированным точечным процессом. Поэтому в п. 2.1 приводятся необходимые сведения об этом классе стохастических процессов.

В п. 2.2 для случая, когда длительности обслуживания связаны с требованиями, управляющая последовательность представляется маркированным точечным процессом моментов поступления, метки которого содержат информацию о соответствующем требовании, включая длительность его обслуживания, а также некоторые дополнительные сведения, например, максимальное время ожидания, типы требований и т. п.

Система обслуживания, содержащая s обслуживающих приборов и r мест для ожидания ($0 < s < +\infty, 0 < r < +\infty$) управляемая строго стационарной метрически транзитивной последовательностью (α_i, β_i) , обозначается символом $G|G|s|r$. Обозначения $GI|G|s|r$ и $G|GI|s|r$ используются, если последовательности (α_i) или (β_i) образуют семейства независимых СВ, не зависящих от (β_i) и (α_i) , соответственно. Если, в частности, СВ соответствующих последовательностей показательны распределены, вместо GI используется символ M . Для систем, обладающих одновременно свойствами как системы $GI|G|s|r$, так и системы $G|GI|s|r$, будем пользоваться обозначением $GI|GI|s|r$.

Для систем с несколькими типами требований используются управляющие последовательности вида $(\alpha_i, \beta_i, \kappa_i)$, где κ_i означает тип требования, поступающего в момент $\tau_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j$, и принимает значения из множества $K \subseteq \{1, 2, \dots\}$. Такие системы обозначаются символами $\vec{G}|\vec{G}|s|r$, $\vec{G}|G|s|r$ и т. д.

Если в момент поступления требования в системе имеются свободные доступные для обслуживания приборы, то оно выбирает один из них в соответствии с заданным детерминированным или рандомизированным правилом. В противном случае оно либо немедленно покидает систему не обслуженным (для систем с потерями), либо становится в очередь (для систем с ожиданием). В случае конечного числа мест для ожидания, система ведет себя как система с ожиданием, пока имеются места для ожидания, или как система с потерями, когда их нет. Дисциплина обслуживания определяет порядок выбора требований на обслуживание из очереди и порядок занятия приборов. Вообще говоря, мы не ограничиваемся только дисциплинами обслуживания в порядке поступления (первым поступил — первым обслужен), а рассматриваем класс так называемых консервативных дисциплин обслуживания (дисциплин обслуживания с сохранением работы), при которых в течение обслуживания не может возникнуть никакой дополнительной работы (например, в результате прерываний) и, кроме того, при которых ни один прибор не может простаивать при наличии в очереди требований. Для систем с потерями это означает, что при наличии свободных приборов потери требований не допускаются. В § 5, кроме того, затрагивается случай неконсервативных дисциплин обслуживания, при которых допускаются потери при наличии свободных приборов.

Случай, когда длительности обслуживания связаны с обслуживающими приборами исследуется в пп. 3.3, 3.6 и § 5.

Основными процессами, исследуемыми в ТМО, являются число требований в системе или очереди (длина очереди), количество (объем) работы, затраченной на обслуживание или необходимой для обслуживания требований, находящихся в системе. Для дисциплины обслуживания в порядке поступления при единичных скоростях обслуживания последняя характеристика соответствует виртуальному или актуальному времени ожидания. В рассуждениях общего характера мы будем объединять для краткости эти процессы общим понятием процесс обслуживания.

Напомним, наконец, что независимо от типа рассматриваемой управляющей последовательности исследуется два вида стационарности процессов обслуживания (соответственно, два вида стационарных характеристик) — стационарность по времени и стационарность по вложенным моментам. Стационарность по времени или просто стационарность означает обычную инвариантность соответствующего процесса относительно произвольных (детерминированных) сдвигов времени, в то время как стационарность процесса $\xi(t)$ по вложенным моментам τ_i , $i=0, \pm 1, \dots$, означает его инвариантность относительно сдви-

гов этой последовательности, т. е. что процессы $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau_k)$ одинаково распределены при любом k . Стационарность процесса $\xi(t)$ по вложенным моментам τ_i , $i=0, \pm 1, \dots$, влечет, в частности, обычную стационарность последовательности $\xi_n = \xi(\tau_n)$. Если, например, (τ_i) является последовательностью моментов поступления требований, соответствующую стационарность будем называть стационарностью по моментам поступления.

2.1. Стационарные маркированные точечные процессы. Приведем, прежде всего, некоторые понятия и предварительные результаты о стационарных маркированных точечных процессах на действительной прямой R (см. Кёниг, Маттес [239], Кёниг, Маттес, Навроцки [240, 241], Маттес, Керстан, Мекке [295]), которые используются в дальнейшем.

Стационарные маркированные точечные процессы используются при исследовании СМО с зависимостями для описания управляющих последовательностей; при этом интервалы между моментами поступления требований α_i рассматриваются как интервалы между координатами τ_i с реализациями t_i соответствующего случайного маркированного точечного процесса, а длительности обслуживания β_i , наряду с другими характеристиками требования, включаются в метку (β_i, κ_i) соответствующей координаты τ_i , которую в общем случае будем обозначать также буквой κ_i .

Более формально, пусть на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задана последовательность $\{(\alpha_i, \kappa_i), i=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ векторов (α_i, κ_i) , первые компоненты которых вещественны и положительны, т. е. принимают значения на положительной полуоси R_+ действительной прямой R с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}$, а вторые принимают значения в некотором полном сепарабельном метрическом пространстве K , с σ -алгеброй $\mathcal{K}$ борелевских множеств (пространство $(K, \mathcal{K})$ называют также польским). Всюду в дальнейшем предполагается, что $M\alpha_i < \infty$.

Обозначим через M_K множество всех неотрицательных целочисленных мер φ на $\sigma(\mathcal{B} \times \mathcal{K})$, обладающих свойствами: 1) простоты: $\varphi(\{u\} \times K) \leq 1$ для любого $u \in R$; 2) локальной конечности: $\varphi(B \times K) < \infty$ для любого ограниченного $B \in \mathcal{B}$. Пусть, далее, $\mathbb{M}_K$ означает наименьшую σ -алгебру подмножеств M_K , порожденную множествами вида $\{\varphi : \varphi(B \times L) = n\}$ для любых $B \times L \in \sigma(\mathcal{B} \times \mathcal{K})$ (B — ограничено) и $n=0, 1, 2, \dots$. Любая мера $\varphi \in M_K$ определяет последовательность маркированных точек $\varphi = \{(t_i(\varphi), k_i(\varphi)), i=0, \pm 1, \dots\}$, таких что $t_i(\varphi) < t_{i+1}(\varphi)$ и $t_1(\varphi) = \min\{u \geq 0 : \varphi(\{u\} \times K) = 1\}$.

2.1.1. Определение. Случайный элемент Φ со значениями φ из измеримого пространства $(M_K, \mathbb{M}_K)$ будем называть случайным маркированным точечным процессом с пространством меток $(K, \mathcal{K})$.

Можно дать, по крайней мере, три эквивалентных представления стационарного случайного маркированного точечного процесса, а именно в виде

- 1) случайной последовательности маркированных точек $\{(\tau_i, \kappa_i), i=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$;
- 2) случайной последовательности интервалов с метками $\{(\alpha_i, \kappa_i), i=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$;
- 3) случайной считающей меры Φ .

Обозначим для любого непустого $L \in \mathcal{X}$ через

$$M_L^\infty = \{\varphi \in M_K : \varphi((-\infty, 0) \times L) = \varphi((0, +\infty) \times L) = \infty\}$$

множество всех реализаций $\varphi = \{(t_i, k_i)\}$, содержащих бесконечное множество точек с метками из L на отрицательной $(-\infty, 0)$ и положительной $(0, +\infty)$ полуосях. Далее, пусть

$$M_L^\infty = \{\varphi \in M_L^\infty : \varphi(\{0\} \times L) > 0\}$$

означает множество реализаций $\varphi \in M_L^\infty$, имеющих в начале координат $t=0$ одну из своих точек (координат) с меткой из L ; $\mathfrak{M}_K^\infty = \mathfrak{M}_K \cap M_K^\infty$, $\mathfrak{M}_K^0 = \mathfrak{M}_K \cap M_K^0$. Определим для любого $t \in R$ оператор сдвига $T_t : M_K \rightarrow M_K$ формулой

$$T_t \varphi = \{(t_i(\varphi) - t, k_i(\varphi)), i=0, \pm 1, \dots\}, \quad \varphi \in M_K,$$

и обозначим через θ оператор сдвига $\theta : M_K^0 \rightarrow M_K^0$ вида $\theta \varphi = T_{t_2(\varphi)} \varphi$ для любого $\varphi \in M_K^0$ (θ переносит начало координат любой траектории с точкой в нуле в следующую точку).

Для строго стационарных последовательностей $\{(\alpha_i, \kappa_i)\}$ имеет место важная теорема.

2.1.2. Теорема. Строго стационарная последовательность $\{(\alpha_i, \kappa_i)\}$ индуцирует θ -инвариантную вероятностную меру P^0 на $(M_K^0, \mathfrak{M}_K^0)$ и T_t -инвариантную вероятностную меру P на $(M_K^\infty, \mathfrak{M}_K^\infty)$, причем P^0 — мера последовательности $\{(t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi), k_i(\varphi))\}$ совпадает с P -распределением последовательности $\{(\alpha_i, \kappa_i)\}$.

Мера P выражается через P^0 формулой

$$P(Y) = \lambda \int_{M_K^0} \left\{ \int_0^{t_2(\varphi)} I_Y(T_u \varphi) du \right\} P^0(d\varphi), \quad Y \in \mathfrak{M}_K^\infty, \quad (2.1)$$

где $\lambda^{-1} = M_{P^0} t_2 = M \alpha_1$, а I_Y означает индикатор множества Y .

Мера P называется стационарным распределением процесса Φ , а P^0 соответствующим ему распределением Пальма. Его можно интерпретировать как условное распределение процесса Φ при условии, что в начале координат находится одна из его точек. В этом смысле распределение Пальма P^0 является обобщением функций Пальма — Хинчина, которые представляют собой условные вероятности специальных обитий из $\mathfrak{M}_K^\infty$.

Интенсивность $\lambda(L)$ точек с метками из L (L -интенсивность определяется как среднее число таких точек (L -точек) в единицу времени, т. е.

$$\lambda(L) = \int_{M_K} \varphi([0, 1] \times L) P(d\varphi).$$

При этом

$$\lambda(K) = \lambda \quad (2.2)$$

Далее, для любых $t > 0$, $Y \in M_K^0$ справедливо следующее соотношение между P^0 и P :

$$P^0(Y) = \frac{1}{\lambda t} \int_{M_K^\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\varphi([0, t] \times K)} I_Y(T_{t_i(\varphi)} \varphi) \right\} P(d\varphi), \quad (2.3)$$

которое, в частности, приводит к формуле

$$P^0(\varphi \in M_K^0: k_1(\varphi) \in L) = \frac{\lambda(L)}{\lambda} \quad (2.4)$$

для любых $L \in \mathcal{H}$.

Говорят, что стационарная последовательность $\{(\alpha_i, \kappa_i)\}$ эргодична (или, что одно и то же, метрически транзитивна), если соответствующее распределение Пальма P^0 эргодично, т. е. если P^0 допускает лишь тривиальное представление в виде смеси распределений Пальма. Заметим, что эргодичность P^0 эквивалентна эргодичности соответствующего стационарного (T_t -инвариантного) распределения P (говорят, что P эргодично, если его нельзя представить как нетривиальную смесь T_t -инвариантных распределений точечного процесса (см., например, теорему 1.3.9 в [171])).

Пусть Φ — случайный элемент в $(M_K, \mathfrak{M}_K)$. Рассмотрим неубывающий стохастический процесс $\Phi(t)$, $t \in R_+$, $\Phi(t) = \Phi([0, t] \times K)$, который можно исследовать методами теории мартингалов (см. Бremo [119], Бremo и Жако [120], Б. И. Григелионис [31], Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [47]). А именно, пусть $\mathcal{F}_t(t \in R_+)$ — неубывающее семейство σ -алгебр, таких что $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_t \ni \sigma(\Phi(u), 0 \leq u \leq t)$ для любого $t \geq 0$. Тогда существует единственный $\mathcal{F}_t$ -предсказуемый неубывающий процесс $\Psi(t)$, $t \in R_+$, такой что для всякого неотрицательного $\mathcal{F}_t$ -предсказуемого процесса $\xi(t)$, $t \in R_+$, справедливо представление

$$M \int_0^\infty \xi(t) d\Phi(t) = M \int_0^\infty \xi(t) d\Psi(t),$$

где $\Psi(t)$ называется компенсатором процесса Φ относительно σ -алгебр $\mathcal{F}_t$. Последняя формула полезна и для приложений,

так как в некоторых случаях с компенсатором $\Psi(t)$ работать значительно легче, чем с $\Phi(t)$. Аналогично можно рассмотреть компенсатор $\Psi^L(t)$ процесса $\Phi^L([0, t] \times L)$ для любого $L \in \mathcal{X}$. В частности, для пуассоновского процесса с независимыми метками имеет место представление $\Psi^L(t) = \lambda t B(L)$, где $B(\cdot)$ означает распределение меток.

2.2. Процессы обслуживания. Отправной точкой наших рассуждений является строго стационарная, метрически транзитивная последовательность $\{(\alpha_i, \beta_i), i=0 \pm 1, \dots\}$ неотрицательных СВ α_i, β_i , определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, (см. [19]). Мы интерпретируем α_i как интервалы между поступлениями требований, а β_i как соответствующие объемы работ по обслуживанию (потенциальные длительности обслуживания). Предполагается, что

$$P\{\alpha_i > 0\} = 1$$

и

$$0 < M\alpha_i < \infty, \quad 0 < M\beta_i < \infty.$$

Рассмотрим последовательность $\{\tau_i, \beta_i\}$, где

$$\tau_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j, & \text{если } i \geq 2; \\ 0, & \text{если } i = 1; \\ -\sum_{j=0}^i \alpha_j, & \text{если } i < 1. \end{cases}$$

Ее можно рассматривать как $(\mathcal{F}, M_{R_+}^0)$ -измеримое отображение

$$\Omega \rightarrow M_{R_+}^0,$$

т. е. как случайный элемент Φ^0 в $(M_{R_+}^0, M_{R_+}^0)$ с распределением P^0 . Из теоремы 2.1.1 следует, что Φ^0 является пальмовской версией некоторого стационарного маркированного точечного процесса Φ , распределение P которого определяется формулой обращения (2.1). Назовем Φ стационарной версией управляющей последовательности $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$. Функция распределения (ФР) $A(\cdot)$ длин интервалов между моментами поступления требований определяется соотношением

$$A(u) = P\{\alpha_i \leq u\} = P^0(\Phi \in M_{R_+}^0 : t_{i+1}(\Phi) - t_i(\Phi) \leq u), \quad u \geq 0. \quad (2.5)$$

Аналогично ФР $B(\cdot)$ длительностей обслуживания дается формулой

$$B(u) = P\{\beta_i \leq u\} = P^0(\Phi \in M_{R_+}^0 : k_i(\Phi) \leq u) = \frac{\lambda([0, u])}{\lambda}, \quad u \geq 0, \quad (2.6)$$

где $\lambda(L)$ — L -интенсивность процесса Φ ; $\lambda(R_+) = \lambda$, $m_B = M\beta_i$.

Для систем $\vec{G}|\vec{G}|s|r$ с несколькими типами требований условная ФР $B_i(\cdot)$ длительности обслуживания требований типа $i \in K$,

$$B_i(u) = P\{\beta_i \leq u | \kappa_i = i\} = P^0(k_i \in (0, u] \times \{i\} / k_i \in [0, \infty) \times \{i\}) = \\ = \frac{\vec{\lambda}([0, u] \times \{i\})}{\vec{\lambda}([0, \infty) \times \{i\})}$$

не зависит, в силу стационарности управляющей последовательности от i . Здесь P^0 — распределение Пальма, а $\vec{\lambda}(L)$ — L -интенсивность соответствующего стационарного маркированного точечного процесса $\vec{\Phi}$, порожденного управляющей последовательностью $\{(\alpha_i, \beta_i, \kappa_i), i=0, \pm 1, \dots\}$ (см. п. 2.1).

Переходя к описанию процессов обслуживания, будем рассматривать каждый вводимый ниже процесс обслуживания с непрерывным временем $\xi(t)$, $t \in R$, как стохастический процесс на вероятностном пространстве $(M_K^\infty, \mathfrak{M}_K^\infty, P)$, порожденном стационарной версией $\vec{\Phi}$ управляющей последовательности. Таким образом, любая реализация $\xi(t, \varphi)$ процесса $\xi(t)$ соответствует реализации φ процесса $\vec{\Phi}$. В нестационарном случае следует задавать дополнительно начальное значение $\xi(0)$. Кроме того, мы предполагаем, что траектории процесса $\xi(t)$ являются непрерывными слева и имеют пределы справа. Пространство состояний $(E, \mathcal{E})$ процесса $\xi(t)$ всегда предполагается польским, т. е. полным, сепарабельным и метрическим. Если рассматривается процесс обслуживания с дискретным временем ξ_n , $n \in \Gamma$, где Γ означает множество целых чисел, пространство $(M_K^\infty, \mathfrak{M}_K^\infty, P)$ заменяется вероятностным пространством $(M_K^0, \mathfrak{M}_K^0, P^0)$, где P^0 означает распределение Пальма, отвечающее распределению P .

В дальнейшем рассматриваются в основном стационарные процессы обслуживания, точнее говоря, стационарные по времени и по вложенным моментам. Условия существования и единственности таких процессов приводятся в § 3. Для систем с ожиданием $G|G|s|\infty$ одним из таких условий является

$$\rho = \frac{M\beta_i}{M\alpha_i} < s. \quad (2.7)$$

Пусть $l(t)$, $t \in R$, означает число требований в системе $G|G|s|r$, так что $l(t)$ — целочисленный скачкообразный процесс с пространством состояний $\{0, 1, \dots\}$. Скачки происходят в моменты поступления и окончания обслуживания требований. Требуется, заставшее в системе $s+r$ требований, терпящее и, очевидно, не вызывает скачка процесса $l(t)$. Для того, чтобы исследовать поведение процесса $l(t)$, рассмотрим дополнительно процессы $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ остаточных длительностей обслуживания и остаточного времени до поступления очередного требования.

Пусть $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_s(t))$ означает вектор остаточных длительностей обслуживания в момент t в системе $G|G|s|r$, где $\beta_j(t)$ есть время, необходимое для окончания обслуживания требования, находящегося в момент t на j -ом приборе, $j = 1, \dots, s$. Всюду в дальнейшем, за исключением § 5, предполагается, что все приборы однородны. Это означает, в частности, что требование, застающее более одного свободного прибора, поступает на любой из них с одинаковой вероятностью, т. е. что компоненты вектора $\beta(t)$ одинаково распределены.

Иногда мы предполагаем, что работа по обслуживанию (потенциальная длительность обслуживания) реализуется приборами с неотрицательными скоростями c_k в зависимости от числа требований k в системе в соответствующий момент времени. Таким образом, первая производная $\beta_j'(t)$ j -ой компоненты $\beta_j(t)$ вектора $\beta(t)$ существует почти всюду и равна

$$\beta_j'(t) = \begin{cases} -c_{l(t)}, & \text{если } \beta_j(t) > 0; \\ 0, & \text{если } \beta_j(t) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Процессы $l(t)$ и $\beta(t)$ связаны соотношением

$$\min(s, l(t)) = \text{card} \{j : \beta_j(t) > 0\}. \quad (2.9)$$

Моменты окончания обслуживания требований соответствуют, таким образом, моментам, когда одна из компонент вектора $\beta(t)$ становится равной нулю.

Для системы $G|G|s| \infty$ с различными скоростями обслуживания c_k условие стационарности (2.7) должно быть заменено на

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} c_k > \frac{M\beta_l}{M\alpha_l} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\lambda m_B}{s}. \quad (2.10)$$

Для систем с потерями $G|G|s|0$, из (2.9) следует, что процесс $l(t)$ полностью описывается процессом $\beta(t)$.

Другим процессом, который мы используем для исследования структуры процесса $l(t)$, является процесс $\alpha(t)$ остаточного времени до поступления очередного требования,

$$\alpha(t, \varphi) = \min\{t_i(\varphi) : t_i(\varphi) > t\} - t. \quad (2.11)$$

Вместо вектора $\beta(t)$ — остаточных длительностей обслуживания в момент t рассмотрим теперь вектор $v(t) = (v_1(t), \dots, v_s(t))$ полных объемов работ по обслуживанию каждым прибором в момент t , компоненты $v_j(t)$ которого расположены в порядке возрастания: $v_1(t) \leq v_2(t) \leq \dots \leq v_s(t)$.

Если работа по обслуживанию реализуется приборами с неотрицательными скоростями $c_{|v|}$, непрерывно зависящими от общего объема работы $|v| = \sum v_i$ в системе, то, аналогично (2.8), имеем почти всюду

$$v_j'(t) = \begin{cases} -c_{|v(t)|}, & \text{если } v_j(t) > 0; \\ 0, & \text{если } v_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (2.12)$$

В этом случае соответствующее условие стационарности имеет вид

$$\liminf_{|v| \rightarrow \infty} c_{|v|} > \frac{\lambda m_B}{s}. \quad (2.13)$$

Если $c_{|v|} \equiv 1$, и используется прямая дисциплина обслуживания («прибыл первым—обслужен первым»), процесс $v(t)$ совпадает с процессом времени ожидания $w(t)$ Кифера—Вольфовица (см. п. 3). Для величины $v(t)$ имеем почти всюду

$$v'(t) = -\min[l(t), s] \cdot c_{v(t)}. \quad (2.14)$$

§ 3. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПО ВРЕМЕНИ И ПО ВЛОЖЕННЫМ МОМЕНТАМ ПРОЦЕССОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ СМО

3.0. Вводные замечания. Одной из основных задач теории массового обслуживания является исследование вероятностных характеристик, когда время стремится к бесконечности. В данном разделе мы рассматриваем необходимые и достаточные условия существования соответствующих стационарных характеристик. При этом основное внимание уделяется процессам обслуживания двух типов: времени ожидания и длине очереди. В некоторых случаях вместо времени ожидания рассматривается количество работы, а вместо длины очереди — количество требований в системе.

Очевидно, что упомянутая выше проблема относительно проста, если рассматриваемый стохастический процесс — марковский, а пространство его состояний не слишком сложно (например, дискретно). Тогда можно воспользоваться общей теорией марковских процессов для решения вопросов существования стационарного эргодического распределения (см. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко [28]).

Применение результатов теории регенерирующих процессов (см. например [38, 52, 83—85, 140—142, 148]) позволяет решить ее также в случае, когда процесс обслуживания удается представить в виде регенерирующего процесса.

В дальнейшем мы имеем дело в основном с результатами, где принимались во внимание специальная структура рассматриваемого процесса обслуживания и где нет необходимости в условии, чтобы исследуемый процесс обслуживания являлся марковским. Нас в особенности интересует стационарное поведение систем обслуживания с произвольно распределенными интервалами между поступлениями и длительностями обслуживания. Первые результаты в этом направлении были получены еще А. Я. Хинчиным в 1932 г. [96], затем значительно развиты и обобщены Кендаллом [220—222], который продемонстрировал использование понятия регенерации (метод вложенной цепи

Маркова) при выводе стационарного распределения вложенной цепи Маркова, для исследования длины очереди в системах $M|GI|1|_\infty$ и $GI|M|1|_\infty$. Этот метод обнажил природу стохастических процессов, лежащих в основе данных систем. Ясное изложение Кендалла проложило путь новому методу исследования моделей, выходящих за рамки теории процессов гибели и размножения. Большое значение здесь имеет также теорема Линдли о пределе распределения актуального времени ожидания в одноканальной системе $GI|GI|1|_\infty$ с дисциплиной очереди в порядке поступления требований (см. Линдли [281]). Он доказал, что для процесса актуального времени ожидания $\{w_i\}$ существует стационарное по вложенным моментам распределение времени ожидания $W(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{w_i \leq x\}$, если существуют мате-

матические ожидания $M\alpha_i$, $M\beta_j$ и $\rho = \frac{M\beta_j}{M\alpha_j} < 1$. Обобщение этого результата получено Финчем (см. Финч [158]), который рассмотрел случай, когда поступающее на свободный прибор требование начинает обслуживаться не сразу, а спустя некоторое время, которое обычно называется «разогревом». Другое направление обобщений было исследовано Кифером и Вольфовицем [226], которые рассмотрели многоканальные системы с дисциплиной обслуживания в порядке поступления. Они получили следующий результат для стационарных по вложенным моментам характеристик системы $GI|GI|s|_\infty$.

Пусть $v_{n,j}$ представляет собой объем работы в момент непосредственно перед моментом поступления n -ого требования, необходимой для обслуживания всех требований, поступивших до этого момента, приходящиеся на j -ый прибор. Пусть $i_1, i_2, \dots, i_s$ перестановка чисел $(1, 2, \dots, s)$, такая, что $v_{n,i_1} \leq v_{n,i_2} \leq \dots \leq v_{n,i_s}$. Тогда совместное распределение вектора $(v_{n,i_1}, v_{n,i_2}, \dots, v_{n,i_s})$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к собственному предельному распределению тогда и только тогда, когда $\rho < s$. Этот результат немедленно влечет существование стационарных по моментам поступления распределений таких величин, как актуальное время ожидания и число занятых приборов в моменты поступления, так как они легко выражаются через компоненты векторного процесса $(v_{n,i_1}, v_{n,i_2}, \dots, v_{n,i_s})$. Более того, из рассуждений Кифера и Вольфовица [226] следует, что при $\rho < s$ существует стационарное по моментам поступления распределение длины очереди. Существование стационарного по времени предельного распределения виртуального времени ожидания в системе $GI|GI|1|_\infty$ с прямой дисциплиной обслуживания, было доказано в работе Такача [384] при условии, что распределение интервала между поступлениями не является решетчатым и что $\rho < 1$. Козн [140] получил этот результат, исходя из существования стационарного по моментам поступления распределения актуального времени ожидания с

помощью ключевой теоремы восстановления. Аналогично, исходя из результатов Кифера и Вольфовица [226], можно доказать существование стационарных по времени распределений виртуального времени ожидания и числа требований в системе $GI|GI|s|\infty$. Существование стационарного по времени распределения длины очереди исследовал Финч [159]. Миллер и Сентиллес [302] показали, что длина очереди в системе $GI|GI|s|\infty$ сходится по распределению в случае безатомных распределений интервалов между поступлениями и длительностей обслуживания. Шанбаг [366] рассмотрел систему $GI|GI|\infty$ с бесконечным числом приборов. Им было дано простое доказательство существования стационарного по моментам поступления совместного распределения r наибольших остаточных длительностей обслуживания для любого фиксированного r и числа требований в системе, соответственно, непосредственно перед моментом поступления. Единственными условиями являются $A(+0)=0$ и $M\beta_i < \infty$ (см. также Каплан [216]).

Первый фундаментальный шаг к доказательству теорем существования для систем с потерями был сделан Б. А. Севастьяновым [86], который привел строгое доказательство существования стационарного по времени распределения числа занятых приборов в системе $M|GI|s|0$. Более того, он показал, что формулы Эрланга (см. [3.14]), справедливы и в этом случае, т. е. что они не зависят от формы распределения времени обслуживания при фиксированном его среднем значении. В § 5 систематически исследуется это свойство инвариантности (нечувствительности). Теоремы существования, аналогичные теореме Севастьянова, но для числа занятых приборов непосредственно перед моментами поступления требований и немедленно после моментов их ухода, были доказаны в работах Такача [385] и Шанбага и Тамбурациса [368], соответственно. Оказалось, что предельные распределения, полученные Б. А. Севастьяновым [86], Такачем [385] и Шанбагом и Тамбурацисом [368], совпадают (см. п. 4.1).

Естественным стремлением ТМО является все более широкое применение ее результатов к реальным задачам. Для достижения этой цели исследовались многочисленные модели. Даже использование рекуррентного потока вместо предположения о пуассоновском входе значительно расширило возможность применения результатов теории массового обслуживания, тем более ослабление предположений о независимости в процессах поступления и обслуживания требований значительно приближает теорию к действительности. За последние годы в этом направлении была проделана большая работа, и поэтому основной целью данного раздела является обзор теорем существования для систем, в которых интервалы между поступлениями и длительности обслуживания могут быть зависимы. В большинстве упомянутых выше классических работ, идея доказательства

теоремы существования основывалась на наличии у рассматриваемых процессов обслуживания бесконечного множества моментов регенерации. Чаще всего эти моменты регенерации представляют собой некоторые моменты отсутствия в системе управлений. Но даже для системы $G|G|s| \infty$ с рекуррентными управляющими последовательностями такие моменты могут отсутствовать с положительной вероятностью. Естественно, еще более сложные проблемы возникают в случае произвольных управляющих последовательностей. Оказалось, что для решения этих проблем подходящим аппаратом служат маркированные точечные процессы. Далее, введенное А. А. Боровковым [19, 22] понятие «обновляющего события» успешно играет роль моментов регенерации.

Для удобства рассматриваемые системы разделены на семь групп: одноканальные системы $G|G|1| \infty$ (п. 3.1); многоканальные системы $G|G|s| \infty$ (п. 3.2); системы Эрланга и Энгсета с потерями (п. 3.3); системы $G|G|s|0$ с потерями (п. 3.4); системы $G|G| \infty$ с бесконечным числом приборов (п. 3.5); схемы обслуживания (п. 3.6); системы с зависимостями специального вида (п. 3.7). В п. 3.8 рассматриваются некоторые вопросы скорости сходимости к стационарному режиму и экспоненциальной эргодичности. Последний пункт этого параграфа посвящен качественным свойствам и количественным оценкам устойчивости процессов обслуживания.

3.1. Одноканальные системы с ожиданием. Рассмотрим одноканальную систему $G|G|1| \infty$, управляющая последовательность которой задается стационарным эргодическим точечным процессом Φ , удовлетворяющим условию $0 < \rho < 1$. Пространство состояний системы D определим как множество векторов $z = (z_1, z_2, \dots) \in R^\infty$, где z_1 — остаточное время обслуживания обслуживаемого требования, а $z_i, 2 \leq i \leq j$, — время, необходимое для обслуживания i -го требования, ожидающего в очереди. Для $i > j$, где j означает число требований в системе, положим $z_i = 0$.

Поведение системы во времени можно описать следующим образом: Пусть $\varphi \in M_{R+}$ фиксированная реализация управляющего точечного процесса, а $z \in D$ — начальное состояние в момент $t=0$. Тогда состояние $z(t)$ системы в момент времени t имеет вид

$$z(t) = h(\varphi, z, t), \quad (3.1)$$

где h — некоторое отображение из $M_{R+} \times D \times R_+$ в D . Таким образом, для каждой СВ ξ со значениями из D имеем стохастический процесс $z(t), t \in R_+$,

$$z(t) = h(\Phi, \xi, t), \quad t \in R_+, \quad (3.2)$$

соответствующий управляющему точечному процессу Φ и (случайному) начальному состоянию ξ .

3.1.1. Теорема [169, 171, 214]. Существует единственный (с точностью до эквивалентности) стационарный процесс $z(t)$, $t \in R$, удовлетворяющий условию (3.1) и определенный на вероятностном пространстве $(M_{R+}, \mathfrak{M}_{R+}, P)$, где P обозначает распределение процесса Φ . Для любого (случайного) начального состояния ζ имеет место сходимость по вариации

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \text{var} (F_{t_1, \dots, t_k, \zeta}, F_{t_1, \dots, t_k}) = 0, \quad (3.3)$$

где $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, а $F_{t_1, \dots, t_k, \zeta}$ и $F_{t_1, \dots, t_k}$ означают конечномерные распределения в моменты $(t_1, \dots, t_k)$ процесса, определенного равенством (3.2) и упомянутого выше стационарного процесса.

С помощью пальмовского управляющего точечного процесса Φ^0 , соответствующего Φ , можно получить аналогичные результаты для стационарного по вложенным моментам процесса обслуживания, когда в качестве вложенных моментов используются моменты непосредственно предшествующие моментам поступления или, если на выходе системы наблюдается простой точечный процесс, немедленно следующие за моментами окончания обслуживания. Основным звеном в доказательстве теоремы 3.1.1 (см. Франкен, Кениг, Арндт и Шмидт [171]) является построение отображения

$$\varphi \rightarrow z(0, \varphi): M_{R+} \rightarrow D, \quad (3.4)$$

которое обеспечивает «стационарность» начального состояния и, следовательно, стационарность соответствующего процесса обслуживания $z(t)$, $t \in R$. При этом можно воспользоваться соображениями монотонности и существования P -почти наверное бесконечного множества моментов поступления в пустую систему.

Заметим, что из стационарности процесса $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots)$ немедленно следует стационарность времени разгрузки

(или виртуального времени ожидания) $v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j(t)$. Для про-

цесса $l(t)$, $t \in R$, числа требований в системе имеем, соответственно, $l(t) = \max\{i: z_i(t) > 0\}$. Для одноканальных систем с дисциплиной обслуживания в порядке поступления требований процесс $v(t)$, $t \in R$, и процесс виртуального времени ожидания совпадают. Для систем с более общей дисциплиной для времени ожидания также можно доказать теорему существования, аналогичную теореме 3.1.1 (см. [171]). В своей работе [286] Лойнес первым рассмотрел случай стационарности по вложенным моментам для систем $G|G|1|\infty$ с дисциплиной обслуживания в порядке очереди. Точнее, показав существование бесконечного множества моментов освобождения системы, он доказал сущест-

ование единственной стационарной последовательности $\{\omega_i, i \in T\}$ актуальных длительностей ожидания (см. также А. А. Боровков [19] и Шассбергер [353]). Очевидно, что отображение h в (3.1) зависит от дисциплины обслуживания. Иногда представляется интересным рассмотреть стохастическое ядро вместо детерминированного отображения h . Это дает возможность доказать теоремы существования для систем с рандомизированной дисциплиной обслуживания (Калэне [214]).

3.2. Многоканальные системы с ожиданием. Перейдем теперь к многоканальным системам $G|G|s| \infty$, управляющей последовательностью которых является эргодический процесс Пальма Φ^0 (с соответствующим распределением P^0), удовлетворяющий условию $0 < \rho < s$. Как указывалось выше, в случае $s=1$ эти предположения обеспечивают существование бесконечного множества моментов поступления требований в пустую систему. Однако для многоканальных систем ситуация оказывается более сложной, так как с положительной вероятностью может вовсе не существовать таких моментов и, более того, теорема единственности 3.1.1 в общем случае не справедлива. Можно показать, что в (3.3) различные начальные состояния ξ могут привести к различным стационарным процессам $z(t)$, $t \in R_+$ (см. Лойнес [286]). Гутьяр [182] приводит следующее необходимое и достаточное условие существования бесконечного множества моментов освобождения системы $G|GI|s| \infty$:

$$P^0 \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \varphi : t_{-s(j-1)-1}(\varphi) + j\varepsilon < 0 \} \right) > 0, \quad (3.5)$$

где $\varepsilon = \inf\{u \in R_+ : B(u) < 0\}$, а $B(\cdot)$ является ФР длительностей обслуживания. Если, к тому же, интервалы между поступлениями независимы, т. е. для системы $GI|GI|s| \infty$, это условие можно записать следующим образом:

$$P^0(\varphi : \alpha_1(\varphi) > \beta_1(\varphi)) > 0, \quad (3.6)$$

где α_i и β_i означают интервалы между поступлениями и длительности обслуживания (см. Уитт [394]).

С другой стороны, существование бесконечного множества моментов освобождения не является необходимым для единственности (эргодичности) стационарных процессов обслуживания для системы $G|G|s| \infty$. Боровков [22, 23] для доказательства эргодических теорем для многоканальных систем использует понятие обновляющих событий. А именно, пусть $\{\tau_i, i \in \Gamma\}$ — стационарная эргодичная последовательность случайных векторов и пусть $\{\omega_i, i \in \Gamma\}$ — последовательность случайных векторов, определенных начальным значением ω_1 с помощью некоторого отображения f ,

$$\omega_{i+1} = f(\omega_i, \tau_i), \quad i \geq 1. \quad (3.7)$$

Пусть $\mathcal{F}_{n,i}$ — σ -алгебра, порожденная СВ $\tau_n, \dots, \tau_i$. Обозначим через T оператор сдвига на $\mathcal{F}_{-\infty, \infty}$, определяемый равенством $T\{\tau_i \in B\} = \{\tau_{i+1} \in B\}$ для любого борелевого множества B .

3.2.1. Определение. Последовательность $\{A_i, i \in \Gamma_+\}$, $A_i \in \mathcal{F}_{-\infty, \infty}$ называется последовательностью обновляющих событий, если существует целое число $i_0 > 0$ такое, что $A_i \in \mathcal{F}_{-\infty, i+i_0}$ для любого $i \in \Gamma_+$ и на множестве A_i случайный вектор w_{i+j} , для любого $j > i_0$, зависит только от значений $\tau_i, \dots, \tau_{i+j-1}$. Последовательность $\{A_i\}$ называется стационарной, если $A_i = T^i A_0$ для всех $i \in \Gamma_+$.

Предполагая, что начальное значение w_1 не зависит от последовательности τ_i или измеримо относительно $\mathcal{F}_{-\infty, 0}$, А. А. Боровков [22, 23] доказал следующую общую эргодическую теорему.

3.2.2. Теорема. Пусть дана последовательность $\{A_i\}$ обновляющих событий такая, что для некоторого $j_0 > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcap_{j=j_0}^{\infty} \bigcap_{i=1}^n A_i T^{-j} A_{i+j} \right\} \rightarrow 1 \quad (3.8)$$

при $n \rightarrow \infty$. Тогда распределение последовательности $\{w_{n+i}, i \in \Gamma_+\}$ сходится, при $n \rightarrow \infty$, к распределению некоторой стационарной последовательности $\{w^i, i \in \Gamma_+\}$, удовлетворяющей условию (3.7). Точнее, существует семейство последовательностей $\{w_n^i, i \in \Gamma_+\}$, распределенных как $\{w^i, i \in \Gamma_+\}$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{i=0}^{\infty} (w_{i+n} \neq w_n^i) \right\} = 0. \quad (3.9)$$

Заметим, что если последовательность $\{A_i\}$ стационарна, то условие (3.8) эквивалентно $\mathbf{P}\{A_0\} > 0$. Чтобы применить теорему 3.2.2 к системе $G|G|s|_{\infty}$ достаточно в (3.7) соответствующим образом выбрать $\{\tau_i\}$, f и $\{A_i\}$. Именно, положим $\tau_i = (\alpha_i, \beta_i)$ и

$$w_{j+1} = R(w_j + \beta_j e - \alpha_j i) +, \quad (3.10)$$

где R — оператор, располагающий компоненты данного вектора в порядке возрастания; $e = (1, 0, \dots, 0)$, $i = (1, 1, \dots, 1)$, $y_+ = (y_+, y_+, \dots, y_+)$, $y_+ = \max(0, y_j)$.

Очевидно, что (3.10) является представлением Кифера—Вольфовица (см. [226]) вектора актуальных длительностей ожидания для системы $G|G|s|_{\infty}$ с дисциплиной обслуживания в порядке очереди.

Стационарную последовательность $\{A_i\}$ обновляющих событий можно определить, например, равенством

$$A_i = \{\alpha_{i-1} > w_{i-1}, \alpha_i + \dots + \alpha_{i+s-2} > \beta_i\}. \quad (3.11)$$

Если $\mathbf{P}\{A_0\} > 0$, тогда для векторов актуальных длительностей ожидания w_i , определенных соотношением (3.10), утверждение теоремы 3.2.2 справедливо для произвольных начальных значе-

ний w_1 (см. А. А. Боровков [22]). Для системы $GI|GI|s|\infty$, последовательность $\{A_i\}$,

$$A_i = \left\{ w_{i+j,1} = 0 \ (j=1, \dots, s-2), \ w_{i,s} = \sum_{n=0}^{s-2} \alpha_{i+n} \right\}, \quad (3.12)$$

обновляющих событий всегда удовлетворяет условию теоремы 3.2.2 (см. А. А. Боровков [22], И. Ахмаров и Н. П. Леонтьева [12]).

Случай $w_1=0$ был рассмотрен Лойнесом [286], который показал, что для системы $G|G|s|\infty$ с дисциплиной обслуживания в порядке очереди ФР СВ w_i при $i \rightarrow \infty$ монотонно сходится к стационарной по моментам поступления ФР СВ w^1 (см. также А. А. Боровков [19]). Распространение этого результата на случай стационарности по времени было получено в работе Миязавы [304], а для произвольных консервативных дисциплин обслуживания в [171]. В работах А. А. Боровкова [19, 23], И. Ахмарова [9], И. Ахмарова и Н. П. Леонтьевой [12] и Н. П. Леонтьевой [72—74], с помощью обновляющих событий были получены оценки скорости сходимости времени ожидания к стационарному процессу для многоканальных систем обслуживания (см. также п. 3.8). Этот вопрос был рассмотрен также для длины очереди. Более того, И. Ахмаровым и Н. П. Леонтьевой [12] была исследована система $G|G|s|r$ с ограниченным числом мест для ожидания (см. также В. Г. Крупин [67]). В работе В. Г. Крупина [66] показано существование стационарного по вложенным моментам распределения времени ожидания для системы $G|G|s|\infty$ с ограниченным временем пребывания. В связи с этим использовалась управляющая последовательность $\Phi^0 = \{t_i(\Phi^0), [\beta_i(\Phi^0), \zeta_i(\Phi^0)], i \in \Gamma\}$, где ζ_i означает максимальное (возможное) время пребывания i -ого требования в системе.

Другие предельные теоремы для систем обслуживания с различными ограничениями на число мест для ожидания, время ожидания или пребывания были получены в [5—11, 130, 131].

Система $GI|GI|s|r$ с конечным числом мест для ожидания и система $GI|GI|s|\infty$ с ограниченным временем ожидания были исследованы Шанбагом [367]. Он показал, что условие (3.6) достаточно для существования собственных предельных распределений таких характеристик, как длина очереди, время ожидания и остаточное время обслуживания обслуживаемого требования. Оне и Майн [327] использовали метод Лойнеса [286] с целью исследования существования стационарных процессов, возникающих при изучении очередей перед светофором, удовлетворяющих рекуррентной формуле сходной с (3.10).

Вопросы моделирования и управления движением транспорта на перекрестке при неполном описании управляющей последо-

вательности рассматривались в работах М. А. Федоткина [91—93].

Если $\rho > s$, компоненты вектора актуального времени ожидания w_n для системы $G|G|s|\infty$ с дисциплиной обслуживания в порядке очереди сходятся при $n \rightarrow \infty$ к бесконечности с вероятностью 1 (см. Лойнес [286]). Для этого случая Лулу [285] доказал, что последовательность случайных ломаных

$$y_n(u) = (w_{[nu],1} - C_1 nu (\frac{\rho}{s} - 1)) C_2 n^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (3.13)$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные, слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к винеровскому процессу на $[0, 1]$, если выполняются следующие условия: а) последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ стохастически независимы; б) ломанные, построенные посредством (3.13) по частным суммам последовательностей $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, соответственно, слабо сходятся к винеровскому процессу на $[0, 1]$.

Здесь $[nu]$ означает целую часть числа nu , а $w_{[nu],1}$ первую (наименьшую) компоненту вектора $w_{[nu]}$. Более того, Лулу [285] получил также аналогичный результат для виртуального времени ожидания.

3.3. Системы Эрланга и Энгсета с потерями. В работе Кёнига и Маттеса [239] было получено стационарное распределение вероятностей состояний системы Эрланга $M|G|s|0$ в случае, когда длительности обслуживания требований отдельными приборами могут быть зависимыми, т. е. каждая из s таких последовательностей описывается маркированным точечным процессом, метки которого могут содержать дополнительную информацию о механизме обслуживания, такую как, например, о фазах обслуживания или ремонта (см. также [171, 240, 241]).

Пространство состояний рассматриваемой системы описывается множеством векторов $g = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s$, $0 \leq k \leq s$, где i_j — номера, а k — общее число занятых приборов в рассматриваемый момент времени t , и векторов $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_s)$, где φ_j является реализацией соответствующего точечного процесса до этого момента времени. Таким образом, состояние системы описывается вектором $z = (g, \varphi)$. Поведение системы во времени описывается некоторым марковским процессом, заданным на этом пространстве состояний. Стационарность этого процесса обеспечивается начальным распределением Q , $Q = \sum_{g'} p_{g'} Q(\cdot | g')$, для которого имеет место представление (см. [239])

$$p_{g'} = Q(z: g = g') = \gamma(s-k)! \prod_{j=1}^k \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right), \quad g' = (i_1, \dots, i_k), \quad (3.14)$$

$$Q(\cdot | g') = \prod_{i=1}^s H_i, \quad H_i = \begin{cases} P_i, & \text{если } i \notin g', \\ P_i^0, & \text{если } i \in g', \end{cases} \quad (3.15)$$

где λ означает интенсивность пуассоновского потока моментов поступления, μ_j интенсивность стационарного маркированного точечного процесса (с распределением P_j) длительностей обслуживания j -ым прибором; а γ — нормирующая постоянная. Заметим, что из (3.14) следует хорошо известная формула Эрланга для стационарного по времени распределения числа требований в системе, если $P_j = P$ и, следовательно, $\mu_j = \mu$ для $j = 1, \dots, s$ (см. также § 5).

Формула (3.14) основана на предположении о равновероятном занятии свободных приборов. В [163, 240, 241] приведено начальное распределение, обеспечивающее стационарность по времени упомянутого выше марковского процесса для несколько более общего правила выбора (см. также п. 5.3.1). Более того, было показано, что всякое начальное распределение этого марковского процесса стационарно по времени тогда и только тогда, когда оно является стационарным по моментам поступления. Мекке и Целе [300] исследовали структуру множества стационарных начальных распределений, (см. также Мекке [297, 298]). Целе [98] показала, что одномерные распределения с начальным распределением вида $\prod_{i=1}^s P_i^0$, где P_i^0 являются распределениями Пальма, сходятся к стационарному по времени распределению Q . Если, к тому же, P_i^0 , $i = 1, \dots, s$, эргодичны, то стационарное предельное распределение Q определяется формулами (3.14) — (3.15) с $Q(\cdot | 0) = \prod_{i=1}^s P_i^0$.

Кёниг [232] рассмотрел две разновидности замкнутой системы с потерями, так называемой системы Энгсета, в которой для обслуживания требований от N источников имеется s ($s < N$) приборов. Как обычно, требование, застающее все приборы занятыми, теряется, в противном случае оно занимает любой из свободных приборов с равной вероятностью. Точно так же, как и для разомкнутых систем, длительности обслуживания могут быть привязаны к источникам или обслуживающим приборам. В зависимости от рассматриваемой разновидности, последовательность длительностей обслуживания данного источника или прибора описывается маркированным точечным процессом, метки которого, как обычно, могут быть использованы для расширения содержания механизма обслуживания. Независимость длительностей обслуживания не предполагается. Предполагается только, что они, как и последовательность интервалов между моментами поступления требований от каждого источника, стационарны. При помощи мультипликативного представления, подобного (3.14) — (3.15), можно

выписать стационарное начальное распределение подходящим образом построенного марковского процесса, описывающего эволюцию системы (см. Кёниг [232]). Из этого мультипликативного представления следует хорошо известная формула Энгсета для стационарного по времени распределения числа занятых приборов (см. также разд. 5.3.2).

3.4. Система $G|G|s|0$ с потерями. Аналогично вектору актуальных длительностей ожидания Кифера и Вольфовица рассмотрим теперь вектор w_i остаточных длительностей обслуживания в системе $G|G|s|0$ с потерями в момент непосредственно перед поступлением i -го требования, компоненты которого упорядочены в порядке возрастания: $w_{i,1} < w_{i,2} < \dots < w_{i,s}$. Нетрудно видеть, что векторы w_j удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$w_{j+1} = R(w_j + \beta_j e J \{w_{j,1} = 0\} - \alpha_j i)_+, \quad (3.16)$$

подобному соотношению (3.10), где $I \{w_{j,1} = 0\}$ обозначает индикатор множества $\{w_{j,1} = 0\}$. Заметим, что (3.16) имеет тот же вид, что и (3.7) и, следовательно, применима теорема 3.2.2 (см. А. А. Боровков [22, 23]). Определим величину $q^i(x)$ равенством

$$q^i(x) = \sum_{j=-\infty}^l I \{ \beta_j > \alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_l + x \}, \quad (3.17)$$

так что $q^i(0)$ можно интерпретировать как стационарное по моментам поступления число требований в системе $G|G|\infty$, управляемой той же самой последовательностью, в то время как $q^i(x)$ представляет собой число требований, остающихся в системе через время x . Определим стационарную последовательность $\{A_i\}$ обновляющих событий (определение см. в разд. 3.2) равенством

$$A_l = \left\{ q^{l-1}(0) \leq s-1, \quad q^{l-1} \left(\sum_{n=0}^j \alpha_{l+n} \right) \leq s-2-j, \right. \\ \left. j=0, \dots, s-2 \right\}. \quad (3.18)$$

Если $P\{A_0\} > 0$, то для векторов остаточных длительностей обслуживания w_j системы $G|G|s|0$, управляемой стационарной эргодической последовательностью ($0 < \rho < \infty$), определяемых соотношением (3.16), утверждение теоремы 3.2.2 остается справедливым при любом начальном значении w_1 .

А. А. Боровков [19] показал, что для системы $GI|GI|s|0$ неравенство $P\{A_0\} > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $P\{\alpha_1 > \beta_1\} > 0$. Более того, были также исследованы теоремы существования и единственности стационарного по времени распределения для систем с потерями с групповым поступлением требований.

Дальнейшие условия существования с положительной вероятностью обновляющих событий для системы $G|G|s|0$ были даны И. Ахмаровым и Н. П. Леонтьевой [12].

Обновляющие события A_i в (3.18) означают, что состояние системы определяется по конечному отрезку реализации управляющей последовательности и служат для переноса свойств стационарности и эргодичности управляющей последовательности на процесс обслуживания (см. также [170]). Оказывается, что подобно многоканальным системам $G|G|s|\infty$ (см. п. 3.2), чтобы доказать эргодические теоремы для систем $G|G|s|0$, помимо стационарности и эргодичности управляющей последовательности, необходимо некоторое дополнительное условие типа $P\{A_0\} > 0$; см. Лизек [282], где эта проблема рассматривается подробно.

Франкен и Калэне [170] показали, что аналог теоремы 3.1.1 справедлив для систем $G|G|s|0$, если управляющая последовательность стационарна и если с вероятностью 1 существует бесконечно много точек обновления. Исходя из соответствующей пальмовской управляющей последовательности, этот результат можно получить также и для случая стационарности по вложенным моментам.

Кроме того, в случае стационарной эргодической управляющей последовательности с $0 < \rho < \infty$, существование бесконечного многих моментов обновления следует из $P\{A_0\} > 0$. Случай $G|G|s|0$ рассмотрен также в работе [168], где приведено более сильное условие существования бесконечного множества моментов обновления. Условия существования бесконечного множества точек освобождения для системы $G|G|s|0$ были даны Гутьяром [182], см. также [171].

3.5. Системы с бесконечным числом обслуживающих приборов. Для систем $G|G|\infty$, управляемых стационарной последовательностью с $0 < \rho < \infty$, утверждение теоремы 3.1.1 остается верным (см. [171]). К тому же следует отметить, что в этом случае, подобно одноканальным очередям (см. раздел 3.1), нет необходимости в дополнительных предположениях. Аналогичные результаты можно получить для случая стационарности по вложенным моментам, отправляясь от соответствующей пальмовской управляющей последовательности (см. также А. А. Боровков [19]). Более того, в монографии А. А. Боровкова [19] рассматриваются системы с бесконечным числом приборов, управляемые асимптотически пальмовской последовательностью.

3.6. Общий класс систем обслуживания (схемы обслуживания). В этом разделе (см. также раздел 5) мы не делаем различия между источниками требований, с одной стороны, и обслуживающими приборами, с другой, а рассматриваем произвольную систему, состоящую из некоторых объектов с конечным числом так называемых активных и пассивных состояний

(схему обслуживания). В частных случаях из нее получаются одноканальные и многоканальные системы с ожиданием, системы с потерями, модель ремонта станков, системы с разделением процессора (processor sharing) и системы сложной структуры, а также сети СМО (см. [171, 209, 240, 241]). С каждым активным состоянием каждого объекта связывается некоторый стационарный маркированный точечный процесс последовательных длительностей его пребывания в данном активном состоянии, при этом их независимости не предполагается. Эти длительности реализуются с различными скоростями в зависимости от состояния всей системы (подробности см. в § 5).

Так же, как и в п. 3.3, состояние системы характеризуется вектором $z = (g, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, где $g = (g_j)$ — вектор состояний отдельных объектов, а φ_i ($i = 1, 2, \dots$) — реализации соответствующих маркированных точечных процессов. В пространстве всех состояний системы строится марковский процесс с непрерывным временем, описывающий эволюцию системы. Начальное распределение Q , $Q(\cdot) = \sum_{g'} p_{g'} Q(\cdot | g')$ этого марковского процесса вида

$$Q(\cdot | g') = \prod_{i=1}^n H_i,$$

$$H_i = \begin{cases} P_i, & \text{если в состоянии } g' = (g'_j) \text{ для некоторого } j, g'_j = i, \\ P_i^0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.19)$$

обеспечивает его стационарность в том и только том случае, если удовлетворяет некоторой линейной алгебраической системе уравнений равновесия Z' (см. п. 5.1). Здесь P_i^0 означает палмовское распределение соответствующего управляющего точечного процесса, а P_i его стационарное распределение. Систему уравнений Z' можно интерпретировать как условие усиленного статистического равновесия, так называемого равновесия объектов. Далее, в работе Янзена, Кёнига и Навроцки [209] было исследовано поведение системы по вложенным непосредственно перед изменением состояния g системы моментам. Были получены формулы для среднего времени пребывания построенного марковского процесса в фиксированном подмножестве его состояний (см. также [171]). Было показано, что при некоторых условиях существование вероятностного решения вышеупомянутой системы уравнений равновесия Z' необходимо и достаточно для выполнения следующего свойства инвариантности: стационарные вероятности p_g зависят только от средних значений длительностей активных состояний, а не от формы распределений P_i . Более подробно эти вопросы рассматриваются в § 5.

Навроцки [80] разработал метод исследования стационарных характеристик рассмотренных в данном разделе систем в предположении, что одновременно реализуется не более одной непоказательно распределенной длительности активного состояния.

3.7. Системы со специальными зависимостями.

3.7.1. Полумарковские управляющие последовательности. Рассмотрим систему, управляемую последовательностью $\{(\alpha_i, \beta_i, \kappa_i)\}$, где κ_i со значениями $k \in K = \{1, 2, \dots\}$ озна-

чает тип требования, поступающего в момент $\tau_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j$ (см. разд.

2.2). Если последовательность $\{(\alpha_i, \kappa_i)\}$ образует полумарковский процесс (ПМП), т. е. если последовательность $\{\kappa_i\}$ типов требований образует однородную цепь Маркова и если интервалы между моментами поступления требований α_i зависят лишь от κ_i и κ_{i+1} , $i=0, \pm 1, \dots$ (см. [65]), то соответствующую систему будем называть системой с полумарковским входящим потоком (входом) и обозначать символом $SM|\vec{G}|s|r$. Аналогично, система называется системой с полумарковским обслуживанием и обозначается символом $\vec{G}|SM|s|r$, если ПМП образует последовательность $\{(\beta_i, \kappa_i)\}$.

Системы, управляемые полумарковскими последовательностями, находят применение при моделировании реальных систем, в которых интервалы между моментами поступления требований и длительности их обслуживания допускают значительную вариацию.

Одноканальные системы $SM|M|1|\infty$ с полумарковским входящим потоком были исследованы Цинларом [136], Ньютом [318] и другими. Можно показать, что, если марковская цепь κ_i эргодична, то цепь $(\kappa_i, l(\tau_i))$ эргодична тогда и только тогда, когда $\rho < 1$. В таком случае, например, стационарные по моментам поступления вероятности $p_{jk}^0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\kappa_i = j, l(\tau_i) = k\}$

существуют и не зависят от начального распределения. Если $\rho \geq 1$, то $p_{jk}^0 = 0$ для всех j и k . Аналогичный результат справедлив для предела по времени $p_{jk} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\kappa(t) = j, l(t) = k\}$,

где $\kappa(t) = \kappa_i$, если $\tau_{i-1} < t \leq \tau_i$. Следует упомянуть, что для системы $SM|M|1|\infty$ было исследовано также и нестационарное поведение.

В работах С. Н. Симоновой [87] и Франкена [167] исследована система с потерями $SM|M|s|0$ ($0 < s \leq \infty$). Доказана теорема существования стационарного по моментам поступления требований распределения p_{jk}^0 и приведены формулы их биномиальных моментов в случае, если цепь κ_i апериодична и неразложима.

Ньютс и Чен [321] рассмотрели нестационарное поведение процессов $(\kappa_i, l(\tau_i))$ и $(\kappa(t), l(t))$ для системы $SM|M|\infty$. С их помощью получены для стационарных распределений результаты, сходные с результатами Франкена [167]. Смитом [369] эти результаты были обобщены в следующем направлении: длительности обслуживания предполагаются независимыми, показательно распределенными СВ с параметрами, зависящими от типа требования, т. е. рассматривается система $SM|\tilde{M}|\infty$. Теперь вместо $(\kappa_i, l(\tau_i))$ и $(\kappa(t), l(t))$ рассматриваются векторные процессы $l(\tau_i)$ и $l(t)$, где $l = (l_1, \dots, l_K)$ и l_i означает число требований типа i , находящихся в системе в соответствующий момент времени. Дальнейшие результаты для системы $SM|GI|\infty$ содержатся в [370].

Важным частным случаем полумарковского потока является дважды стохастический пуассоновский поток, рассмотренный, например, Пюрдю [334] и Россом [344] (см. также Кёниг и Шмидт [246]).

Одноканальные системы $M|SM|1|\infty$ с полумарковским обслуживанием были рассмотрены, например, Цинларом [135], Ньютсом [314, 317], Песталоцци [332], Пюрдю [335] (см. также Ньютс [316]). В предположении, что вложенная марковская цепь κ_i неразложима, стационарные по времени и моментам поступления распределения рассматриваемых там процессов обслуживания существуют тогда и только тогда, когда $\rho < 1$,

где $\rho = \sum_{i=1}^{|K|} \pi_i m_{B_i}$, а $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K)$ — стационарное распределение типов требований, и m_{B_i} — средняя длительность обслуживания требований типа i , $i = 1, \dots, |K|$.

Ньютс [317] рассматривает случай группового поступления и полумарковского обслуживания. Песталоцци [332] допускает возможность бесконечного количества типов требований в системе $M|SM|1|\infty$, но предполагает, что типы требований κ_i взаимно независимы. Нестационарное и стационарное поведение числа требований в системе $M|SM|\infty$ при условии, что вложенная марковская цепь κ_i неразложима, рассмотрено Ньютсом и Ченом [322]. В работах Арьяса [106], Янсена [210] и Макникла [296] исследуется система $SM|SM|1|\infty$.

3.7.2. Системы обслуживания последовательными приборами. Эргодические теоремы для систем обслуживания последовательными приборами доказывались различными авторами (см. например, Райх [337], Сакс [349] и, в частности, Лойнес [286—288]), основное предположение которых состояло в том, что векторы $(\alpha_i, \beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots)$ образуют строго стационарную метрически транзитивную последовательность по переменной i , где $\beta_{i,j}$ означает длительность обслуживания i -ого требования в j -ой очереди. В частности, для системы обслужи-

вания последовательными приборами $GI|GI|1|\infty \rightarrow \dots |GI|1|\infty$, управляющая последовательность которой $\{(\alpha_i, \beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots)\}$ состоит из взаимно независимых рекуррентных последовательностей $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_{i,1}\}$, $\{\beta_{i,2}\}, \dots$, эргодичность имеет место тогда и только тогда, когда $M\alpha_i > M\beta_{i,j}$ для всех j (см. также Г. П. Климов [231], § 13 гл. 4, где уточняются результаты Лойнеса). Фридман [174] рассмотрел более общий случай последовательного обслуживания многоканальными системами, см. также [390].

Системы обслуживания последовательными приборами с разделением времени были рассмотрены, например, Г. П. Климовым [54]. Заметим, что интервалы между моментами поступления на вторичные приборы, вообще говоря, зависимы (см. Дейли [150]). Важным частным случаем является система обслуживания двумя последовательными приборами, в которой одновременно может работать лишь один из них — тандем-система. При этом порядок работы приборов определяется некоторым правилом переключения. В предположении, что последовательность $\{(\alpha_i, \beta_{i,1}, \beta_{i,2})\}$ стационарна и метрически транзитивна, необходимым и достаточным условием эргодичности такой системы является неравенство $M\alpha_i < M\beta_{i,1} + M\beta_{i,2}$. Тандем-системы с конечным числом мест для ожидания между фазами рассматриваются в работе [315]. Заметим, что поведение длины очереди в системе с чередующимися приоритетами сходно с их поведением очереди в тандем-системе (см. Джайсуол [34], Наир [310]).

3.7.3. Системы с обратной связью и вторичным входящим потоком. Приведем сначала краткий обзор работ, связанных с системами обслуживания, в которых моменты поступления образуют точечный процесс, являющийся наложением (суммой) конечного числа процессов восстановления. Напомним, что точечный процесс называется процессом восстановления или рекуррентным точечным процессом, если интервалы α_i между двумя последовательными точками представляют собой взаимно независимые СВ. Для управляющих последовательностей, являющихся наложением (суммой) точечных процессов, будем использовать символ $G+G+\dots+G$ с обычными модификациями в случае рекуррентных слагаемых.

В работе Иглехарта и Уитта [196] рассматривается система $GI+\dots+GI \rightarrow GI|s|\infty$, где основное внимание уделяется случаю, когда нагрузка ρ системы превышает или равняется s . Стрелка над GI означает, что распределение длительности обслуживания может зависеть от процесса, образующего входящий поток. Для различных процессов обслуживания таких, как, например, время ожидания, количество требований в системе или выходящий поток, были доказаны центральные предельные теоремы. Результаты упомянутой работы обобщены в работе [197] на по-

следовательности систем обслуживания типа $G + \dots + G \vec{G} | s | \infty$ с более слабыми предположениями о независимости, когда параметры нагрузки ρ_n сходятся к некоторому значению $\rho \geq s$ (см. также Уитт [393]). Иглехартом [194] получены функциональные предельные теоремы типа повторного логарифма для некоторых процессов обслуживания для системы $GI + \dots + GI | GI | s | \infty$. Кеннеди [223, 224] дает аппроксимацию скорости сходимости в вышеупомянутых предельных теоремах (см. также п. 3.8).

Харрисон [187] рассмотрел системы типа $GI + \dots + GI | GI | 1 | \infty$ со специальной дисциплиной группового обслуживания. При этой, так называемой дисциплине сборки, для того, чтобы начать обслуживание, необходимо иметь в наличии требования каждого типа. Было показано, что независимо от нагрузки ρ (< 1 , $= 1$ или > 1), вектор w_i , где $w_i = (w_{i,1}, \dots, w_{i,l})$ и $w_{i,j}$ означает актуальное время ожидания i -ого требования типа j) с вероятностью единица не сходится к конечному пределу. Это следует из предельных теорем для соответствующим образом нормированных величин w_i .

Эргодические теоремы для систем $GI + \vec{M} | GI | 1 | \infty$ с двумя типами требований были доказаны Шёнхерром [360], где, например, обобщены результаты Сахина [350].

В работе [347] рассматривается система с потерями $E_k + M | M | s | 0$, где $GI = E_k$ означает, что интервалы между моментами поступления в соответствующем процессе восстановления имеют эрланговские распределения порядка k . Показано, что формулы Эрланга (см. (3.14)–(3.15), остаются справедливыми, только если $E_k = M$. В противном случае, их можно использовать лишь как приближение. И, наконец, в работах Кучуры [263], [265] обсуждаются случаи $GI + M | M | s | \infty$ и $GI + M | M | s | 0$, соответственно.

Другой тип вторичного потока встречается в системах с обратной связью. Здесь требование может поступать как извне системы, так и возвращаться в нее после цикла обслуживания. Эти возвращающиеся требования образуют вторичный поток, который, вообще говоря, не является рекуррентным процессом (см. Бремо [118]).

В работе Такача [387] рассматривается одноканальная система с обратной связью с показательно распределенными интервалами между моментами поступления требований и длительностями обслуживания, где после каждого цикла обслуживания требование возвращается в очередь с вероятностью p ($0 \leq p < 1$) или покидает систему с вероятностью $q = 1 - p$. Если $p < q$, то число требований в системе обладает стационарным по времени предельным распределением, не зависящим от начального распределения. Таковую систему с обратной связью можно интерпретировать как обобщение модели счетчика, введенной Лампардом [266].

В работах Г. П. Климова [55, 56] исследовалась система $\vec{M}|\vec{GI}|1| \infty$ с обратной связью, предназначенная для выполнения нескольких (r) типов операций (что отмечено стрелочкой над символом GI) для широкого класса консервативных дисциплин обслуживания. Условие существования стационарного распределения для такой системы имеет вид $\rho < 1$, где $\rho = \lambda f$, $f = (I - Q)^{-1}b$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ — интенсивности первичного потока требований на выполнение различных операций, $b = (b_1, \dots, b_r)$ — средние длительности выполнения операций, а $Q = [q_{ij}]$ — матрица элементы q_{ij} , которой обозначают вероятности возникновения операции типа j в результате выполнения операций типа i .

В работах В. В. Рыкова [83, 84], М. Ю. Китаев и В. В. Рыкова [52] эти модели были обобщены на случай ветвящегося потока вторичных требований, когда в результате выполнения любой из операций с вероятностью $q_i(n) = q_i(n_1, \dots, n_r)$ возникает набор $n = (n_1, \dots, n_r)$ операций, рассматриваемых типов. Для существования стационарного распределения для любой консервативной дисциплины выполнения операций помимо условия на нагрузку $\rho < 1$, где матрица Q в этом случае определяется несколько сложнее, требуется еще вырожденность с вероятностью 1 вторичного потока требований.

Лемуан [273, 275] исследовал следующее правило обратной связи: новые требования поступают сначала в «первичную очередь», где они дожидаются начала обслуживания. Во время этого начального этапа обслуживания новые требования обслуживаются полностью, если длительности их обслуживания не превышают постоянной c ($0 < c < \infty$). В противном случае, если в системе присутствуют другие требования, они поступают во «вторичную очередь». На втором этапе обслуживания требования из вторичной очереди обслуживаются полностью и их обслуживание продолжается с того момента, когда оно было прервано. Таким образом, рассматривается правило абсолютного приоритета с продолжением прерванного обслуживания, а условием эргодичности является $\rho < 1$ (см. также Давиньон и Дисней [152, 155], Копчинска и Копчински [252]).

Харрис и Марлин [185] нашли необходимое и достаточное условие эргодичности систем с групповым обслуживанием и обратной связью, когда распределения длительностей обслуживания зависят от длины очереди, и указали взаимосвязь между процессами обслуживания с непрерывным временем и по вложенным моментам (см. также § 4).

3.7.4. Разогрев. Длительности обслуживания, зависящие от состояний. Одноканальные очереди с разогревом рассматривались, например, Финчем [158], Е. З. Климовой [57], Лемуаном [272, 274], Россбергом и Зигелем [346]. Эффект разогрева выражается тем фактом, что пер-

вое требование каждого периода занятости обслуживается в соответствии с распределением, которое может отличаться от распределения длительности обслуживания остальных требований периода занятости. Таким образом, распределение длительности обслуживания зависит от того, свободна ли система в момент поступления рассматриваемого требования. Более того, Лемуан [274] исследовал случай, когда таким же эффектом обладают также интервалы между моментами поступления требований. В работе Лемуана [272] приводятся условия, обеспечивающие эргодичность одноканальной системы, для которой первые N требований каждого периода занятости (N случайно) обслуживаются и поступают через промежутки времени с распределениями, отличающимися от распределений остальных требований.

Кэллэхэн [127] и Познер [333] получили достаточные условия существования предельного распределения актуального времени ожидания для одноканальных систем с длительностями обслуживания, зависящими произвольным образом от времени ожидания (см. также Харрис [184]).

3.7.5. Другие входы со специальными зависимостями. Другим входящим потоком с зависимостями специального вида является так называемый слабо зависимый входящий поток такой, что коэффициент корреляции двух достаточно отдаленных интервалов между моментами поступления требований настолько мал, что им можно пренебречь (см. Бхат [114]).

Примером слабо зависимого входящего потока является вход, моменты поступления которого τ_i имеют вид $\tau_i = ia + \delta_i$, где $\{\delta_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, а $a > 0$ — положительная постоянная (см. Андерсон [105], Льюис [279, 280], Нельсон и Уильямс [313]).

Д. Грано, Ф. Грано и Лемуан [179] получили аппроксимацию предельного поведения актуального времени ожидания w_i для системы $G|GI|1|_\infty$ со слабо зависимым входящим потоком такого типа ($M\delta_i = 0$, $P\{|\delta_i| < c\} = 1$ для некоторого $c < \infty$). Было показано, что при $\rho \geq 1$ последовательность $\{w_i\}$, соответствующим образом центрированная и нормированная, распределена асимптотически нормально.

Пирс [330, 331] рассмотрел следующий вид слабо зависимого входящего потока, моменты поступления которого задаются скользящим средним:

$$\tau_i = f_0(\gamma_{i+n}) + f_1(\gamma_{i+n-1}) + \dots + f_n(\gamma_i),$$

где f_i — неотрицательные функции, а $\{\gamma_i\}$ — последовательность независимых случайных величин.

В работах Конолли и Чжань [146], и Ньютса [319, 320] дается обзор полученных недавно результатов для систем с

ожиданием с показательно распределенными интервалами между моментами поступления требований и длительностями обслуживания, где допускаются переменные интенсивности поступления и обслуживания. Понятие переменных интенсивностей поступления и обслуживания можно обобщить, вводя зависящие от состояния системы скорости реализации соответствующих управляющих СВ (сравни, например, Янсен и Кёниг [207], Кёниг и Шмидт [245]), см. также §§ 4 и 5. Одноканальные системы с ожиданием с периодическим пуассоновским входящим потоком и произвольно одинаково распределенными независимыми длительностями обслуживания рассматриваются в работе Харрисона и Лемуана [189].

Упомянем, наконец, работы А. М. Александрова [2, 3] и Щётки [382], где рассматриваются одноканальные системы с ожиданием и не делается никаких предположений о независимости интервалов между моментами поступления требований и длительностей их обслуживания, которые реализуются в течение одного и того же периода занятости.

Так как в данном обзоре рассматриваются только некоторые аспекты группового поступления и группового обслуживания, за соответствующими эргодическими теоремами мы отсылаем читателя к работам А. А. Боровкова [19], Франкена, Кёнига, Арндта и Шмидта [171]. Далее, мы не обсуждаем подробно приоритетные системы и системы с ненадежными приборами, так как такие системы с зависимыми интервалами между моментами поступления требований и длительностями обслуживания рассматривались в литературе крайне редко. Предельные теоремы для таких систем в классических предположениях независимости можно найти, например, в работах Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниеляна, Б. Н. Димитрова, Г. П. Климова и В. Ф. Матвеева [27], Г. П. Климова [231], (см. также [77, 101, 107]).

3.8. Скорость сходимости к стационарному режиму. Предельные теоремы, представленные в предыдущих разделах данной главы, имеют качественный характер. Возникает вопрос, как быстро нестационарные распределения сходятся к соответствующим стационарным. Эта проблема скорости сходимости к стационарному режиму систематически исследована в монографиях А. А. Боровкова [19, 23], в работах И. Ахмарова [9, 11], И. Ахмарова и Н. П. Леонтьевой [12], В. В. Калашникова [49], Н. П. Леонтьевой [72—74], В. М. Золотарева [40, 42, 44]. Дальнейшие результаты при несколько более сильных предположениях см. также в работах [134, 153, 190, 191, 227, 257, 323, 352, 389].

В качестве примера приведем аппроксимацию скорости сходимости векторов времени ожидания Кифера—Вольфовица w_i в системе $GI|GI|s|_\infty$ (см. п. 3.2), полученную И. Ахмаровым [9]. Предположим, что в начальный момент времени $w_1 = 0$.

Пусть $\{w^i, i \in \Gamma\}$ является соответствующей стационарной последовательностью из теоремы 3.2.2.

3.8.1. Теорема. Пусть управляющая последовательность $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$ системы $G|GI|s| \infty$ удовлетворяет условию $\rho = \frac{M\beta_i}{M\alpha_i} < s$. Если для некоторого $t > 1$ математическое ожидание $M\alpha_i^t < \infty$, то для всех $k=1, 2, \dots$ и некоторой постоянной $c > 0$ имеет место неравенство:

$$\pi(F_{w_k}, F_{w^1}) \leq c \frac{(\ln k)^t}{k^{t-1}},$$

где π означает метрику Леви—Прохорова, а F_w распределение величины w . Если же $Me^{\alpha_i t'} < \infty$ для некоторого $t' > 0$, тогда

$$\pi(F_{w_k}, F_{w^1}) \leq c' e^{-t' \sqrt{k}}$$

для любого $k=1, 2, \dots$ и для некоторой постоянной $c' > 0$.

Заметим, что в случае одноканальных систем ($s=1$), границы, полученные, например, А. А. Боровковым ([19], § 22 и [21]) лучше границ, указанных в теореме 3.8.1. Проблемы скорости сходимости к стационарному режиму тесно связаны с анализом количественных свойств непрерывности процессов обслуживания (см. раздел 3.9). В работах В. М. Золотарева [40, 42, 44] аппроксимация скорости сходимости к стационарному режиму используется непосредственно для получения оценок устойчивости некоторых процессов обслуживания (см. также [258]). При этом следует заметить, что в работах В. М. Золотарева исследовался также случай зависимых интервалов между моментами поступления требований и длительностей их обслуживания.

3.9. Качественные и количественные свойства устойчивости процессов обслуживания. Рассматривается следующая проблема: когда небольшие изменения управляющей последовательности $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$ приводят к малым изменениям стационарных характеристик рассматриваемой системы обслуживания? Такая формулировка проблемы устойчивости (непрерывности) имеет чисто качественный характер. Это значит, что рассматриваемые невложенные или вложенные стационарные характеристики данной системы обслуживания должны сходиться к некоторому пределу, при сходимости управляющих последовательностей.

Первые результаты в этом направлении были опубликованы Россбергом [345], Б. В. Гнеденко [26], Франкеным [168], где, как, например, в [168], исследовался вопрос, действительно ли в системах $G|GI| \infty$ и $G|GI|s|0$ стационарные по времени и по вложенным моментам распределения числа требований в системе непрерывно зависят от распределения управляющей последовательности. В этой работе основным предположением,

обеспечивающим упомянутое свойство устойчивости, является существование бесконечного множества моментов поступления требований в пустую систему. Используя более общее понятие обновляющего события, А. А. Боровков [19, 20] обобщил этот результат, доказав теорему устойчивости для произвольных конечномерных стационарных по моментам поступления распределений числа требований в системе $G|G|s|0$ (см. также А. А. Боровков [21, 22, 23]). Случай стационарности по времени рассмотрен в работе Франкена и Калэне [170], где исследовалась также система $G|G|\infty$ с бесконечным числом приборов.

Что касается многоканальных систем с ожиданием $G|G|s|\infty$, а также систем с потерями $G|G|s|0$, то в работе А. А. Боровкова [22] приводится общий метод доказательства теорем устойчивости для нестационарных и стационарных процессов, удовлетворяющих соотношению (3.7). В случае независимых интервалов между моментами поступления требований и длительностей обслуживания, эти вопросы исследовались в работах [173, 217, 259].

Уитт [395] улучшил доказательства теорем устойчивости для нестационарных характеристик, полученные Кеннеди [223] для систем $G|G|1|\infty$, и распространил их на системы $G|G|s|\infty$.

Теоремы устойчивости для многоканальных систем с ожиданием $G|G|s|\infty$ с ограниченным максимальным временем пребывания (нетерпеливыми клиентами) и для систем $G|G|s|r$ с конечным числом мест для ожидания были получены В. Г. Крупиним [66, 67]. Они были улучшены А. А. Боровковым [21], который исходил из результатов И. Ахмарова и Н. П. Леонтьевой [12], Н. П. Леонтьевой [72, 73].

Дальнейшие качественные результаты по устойчивости систем, в основном для случая независимых интервалов между моментами поступления требований и длительностей обслуживания, были получены А. А. Боровковым, В. В. Калашниковым, Штойяном, Чичиашили и др. Они содержатся в монографиях А. А. Боровкова [19, 23], В. В. Калашникова [49], Франкена, Кёнига, Арндт и Шмидта [171], Штойяна [100] (см. также [195]). Методы и результаты исследования вопросов устойчивости широкого класса систем массового обслуживания в рамках общей теории сложных агрегативных систем содержатся в монографии Н. П. Бусленко, В. В. Калашникова, И. Н. Коваленко [25].

Следующий вопрос при исследовании устойчивости процессов обслуживания состоит в том, чтобы определить, в каком смысле сходятся рассматриваемые характеристики СМО при сходимости соответствующих управляющих последовательностей и указать вычислимые границы для скорости сходимости рассматриваемых характеристик. Это приводит к количествен-

ному анализу понятия устойчивости процесса обслуживания. Для этой цели оно было «метризовано». А именно, грубо говоря, характеристика обслуживания ξ , соответствующая некоторой управляющей последовательности $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$, называется непрерывной относительно метрик π_I, π_Q ((π_I, π_Q) -непрерывной), если для любого $\varepsilon > 0$ существует действительное число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой управляющей последовательности $\{(\alpha'_i, \beta'_i)\}$, удовлетворяющей условию

$$\pi_I(\{(\alpha'_i, \beta'_i)\}, \{(\alpha_i, \beta_i)\}) < \delta,$$

имеет место $\pi_Q(\xi', \xi) \leq \varepsilon$, где ξ' означает рассматриваемую характеристику обслуживания, соответствующую управляющей последовательности $\{(\alpha'_i, \beta'_i)\}$. Таким образом,

$$\pi_Q(\xi, \xi') \leq g(\pi_I(\{(\alpha_i, \beta_i)\}, \{(\alpha'_i, \beta'_i)\})),$$

где g есть неубывающая функция, определяемая равенством $g(x) = \sup\{\varepsilon : \delta(\varepsilon) < x\}$ и обладающая свойством $\lim_{x \downarrow 0} g(x) = 0$.

Действительной целью количественного анализа устойчивости процессов обслуживания является определение вида функции g . Важным шагом вперед в использовании такого метрического подхода к анализу устойчивости явились работы В. М. Золотарева [40—45], где, в частности, для определения функции g использовалось знание скорости сходимости к равновесию. Можно сослаться также на работы И. Ахмарова [9, 10], А. А. Боровкова [21, 23], Коцурека и Штойяна [258], Коцурека [257], В. В. Калашникова [49], Лизека [283].

§ 4. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТАЦИОНАРНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ И ПО ВЛОЖЕННЫМ МОМЕНТАМ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРОЦЕССОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.0. Вводные замечания. В этом разделе рассматривается фундаментальная проблема стационарных систем обслуживания, частные случаи которой исследовались последние десятилетия многими авторами. Процессы обслуживания такие, как число требования или количество работы, можно рассматривать «с точки зрения» стороннего наблюдателя, не связанного с системой, и «с точки зрения» требования. Так называемые стационарные по времени и по вложенным моментам характеристики, возникающие в результате этих двух точек зрения, обычно не совпадают, но они связаны определенными соотношениями. Самым известным примером является формула Литтла $L = \lambda W$, где L означает среднюю длину стационарной по времени очереди, а W — среднее стационарное по моментам поступления требований время ожидания. Целью настоящего раздела является обзор результатов исследования соотношений между этими ста-

ционарными по времени (невложенными) и стационарными по вложенным моментам (вложенными) характеристиками СМО при возможно более слабых ограничениях на управляющие последовательности. Некоторые из этих соотношений, в случае независимых интервалов между моментами поступления требований и длительностей их обслуживания, хорошо известны (см. А. Я. Хинчин [96], Такач [383], Кучура [264], Коэн [143], Брилл и Познер [121, 122], Копочинска и Копочински [253]).

Основой разработанного в последние годы единого подхода к исследованию этой проблемы служили классические методы марковизации процессов обслуживания — метод вложенных марковских цепей (см., например, А. Я. Хинчин [96, 97], Кендалл [221]) и метод введения дополнительных переменных (Кокс [147], Б. А. Севастьянов [86], И. Н. Коваленко [60], Н. П. Бусленко, В. В. Калашников, И. Н. Коваленко [25]). Коротко говоря, этот подход опирается на применение теории точечных процессов и, по сравнению с классическими методами, позволяет рассматривать более общие системы обслуживания, чем те, которые обычно рассматривались в литературе по ТМО. В частности, можно исследовать системы обслуживания с зависимыми интервалами между моментами поступления требований и длительностями их обслуживания.

Рассматриваемые процессы обслуживания определяются как стохастические процессы на вероятностном пространстве, порожденном управляющей последовательностью (см. п. 2.2). Таким образом, понятие пальмовского распределения стационарного маркированного точечного процесса используется для описания стационарных по вложенным моментам характеристик рассматриваемых процессов обслуживания, а основным вопросом является исследование соотношений между пальмовским распределением и соответствующим стационарным распределением. Более того, вводится новый класс стохастических процессов, связанных с точечными процессами, которые представляются более удобными для описания стационарного поведения систем обслуживания, — так называемые процессы с вложенными маркированными точечными процессами (см. п. 4.1).

Заметим, что этот класс процессов содержит как марковские, в том числе линейчатые (Ю. К. Беляев [17]) и кусочно-линейные (И. Н. Коваленко [58]), так и ряд хорошо известных немарковских процессов таких, как: полумарковские процессы; процессы с марковским и полумарковским вмешательством случая; марковские процессы восстановления (см. Цинлар [138]); полумарковские процессы с вспомогательными траекториями, рассматриваемые, например, Пайком и Шауфелем [336], Шелем [351, 352], Навроцки [80]; регенерирующие процессы (см. Феллер [157], Смит [371, 372], Коэн [141], С. Ю. Жолков и В. В. Рыков [38], В. В. Рыков [83—85], Г. П. Климов [231], процессы с

вложенными марковскими или полумарковскими процессами (см. С. М. Броди и И. А. Погосян [24], Т. К. Кухта [71]); кусочно-марковские процессы, рассматриваемые, например, в работах Кучуры [264], Копочински [249, 250] и Рольски [340, 341].

Другие процессы со специальными видами зависимостей исследовались Серфозо и Стидхэмом [364], И. И. Ежовым и В. М. Шуренковым [37].

В разделе 4.1 дается краткий обзор аппарата, используемого в литературе для вывода соотношений между стационарными по времени и по вложенным моментам характеристиками систем обслуживания с зависимыми интервалами между моментами поступления требований и длительностями обслуживания (см. Кёниг [235], Франкен, Кёниг, Аридт и Шмидт [171]). По существу, он опирается на принцип сохранения интенсивностей для процессов с вложенными маркированными точечными процессами (ПВТП), предложенный в работе Кёнига, Рольски, Шмидта и Штойяна [242], теорему Кэмпбелла (см. разд. 4.1, формулу 4.6) и на теорему о стохастическом усреднении для ПВТП, полученную в работу Франкена и Штреллер [95] и вытекающую из формулы обращения (2.1) для стационарных маркированных точечных процессов. При этом принцип сохранения интенсивностей состоит, грубо говоря, в том, что полная интенсивность входа (попадания) рассматриваемого стохастического процесса в некоторое подмножество X его пространства состояний должна быть равна полной интенсивности выхода из него. Подходящая формулировка этого относительного элементарного факта в виде теоремы 4.1.1 и ее следствий дает, наряду с теоремой Кэмпбелла и теоремой о стохастическом усреднении, действенный метод исследования вида соотношений между стационарными по времени и по вложенным моментам характеристиками СМО.

Применения принципа сохранения интенсивностей в задачах ТМО содержатся в работах [242, 244—246, 359]. Соответствующие применения теоремы Кэмпбелла и теоремы о стохастическом усреднении можно найти в [95, 169].

В пункте 4.2 содержится обзор соотношений между вложенными и невложенными характеристиками конкретных СМО. Метод вывода соотношений между вложенными и невложенными стационарными характеристиками некоторого общего класса инвариантных систем обслуживания был предложен Янсенем и Кёнигом [207], (подробности см. в п. 5.4.).

В последнее время в исследованиях по теории массового обслуживания и, в частности, для доказательства соотношений типа соотношения Литтла, стали использоваться также мартингаловые методы (см. Бремо и Жако [120]).

4.1. Процессы с вложенными маркированными точечными процессами (ПВТП). Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — строго стационарный

процесс с непрерывным временем на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с некоторым польским пространством состояний $(E, \mathcal{E})$, и пусть Φ является T_t -инвариантным случайным элементом на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в $(M_{E \times E}^\infty, \mathcal{M}_{E \times E}^\infty)$, т. е. стационарным маркированным точечным процессом на действительной прямой с пространством меток $(K, \mathcal{K}) = (E \times E, \mathcal{E} \times \mathcal{E})$. В дальнейшем процесс Φ часто отождествляется с порождаемым им вероятностным пространством $(M_K^\infty, \mathcal{M}_K^\infty, P)$, где P — распределение Φ на $\mathcal{M}_K^\infty$ или рассматривается как случайная последовательность $\{(\tau_i, \kappa_i)\}$ точек τ_i на действительной оси с метками κ_i из $(K, \mathcal{K})$. Координаты τ_i вложенного маркированного точечного процесса Φ будем называть «основными точками» процесса $\xi(t)$; при этом метки $\kappa_i = (\xi(\tau_i), \xi(\tau_i + 0))$ описывают поведение процесса $\xi(t)$ в момент τ_i и непосредственно следующий за ним момент $\tau_i + 0$.

Мы предполагаем, что интенсивность λ процесса Φ положительна и конечна, что траектории $\xi(t)$ непрерывны слева и имеют пределы справа, СВ $\kappa_i = (\xi(\tau_i), \xi(\tau_i + 0))$, $i = 0 \pm 1, \dots$ измеримы, а процессы $\xi(t)$ и Φ стационарно связаны, т. е. что векторный процесс (ξ, Φ) стационарен.

Стохастический процесс $\xi(t)$ с такими свойствами называется стационарным процессом с вложенным стационарным маркированным точечным процессом (ПВТП).

Величина

$$\mathcal{P}^\pm(X_1 \times X_2) = \frac{\lambda(X_1 \times X_2)}{\lambda}, \quad X_1, X_2 \in \mathcal{E}, \quad (4.1)$$

является совместным распределением пары $(\xi(\tau_i), \xi(\tau_i + 0)) = = \kappa_i$, где $\lambda(L)$ означает L -интенсивность процесса Φ . Таким образом, $\mathcal{P}^\pm$ определяется пальмовским распределением P^0 процесса Φ (см. формулу 2.4). Если процесс Φ не эргодичен, то такая интерпретация вероятностной меры $\mathcal{P}^\pm$ приводит к некоторым трудностям (см. Навроцки [311]).

Понятие ПВТП так же, как и большинство представленных в настоящем подразделе результатов, содержится в работах Кёнига [234], Кёнига, Рольски, Шмидта и Штойяна [242], Кёнига и Шмидта [243—246]. Независимо и другим путем класс ПВТП был введен в работе Франкена и Штреллера [95], где они были названы обобщенными регенерирующими процессами. Кроме того, в работе [95] была доказана эргодическая теорема для ПВТП.

Иногда полезно рассматривать в качестве меток основных точек не значение процесса $\xi(t)$ только в моменты τ_i и $\tau_i + 0$, но и поведение процесса во всем интервале между рассматриваемой и следующей основной точкой (см. Франкен и Штреллер [95], Франкен, Кёниг, Арндт и Шмидт [171]). В таком случае $\kappa_i(\omega) = (\xi(t, \omega), t \in [\tau_i(\omega), \tau_{i+1}(\omega)])$, $\omega \in \Omega$. Однако тогда прост-

ранство меток $(K, \mathcal{K})$ процесса Φ представляет собой относительно сложное функциональное пространство.

Для формулировки соотношений между вложенными и невложенными стационарными характеристиками ПВТП $\xi(t)$ потребуются некоторые дополнительные обозначения. Переходные вероятности

$$p_h(x, X) = P\{\xi(u+h) \in X | \xi(u) = x, \tau_i \in [u, u+h]\} \text{ для любого } i, \quad (4.2)$$

$(u \in R, h > 0, x \in E, X \in \mathcal{E})$ описывают поведение процесса $\xi(t)$ между основными точками. Так как $\xi(t)$ и Φ стационарно связаны, очевидно, что переходные вероятности $p_h(x, X)$ не зависят от $u \in R$, т. е. они являются однородными по времени.

Действительное число u назовем моментом попадания (входа), (соответственно, выхода) функции $f: R \rightarrow E$ в множество (из множества) $X \in \mathcal{E}$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f(u-v) \in X$, $f(u+v) \in X$ (соответственно, $f(u-v) \notin X$, $f(u+v) \notin X$) для всех $0 < v < \varepsilon$.

Понятие моментов входа и выхода используются при доказательстве теоремы сохранения интенсивностей. В работе Кёнига, Рольски, Шмидта и Штойяна [242] вводится семейство $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ измеримых подмножеств E , удовлетворяющее некоторым слабым условиям регулярности, для которого эта теорема имеет место. Одним из таких условий является следующее свойство почти равномерной непрерывности: множество $X \in \mathcal{E}$ принадлежит к $\mathcal{E}_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $Y \in \mathcal{E}_0$ такое, что $\lim_{n \downarrow 0} p_n(x, X) = \delta_X(x)$ равномерно по $x \in Y$, $\lambda(Y \times E) > \lambda - \varepsilon$.

Из определения $\mathcal{E}_0$ следует, что для $X \in \mathcal{E}_0$ моменты попадания (соответственно, выхода) из $\bar{X}$ в X (соответственно из X и $\bar{X}$) траекторий процесса $\xi(t)$, которые одновременно являются координатами (точками) Φ , образуют стационарный точечный процесс $\Phi^{1,x}$ (соответственно $\Phi^{0,x}$) с интенсивностью $\lambda^{1,x}$ (соответственно, $\lambda^{0,x}$); $\lambda^{1,x} = \lambda(\bar{X} \times X)$, $\lambda^{0,x} = \lambda(X \times \bar{X})$; $X = E \setminus \bar{X}$.

В работе Кёнига и Шмидта [244] уточняются условия на $\mathcal{E}_0$, и предлагаются несколько более расширенные семейства $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, соответственно.

Пусть $\mathcal{P}$ означает стационарное по времени распределение $\xi(t)$ в произвольный момент времени, $\mathcal{P}(X) = P\{\xi(t) \in X\}$ для любого $X \in \mathcal{E}$, $t \in R$.

4.1.1. Теорема. Для каждого $X \in \mathcal{E}_0$ имеем

$$a_{\mathcal{P}}(X) = \lambda(X \times \bar{X}) - \lambda(\bar{X} \times X), \quad (4.3)$$

где

$$a_{\mathcal{P}}(X) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_E p_h(x, X) \mathcal{P}(dx) - \mathcal{P}(X) \right\}.$$

Можно доказать аналог теоремы 4.1.1 в случае вложенного точечного процесса $\vec{\Phi}$, т. е. в случае, если рассматривается точечный процесс $\vec{\Phi} = \{\{\tau_i, (\kappa_i, \kappa_i^*)\}\}$, где СВ κ_i^* принимает значения из некоторого счетного множества K^* и интерпретируется как тип основной точки τ_i .

4.1.1а. Теорема. Для каждого $X \in \mathcal{E}_0$ имеем

$$a_{\mathcal{P}}(X) = \sum_{k^* \in K^*} \vec{\lambda}(X \times X \times \{k^*\}) - \sum_{k^* \in K^*} \vec{\lambda}(\bar{X} \times X \times \{k^*\}), \quad (4.3a)$$

где $\vec{\lambda}(\cdot)$ означает L -интенсивность процесса $\vec{\Phi}$.

В силу (4.1), формула (4.3) представляет собой некоторое соотношение между вложенным $\mathcal{P}^\pm$ и невложенным $\mathcal{P}$ -распределениями процесса $\xi(t)$. А именно, (4.3) может быть представлена в следующем виде.

4.1.2. Следствие. Равенства

$$a_{\mathcal{P}}(X) = \lambda(\mathcal{P}^-(X) - \mathcal{P}^+(X)), \quad (4.4)$$

где $\mathcal{P}^-$ и $\mathcal{P}^+$ означают распределения $\mathcal{P}^\pm(\cdot) = \mathcal{P}^\pm(\{\cdot\} \times E)$ и $\mathcal{P}^+(\cdot) = \mathcal{P}^\pm(E \times \{\cdot\})$ процесса $\xi(t)$ в моменты τ_i и $\tau_i + 0$, соответственно.

Если моменты попадания (соответственно, выхода) в (из) множество $X \in \mathcal{E}_0$ траекторий процесса $\xi(t)$, не являющиеся основными точками, образуют стационарный точечный процесс $\Phi_{I,X}$ соответственно, $\Phi_{0,X}$ с конечной интенсивностью $\lambda_{I,X}$ (соответственно, $\lambda_{0,X}$), то получаем

4.1.3. Следствие (принцип сохранения интенсивностей) Имеет место равенство $a_{\mathcal{P}}(X) = \lambda_{I,X} - \lambda_{0,X}$ и, следовательно, справедливо соотношение

$$\lambda_{I,X} + \lambda^{I,X} = \lambda_{0,X} + \lambda^{0,X}. \quad (4.5)$$

Заметим, что в книге Такача [383] исследования взаимосвязи между переходами вверх и вниз процессов со счетными пространствами состояний дают прототип равенства (4.5). Однако он предполагал счетность пространства состояний и рассматривал множества $X = \{k, k+1, \dots\}$ специального вида, не проводил различия между основными и неосновными точками и, следовательно, получил соотношения только между некоторыми вложенными характеристиками. Коэн [143], а также Брилл и Познер [121, 122] пользуются методом пересечений вверх и вниз для непрерывного пространства состояний $E = R$, но только для специальных множеств X вида $X = (u, \infty)$ и для специальных стохастических процессов $\xi(t)$, а именно для времени ожидания в одноканальных системах. По поводу случая, когда поведение ПВТП между последовательными основными точками является марковским, см. Кучура [264],

Янкевич [201, 202], Янкевич и Рольски [203], Рольски [340, 341].

Следующая теорема дает достаточное условие того, что распределение $\mathcal{P}$ процесса $\xi(t)$ в произвольный момент времени совпадает с распределением $\mathcal{P}^-$ процесса $\xi(t)$ в основных точках. Дальнейшие условия такого типа приводятся в монографии [171].

4.1.4. Теорема. Если $\xi(0)$ и τ_1 независимы, то $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}^-(X)$ для всех $X \in \mathcal{E}_0$.

Благодаря предположениям стационарности, это условие означает, что значение процесса $\xi(t)$ в произвольный момент времени и остаточное время до следующей основной точки являются независимыми СВ. Оно удовлетворяется, если, например, последовательность основных точек образует пуассоновский процесс и СВ $\xi(t)$ не зависит от поведения этого пуассоновского процесса в интервале $(t, +\infty)$.

Более того, упомянем так называемую теорему Кэмпбелла, вытекающую из (2.3) и (2.4).

4.1.5. Теорема. Для любой неотрицательной измеримой измеримой функции f на $R \times K$ со значениями в R_+ имеет место формула:

$$\int_{M_K^\infty} \int_{R \times K} f(a) \varphi(da) P(d\varphi) = \int_{R \times K} f(a) \nu_P(da), \quad (4.6)$$

где $\nu_P(X) = \sum_{j=0}^{\infty} j P\{\Phi(X) = j\}$, $X \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{K}$.

Формула (4.6) использовалась, в частности, для доказательства результатов типа соотношения Литтла (см. Франкен [169]). В некоторых случаях могут возникнуть трудности при исследовании интегралов в (4.6) из-за их глобального характера. Аналогичные проблемы связаны с использованием формулы обращения (2.1) для получения соотношений между вложенными и невложенными характеристиками конкретного процесса обслуживания. Заметим, что (2.1) можно интерпретировать как усиление теоремы о стохастическом усреднении, доказанной в работе Козна [141] для регенерирующих процессов (см. также [95]).

4.2. Соотношения для конкретных процессов обслуживания. Теперь обсудим соотношения между стационарными по времени и по вложенным моментам характеристиками для конкретных процессов обслуживания. Все результаты данного раздела были доказаны с помощью принципа сохранения интенсивности, а точнее, при помощи его подходящей формулировки в виде теоремы 4.1.1. (см. [171], [242, 244—246]). Для небольшого числа соотношений, в частности, для результатов типа соотношения Литтла, теорема Кэмпбелла (4.6) и формула обращения (1.2), соответственно, приводят к несколько более кратко-

му доказательству. С другой стороны, в многочисленных случаях принцип сохранения интенсивностей—это единственное средство, доступное в настоящее время, для вывода упомянутых соотношений. Во всяком случае, он позволяет установить максимальную область их справедливости и найти обобщения, хорошо известные в литературе при более сильных предположениях о независимости соотношений.

4.2.1. Некоторые элементарные результаты. Пуассоновский входящий поток. Будем обозначать через p_k , $p_k = P\{\varphi \in M_K^\infty : l(0, \varphi) = k\}$ стационарные по времени вероятности того, что в произвольный момент времени в системе $G|G|s|r$ находятся k требований, $k=0, 1, \dots, s+r$. Соответствующие стационарные по моментам поступления и ухода вероятности заставить и оставить в системе k требований обозначаются через $p_k^0 = P^0\{\varphi \in M_K^0 : l(0, \varphi) = k\}$ и $p_k^* = P^*\{\varphi \in M_K^0 : l(0+0, \varphi) = k\}$, где P^0 , соответственно, P^* означают пальмовские распределения входящей, соответственно, выходящей последовательностей. Если необходимо различать несколько типов требований, то дополнительно рассмотрим стационарные по моментам поступления вероятности $p_{k,j}$ того, что поступающее требование типа j ($j \in K^*$) застает в системе k требований.

Обозначим через $l(0)$, $l^0(0)$, $l^*(0+0)$ некоторые СВ, распределенные по законам p_k , p_k^0 , p_k^* , соответственно. Аналогично, пусть $v(0)$ и $v^0(0)$ означают случайные величины, распределенные как стационарные по времени и по моментам поступления количества работы. Функцию распределения первых компонент векторов $v(0)$, $v^0(0)$ обозначим через $V(\cdot)$ и $V^0(\cdot)$.

4.2.1.1. Теорема. Для системы $G|G|s|r$ имеет место равенство

$$p_k^0 = p_k^*, \quad (4.7)$$

т. е. случайные величины $l^0(0)$ и $l^*(0+0)$ одинаково распределены (или более формально $l^0(0) \stackrel{d}{=} l^*(0+0)$).

Этот хорошо известный факт для случая $GI|GI|\cdot|\cdot$ был получен, например, в работах [159, 262, 303, 368, 383]. Доказательство, данное Франкеным [94, 169] для системы $G|G|\cdot|\cdot$, по существу основано на классическом принципе сохранения интенсивностей, используемом Такачем [383], (см. также [244, 245]). Заметим, что для количества работы аналогичная теорема не верна.

4.2.1.2. Теорема. Для системы $M|G|s|r$ с пуассоновским входящим потоком справедливы, кроме того, соотношения

$$l(0) \stackrel{d}{=} l^0(0) \quad (4.8)$$

и

$$v(0) \stackrel{d}{=} v^0(0). \quad (4.9)$$

Этот результат является немедленным следствием теоремы 4.1.4 (см. Кёниг, Рольски, Шмидт и Штойян [242], Кёниг и Шмидт [244]). Другое доказательство теоремы 4.2.1.2 можно найти в работе Франкена, Кёнига, Арндта и Шмидта [171]. Для систем $M|GI|\cdot|$ совпадение этих стационарных вложенных и невложенных характеристик обсуждалось в литературе по ТМО многими авторами (см. [96, 141, 149, 169, 188, 193, 231, 367, 374, 381]).

Кёнигом, Рольски, Шмидтом и Штойяном [242] показано, что соотношения $l(0) \stackrel{d}{=} l^2(0)$ и $v(0) \stackrel{d}{=} v^2(0)$ справедливы для систем $G+M|G|s|r$, где $l^2(0)$ (соответственно, $v^2(0)$) имеют стационарное по моментам поступления требований 2-го типа, образующих пуассоновский поток, распределение числа требований (соответственно, количества работы) в системе.

4.2.2. Общие результаты. В работе Кёнига и Шмидта [245] были получены системы уравнений, связывающие распределения p_k , p_k^0 , p_k^* для общей системы вида $G|G|s|r$ (см. также [244, 306]), которые имеют вид

$$\begin{aligned} \min(k, s) p_k + \min(k-1, s-1) \lambda m_{B, k-1}^{R*} p_{k-1}^* - \lambda \mu_k p_k^* = \\ = \lambda v_{k-1} p_{k-1}^0 - \min(k, s) \lambda m_{B, k}^R p_k^1, \quad 1 \leq k \leq s+r, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_k &= \begin{cases} k m_{B, k}^{R*}, & \text{при } 1 \leq k < s, \\ m_{B, k}^* + (s-1) m_{B, k}^{R*}, & \text{при } s \leq k \leq s+r; \end{cases} \\ v_{k-1} &= \begin{cases} m_{B, k-1} + (k-1) m_{B, k-1}^R & \text{при } 1 \leq k \leq s, \\ s m_{B, k-1}^R, & \text{при } s < k \leq s+r. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $m_{B, k}^R$ (соответственно, $m_{B, k}^{R*}$) означает среднее остаточное количество работы по обслуживанию случайным образом выбранного занятого обслуживающего прибора в момент поступления (соответственно, выхода) требования, застающего (соответственно, оставляющего) k требований в системе. Через $m_{B, k}$ и $m_{B, k}^*$ обозначаются соответствующие средние значения «новых» длительностей обслуживания. В частности для системы $G|G|1|r$ имеет место формула

$$p_k - \lambda m_{B, k}^* p_k^* = \lambda v_{k-1} p_{k-1}^0 - \lambda m_{B, k}^R p_k^0, \quad 1 \leq k \leq r+1.$$

Эту и другие системы уравнений, полученные в [244, 245], можно рассматривать как далеко идущие обобщения результатов, приведенных в разделе 4.2.1. Используя метод марковизации процесса $l(t)$ путем введения дополнительных переменных, Копчинска и Копчински [254], (см. также [203, 251]), получили аналогичные соотношения для классической многоканальной системы с ожиданием $GI|GI|s|\infty$.

Упомянутая выше система уравнений содержит в виде следствий некоторые хорошо известные соотношения и в то же время позволяет установить максимальную область из применимости. Например, что для системы $G|GI|s|0$ отношение

$$k p_k = \rho p_{k-1}^0 \quad (4.10)$$

имеет место тогда и только тогда, когда справедливы уравнения усиленного равновесия:

$$m_{B,k}^R = m_{B,k}^{R*}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1$$

намного более сильные, чем (4.7). Шмидт [359] (см. также Ле Галль [267, 268]) привел контрпример, показывающий, что для системы $G|GI|s|0$ без некоторых дополнительных условий соотношение (4.10) не имеет, вообще говоря, места. Для системы $G|GI|1|0$ соотношение (4.10) справедливо без каких-либо дополнительных условий. Для системы $M|G|s|0$, рассматривавшейся в разделе 3.3, подобное утверждение следует из результатов Фляйшмана [163, 164], (см. также [209]), а для системы $M|GI|s|0$ из результатов Такача [385] и Шанбага и Тамбурациса [368]. Для системы $G|G|s|0$ соотношение (4.10) имеет место в несколько модифицированном виде, если соблюдаются вышеупомянутые уравнения усиленного равновесия. При показательно распределенных длительностях обслуживания, формула (4.10) справедлива также для систем $M|G|s|r$ с ожиданием ($r > 0$) (см. А. А. Боровков [19], Франкен [169], Такач [383]). В работе Франкена, Кёнига, Арндта и Шмидта [171] доказательство соотношения (4.10) для системы $G|M|s|r$ проводится с помощью теории мартингалов. Системы с несколькими типами требований и переменными скоростями обслуживания c_k , зависящими от числа k требований в системе, рассмотрены в работе [245]. Для систем $\vec{G}|M|s|r$ такого типа соотношение (4.10) принимает вид

$$\min(k, s) c_k p_k = \sum_{j \in K^*} \lambda_j m_B p_{k-1,j} \quad (1 \leq k \leq s+r), \quad (4.11)$$

где λ_j означает интенсивность потока требования типа j . В частности, для системы $G + M|M|s|r$ это приводит к равенству

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_1 \lambda_2^{k-1-i}}{\prod_{j=i+1}^k \mu_j} p_{i,1} = p_k - \frac{\lambda_2^k}{\prod_{j=1}^k \mu_j} p_0, \quad (1 \leq k \leq s+r), \quad (4.12)$$

где $\mu_j = \min(s, j) \frac{c_j}{m_B}$ — суммарная интенсивность обслуживания, если в системе находятся j требований. Для системы $GI + M|M|s|r$ соотношение (4.12) было доказано в работе Копочинска и Копочински [253], (см. также [175, 265, 348]).

Если интервалы между моментами поступления требований (соответственно, длительности обслуживания) обладают ста-

реющим или молодеющим в среднем распределениями, то в качестве обобщения (4.8) можно получить простые стохастические неравенства между стационарными по времени и по вложенным моментам характеристикам. Например, если интервалы между моментами поступления требований в систему $G|G|s|r$ обладают стареющим (молодеющим) распределением, то имеет место неравенство

$$\sum_{k=j}^{s+r} p_k \geq (\leq) \sum_{k=j}^{s+r} p_k^0 \quad (4.13)$$

или $n(0) \stackrel{(1)}{\geq} (\stackrel{(1)}{\leq}) n^0(0)$. Результаты в этом направлении можно найти, например, в работах [246, 247, 292, 303, 359].

Более того, формулы типа Литтла, например:

$$Ml(0) = \lambda M_{v^0}(0) \text{ для } G|G|s|\infty \quad (4.14)$$

и

$$p_0 = 1 - \rho \text{ для } G|G|1|\infty \quad (4.15)$$

также можно получить из общих систем уравнений, выведенных Кёнигом и Шмидтом [245]. Однако в этом случае с помощью теоремы Кэмпбелла (4.6) можно получить их прямое доказательство (см. [171]), где рассматривается также случай переменных скоростей обслуживания нескольких типов требований и системы с приоритетами (см. также [214]). Заметим, что формулы типа (4.14) — (4.15) и их обобщения рассматривались многими авторами (см. [19, 46, 85, 108, 123, 124, 169, 186, 261, 269, 270, 284, 291, 326, 339, 343, 353, 375, 376]).

Для случая независимых интервалов между моментами поступления требований, аналогичные соотношения между соответствующими распределениями, а не только их средними значениями, приведены в работах А. А. Боровкова [19], Франкена, Кёнига, Арндта и Шмидта [171], Хайи и Ньюэлла [183], Шассбергера [353], Штойяна [378].

О дальнейших исследованиях в этом направлении см. работы [35, 76, 116, 133, 185, 228, 328, 361, 397].

Заметим, что формулы типа формулы Литтла являются соотношениями между стационарными по времени и по вложенным моментам характеристиками двух различных процессов обслуживания, а именно числа требований и количества работы в системе, соответственно. Ниже приводится обзор соотношений между стационарными характеристиками самого процесса количества работы. Миязава [305] вывел общее соотношение между векторами виртуального и актуального времени ожидания для системы $G|G|s|\infty$ с дисциплиной обслуживания в порядке очереди. Кёниг, Шмидт [245] распространили его на систему $G|G|s|r$ с более общей дисциплиной обслуживания и переменными скоростями обслуживания. В виде частного случая

можно получить формулу для стационарной по времени ФР виртуального времени ожидания, выведенную в работе [255] для системы $GI|GI|s|\infty$. В [247] эта формула была обобщена на систему $\vec{G}|\vec{G}|s|\infty$ с несколькими типами требований. Для системы $\vec{G}|GI|1|\infty$ имеет место хорошо известная формула

$$V(x) = 1 - \rho + \rho(V^0 * B_R)(x), \quad x \geq 0, \quad (4.16)$$

где $B_R(x) = \frac{1}{m_B} \int_0^x (1 - B(u)) du$ является стационарной по времени ФР остаточного времени обслуживания занятым прибором а $V(\cdot)$ и $V^0(\cdot)$ означают стационарные по времени и по моментам поступления, соответственно, ФР количества работы. Для системы $GI|GI|1|\infty$ соотношение (4.16) и некоторые связанные с ним соотношения были впервые получены Такачем [384]. Лемуан [271] вывел его также для системы $GI|GI|1|\infty$, пользуясь рассуждениями применимыми и для случая зависимых интервалов между моментами поступления требований и длительностей обслуживания (см. [171], раздел 4.5). Исходя из тех же соображений равновесия, как и те, что использованы в теореме 4.1.1, Коэн [143], (см. также [121, 122]), доказал формулу (4.16) для системы $GI|GI|1|\infty$. Другие доказательства соотношения (4.16) для системы $GI|GI|1|\infty$ были даны Коэном [140, 141], Харрисоном и Лемуаном [188]. В работе Харрисона и Лемуана [189] рассматривался также случай периодического входящего потока. Более того, были рассмотрены обобщения соотношения (4.16) на системы с полумарковским входящим потоком, с групповым поступлением, с равномерно ограниченным количеством работы и с разогревом (см. Кёниг и Шмидт [244], Шмидт [359], Франкен, Кёниг, Арндт и Шмидт [171]). При этом результаты Ньюотса [317], Коэна [140, 142], Бёрка [126], Лемуана [274], Такача [386] были распространены на случай зависимых интервалов между моментами поступления.

Если интервалы между моментами поступления требований (соответственно длительности обслуживания) обладают молодёющими или стареющими в среднем распределениями, можно получить стохастические неравенства между стационарными по времени и по вложенным моментам характеристиками, аналогичные (4.13) (см. Кёниг и Шмидт [246]). Более того, из этих неравенств в некоторых случаях можно получить даже явные оценки для характеристик (см. [171, 246, 303, 307, 308, 341, 359, 378]).

Упомянем, наконец, что, как показано в монографии [171], подобные же соотношения между стационарными по времени и по вложенным моментам характеристиками замкнутых систем обслуживания, например, в задаче обслуживания станков, также справедливы при наличии зависимостей. В этом направле-

нии были обобщены соответствующие результаты Такача [383] и Хайна [192], доказанные первоначально для независимых длительностей жизни и ремонта.

§ 5. ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ

5.0. Вводные замечания. В ТМО хорошо известна следующая постановка вопроса инвариантности: при каких условиях стационарные вероятности состояний рассматриваемых систем обслуживания не зависят от формы распределения основных СВ — СВ, составляющих управляющие последовательности (например, длительностей обслуживания), если их средние значения фиксированы. В данном разделе рассматриваются результаты, относящиеся к этой проблеме инвариантности (нечувствительности) для широкого класса СМО, содержащего, в частности, одноканальные и многоканальные системы с потерями, системы с разделением процессора и системы сложной структуры, модели обслуживания станков, а также сети СМО и некоторые частные случаи СМО с ожиданием.

Для систем с потерями уже Эрланг [156] высказывал предположение об их инвариантности, утверждая, что стационарные вероятности состояний системы $M|GI/s|0$ с некоторыми распределениями длительностей обслуживания при фиксированном их среднем значении совпадают. В последующие годы многие авторы исследовали эту проблему инвариантности, рассматривая все более общие типы распределений длительности обслуживания (см., например, [139, 165, 256, 388]). Но только Б. А. Севастьянов [86] дал исчерпывающий ответ для системы $M|GI/s|0$ с помощью метода дополнительных переменных. Он доказал, что для системы $M|GI/s|0$ существует эргодическое стационарное распределение вероятностей состояний, которое не зависит от распределения длительности обслуживания, если его среднее значение фиксировано. О системах с ненадежными приборами см. Т. П. Марьянович [77—79], Ю. Ф. Якушев [101], П. И. Жук [39].

Для широкого класса многолинейных моделей И. Н. Коваленко [58, 62] получил число алгебраическое необходимое и достаточное условие инвариантности в предположении о независимости рассматриваемых основных случайных величин. При этом были выведены также формулы для стационарных вероятностей состояний (см. также [59]). Эта работа И. Н. Коваленко дала толчок для ряда дальнейших исследований инвариантности подбных систем (см. Б. Т. Гусейнов [33, 181], Г. П. Башарин и В. А. Кокотушкин [13], Н. Ю. Кузнецов [68—70]). При этом Б. Т. Гусейнов [33] обобщил модель Коваленко, допуская, что рассматриваемые основные случайные величины, такие как, например, интервалы между моментами поступлений или длитель-

ности обслуживания, реализуются с положительными скоростями (см. также [181, 69]).

Г. П. Башарин и В. А. Кокотушкин [13] распространили результаты Коваленко на модели более сложной структуры, включающие многозвеньевое обслуживание и произвольные алгоритмы управления. Аналогичные критерии для СМО сложной структуры, получены в монографии Кёнига, Маттеса и Навроцки [240].

Н. Ю. Кузнецов [68] рассмотрел случай, когда ФР длительностей обслуживания требований зависят от состояния системы в момент начала обслуживания рассматриваемого требования.

Независимо от И. Н. Коваленко, Маттес [293, 294] ввел некоторую общую схему обслуживания, описывающую механизм обслуживания в СМО. Предполагая независимость всех рассматриваемых основных случайных величин и существование их плотностей, он также получил алгебраические критерии устойчивости. Более того, он заметил, что для выполнения свойства инвариантности рассматриваемая схема обслуживания должна обладать определенной симметричной и простой структурой. Позже, концепция Маттеса была обобщена, в основном, в двух направлениях. Во-первых, удалось освободиться от предположения о независимости некоторых основных СВ, например, длительностей обслуживания фиксированным прибором, а некоторые характеристики обслуживания рассмотреть в виде «мек» поступающих требований. Это привело к применению теории маркированных точечных процессов, которая оказалась подходящим аппаратом исследования подобных явлений. С их помощью Кёниг и Маттес [239] обобщили формулы Эрланга на систему $M|G|s|0$ с зависимыми длительностями обслуживания. Кёниг [232] доказал инвариантность системы Энгсета с потерями с зависимыми основными случайными величинами. При этом были обобщены результаты Козна [139], полученные при классических предположениях независимости. В монографии Кёнига, Маттеса и Навроцки [240] (см. также [241]) результаты исследований вопросов инвариантности изложены на достигнутом к тому времени уровне, при этом одна из глав посвящена исследованию схем обслуживания с зависимостями.

Вторым направлением обобщений явилось допущение наличия различного вида функциональных зависимостей. Так, в работах Кёнига [50], Янсена, Кёнига и Навроцки [209], наряду с зависимостями основных случайных величин, в рамках схемы обслуживания допускаются функциональные зависимости, описываемые неотрицательными скоростями реализации основных случайных величин. Модели с переменными скоростями обслуживания позволяют охватить случаи прерываний и переменных интенсивностей поступления или обслуживания. Такие эффекты появляются, например, в вычислительных системах с разде-

лением процессора. Коэн [144] рассмотрел довольно общие системы этого типа, а именно так называемые многофазные сети обслуживания с обобщенным разделением процессора. Весьма примечателен тот факт, что стационарное распределение числа сообщений на различных узлах допускает мультипликативное представление. Более того, свойство инвариантности этих моделей можно вывести из общей теории инвариантности схем обслуживания со скоростями. Для схем обслуживания со скоростями при независимых основных СВ инвариантность была исследована Кёнигом и Янсеном [207, 236, 237]. Обзор свойств инвариантности некоторых систем обслуживания с независимыми основными СВ приводится в работе Янсена, Кёнига, Коцурека и Рабе [238]. При этом оказалось, что модели, исследованные в [13, 33, 38, 63, 77, 78, 104, 181, 289, 290], могут быть включены в класс схем обслуживания с переменными скоростями.

Для исследования свойств инвариантности обобщенных полумарковских процессов, описывающих класс моделей подобных схемам обслуживания Шассбергер [354, 357, 358] использовал метод фаз Эрланга. Однако этот подход приводит к некоторым трудностям: если нет подходящих теорем непрерывности, распределение основных случайных величин должно иметь дробно-рациональные преобразования Лапласа — Стилтеса (см. п. 3.9).

Недавно появился ряд работ, касающихся инвариантности сетей обслуживания (см. [14, 109, 218, 219, 357, 379]). Заметим, что общий метод исследования инвариантности схем обслуживания можно использовать для получения соответствующих результатов для сетей массового обслуживания, так как их можно рассматривать как частный случай схемы обслуживания (см. [208, 209]).

Изучались также модели с некоторым свойством так называемой ограниченной инвариантности. Например, Якоби [199], Кёниг, Маттес и Навроцки [240], Чайкен и Игналл [128], Кёниг, Янсен, Коцурек и Рабе [238], Вольф и Райтсон [398] исследовали систему Эрланга с потерями со специальными правилами занятия приборов. Система с ожиданием $M|G|1|1$ с дисциплиной обслуживания, введенной Шраге и Миллером [362], также относится к этому типу систем (см. А. В. Печинкин, А. Д. Соловьев и С. Ф. Яшков [81]).

Ниже основное внимание концентрируется на общем методе исследования свойств инвариантности схем обслуживания с зависимыми основными случайными величинами и с функциональными зависимостями, описываемыми маркированными точечными процессами и скоростями, соответственно. В таком общем виде упомянутый выше подход был развит Кёнигом, Маттесом и Навроцки [240, 241] без скоростей и Янсеном, Кёнигом и Навроцки [209] со скоростями. Прежде всего, мы дадим понятие схемы обслуживания и построим подходящий стохастический процесс, описывающий ее эволюцию во време-

ни. Затем следует точное определение понятия инвариантности и приводятся алгебраические критерии инвариантности для рассматриваемых схем обслуживания. Необходимый и достаточный критерий инвариантности Коваленко [58, 59] и дальнейшие результаты в этом направлении рассматриваются в п. 5.2. В п. 5.3 рассматривается инвариантность конкретных систем. В п. 5.4 обсуждаются некоторые свойства инвариантных схем обслуживания, касающиеся, например, соотношений между вложенными и невложенными стационарными вероятностями, средними длительностями пребывания в фиксированных подмножествах состояний, а также свойства быть пуассоновским соответствующим образом определенного выходящего потока. Наконец, в п. 5.5 показано, каким образом сети массового обслуживания включаются в общую теорию в качестве схем обслуживания особой структуры.

5.1. Схемы обслуживания. Алгебраические критерии инвариантности. Формальное описание общих систем массового обслуживания, или схем обслуживания, приведенное в данном разделе, опирается на работы Кёнига, Маттеса, Навроцки и Янсена [207, 209, 237, 240, 241]. Его можно интерпретировать как многомерное обобщение полумарковских моделей, при котором, в отличие от последней, одновременно может реализоваться несколько непоказательно распределенных основных случайных величин. При этом описании не делается различия между источниками требований и приборами, а СМО рассматривается с более общей точки зрения как система, состоящая из некоторого конечного множества объектов, каждый из которых может находиться в одном из конечного множества так называемых «активных» или «пассивных» состояний.

Более формально пусть J — конечное непустое множество, элементами которого являются номера объектов рассматриваемой СМО. Для каждого $j \in J$ заданы два конечных (непересекающихся и непустых) множества C_j и D_j активных и пассивных состояний j -ого объекта, соответственно. Каждое активное состояние $i \in C_j$, $j \in J$, обладает некоторыми «потенциальными» случайными длительностями пребывания объекта в этом активном состоянии — «длительностями жизни» активного состояния, другими словами, в каждом активном состоянии объекта выполняется некоторое случайное количество работы. Пусть $G, G \equiv \bigtimes_{i \in J} (C_j \cup D_j)$, где символом $\times$ обозначается прямое произ-

ведение множеств, обозначает множество всех состояний g рассматриваемой системы, а J_g — множество «активных» (находящихся в активном состоянии) объектов для состояния $g \in G$. Зададим для каждого объекта $j \in J_g$ скорости $c_{j,g}$, $0 < c_{j,g} < \infty$, реализации длительности пребывания j -ого объекта в активном состоянии g_j , когда вся система находится в состоянии $g = (g_i, i \in J)$. Состояния системы могут изменяться в момен-

ты окончания длительности пребывания любого объекта в активном состоянии. Предполагается, что множество $J_g' = \{j: j \in J, c_{j,g} > 0\}$ не пусто для любого $g \in G$. Предполагается также, что завершение длительности пребывания какого-либо объекта в активном состоянии не может привести к прерыванию (текущих) длительностей жизни других состояний, т. е. что $p(g, s, g') = 0$, если $g_j' \neq g_j$ для некоторого $j \in J_g \setminus \{s\}$. Здесь $p(g, s, g')$ означает вероятность перехода (скачка) системы из состояния g в состояние g' при окончании активного состояния s -го объекта $s \in J_g'$.

Стохастическая модель, определенная элементами $(J, C_j, D_j, G, c_{j,g}, p(g, s, g'))$, называется схемой обслуживания.

Для каждого $j \in J$ рассмотрим подмножество I_j активных состояний $I_j \subseteq C_j$ с произвольно распределенными длительностями жизни. Допускается, чтобы последовательно реализующиеся во времени длительности пребывания объекта $j \in J$ в активном состоянии $i \in I_j$ были зависимыми. Напротив, все длительности жизни активных состояний из $C_j \setminus I_j$ для любого $j \in J$ показательно распределены.

Помимо уже введенных величин, определим для каждой пары $(i, j) \in \Delta$, $\Delta = \bigcup_{j \in J} (I_j \times \{j\})$ конечное положительное дейст-

вительное число v_{ij} , где v_{ij}^{-1} — средняя длительность пребывания объекта в своем активном состоянии $i \in C_j$, и некоторый стационарный маркированный точечный процесс Φ_{ij} с интенсивностью v_{ij} , описывающий последовательность длительностей жизни активных состояний объектов $i \in C_j$, $j \in J$. Каждый стационарный маркированный точечный процесс Φ_{ij} может сам по себе представлять некоторую СМО, например, точки процесса Φ_{ij} можно интерпретировать либо как моменты начала, либо как моменты окончания некоторых «периодов занятости» рассматриваемой системы. Эта система может состоять, например, из ненадежного прибора, так что прибор может отказывать во время обслуживания. Тогда обслуживание прерывается и начинается ремонт. Если «время жизни» прибора распределено показательно, то в начале каждого нового цикла обслуживания можно допустить независимость его длительности от прошлого. При этом судьба прерванного обслуживания безразлична (абсолютный приоритет с продолжением прерванного обслуживания, абсолютный приоритет с повторением прерванного обслуживания, потеря). Однако если срок службы прибора распределен непоказательно, то в начале нового цикла обслуживания прибор уже может быть в употреблении и, следовательно, длительности обслуживания будут, вообще говоря, зависимыми. Для формулировки критериев инвариантности потребуются некоторые дополнительные ограничения на класс рассматриваемых схем обслуживания, которые формулируются в виде свойств $e(I_j, j \in J)$ и $e_1(I_j, j \in J)$.

Для данного семейства $\{U_j, j \in J\}$ свойство $e(\{U_j, j \in J\})$ рассматриваемой схемы обслуживания означает, что с положительной вероятностью не более одного объекта может одновременно войти в активное состояние с произвольно (т. е. необязательно показательно) распределенной длительностью жизни. Кроме того, рассматривается условие $e_1(\{U_j, j \in J\})$, которое говорит, что реализация каждой произвольно распределенной длительности жизни начинается с положительной скоростью. Эти свойства могут выражаться определенным условием на вероятности перехода $p(g, s, g')$. Заметим, что свойство $e_1(\{U_j, j \in J\})$ всегда может быть достигнуто путем введения дополнительных пассивных состояний объекта.

Схема обслуживания называется неприводимой, если для каждой пары состояний системы $g, g' \in G$ с положительной вероятностью можно перейти из g в g' по некоторой конечной последовательности переходов.

Для данного состояния $g = (g_j) \in G$ введем следующие микросостояния y рассматриваемой схемы обслуживания: $y = (g, \varphi_{ij}, (i, j) \in \Delta)$, где $\varphi_{ij} \in N_{ij}^\infty$, если $i = g_j \in I_j$, и $\varphi_{ij} \in N_{ij}^0$ в противном случае. Здесь $N_{ij}^\infty = \{\varphi: \varphi \in M_{K_{ij}}^\infty, \varphi((0, +\infty) \times K_{ij}) = 0\}$, $N_{ij}^0 = \{\varphi: \varphi \in M_{K_{ij}}^0, \varphi((0, +\infty) \times K_{ij}) = 0\}$. При этом компонента φ_{ij} микросостояния y является реализацией истории состояния i объекта j .

Пусть E_g означает множество всех микросостояний с состоянием $g \in G$. Тогда множество $E = \bigcup_{g \in G} E_g$ с соответствующим об-

разом выбранной σ -алгеброй измеримых подмножеств образует пространство состояний некоторого стохастического процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, который описывает эволюцию рассматриваемой схемы обслуживания во времени. Этот процесс строится следующим образом: исходя из фиксированного начального состояния $y = (g, \varphi_{ij}, (i, j) \in \Delta) \in E$, в момент $t=0$ каждая реализация φ_{ij} , $i = g_j \in I_j$ сдвигается с соответствующей скоростью c_{jg} до следующего момента изменения состояния g системы, которое может быть вызвано завершением показательно или неположительно распределенных длительностей жизни активного состояния, т. е. предполагаем, что если в интервале $[0, t]$ не происходит изменения состояния g в момент t , компонента φ_{ij}^t микросостояния, соответствующая φ_{ij} , имеет вид $\varphi_{ij}^t = T_{c_{jg}t} \varphi_{ij}$. В момент скачка система переходит в некоторое новое состояние g' в соответствии с вероятностями перехода $p(g, s, g')$, а φ_{ij}^t изменяются в соответствии с распределениями процессов Φ_{ij} . После этого эволюция системы продолжается, как было описано выше. При этом предполагается для простоты, что с вероятностью 1 одновременно может закончиться активное состояние не более одного объекта. Однако для рас-

смаатриваемых далее стационарных начальных распределений стохастического процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, это условие удовлетворяется автоматически.

Стохастический процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, с «дополнительными переменными» $\Phi_{g,j}$ является однородным марковским процессом с непрерывным временем. Если все длительности пребывания в активных состояниях распределены показательно, то, естественно, необходимость в дополнительных переменных отпадает и $\xi(t)$ представляет собой марковский процесс с конечным пространством состояний G . В таком случае распределение $\{p_g, g \in G\}$ на G является стационарным начальным распределением процесса $\xi(t)$ тогда и только тогда, когда p_g удовлетворяют следующей системе Z уравнений равновесия:

$$\left(\sum_{j \in J_g} c_{jg} \nu_{g,j} \right) p_g = \sum_{g' \in G} \sum_{s \in J_{g'}} c_{sg'} \nu_{g',s} p(g', s, g) p_{g'}, \quad g \in G. \quad (5.1)$$

Из хорошо известных эргодических теорем для марковских процессов с конечным пространством состояний следует, что Z имеет единственное вероятностное решение p_g с $p_g > 0$ для всех $g \in G$ тогда и только тогда, когда соответствующая схема обслуживания неприводима.

5.1.1. Определение. Будем говорить, что неприводимая схема обслуживания обладает свойством инвариантности $E(\{I_j, j \in J\})$ относительно семейств активных состояний I_j рассматриваемых объектов, если при любом выборе распределений P_{ij} стационарных маркированных точечных процессов Φ_{ij} , $(i, j) \in \Delta$, с фиксированными интенсивностями ν_{ij} , процесс обслуживания $\xi(t)$ имеет, по крайней мере, одно стационарное начальное распределение Q такое, что $p_g, p_g = Q(E_g)$ является решением систем Z , а

$$Q(y: y = (g, \Phi_{ij}), \Phi_{i_0, j_0}(\cdot) | g_{i_0} = i_0) = P_{i_0, j_0}(\Phi: \Phi \in M_{K_{i_0, j_0}}^\infty, \Phi^- \in (\cdot)) \quad (5.2)$$

для каждого $(i_0, j_0) \in \Delta$, где $\Phi^- (\cdot) = \Phi((\cdot) \cap (-\infty, 0] \times K_{ij})$.

5.1.2. Теорема (Янсен, Кениг и Навроцки [209]). Рассмотрим неприводимую схему обслуживания. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Имеет место свойство инвариантности $E(\{I_j, j \in J\})$ и свойство $e_1(\{I_j, j \in J\})$.

2) Пусть $Q, Q = \sum_{g' \in G} p_{g'} Q(\cdot | g = g')$ — распределение на $(E, \mathcal{E})$, определяемое некоторым распределением p_g на G с помощью мультипликативного представления

$$Q(\cdot | g = g') = \times_{(i,j) \in \Delta} H_{ij}^{g'},$$

$$H_{ij}^{g'} = \begin{cases} P_{ij}(\Phi: \Phi \in M_{K_{ij}}^\infty, \Phi^- \in (\cdot)), & \text{если } i = g'; \\ P_{ij}^0(\Phi: \Phi \in M_{K_{ij}}^0, \Phi^- \in (\cdot)), & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (5.3)$$

где P_{ij}^0 (или P_{ij}) означает пальмовское (или соответствующее стационарное) распределение процесса Φ_{ij} . Распределение Q является стационарным начальным распределением процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, при любом выборе распределений P_{ij} и P_{ij}^0 , соответственно, с фиксированными интенсивностями ν_{ij} .

3) Вероятностное решение системы Z удовлетворяет следующей системе уравнений $Z'(I_j, j \in J)$:

$Z'1$:

$$\left(\sum_{j \in J'_g \setminus U_g} c_{jg} \nu_{gjj} \right) p_g = \sum_{g' \in G_{U_g, g}} \sum_{s \in J'_g \setminus U_g} c_{sg'} \nu_{g's} p(g', s, g) p_{g'}, \quad g \in G; \quad (5.4)$$

$Z'2$:

$$\begin{aligned} c_{ug} \nu_{g_u, u} p_g = & \sum_{g' \in G_{U_g, g} \setminus \{u\}, g': c_{ug'} > 0} c_{ug'} \nu_{g'_u, u} p(g', u, g) p_{g'} + \\ + & \sum_{g' \in G_{U_g} \setminus \{u\}, g \in G_{U_g, g}} \sum_{s \in J'_g \setminus U_g} c_{sg'} \nu_{g'_s, s} p(g', s, g) p_{g'}, \quad (5.5) \\ & u \in U_g, \quad g \in G, \end{aligned}$$

где $U_g = \{j: j \in J, g_j \in I_j\}$ означает множество объектов, обладающих активными состояниями с произвольно распределенными длительностями жизни при данном g и $G_{X, g} = \{g': g' \in G, g'_j = g_j \text{ для } j \in X\}$ — множество состояний системы, в котором объекты из $X \subseteq J$ имеют те же состояния, что и некоторое фиксированное $g = (g_j)$.

4) Схема обслуживания обладает свойством $e \{I_j, j \in F\}$, а система $Z'(I_j, j \in J)$ допускает вероятностное решение.

Если вместо P_{ij} и P_{ij}^0 в (5.3) подставить соответствующее распределение пуассоновских процессов для каждой пары $(i, j) \in \Delta$, то можно увидеть, что p_g является решением системы Z и, следовательно, зависит от P_{ij} только через их интенсивности ν_{ij} . Более того, мультипликативная форма равенств (5.3) выражает тот факт, что длительности активных состояний объекта независимы. По сравнению с Z , систему Z' уравнений (5.4) — (5.5) можно интерпретировать как условие усиленного статистического равновесия, в то время как Z представляет собой соответствующее глобальное равновесие. Действительно, система уравнений Z относится только к состояниям, в то время как система уравнений $Z'1$ устанавливает связь между множествами объектов $J'_g \setminus U_g$ для данного состояния g , а система $Z'2$ связывает отдельные объекты из U_g . В силу этого, условие, содержащееся в системе Z' , называется равновесием объектов.

Наличие скоростей c_{ig} требует тщательного исследования вопросов инвариантности соответствующей схемы обслуживания. Действительно, если система находится в состоянии g ,

время активного состояния g_i i -го объекта течет в реальном времени со скоростью c_{ig} , которая может меняться при изменении состояния системы. Следовательно, фактически реализующееся время жизни активного состояния g_i определяется последовательностью состояний g , проходимых системой в течение его потенциального времени жизни. Из теоремы 5.1.2 вытекают условия на скорости c_{ig} , необходимые для выполнения свойства инвариантности $E(\{I_j, j \in J\})$, которые будут подробно рассмотрены в п. 5.3 для конкретных систем, где приводится также формула для среднего значения фактически реализованного времени жизни активного состояния.

Из теоремы 5.1.2 следует, что для выполнения свойства инвариантности $E(\{I_j, j \in J\})$ необходимо, чтобы система уравнений $Z'(I_j, j \in J)$ имела вероятностное решение. Это условие не зависит от вида точечного процесса, определяющего последовательные длительности жизни каждого активного состояния каждого объекта. Действительно, одна и та же система уравнений $Z'(I_j, j \in J)$ описывает равновесие объектов, независимо от того, образуют ли длительности жизни рекуррентный точечный процесс или произвольный стационарный точечный процесс. Это позволяет обобщить многие результаты, полученные при классических предположениях независимости.

При помощи теоремы 5.1.2 можно исследовать также вопросы инвариантности схем обслуживания с бесконечным множеством G состояний системы, например, систему $M|GI|\infty$ (см. [209]). Действительно, схему обслуживания с бесконечным множеством G состояний можно аппроксимировать схемами обслуживания с конечными G , а с помощью теорем непрерывности (см. [396]) перенести на нее свойства инвариантности конечных схем обслуживания.

Следующий результат дает критерий полной инвариантности $E(\{C_j, j \in J\})$, в случае конечного G .

5.1.3. Следствие. Неприводимая схема обслуживания обладает свойством инвариантности $E(\{C_j, j \in J\})$ и свойством $e_1(\{C_j, j \in J\})$ тогда и только тогда, когда: 1) для всех $g \in G$ число активных объектов постоянно (не зависит от g) и 2) система уравнений

$$c_{ug} q_g = \sum_{g' \in G_{J_g} \setminus \{u\}, g} \sum_{s \in J_{g'}(J_g \setminus \{u\})} c_{sg'} p(g', s, g) q_{g'}, \quad u \in J_g, \quad g \in G \quad (5.6)$$

имеет положительное решение $\{q_g\}$. Это решение $\{q_g\}$, если оно существует, единственно с точностью до постоянного множителя. Более того, имеет место равенство

$$p_g = a \prod_{j \in J_g} v_{gj} q_j, \quad g \in G, \quad (5.7)$$

где a есть нормирующая постоянная.

5.1.4. Теорема разложения (декомпозиции), (см. Янсен, Кёниг и Навроцки [209]). Для неприводимой схемы обслуживания свойства инвариантности $E(\{i_1\}), \dots, E(\{i_k\})$ справедливы тогда и только тогда, когда имеет место свойство инвариантности $E\left(\bigcup_{j=1}^k \{i_j\}, i_j \in C_j, j \in J\right)$.

Следующий критерий инвариантности был установлен Шассбергером [354]:

5.1.5. Теорема. Рассмотрим неприводимую схему обслуживания, для которой при некотором $s \in J$ выполняется свойство $e_1(\{i_s\}, i_s \in C_s)$. Тогда свойство инвариантности $E(\{i_s\})$ имеет место в том и только том случае, если стационарное при показательно распределенных длительностях жизни активного состояния $i_s \in C_s$ распределение p_g совпадает с соответствующим стационарным распределением, когда эти длительности жизни имеют распределение смеси $F_s(x)$ показательного и эрланговского распределений:

$$F_s(x) = \pi_1 (1 - e^{-v_{s_1}^* x}) + \pi_2 (1 - e^{-v_{s_2}^* x}) * (1 - e^{-v_{s_1}^* x}) \text{ для } x \geq 0,$$

где 1) $v_{s_1}^*, v_{s_2}^* > 0$, 2) $0 < \pi_1 < 1$, 3) $\pi_1 + \pi_2 = 1$, 4) $\pi_1 v_{s_1}^* \neq m_{F_s}^{-1}$

$$5) m_{F_s} = v_{i_s, s}^{-1} = \pi_1 \frac{1}{v_{s_1}^*} + \pi_2 \left(\frac{1}{v_{s_2}^*} + \frac{1}{v_{s_1}^*} \right).$$

Заметим, что одновременное использование теорем 5.1.4 и 5.1.5 дает очень полезный метод исследования данной схемы обслуживания на инвариантность.

Критерий инвариантности, содержащийся в теореме 5.1.2, основан на эквивалентности понятия инвариантности стационарных вероятностей p_g в смысле определения 5.1.1 и утверждения о том, что стационарное начальное распределение процесса $\xi(t)$ имеет мультипликативное представление из теоремы 5.1.2. В этом случае величины $P_g, g \in G$, являются решением системы Z' уравнений (5.4) — (5.5). Однако существуют системы с инвариантными стационарными вероятностями P_g , которые не являются решениями системы Z' . Это значит, что на соответствующее стационарное начальное распределение процесса $\xi(t)$ могут влиять зависимости между одновременно протекающими длительностями жизни активных состояний различных объектов (которые могут при этом возникать). Более того, при этом необходимо, чтобы все необязательно показательно распределенные основные случайные величины одного и того же типа (например, длительности обслуживания на всех приборах, все длительности ремонта, интервалы между моментами поступления требований

от всех источников) были одинаково распределены. В этом смысле инвариантность таких систем ограничена.

Системы с ограниченной инвариантностью были исследованы, например, в работах Якоби [199], Чайкена и Игналла [128], Вольфа и Райтсона [398], где рассматривается система Эрланга с потерями при специальных правилах занятия прибора. Дальнейшие подробности, касающиеся систем с ограниченной инвариантностью см. в работе Янсена [206].

5.2. Критерий инвариантности И. Н. Коваленко. Для некоторого класса систем с независимыми основными СВ И. Н. Коваленко [58, 59] нашел чисто алгебраические необходимые и достаточные условия инвариантности, которые были обобщены Б. Т. Гусейновым [181] на случай переменных положительных скоростей обслуживания. В ряде последующих работ конкретные модели СМО были описаны в рамках этого класса систем и исследованы на инвариантность. В данном разделе рассматривается модель Коваленко с переменными скоростями обслуживания.

Пусть рассматриваемая система состоит из r групп источников, каждая из которых содержит n_j , $j=1, \dots, r$, источников, соответственно. Обслуживание требования начинается немедленно после его поступления, т. е. имеется достаточное число приборов (нет ни потерь, ни ожидания). С другой стороны, отсчет очередной длительности жизни источника начинается лишь после завершения обслуживания посланного им требования. Состояние системы описывается вектором $k=(k_1, \dots, k_r)$, где k_j означает число требований от j -ой группы источников, находящихся на обслуживании. Если в момент t система находится в состоянии k с $k_j < n_j$, $j=1, \dots, r$, то в интервале $[t, t+h]$ с вероятностями $\lambda_j(k)h+o(h)$ и $o(h)$ поступает точно одно или более одного, соответственно, требования от j -ой группы источников. Потоки требований от различных групп источников независимы. Более того, длительности обслуживания требований также независимы и одинаково распределены с ФР $B_j(x)$ и средним m_{B_j} для требований j -ой группы источников. Они реализуются с положительными скоростями c_{jk_j} .

5.2.1. Теорема Коваленко (критерий инвариантности). Для рассматриваемой модели с параметрами $\lambda_j(k)$, m_{B_j} и c_{jk_j} существуют стационарные вероятности $p_k = P(k_1, \dots, k_r)$, которые инвариантны относительно изменения ФР $B_j(x)$, $j=1, \dots, r$, при фиксированных их средних значениях m_{B_j} , тогда и только тогда, когда для любого состояния $k=(k_1, \dots, k_r)$ и для произвольных $|k|$ -мерных векторов $(i_1, \dots, i_{|k|})$, $(i'_1, \dots, i'_{|k|})$, которые имеют точно k_j элементов равных j для каждого j , справедливо следующее уравнение

$$\prod_{l=1}^{|k|} \lambda_{i_l} \left(\sum_{m=1}^{l-1} \delta_{1,i_m}, \dots, \sum_{m=1}^{l-1} \delta_{r,i_m} \right) = \\ = \prod_{l=1}^{|k|} \lambda_{i'_l} \left(\sum_{m=1}^{l-1} \delta_{1,i'_m}, \dots, \sum_{m=1}^{l-1} \delta_{r,i'_m} \right), \quad (5.8)$$

где $\delta_{i,j}$ означает символ Кронекера.

Это необходимое и достаточное условие означает, что для произвольного фиксированного момента времени t вероятности событий: «в интервале $[t, t+h]$ поступает требование j -ой группы источников, а в интервале $[t+h, t+2h]$ поступает требование i -ой группы» и «в интервале $[t+h]$ поступает требование i -ой группы, а в интервале $[t+h, t+2]$ поступает требование j -ой группы» равны с точностью до $o(h)$.

Для стационарных вероятностей справедлива формула:

$$p_k = p(k_1, \dots, k_r) = \prod_{j=1}^r \frac{n_{B_j}^{k_j}}{k_j!} \left(\prod_{j=1}^r c_{j/k_j} \right)^{-1} \sum_{l=1}^{|k|} \lambda_{i_l} \times \\ \times \left(\sum_{m=1}^{l-1} \delta_{1,i_m}, \dots, \sum_{m=1}^{l-1} \delta_{r,i_m} \right) p(0, \dots, 0). \quad (5.9)$$

В работе Кёнига, Маттеса и Навроцки ([240], разд. 3.2) модель Коваленко при $c_{ik} \equiv 1$ рассматривается как частный случай схемы обслуживания в смысле раздела 5.1 и теорема Коваленко 5.2.1 выводится из критерия инвариантности, приведенного в разделе 5.1 (см. также Кёниг, Маттес и Навроцки [241], разд. 1.8). Необходимое и достаточное условие Коваленко эквивалентно наличию положительного решения системы Z' уравнений (5.4) — (5.5). Для вышеупомянутой модели Коваленко—Гусейнова с переменными скоростями обслуживания аналогичное утверждение следует из результатов Кёнига и Янсена [237], Янсена, Кёнига и Навроцки [209].

Этим путем было получено следующее обобщение теоремы Коваленко: ее утверждения остаются справедливыми, если для каждой группы j из n_j источников, $j=1, \dots, r$, имеется своя особая группа n_j (возможно различных) приборов, а ФР $B_{j,n}(x)$ длительностей обслуживания требований зависит не только от номера j группы, но и от номера l , $l=1, \dots, n_j$, соответствующего прибора этой группы. Более того, между длительностями обслуживания источников данной группы, реализуемых фиксированным прибором, допускаются зависимости в рамках стационарных точечных процессов. Интервалы между моментами поступления требований от источников могут иметь распределение отличное от показательного.

Следующая модель была исследована Б. Т. Гусейновым [33]. Система массового обслуживания состоит из r групп, включающих n_j , $j=1, \dots, r$ приборов, соответственно. На j -ую группу приборов поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ_j , $j=1, \dots, r$. Пусть длительности обслуживания приборами j -ой группы будут независимыми и одинаково распределенными СВ с ФР $B_j(x)$ с конечными математическими ожиданиями m_{B_j} . Пусть длительности обслуживания реализуются со скоростями c_{j,k_j} , зависящими от числа k_j занятых приборов j -ой группы.

Если в момент поступления требования на j -ую группу приборов все приборы этой группы заняты, требование направляется на группу приборов, для которой отношение $\frac{k_j}{n_j}$ (так называемая нагрузка j -ой группы) минимально. Если имеется более одной группы с одинаковой нагрузкой, то среди этих групп выбирается группа с наименьшей средней длительностью обслуживания m_{B_j} . Если все приборы всех групп заняты, то требование теряется.

Состояние системы выражается вектором $k=(k_1, \dots, k_r)$, где k_j обозначает число занятых приборов j -ой группы, $j=1, \dots, r$.

Введем величину

$$\Delta_j(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{k_j}{n_j} = \min \left(\frac{k_1}{n_1}, \dots, \frac{k_r}{n_r} \right) \text{ и } k_i = n_i, \text{ по крайней мере} \\ & \text{для одного из } i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Переноса теорему Коваленко на эту систему, Б. Т. Гусейнов [33] доказал следующее утверждение.

Для рассматриваемой модели с данными параметрами λ_j , m_{B_j} , $m_{B_1} < m_{B_2} < \dots < m_{B_r}$, c_{j,k_j} , и $\Delta_j(k)$ существуют стационарные вероятности $p_k = p(k_1, \dots, k_r)$; при фиксированных средних значениях m_{B_j} , $j=1, \dots, r$, они инвариантны по отношению к виду ФР $B_j(x)$ в том и только в том случае, если для каждого состояния $k=(k_1, \dots, k_r)$ и для произвольных $|k|$ -мерных векторов $(i_1, \dots, i_{|k|})$, $(i'_1, \dots, i'_{|k|})$, имеющих точно k_j элементов, равных j , для каждого j имеет место следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^{|k|} \left[\lambda_{i_l} + \Delta_{i_l} \left(\sum_{m=1}^{l-1} \delta_{i_1, i_m}, \dots, \sum_{m=1}^{l-1} \delta_{i_r, i_m} \right) \sum_{i_{|k|} \neq i_l} \lambda_{i_{|k|}} \right] = \\ & = \prod_{l=1}^{|k|} \left[\lambda_{i'_l} + \Delta_{i'_l} \left(\sum_{m=1}^{l-1} \delta_{i_1, i'_m}, \dots, \sum_{m=1}^{l-1} \delta_{i_r, i'_m} \right) \sum_{i_{|k|} \neq i'_l} \lambda_{i'_{|k|}} \right], \quad (5.10) \end{aligned}$$

где суммирование по индексу i_μ распространяется на приборы тех групп, для которых $k_{i_\mu} = n_{i_\mu}$.

Для стационарных вероятностей справедливо:

$$p_k = p(k_1, \dots, k_r) = \prod_{j=1}^r \frac{m_{B_j}^{k_j}}{k_j!} \left(\prod_{j=1}^r c_{j/k_j} \right)^{-1} \prod_{l=1}^{|k|} \left[\lambda_{i_l} + \right. \\ \left. + \Delta_{i_l} \left(\sum_{m=1}^{l-1} \delta_{i_l, i_m}, \dots, \sum_{m=1}^{l-1} \delta_{r, i_m} \right) \sum_{i_\mu \neq i_l} \lambda_{i_\mu} \right] p(0, \dots, 0). \quad (5.11)$$

Из результатов Кёнига, Маттеса и Навроцки [240, 241] и Янсена, Кёнига и Навроцки [209] следует, что результат, полученный Б. Т. Гусейновым, справедлив в более широких условиях, когда ФР длительностей обслуживания на каждом приборе j -ой группы зависит от номера приборов и группы. Более того, они могут быть зависимыми в смысле стационарных точечных процессов. Н. Ю. Кузнецов [68] перенес утверждение теоремы Коваленко на модель, где ФР длительности обслуживания требований от j -ого источника может зависеть, кроме номера источника, еще и от состояния системы k в начале обслуживания требования. Именно, пусть система состоит из N источников со случайными длительностями жизни. Имеется $s \leq N$ приборов. При $s < N$ требования, застающие в момент поступления все приборы занятыми, дожидаются начала обслуживания в очереди.

Введем величины:

$$k_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если в момент } t \text{ в } j\text{-ом источнике течет «время жизни», т.е. длится интервал между моментами поступления;} \\ 1, & \text{если в момент } t \text{ требование от } j\text{-го источника находится на обслуживании и, следовательно, в нем не длится интервал между моментами поступления, т.е. источник находится в пассивном состоянии,} \end{cases}$$

$j=1, \dots, N$. Состояние $k(t)$ системы в целом в момент t задается вектором $k(t) = (k_1(t), \dots, k_N(t))$.

Пусть $k = (k_1, \dots, k_N)$ — произвольное состояние с $|k| = k_1 + \dots + k_N$, а 0 обозначает состояние $(0, \dots, 0)$. Если в момент t состояние системы таково, что $k(t) = k$ и $k_i(t) = 0$, то в момент $t+h$ с вероятностью $\lambda_i(k) \cdot h + o(h)$ система переходит в состояние $k(t+h) = (k_1, \dots, k_{i-1}, 1, k_{i+1}, \dots, k_N)$. Моменты поступления требований от различных источников независимы. Если в данный момент времени $k_j = 1$, то обслуживание соответствующего требования осуществляется со скоростью c_{jh} . Скорость c_{jh} предполагается равной нулю, если требование ждет начала обслуживания. Случайные длительности обслуживания различных требований являются независимыми СВ с ФР $B_{jh}(\cdot)$ и со средним значением m_{B_jk} для требований j -го источника, если в начале их обслуживания система находится в состоянии k .

Существование и эргодичность стационарных вероятностей $p(k_1, \dots, k_N)$ следуют из соответствующей эргодической теоремы Коваленко для кусочно-линейных марковских процессов [58, 60].

В предположении, что

$$m_{B_{j_0}} = \max_k m_{B_{jk}} \quad \text{или} \quad m_{B_{j_0}} = \min_k m_{B_{jk}}$$

был доказан следующий результат:

5.2.2. Теорема. Следующие три условия необходимы и достаточны для инвариантности стационарных вероятностей $p(k_1, \dots, k_N)$ при изменении вида ФР $B_{jk}(\cdot)$, $j=1, \dots, N$, при фиксированных $m_{B_{jk}}$:

1) Пусть k — произвольное состояние с $|k| \leq s$ и пусть $(i_1, \dots, i_{|k|})$ — вектор с $1 \leq i_l \leq N$, $k_{i_l} = 1$, $l=1, \dots, |k|$, $i_l \neq i_p$ для $l \neq p$. Для произвольной перестановки $(i'_1 \dots i'_{|k|})$ компонент вектора $(i_1, \dots, i_{|k|})$ имеет место равенство:

$$\prod_{l=1}^{|k|} \frac{\lambda_{i_l} \left(\sum_{m=1}^{l-1} e_{i_m} \right)}{c_{i_l, \sum_{m=1}^l e_{i_m}}} = \prod_{l=1}^{|k|} \frac{\lambda_{i'_l} \left(\sum_{m=1}^{l-1} e_{i'_m} \right)}{c_{i'_l, \sum_{m=1}^l e_{i'_m}}}, \quad (5.12)$$

где $e_{i_m} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i_m}, 1, 0, \dots, 0)$.

2) Для любого $s < N$ и для любого состояния k с $|k| = s$, $k = e_{i_1} + \dots + e_{i_s}$, $1 \leq i_l \leq N$, $l=1, \dots, s$, $i_l \neq i_p$ для $l \neq p$ равенство

$$\lambda_i(k) \prod_{l=1}^s \lambda_{i_l} \left(\sum_{m=1}^{l-1} e_{i_m} \right) = 0 \quad (5.13)$$

справедливо для любого i с $k_i = 0$. (Это условие означает, что очереди появиться не может).

3) Если для состояния системы k с $|k| < s$ и $k_i = 0$ имеет место $m_{B_{ik}} \neq m_{B_{i_0}}$, то

$$\lambda_i(k) \prod_{\{l: k_l=1\}} \lambda_l \left(\sum_{m=1}^{l-1} k_m e_m \right) = 0. \quad (5.14)$$

(Это условие означает, что ФР длительности обслуживания требований от i -го источника не зависит от состояния системы, при котором начинается обслуживание этого требования).

Та же модель рассматривалась Н. Ю. Кузнецовым [69] при условии, что $\lambda_j(k) = \lambda_j^{(0)}(k) \varepsilon + o(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ есть малый параметр. Пусть $p_k^{(0)}$ является коэффициентом разложения $p_k = p_k^{(0)} \varepsilon^{|k|} + o(\varepsilon^{|k|})$ стационарной вероятности p_k по степеням малого параметра ε .

Было установлено необходимое и достаточное условие инвариантности главного члена $p_k^{(0)}$ относительно изменения вида ФР $B_{jk}(\cdot)$ при фиксированных средних $m_{B_{jk}}$, $j=1, \dots, n$. Оно вытекает из предыдущих результатов Кузнецова [68], если $\lambda_i(\cdot)$, $\lambda_{i_l}(\cdot)$ и $\lambda_{i_l'}(\cdot)$ заменить на $\lambda_i^{(0)}(\cdot)$, $\lambda_{i_l}^{(0)}(\cdot)$ и $\lambda_{i_l'}^{(0)}(\cdot)$, соответственно.

5.3. Инвариантность конкретных СМО.

5.3.1. Система Эрланга $M|G|s|0$ с потерями с переменными скоростями обслуживания и общей дисциплиной занятия приборов.

Обратимся к системе с потерями, упомянутой в разделе 3.3 с пуассоновским входящим потоком, стационарными точечными процессами длительностей обслуживания каждым прибором, переменными интенсивностями поступления и обслуживания, зависящими от состояния системы, и с общей дисциплиной занятия приборов. Эта система описывается в виде схемы обслуживания, введенной в разделе 5.1 (см. Кёниг и Маттес [239], Кёниг и Янсен [237], Кёниг, Янсен, Коцурек и Рабе [238]). А именно $J=\{0, \dots, s\}$. $C_0=C_1=\dots=C_s=\{1\}$, $D_0=\emptyset$, $D_1=\dots=D_s=\{0\}$. При этом объект с номером 0 интерпретируется как источник требований, объекты $1, \dots, s$ как приборы, а состояния объектов — 1 — занят и 0 — свободен. Состояние системы $g=(g_j)$ отождествляется с множеством $\{j: g_j=1, j \neq 0\}$. Для простоты рассмотрим только случай положительных скоростей, т. е. $c_{jg} > 0$ для всех $j \in J$, $g \in G$. Вероятности переходов $p(g, j, g')$ задаются вероятностями $p^g(0)$ того, что поступающее требование не принимается к обслуживанию и $p^g(j)$, $j \neq 0$, того, что оно направляется на обслуживание на j -ый прибор. Положим $v_{1,0}=\lambda$, $v_{1,j}=\mu_j$ для $j=1, \dots, s$.

Рассматриваемая система с потерями $M|G|s|0$ имеет свойство инвариантности $E(\{I_j, j \in J\})$ для $I_0=\emptyset$, $I_1=\dots=I_s=\{1\}$ тогда и только тогда, когда для произвольных $j_1, j_2 \in \{1, \dots, s\}$ и для любого $g \subseteq \{1, \dots, s\} \setminus \{j_1, j_2\}$ такого, что $g \cup \{j_1, j_2\} \in G$ справедливо следующее условие:

$$\begin{aligned} & \frac{c_{0,g}}{c_{j_1,g \cup \{j_1\}}} p^g(j_1) \frac{c_{0,g \cup \{j_1\}}}{c_{j_2,g \cup \{j_1, j_2\}}} p^{g \cup \{j_1\}}(j_2) = \\ & = \frac{c_{0,g}}{c_{j_2,g \cup \{j_2\}}} p^g(j_2) \frac{c_{0,g \cup \{j_2\}}}{c_{j_1,g \cup \{j_1, j_2\}}} p^{g \cup \{j_2\}}(j_1) > 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

В этом случае стационарные вероятности p_g имеют вид

$$p_g = \prod_{j \in g} \left(\frac{\lambda}{\mu_j} \right) p^\emptyset(j_1) \frac{c_{0,\emptyset}}{c_{j_1,\{j_1\}}} \dots p^{g \setminus \{j_k\}}(j_k) \frac{c_{0,g \setminus \{j_k\}}}{c_{j_k,g}} p^\emptyset \quad (5.16)$$

для $g = \{j_1, \dots, j_k\} \neq \emptyset$, $g \in G$, где $p_\emptyset$ определяется условием нормировки $\sum_{g \in G} p_g = 1$.

В частном случае $G = \gamma(\{1, \dots, s\})$, $c_{0g} = 1$, $c_{jg} = h(|g|)$, $p^g(0) = 0$, если $|g| < s$, где h есть произвольная функция $h: \{1 \dots s\} \rightarrow R_+$; а $\gamma(\{1, \dots, s\})$ означает семейство всех подмножеств множества $\{1, \dots, s\}$, свойство инвариантности $E(\{j_i, j \in J\})$ справедливо только при дисциплине случайного выбора одного из свободных приборов, т. е.

$$p^g(j) = \frac{1}{s - |g|}, \quad j \in g$$

Однако если длительности обслуживания одинаково распределены, если $c_{jg} = 1$ и если нас интересует только общее число требований в системе, соответствующие стационарные вероятности не зависят от дисциплины занятия приборов. Более того, они инвариантны относительно вида распределения длительности обслуживания, при фиксированном ее среднем значении, при любой дисциплине, а именно: имеют место хорошо известные формулы Эрланга:

$$P\{\text{того, что заняты } k \text{ приборов}\} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^s \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}\right)^{-1} \quad (5.17)$$

для $k = 0, 1, \dots, s$.

При дисциплине случайного выбора одного из свободных приборов для $c_{jg} = 1$ и для одинаково распределенных длительностей обслуживания, упомянутое выше свойство инвариантности рассматривалось Эрлангом, Ванлотом, Поллачеком, Пальмом, Костеном, Лундквистом, Форте, А. Я. Хинчиным и, главным образом, Б. А. Севастьяновым [86], (см. также Б. В. Гнеденко и И. Н. Коваленко [28]). В работах А. А. Шахбазова [99], Г. П. Башарина, А. Д. Харкевича и М. А. Шнепса [15] рассматривался случай различных распределений длительностей обслуживания. О. Аннаоразов [4] рассмотрел, кроме того, случай требований различных типов. Случай дисциплин обслуживания более общих, чем случайный выбор, но удовлетворяющих условию (5.15), рассматривался Кёнигом, Маттесом и Навроцки [240, 241]. Система с потерями Эрланга $M|G|s|0$ со стационарными точечными процессами впервые исследовалась в работе Кёнига и Маттеса [239]. В случае зависящих от времени интенсивностей поступления и обслуживания система Эрланга рассматривалась, например, в работах Д. Б. Гнеденко [30], Б. В. Гнеденко и А. Д. Соловьева [29], Б. В. Гнеденко [176], а для зависящих от состояния скоростей в работе Кёнига и Янсена [237] (см. также [125, 325]).

Для эрланговской системы с потерями с s приборами, со случайным выбором одного из свободных приборов и с пуас-

соновским входящим потоком, где рассматривается несчетное число типов требований, Н. Ю. Кузнецов [70] дает, при определенных условиях, необходимые и достаточные критерии инвариантности стационарных вероятностей подходящим образом выбранных состояний. Различные проблемы при этом возникают, когда тип требования задается заранее (во входящем потоке) или реализуется в момент начала его обслуживания.

5.3.2. Системы с конечным числом источников. Модель обслуживания станков (модель Пальма). Рассмотрим замкнутую систему с потерями, состоящую из N источников и s приборов, $s \leq N$ упомянутую в разделе 3.3, при этом предполагается, что поступающее требование случайным образом занимает один из свободных приборов. В работах Кёнига, Маттеса, Навроцки, Штойяна и Янсена [51, 232, 237, 240, 241] эта система исследовалась как частный случай схемы обслуживания. Действительно, положим $J = \{1, \dots, N\}$, $C_1 = \dots = C_N = \{0, 1, \dots, s\}$, $D_1 = \dots = D_N = \emptyset$ и определим состояния системы $g = (g_j, j \in J)$, полагая $g_j = 0$, если на j -ом источнике течет время между моментами поступления, $g_j = k$ ($1 \leq k \leq s$), если требование j -го источника обслуживается на k -ом приборе. Длительность обслуживания требования j -го источника при данном состоянии системы $g \in G$ отрабатывается с положительной скоростью c_{jg} . Для каждого $g \in G$ рассмотрим набор объектов (источников) $(j_1, \dots, j_r)$, требования от которых обслуживаются, т. е. $(j_1, \dots, j_r) = \{j : g_j \neq 0\}$. Для каждого такого набора определим рекуррентно

$$g^{(r)} = g, \quad g^{(l-1)} = (g_j^{(l-1)}) \quad \text{с} \quad g_{j_l}^{(l-1)} = 0 \quad \text{и} \quad g_j^{(l-1)} = g_j^{(l)} \quad \text{для} \quad j \neq j_l.$$

Если для каждой пары наборов $(j_1, \dots, j_r)$, $(j'_1, \dots, j'_r)$ и для соответствующих наборов $(g^{(0)}, \dots, g^{(r)})$, $(g^{(0)'}, \dots, g^{(r)'})$ условие

$$\prod_{l=1}^r \frac{c_{j_l - l} g^{(l-1)}}{c_{j_l} g^{(l)}} = \prod_{l=1}^r \frac{c_{j'_l - l} g'^{(l-1)'}}{c_{j'_l} g'^{(l)'}} \quad (5.18)$$

удовлетворяется при любом $g \in G$, то стационарные вероятности обладают полной инвариантностью (см. следствие 5.1.3) как относительно вида распределений длительностей обслуживания, так и относительно вида распределений интервалов между моментами поступления (см. Кёниг, Янсен, Коцурек и Рабе [238]). Очевидно, условие (5.18) выполняется, если все скорости обслуживания c_{jg} равны единице. В этом случае еще Козн [139] доказал инвариантность стационарных вероятностей относительно вида распределения длительностей обслуживания. Случай зависимых интервалов между моментами поступления и зависимых длительностей обслуживания был исследован Кёнигом [232].

Если условие (5.18) имеет место, то вероятности p_g имеют вид

$$p_g = a \prod_{\{j: g_j=0\}} \lambda_j^{-1} \prod_{\{j: g_j \neq 0\}} \mu_{jg_j}^{-1} \prod_{l=1}^r \frac{c_{jl} g^{(l-1)}}{c_{jl} g^{(l)}} \frac{(s-r)^l}{s^l}, \quad (5.19)$$

где a есть нормирующая постоянная, λ_j^{-1} означает среднее время между моментами поступления требований от j -го источника μ_{jh}^{-1} — средняя длительность обслуживания требования j -го источника на k -ом приборе. Если $\lambda_j = \lambda$, $\mu_{jh} = \mu$ для $j=1, \dots, N$, $k=1, \dots, s$ и если $c_{jg} = 1$, из (5.19) вытекает классическая формула Энгсета для стационарной вероятности того, что заняты точно r приборов.

В работах Форте и Грандьен [166], Кёнига, Маттеса и Навроцки [240, 241], Кёнига и Штойяна [51] рассматривалась система Энгсета с потерями в случае, когда каждое требование обслуживается группой приборов при произвольном правиле ее формирования.

Свойства инвариантности замкнутых систем с ожиданием исследовались в работах Барлоу [111], Б. А. Козлова [63] Б. Т. Гусейнова [181], Кёнига, Маттеса и Навроцки [241], Кёнига, Янсена, Коцурека и Рабе [238]. Для таких систем с конечным числом $N < \infty$ источников и s приборами, со случайным выбором среди свободных приборов, с дисциплиной обслуживания в порядке очереди и с $c_{jg} = 1$, в работе Кёнига, Маттеса и Навроцки [241] с помощью методов п. 5.1 было показано, что стационарные вероятности p_g подходящих состояний g инвариантны относительно вида ФР интервалов между моментами поступления требований от отдельных источников тогда и только тогда, когда длительности обслуживания показательно распределены с фиксированным средним значением, которое не зависит от номера источника соответствующего требования. Такой вид инвариантности сохраняется и в случае, когда прямая дисциплина обслуживания заменяется дисциплиной обслуживания в случайном порядке. Следует отметить, что стационарные вероятности p_g не инвариантны относительно изменения вида распределения длительностей обслуживания.

Рассмотренная выше замкнутая система с ожиданием может быть интерпретирована как пальмовская модель обслуживания станков. При этом интервалы между моментами поступления требований от N источников рассматриваются как длительности жизни станков, а длительности обслуживания — как время ремонта. Кроме того, для обслуживания станков имеется k рабочих (ремонтных устройств) ($k \leq N$) и система не отказывает, если исправно менее n станков ($n \leq k$). Система возобновляет работу в момент, когда будут отремонтированы, по крайней мере, n станков. Если исправно более чем k станков, то работают только k из них. Остальные находятся в холодном резерве.

С другой стороны, можно ввести число r ($1 \leq r \leq s$), как минимальную границу для начала ремонта станков, т. е. ремонт осуществляется лишь в том случае, если в состоянии отказа находится по крайней мере r станков.

Свойства инвариантности этой пальмовской модели ремонта станков исследовались Кёнигом, Маттесом и Навроцки [241]. По поводу соответствующей модели с переменными скоростями обслуживания см. [238].

Т. П. Марьянович [78] рассматривал пальмовскую модель с $N > k$, $n=1$, $r=1$, $1 \leq s \leq N$. Б. А. Козлов [63] исследовал случай, когда $N=k$, $n=1$, $r=1$, $1 \leq s \leq N$; при $s=1$ см. также Барлоу [111].

Модель с группами станков с упомянутыми выше эффектами прерывания, но без ожидания рассматривалась в работе Кёнига, Маттеса и Навроцки [240], (см. также [238]).

Из результатов, полученных Янсенем, Кёнигом и Навроцки [209] следует, что методами данной главы (см. примечание после теоремы 5.1.2) можно исследовать также свойства инвариантности пальмовской модели ремонта станков с зависимыми сроками службы и с зависимыми периодами ремонта.

5.3.3. Система обслуживания $\vec{M}|\vec{GI}|s|r$ с абсолютным приоритетом и продолжением прерванного обслуживания. Поступающие в систему $\vec{M}|\vec{GI}|s|r$ ($1 \leq s < \infty$, $0 < r < \infty$) с абсолютным приоритетом и продолжением прерванного обслуживания требования образуют пуассоновский поток. Если нет свободных мест для ожидания, требование теряется. В противном случае, поступающее требование прерывает обслуживание или занимает свободный прибор, если таковой имеется, в соответствии с определенным правилом выбора. Требование, обслуживание которого было прервано, становится в очередь, если все приборы заняты. В противном случае, его обслуживание может быть продолжено одним из свободных приборов. Дисциплина обслуживания очереди, т. е. порядок выбора очередного требования на обслуживание в момент освобождения прибора, может быть относительно произвольной, например, прямой (прибыл первым—обслужен первым), инверсионной (прибыл последним—обслужен первым) или случайной (равновероятный выбор любого ожидающего требования). Если принятые к обслуживанию требования занимают любой из свободных приборов равновероятно, стационарные вероятности p_k (k требований в системе) инвариантны относительно вида распределения длительности обслуживания при фиксированном его среднем значении (см. Мэк [289, 290], Д. Штойян и Х. Штойян [380], Штойян [100]). А именно: например, при $s=1$, $r=\infty$ справедливо

$$p_k = (1-\rho)\lambda^k, \quad k=0, 1, \dots, \quad (5.20)$$

где λ означает интенсивность поступления, $\rho = \lambda m_B$, m_B — средняя длительность обслуживания. Система $\vec{M}|\vec{GI}|s|r$ с абсолютным приоритетом и продолжением прерванного обслуживания может быть описана и как схема обслуживания. Более того, можно рассматривать различные распределения длительностей обслуживания, зависящие от состояния системы. При некоторых ограничениях на скорости в этом случае также можно доказать инвариантность стационарных вероятностей относительно вида распределений длительностей обслуживания (см. Кёниг, Янсен, Коцурек и Рабе [238]). Более того, можно рассмотреть систему $\vec{M}|\vec{G}|s|r$ с абсолютным приоритетом и продолжением прерванного обслуживания с зависимыми длительностями обслуживания.

Заметим, что и система $\vec{M}|\vec{GI}|1|1$ с абсолютным приоритетом и продолжением прерванного обслуживания, введенная Шраге и Миллером [362], где предпочтение отдается требованию с самым коротким остаточным временем обслуживания, обладает свойством ограниченной инвариантности. А именно, для стационарной плотности распределения $p_2(x, y)$ остаточных длительностей обслуживания при двух требованиях в системе, справедлива формула:

$$p_2(x, y) = \lambda p_0 b(y) \left[\exp \left(\lambda \int_0^y (1 - B(z)) dz \right) - \right. \\ \left. - \exp \left(\lambda \int_0^x (1 - B(z)) dz \right) \right] + \lambda^2 p_0 (1 - B(y)) \times \\ \times \exp \left(\lambda \int_0^y (1 - B(z)) dz \right) (B(y) - B(x)) \quad (5.21)$$

для $y \geq x$, где $B(\cdot)$ означает ФР длительностей обслуживания, а $b(\cdot)$ ее плотность. Очевидно, что стационарное распределение числа требований в системе инвариантно относительно вида распределения длительности обслуживания:

$p_0 = (1 + \rho e_\rho)^{-1}$, $p_1 = p_0(e^\rho - 1)$, $p_2 = p_0(\rho e^\rho - e^\rho + 1)$, $\rho = \lambda m_B$, (см. А. В. Печинкин, А. Д. Соловьев и С. Ф. Яшков [81]). Проблема не решена для $s > 1$ и $r > 1$, соответственно.

5.3.4. Системы с разделением процессора.

Для вычислительных систем представляют интерес, в частности, модели, описывающие эффект разделения средств системы между несколькими требованиями, работами и т. д. Введенные в п. 5.1 переменные скорости c_{jg} обслуживания дают возможность описать этот эффект. Для того, чтобы описать одновременную реализацию (обслуживание) более одного требования, естественно предположить, что скорость обслуживания

отдельного требования обратно пропорциональна общему числу требований в системе. Следовательно, естественно предположить, что скорости обслуживания зависят только от числа требований в системе. Это значит, что $c_{jg} = h(|g|)$ (см. п. 5.1).

При этом простейшим случаем является $c_{ig} = \frac{1}{|g|}$. В работах Чанди, Ховарда и Тоуслея [129], Коэна [144], Келли [218], Кёнига и Янсена [237], Шассбергера [357] исследовались свойства инвариантности систем с таким эффектом разделения процессора, причем эти системы часто рассматривались как узлы сетей массового обслуживания (см. п. 5.5.). Этот класс систем с вышеупомянутыми переменными скоростями удовлетворяет условиям применимости общих критериев инвариантности, представленным в п. 5.1 (о системах с потерями см. пп. 5.3.1—5.3.2) и, следовательно, для него справедливы соответствующие свойства инвариантности (см. Янсен, Кёниг и Навроцки [209]). Более того, так как критерии инвариантности, например, теоремы 5.1.2, не зависят от вида точечных процессов, описывающих последовательности длительностей обслуживания на отдельных приборах, т. е. от того, образуют ли они рекуррентный процесс или произвольный стационарный точечный процесс, те же свойства инвариантности можно вывести и для систем с разделением процессора с зависимыми длительностями обслуживания.

5.3.5. СМО сложной структуры. Понятие СМО сложной структуры в этом разделе означает неполнодоступные системы, в которых не всякое требование может занять любой из свободных приборов или в которых требуется коммутация (link-lines) между входящими потоками и обслуживающими приборами, и т. п. Такие системы часто используются по экономическим соображениям, в частности, в системах телефонной связи, в задачах телетрафика. Они также исследовались на инвариантность. При этом использовался как подход с точки зрения схем обслуживания и критерии инвариантности п. 5.1, так и соответствующим образом обобщенный критерий Коваленко (п. 5.2).

Рассмотрим систему, в которую поступают N независимых пуассоновских потоков требований (см. [240] и п. 3.3). Все приборы разделены на r групп, содержащих n_j , $j=1, 2, \dots, r$, приборов, соответственно. Каждое требование i -го потока с вероятностью p_{ij} запрашивает обслуживание одним из приборов j -ой группы $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, r$. Поступающее требование может занять свободный прибор, если имеется доступный для него коммутатор, причем требованиям i -го потока доступны mf_i , $i=1, \dots, N$, коммутаторов, так что всего имеется $m(f_1 + \dots + f_N)$ коммутаторов. Каждый коммутатор, однако, может устанавливать связь только с $n_1 + \dots + n_r$ приборами. Если поступающее требование i -го потока запрашивает для своего обслуживания

j -ую группу приборов, то случайным образом (т. е. равновероятно) выбирается один из свободных в рассматриваемый момент времени коммутаторов, обеспечивающих связь i -го потока с любым из свободных доступных приборов j -ой группы. В противном случае соответствующее требование теряется. Длительности обслуживания являются независимыми СВ, функции распределения которых $B_{ij}(\cdot)$ могут зависеть от номера i , $i=1, \dots, N$, потока и номера j , $j=1, \dots, r$, выбранной группы приборов. Состояние системы считается известным, если известно, какие из $n_1, \dots, n_r$ приборов заняты, а для занятых приборов, требованиями каких потоков они заняты. Стационарные вероятности этих состояний инвариантны относительно вида ФР $B_{ij}(\cdot)$ при фиксированных средних значениях m_{Bij} тогда и только тогда, когда $m=1$ или $N=1$ и $f=1$ или $f_1 = \dots = f_N = \sum n_j$.

В монографии Кёнига, Маттеса и Навроцки [240] (см. также п. 3.3) этот результат был получен путем сведения рассматриваемой модели к общей схеме обслуживания с последующим применением соответствующего критерия инвариантности (см. также [238]). Более того, результаты п. 5.1 показывают, что вышеупомянутое свойство инвариантности сохраняется также в случае, если допустить зависимость длительностей обслуживания требований i -го потока приборами j -ой группы ($i=1, \dots, N$; $j=1, \dots, r$) в рамках произвольного стационарного точечного процесса. При $m=1$, $r=1$, опираясь на теорему Коваленко для независимых длительностей обслуживания, Г. П. Башарин и В. А. Кокотушкин [13] получили тот же результат как частный случай некоторого более общего необходимого и достаточного условия (критерия) инвариантности соответствующим образом формализованных одно- и многозвеньевых СМО произвольной структуры с произвольным алгоритмом управления. В [13] содержатся также дальнейшие примеры СМО сложной структуры, включая условия их инвариантности.

5.4. Некоторые результаты для инвариантных схем обслуживания. В данном пункте рассматриваются такие свойства инвариантных схем обслуживания, как структура инвариантных систем, соотношения между вложенными и невложенными вероятностями, средние длительности пребывания, пуассоновость выходящего потока. В работе Янсена, Кёнига и Навроцки [209] получены общие структурные свойства инвариантных систем с переменными скоростями и зависимостями, которые, грубо говоря, показывают, что и в этом случае структура инвариантных систем должна быть в некотором смысле простой и симметричной.

Рассмотрим поведение стохастического процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, описывающего временную эволюцию рассматриваемой схемы обслуживания, только по некоторой последовательности вложенных моментов времени, а именно по моментам скачков, при которых может изменяться состояние g системы. Если стационар-

ное по времени начальное распределение Q выражается формулой (5.3), то соответствующее вложенное по рассматриваемым моментам времени стационарное распределение (т. е. являющееся инвариантным относительно сдвигов времени от одного момента скачка до другого), обозначаемое Q^0 имеет вид (см. [209]).

$$Q^0 = \lambda_Q^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{k \in J'_g} p_g c_{kg} v_{gk,k} \times_{(ij) \in \Delta} H_{ij}^{g,k}, \quad (5.22)$$

где

$$H_{ij}^{g,k} = \begin{cases} P_{ij}(\varphi: \varphi \in M_{K_{ij}}^\infty, \bar{\varphi}(\cdot)), & \text{если } i = g'_j, j \neq k \\ P_{ij}^0(\varphi: \varphi \in M_{K_{ij}}^0, \bar{\varphi}(\cdot)), & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(см. формулу [5.3]). Здесь p_g есть решение (5.1), а λ_Q интенсивность точечного процесса моментов скачков:

$$\lambda_Q = \sum_{g \in G} \sum_{j \in J'_g} p_g c_{jg} v_{g,j}. \quad (5.23)$$

Благодаря виду распределения Q^0 , можно вывести формулы для вероятностей того, что ожидает поступающее требование, например «потеря», «обслуживание на j -ом приборе», или «прекращение обслуживания более одного раза», «частичное обслуживание с потерей» (см. Кёниг и Маттес [239], Кёниг [238]). А именно, для вложенного стационарного распределения p_g^0 , $p_g^0 = Q^0(E_g)$, соответствующего стационарному по времени распределению p_g , являющемуся решением системы (5.1), имеем

$$p_g^0 = \lambda_Q^{-1} \left(\sum_{s \in J'_g} c_{s,g} v_{g,s} \right) p_g. \quad (5.24)$$

Непосредственным следствием вида стационарного по времени распределения Q , полученного из (5.3), являются соответствующие стационарные по времени распределения остаточной и истекшей длительностей жизни ζ_{ij}^R и ζ_{ij}^E , соответственно, активного состояния $i \in I_j$ объекта $j \in J$. А именно,

$$\begin{aligned} Q \left(\bigcap_{j \in U_g} \{ \zeta_{g,j}^R < x_j \} \mid \{ \text{система находится в состоянии } g \} \right) \\ = Q \left(\bigcap_{j \in U_g} \{ \zeta_{g,j}^E < x_j \} \mid \{ \text{система находится в состоянии } g \} \right) \\ = \prod_{j \in U_g} v_{g,j} \int_0^{x_j} (1 - F_{g,j}(x)) dx, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где $F_{ij}(x)$ означает ФР полной длительности жизни состояния $i \in I_j$ объекта $j \in J$. Из (5.22) можно получить аналогичную формулу для распределений ζ_{ij}^R и ζ_{ij}^E в моменты скачков. Для

среднего времени пребывания m_{G^*} в фиксированном подмножестве $E_{G^*} = \bigcup_{g \in G^*} E_g$, $G^* \subseteq G$ пространства состояний, справедливо равенство

$$m_{G^*} = (\nu_{G^*})^{-1} \sum_{g \in G^*} p_g, \quad (5.26)$$

где ν_{G^*} означает интенсивность точечного процесса моментов выхода процесса $\xi(t)$ из множества E_{G^*} ;

$$\nu_{G^*} = \sum_{g \in G^*} p_g \sum_{s \in J'_g} (c_{sg} \nu_{g_s, s} \sum_{g' \in G^*} p(g, s, g')).$$

Для среднего, действительно реализованного времени пребывания m_{ij} объекта $j \in J$ в активном состоянии $i \in C_j$ имеем, принимая во внимание переменные скорости протекания длительностей жизни:

$$m_{ij} = \frac{\nu_{ij}^{-1} \sum_{\{g \in G: g_j = i\}} p_g}{\sum_{\{g \in G: g_j = i\}} c_{jg} p_g}. \quad (5.27)$$

Формулы (5.26) — (5.27) можно найти в работе Янсена, Кёнига и Навроцки [209], (см. также [110, 171]).

Сравнивая распределения Q и Q^0 , даваемые формулами (5.3) и (5.22), соответственно, и используя утверждение, которое, по существу, является обратным к теореме 4.1.4, можно проверить, действительно ли точечный процесс моментов скачков данного типа (принадлежащих к некоторому множеству K^*) является пуассоновским. В частности, можно проверить, является ли пуассоновским соответствующим образом определенный выход. А именно, справедлива следующая теорема (см. Янсен, Кёниг и Навроцки [209], Янсен [205]):

5.4.1. Теорема. Точечный процесс Φ^* моментов скачков, принадлежащих множеству K^* , является пуассоновским, если

$$p_g = (\lambda^*)^{-1} \sum_{\{j, g': (g', j, g) \in K^*\}} c_{jg'} \nu_{g', j} p(g', j, g) p_{g'} \quad (5.28)$$

для любого $g \in G$, и если

$$U_{g'} \setminus \{j\} = U_{g''} \quad (5.29)$$

для любых $(g', j, g'') \in K^*$, где λ^* означает интенсивность точечного процесса Φ^* : $\lambda^* = \sum_{\{(g', j, g) \in K^*\}} c_{jg'} \nu_{g', j} p(g', j, g'') p_{g'}$.

Для эрланговской системы с потерями $M|G|s|0$ ($i_{jg} \equiv 1$) аналогичный результат был получен Фляйшманом [164] и Мекке [299], для системы $M|GI|s|0$ Шанбагом и Тамбурацисом

[368]. Если все длительности жизни активных состояний рассматриваемой системы обслуживания распределены показательно, то условие (5.28) содержится в теореме Бремо о выходном потоке [117], где использовались мартингалльные методы (см. также [118, 119]).

5.5. Общая схема сетей массового обслуживания. Сеть СМО можно рассматривать как схему обслуживания со специальной структурой переходов и специальным видом скоростей c_{jg} . Такой единообразный подход к исследованию сетей массового обслуживания был введен Янсенем и Кёнигом [208]. О замкнутых сетях массового обслуживания см. также Шассберггер [355].

Узлы сети массового обслуживания рассматриваются как наборы объектов. Пусть U означает множество всех узлов. Символом $0 \in U$ обозначим источник требований. В случае замкнутых сетей этот узел можно опустить. Будем различать несколько типов требований. Тип требования может содержать, например, информацию о пути требования в сети. Предположим, что множество K всех типов требований конечно. Переходы требований от узла к узлу зависят от их типов. При этих переходах тип требования может изменяться.

Пусть $p(u, k; u', k')$ означает вероятность перехода требования типа $k \in K$ из узла $u \in U$ в узел $u' \in U$ в требование типа $k' \in K$. Более того, пусть $\alpha(u, k)$ означает полную интенсивность потока требований типа k на узел $u \in U$. В случае разомкнутых сетей $\alpha(u, k)$ является суммой интенсивностей двух потоков, а именно интенсивности требований, поступающих из узла 0 (от источника требований) и из остальных узлов сети, соответственно. Интенсивности $\alpha(u, k)$ удовлетворяют следующей системе уравнений равновесия (принцип сохранения интенсивностей):

$$\alpha(u, k) = \sum_{(u', k')} p(u', k', u, k) \alpha(u', k'). \quad (5.30)$$

При исследовании стационарного поведения рассматриваемой сети СМО интенсивности $\alpha(u, k)$ должны удовлетворять дальнейшим условиям, например, вида $\sum_{k \in K} \alpha(u, k) < \mu$, если

узел $u \in U$ представляет собой систему типа $M|M|1| \infty$, (см. (2.7)). Множество состояний узла $u \in U$ обозначим через $G(u)$. Каждое состояние $g(u) \in G(u)$ характеризуем следующим образом: $g(u) = \{(k_j, a_j) : j = 1, \dots, l\}$, где l есть общее число требований в u , k_j есть тип j -го требования, а a_j некоторая дополнительная характеристика j -го требования, например его место в очереди, номер прибора на котором оно должно будет обслуживаться и т. д. Состояние сети задается набором $g = [g(u), u \in U \setminus \{0\}]$, а G обозначает множество всех состояний g сети. Пусть $c(u, g(u), j)$ означает скорость обслуживания требова-

ния, характеризующегося парой (k_j, a_j) в узле u , когда последний находится в состоянии $g(u)$. Далее, пусть $p_u^A(g(u), k, g'(u))$ означает вероятность изменения состояния $g(u)$ узла u на новое состояние $g'(u)$ в результате поступления требования типа k . Аналогично, пусть $p_u^D(g(u), (k_j, a_j), g'(u))$ означает соответствующую переходную вероятность, вызванную уходом требования с характеристикой (k_j, a_j) . Пусть $\mu^{-1}(u, k)$ означает среднюю длительность обслуживания требования типа k в узле u . Через $l_u(g(u), k)$ обозначим число требований типа k в узле u при данном состоянии узла $g(u)$. Через $l_u(g(u))$ обозначим полное число требований в $u \in U$ при данном состоянии узла $g(u)$. В этих обозначениях условие (5.28) теоремы 5.4.1 принимает вид

$$(1 - p_u^A(g(u), k, g(u))) \alpha(u, k) p_{g(u)} = \sum_{\{g'(u): l_u(g'(u), k) = l_u(g(u), k) + 1\}} p_{g'(u)} \times \\ \times \sum_{\{j: (k, a_j) \in g'(u)\}} \mu(u, k) c(u, g'(u), j) p_u^D(g'(u), (k, a_j), g(u)) \quad (5.31)$$

для любого $g(u) \in G(u)$ и $k \in K$. При этом (5.31) является усиленной версией системы $Z'1$ уравнений (5.4) из теоремы 5.1.2. Сами уравнения (5.4) получим, суммируя уравнения (5.31) по всем $k \in K$. Если, кроме того, стационарные вероятности $p_{g(u)}$ инвариантны относительно вида распределения длительности обслуживания, то в условиях теоремы 5.1.2 имеем:

$$\sum_{\{g'(u): l_u(g'(u), k) = l_u(g(u), k) - 1\}} \alpha(u, k) p_u^A(g'(u), k, g(u)) p_{g'(u)} = \\ = \sum_{\{j: (k, a_j) \in g(u)\}} \mu(u, k) c(u, g(u), j) p_{g(u)}. \quad (5.32)$$

Более того, система $Z'2$ уравнений (5.5) теоремы 5.1.2 принимает вид

$$c(u, g(u), j) \mu(u, k_j) p_{g(u)} = \\ = \sum_{\{g'(u): l_u(g'(u), k_j) = l_u(g(u), k_j) - 1, (k_j, a_j) \in g'(u)\}} \alpha(u, k_j) p_u^A(g'(u), k_j, g(u)) p_{g'(u)} \quad (5.33)$$

для любых $g(u) \in G(u)$ и $j = 1, 2, \dots, l_u(g(u))$.

Уравнения (5.31) — (5.32) как раз и являются условием локального равновесия, данным в работе Чанди, Ховарда и Тоуслея [129] для случая, когда все основные случайные величины независимы. Более того, уравнение равновесия (5.33) представляет собой уравнение равновесия на станциях, рассматриваемое в [129], (см. также [355, 357]). По сравнению с (5.32), оно является условием усиленного равновесия, которое необходимо и достаточно для инвариантности стационарных вероят-

ностей $p_{g(u)}$ относительно вида распределения длительностей обслуживания требований, характеризующихся парой (k_j, a_j) . Более того, из теоремы 5.1.2 следует, что условие (5.33) можно использовать также и для исследования инвариантности сетей СМО с зависимыми длительностями обслуживания (см. Янсен и Кёниг [208]).

Рассмотрим теперь произвольный, но фиксированный узел $u \in U$ при условиях, обеспечивающих стационарность (см. п. 2.2 и § 3) и при некотором условии неприводимости (см. [208]). Пусть требования типа k , поступающие на узел u , образуют стационарный пуассоновский поток с интенсивностью $\alpha(u, k)$, далее пусть длительности обслуживания показательно распределены. Тогда в предположении, что системы уравнений (5.31) и (5.32) удовлетворяются, можно доказать следующий результат.

5.5.1. Теорема (см. А. Л. Толмачев [90], Чанди, Ховард и Тоуслей [129], Келли [219]). При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения:

1) Требования типа k , выходящие из узла u , также образуют стационарный пуассоновский поток с интенсивностью $\alpha(u, k)$.

2) Состояние узла u в произвольный, но фиксированный момент времени t не зависит от последовательности моментов ухода требований из этого узла до момента t .

3) Стационарный по времени процесс $L_u(t)$ числа требований в узле u обратим, т. е. распределения процессов $L_u(t)$ и $L_u'(t)$, $L_u'(t) = L_u(t_0 - t)$ совпадают при любом фиксированном $t_0 \in R$.

Предполагая, что, помимо (5.31) — (5.32), выполняется также система уравнений (5.33) и что средние длительности обслуживания конечны, имеем:

5.5.2. Теорема (см. Келли [219], Чанди, Ховард и Тоуслей [129], Янсен, Кёниг и Навроцки [209]). 1) Стационарные вероятности $p_{g(u)}$ инвариантны относительно вида распределений длительности обслуживания. 2) Требования некоторого фиксированного подмножества типов $K^* \subseteq K$ (в частности, потерянные требования) выходящие из узла u , образуют стационарный пуассоновский поток с интенсивностью, равной соответствующей интенсивности поступления.

Заметим, что условиям (5.31) — (5.32) удовлетворяют, на пример, узлы следующего вида: $\vec{M} | M | s | r$ ($1 \leq s < \infty$, $0 \leq r < \infty$) с одинаково распределенными длительностями обслуживания и с различными скоростями обслуживания. Кроме того, для систем $\vec{M} | \vec{G} | s | 0$ и $\vec{M} | \vec{G} | s | r$ с абсолютным приоритетом и дообслуживанием (дисциплина обслуживания очереди прерванных требований может быть, например, прямой, инверсионной или случайной) условие (5.33) выполняется. Упомянутые выше результаты справедливы также для систем, которые

могут быть аппроксимированы системами, удовлетворяющими условиям (5.31)—(5.32) и (5.33), а именно $\vec{M}|M|s|_\infty$, $\vec{M}|G|_\infty$ со скоростями обслуживания, зависящими от состояния системы и от типа требования (в частности, для систем с разделением процессора или $\vec{M}|\vec{G}|s|_\infty$ с абсолютным приоритетом с дообслуживанием).

Будем говорить, что узлы, удовлетворяющие условиям теорем 5.5.1 или 5.5.2, или допускающие аппроксимацию системами, удовлетворяющими этим условиям, соответственно, принадлежат к классу ПВ (пуассоновский выход), или являются узлами типа ПВ. Пусть $u \in U$ — узел, принадлежащий к ПВ. Тогда из условий (5.31)—(5.32) локального равновесия и (5.33) равновесия на станциях соответственно, можно получить следующее представление для стационарных вероятностей $p_{g(u)}$:

$$p_{g(u)} = p_{\emptyset, u} \prod_{(k, a) \in g(u)} \alpha(u, k) q_{g(u)}, \quad (5.34)$$

где $p_{\emptyset, u}$ означает вероятность того, что узел u свободен, а $q_{g(u)}$ представляют собой решение уравнений (5.31)—(5.33) при $\alpha(u, k) \equiv 1$. Если, к тому же, дисциплина обслуживания очереди (занятие приборов, распределение длительностей обслуживания, скорость обслуживания) зависят только от требований (действительно находящихся в системе), а не от приборов, для величин $q_{g(u)}$ также имеет место некоторое мультипликативное представление.

Сети с узлами из класса ПВ исследовались, например, в работах [109, 112, 129, 144, 154, 178, 198, 208, 209, 218, 219, 276, 379]. Пусть $p_{g(u), k}$ (соответственно, $p_{g(u), k}^*$) означает стационарную по требованиям вероятность того, что поступающее (соответственно выходящее) требование типа k застает (соответственно покидает) узел u в состоянии $g(u)$. Тогда для узла u типа ПВ имеем

$$p_{g(u), k} = p_{g(u), k}^* = p_{g(u)} \quad (5.35)$$

для каждого $g(u) \in G(u)$, $k \in K$ (см. [113, 117, 207, 209, 301, 391, 392], а также раздел 4.2.1).

Пусть каждый узел $u \in U \setminus \{0\}$ рассматриваемой сети принадлежит к классу ПВ. В таком случае, стационарная вероятность p_g состояния g сети выражается формулой

$$p_g = a \prod_{u \in U \setminus \{0\}} p_{g(u)}, \quad g \in G, \quad (5.36)$$

где a есть некоторая нормирующая постоянная (для разомкнутых сетей $a=1$). Следовательно, свойство инвариантности стационарных вероятностей $p_{g(u)}$ относительно вида распределе-

ний длительностей обслуживания справедливо и для p_g (см., например, Гордон и Ньюэлл [178], Рейзер и Кобаяши [338], Башарин и Толмачев [14], Келли [219]).

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Азларов Т. А., Мусамухамедов М. Р., Доказательство существования стационарного режима для одной системы массового обслуживания. В сб. «Мат. методы контроля качества и надежн.» Ташкент, «Фан», 1969, 70—78 (РЖМат, 1970, 7В59)
2. Александров А. М., О периоде занятости некоторых систем с зависимыми временами обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 3, 75—85 (РЖМат, 1970, 11В51)
3. —, Один метод исследования систем массового обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 3, 105—115 (РЖМат, 1971, 12В134)
4. Аннаоразов О., Об одном обобщении формул Эрланга для систем массового обслуживания с потерями. Изв. АН Туркмен. ССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук, 1979, № 1, 95—96 (РЖМат, 1979, 9В56)
5. Афанасьева Л. Г., О существовании предельного распределения в системах массового обслуживания с ограниченным временем пребывания. Теория вероятн. и ее примен., 1965, 10, № 3, 570—578 (РЖМат, 1966, 1В63)
6. —, Мартынов А. В., Об эргодических свойствах систем массового обслуживания с ограничением. Теория вероятн. и ее примен., 1967, 12, № 1, 112—120 (РЖМат, 1967, 9В56)
7. —, —, Об эргодических свойствах многоканальной системы обслуживания с ограничением. Кибернетика, 1968, № 6, 62—69 (РЖМат, 1969, 10В44)
8. —, —, Об эргодических свойствах систем массового обслуживания с ограниченным временем пребывания. Теория вероятн. и ее примен., 1969, 14, № 1, 102—112 (РЖМат, 1969, 11В59)
9. Ахмаров И. О скорости сходимости в теоремах эргодичности и непрерывности для многолинейных систем с очередью. Теория вероятн. и ее примен., 1979, 24, № 2, 418—424 (РЖМат, 1979, 10В57)
10. —, Эргодичность и устойчивость многоканальных систем массового обслуживания с ограниченным временем ожидания. Сиб. мат. ж., 1979, 20, № 4, 911—916
11. —, О скорости сходимости к стационарным распределениям для систем с ограниченным временем ожидания. Теория вероятн. и ее примен., 1980, 25, № 2, 421
12. —, Леонтьева Н. П., Условия сходимости к предельным процессам и усиленный закон больших чисел для систем обслуживания. Теор. вероятн. и примен., 1976, 21, № 3, 559—570 (РЖМат, 1977, 2В91)
13. Башарин Г. П., Кокотушкин В. А., Об условиях усиленного статистического равновесия для сложных систем массового обслуживания. Проблемы передачи информации, 1971, 7, № 3, 67—75 (РЖМат, 1972, 2В65)
14. —, Толмачев А. Л., Некоторые результаты теории сетей массового обслуживания. Сб. Методы развития теории телеграфика. Изд. Наука, Москва, 1979, 52—65 (РЖМат, 1979, 6В336)
15. —, Харкевич А. А., Шнепс М. А., Массовое обслуживание в телефонии. М., Наука, 1968
16. Белляев Ю. К., Предельные теоремы для редких потоков. Теория вероятн. и ее примен., 1963, 8, № 2, 175—184 (РЖМат, 1964, 2В18)
17. —, Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности. Тр. VI Всесоюз. совещания по теории вероятностей

- и мат. статистике. 1960. Вильнюс, Гос. изд. полит. и научн. лит. ЛитССР, 1962, 309—323 (РЖМат, 1964, 5В146)
18. —, Новые результаты и обобщения задач типа пересечений. Прил. к книге: Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., Мир, 1969 (РЖМат, 1970, 1В106К)
 19. Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., Наука, 1972 (РЖМат, 1972, 6В42К)
 20. —, Теоремы непрерывности для многоканальных систем с отказами. Теор. вероятн. и её примен., 1972, 17, № 3, 458—468 (РЖМат, 1973, 2В63)
 21. —, Некоторые оценки скорости сходимости в теоремах устойчивости. Теор. вероятн. и её примен., 1977, 22, 689—699
 22. —, Теоремы эргодичности и устойчивости для одного класса стохастических уравнений и их приложения. Теор. вероятн. и её примен., 1978, 23, 241—262
 23. —, Асимптотические методы теории массового обслуживания. М., Наука, 1980
 24. Броди С. М., Погосян И. А., Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания. Киев, «Наукова думка», 1973 (РЖМат, 1973, 10В67К)
 25. Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н., Лекции по теории сложных систем. М., «Сов. радио», 1973 (РЖМат, 1973, 5В277К)
 26. Гнеденко Б. В., О некоторых нерешенных задачах теории массового обслуживания. Sixth International Teletraffic Congress, Munich 1970
 27. —, Даниелян Э. А., Димитров Б. Н., Климов Г. П., Матвеев В. Ф., Приоритетные системы обслуживания. М., МГУ, 1973
 28. —, Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания. М., Наука, 1966 (РЖМат, 1968, 12В83К)
 29. —, Соловьев А. Д., Об условиях существования финальных вероятностей у марковского процесса, Math. Operationsforsch. Statist., 1973, 4, 379—390
 30. Гнеденко Д. Б., Об одном обобщении формул Эрланга. Zast. mat., 1971, 12, № 3, 239—242 (РЖМат, 1972, 7В79)
 31. Григелионис Б., Случайные точечные процессы и мартингалы. Лит. мат. сб., 1975, 15, № 3, 101—114 (РЖМат, 1976, 3В162)
 32. Гуляев В. И., О связи времени пребывания с вероятностями состояний систем массового обслуживания. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1973, № 1, 101—109 (РЖМат, 1973, 5В76)
 33. Гусейнов Б. Т., Об одной многолинейной системе массового обслуживания с потерями и взаимопомощью. Проблемы передачи информации, 1974, 10, № 4, 78—84 (РЖМат, 1975, 12В71)
 34. Джейсул Н. К., Очереди с приоритетами. М., Мир, 1973 (РЖМат, 1973, 9В24К)
 35. Духовный И. М., К оценке структурно-сложных систем массового обслуживания. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1967, № 1, 81—90
 36. Ежов И. И., Эргодическая теорема для марковских процессов, описывающих общие системы массового обслуживания. Кибернетика, 1966, № 5, 79—81 (РЖМат, 1967, 5В48)
 37. —, Шуренков В. М., Эргодические теоремы, связанные с марковским свойством случайных процессов. Теория вероятн. и её примен., 1976, 21, № 3, 635—640 (РЖМат, 1977, 1В54)
 38. Жолков С. Ю., Рыков В. В., Разложимые регенерирующие процессы в теории массового обслуживания. В сб. Теория массового обслуживания. Труды IV Всесоюзн. школы-совещания по теории массового обслуживания. Баку, М., МГУ, 1981
 39. Жук П. И., Об одном преобразовании обобщенных формул Эрланга. Кибернетика, 1969, № 4, 146—147 (РЖМат, 1970, 2В75)
 40. Золотарев В. М., Количественные оценки в задачах непрерывности систем массового обслуживания. Теория вероятн. и её примен., 1975, 20, № 1, 215—218

41. —, О непрерывности стохастических последовательностей, порождаемых рекуррентными процедурами. Теория вероятн. и ее примен., 1975, 20, № 4, 834—847 (РЖМат, 1976, 6В63)
42. —, О стохастической непрерывности систем массового обслуживания типа $G/G/1$. Теория вероятн. и ее примен., 1976, 21, № 2, 260—279 (РЖМат, 1976, 12В107)
43. —, Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений. Мат. сб., 1976, 101 (143), 3 (11), 416—454 (РЖМат, 1977, 2В7)
44. —, Проблема непрерывности систем массового обслуживания. Теория вероятн. и ее примен., 1977, 22, 655—666
45. —, Количественные оценки свойства непрерывности систем массового обслуживания типа $G/G/\infty$. Теория вероятн. и ее примен., 1977, 22, № 4, 700—711 (РЖМат, 1978, 6В74)
46. Ианицкий В. А., Однолинейная система массового обслуживания с очередью. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 6, 110—120 (РЖМат, 1972, 4В44)
47. Кабанов Ю. М., Линцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Мартингалы в теории точечных процессов. В сб. «Тр. школы-семинара по теории случайн. процессов. Друскининкай 1974. Ч. 2». Вильнюс, 1975, 269—354 (РЖМат, 1976, 2В139)
48. Калашников В. В., Анализ эргодичности систем массового обслуживания с помощью прямого метода Ляпунова. Автоматика и телемеханика, 1971, № 4, 46—54 (РЖМат, 1971, 10В84)
49. —, Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М., Наука, 1978
50. Кениг Д., Метод проверки свойства инвариантности и вычисление стационарных вероятностей для систем массового обслуживания с прерыванием, функциональными и стохастическими зависимостями. Труды III Всесоюз. школы-совещания по теории массового обслуживания. М., МГУ, 1976, 1, 93—114 (РЖМат, 1977, 8В71)
51. —, Штойля Д., Методы массового обслуживания. М. «Сов. радио», 1980
52. Китаев М. Ю., Рыков В. В., Системы обслуживания с ветвящимися потоками вторичных требований. Автоматика и телемеханика, 1980, № 9, 52—61
53. Климов Г. П., Стохастические системы обслуживания. М., Наука, 1966 (РЖМат, 1968, 6В47К)
54. —, Некоторые решенные и нерешенные задачи в обслуживании последовательной цепочкой приборов. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1970, № 6, 88—92 (РЖМат, 1971, 6В77)
55. —, Системы обслуживания с разделением времени I. Теория вероятн. и ее примен., 1974, 19, № 3, 558—576
56. —, Системы обслуживания с разделением времени II. Теория вероятн. и ее примен., 1978, 23, 331—339
57. Климова Е. З., Исследование однолинейной системы обслуживания с «разогревом». Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1, 91—97 (РЖМат, 1969, 1В52)
58. Коваленко И. Н., Об одном методе в теории массового обслуживания. Резюме. Тр VI Всес. совещания по теории вероятностей и мат. статистике. 1960, Вильнюс, Гос. изд. полит. и научн. лит. ЛитССР, 1962, 357—358 (РЖМат, 1964, 6В429)
59. —, Об условии независимости вероятностей состояний системы от вида распределения времени обслуживания. В кн. Пробл. передачи информации, вып. 2. М., АН СССР, 1963, 147—151
60. —, Некоторые аналитические методы в теории массового обслуживания. В сб. Кибернетику на службу коммунизму, т. 2. М.—Л., «Энергия», 1964, 325—338 (РЖМат, 1966, 4В168)
61. —, Теория массового обслуживания. В сб. Теория вероятн. Матем. статистика. Теор. кибернетика, 1970. Итоги науки, ВИНТИ АН СССР. М., 1971, 5—109 (РЖМат, 1972, 4В34, 4В33К)

62. —, Исследования по анализу надежности сложных систем. Киев, «Наукова думка», 1976
63. Козлов Б. А., Резервирование с восстановлением. М., «Сов. Радио», 1969
64. Кокотушкин В. А., Одно обобщение теоремы Пальма — Хинчина, Теор. вероятн. и примен. 1974, 19, № 3, 622—625
65. Коромок В. С., Турбин А. Ф., Полумарковские процессы и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1976 (РЖМат, 1976, 9В60К)
66. Крупин В. Г., О непрерывности характеристик многолинейных систем массового обслуживания с ограниченным временем пребывания. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1974, № 6, 132—138 (РЖМат, 1975, 5В76)
67. —, Теорема непрерывности для многолинейных систем массового обслуживания с ограниченной очередью. В сб. «Теория массового обл. Труды сем. по вероятн. мет. в технике». М., МГУ, 1975, 6—18 (РЖМат, 1976, 7В74)
68. Кузнецов Н. Ю., Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений состояний резервированной системы с восстановлением. В сб. «Методы исследования операций и теории надежности в анализе систем». Киев, Институт кибернетики АН УССР, 1976, 24—41 (РЖМат, 1977, 7В287)
69. —, Об инвариантности стационарных вероятностей состояний высоконадежной резервированной системы с восстановлением. Кибернетика, 1978, № 6, 98—101 (РЖМат, 1979, 6В350)
70. —, Определение стационарных вероятностей состояний систем, для которых выполнены условия, близкие к условиям инвариантности И. Н. Коваленко. Докл. АН УССР, 1979, № 7, 505—510 (РЖМат, 1979, 11В286)
71. Кухта Т. К., Анализ систем массового обслуживания $GI/M/m$ методом вложенных полумарковских процессов. Кибернетика, 1977, № 5, 132—134 (РЖМат, 1978, 4В75)
72. Леонтева Н. П., Теоремы о сходимости процессов очередей и времени ожидания с непрерывным временем. Укр. мат. ж., 1976, 28, № 5, 612—621 (РЖМат, 1977, 2В92)
73. —, Системы обслуживания с произвольными начальными условиями. Теор. вероятн. и её примен. 1977, 22, № 4, 831—837 (РЖМат, 1978, 7В75)
74. —, Сходимость к предельным процессам в многоканальных системах обслуживания. Сиб. мат. ж., 1978, 19, № 4, 793—814 (РЖМат, 1979, 2В109)
75. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М., Наука, 1974 (РЖМат, 1974, 7В292К)
76. Литвинов М. Л., Метод Кендалла и определение характеристик моделей обслуживания. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1975, № 6, 74—79 (РЖМат, 1976, 6В81)
77. Марьянович Т. П., Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться. Укр. мат. ж., 1960, 12, № 3, 279—286 (РЖМат, 1961, 7В187)
78. —, Надежность системы со смешанным резервом. Доп. АН УРСР, 1961, № 8, 994—997 (РЖМат, 1962, 5В120)
79. —, Обслуживание с учетом выхода прибора из строя. Тр. VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и мат. статист. 1960. Вильнюс, Гос. изд. полит. и научн. лит. ЛитССР, 1962, 363—364 (РЖМат, 1963, 7В388)
80. Навроцки К., Марковские случайные маркированные потоки и их приложения к задачам теории массового обслуживания. Math. Operationsforsch. Statist., 1975, 6, № 3, 445—477 (РЖМат, 1976, 5В78)
81. Печинкин А. В., Соловьев А. Д., Яшков С. Ф., В системе с дисциплиной обслуживания первым требования с минимальной оставшейся длиной. Изв. АН СССР, Техн. Кибернетика, 1979, № 5, 51—58 (РЖМат, 1980, 1В502)

82. Рыжиков Ю. И., К вопросу о законах сохранения в теории массового обслуживания. Кибернетика 1976, № 2, 124—128 (РЖМат, 1977, 1В75)
83. Рыков В. В., Регенерирующие процессы с вложенными периодами регенерации и их применение при исследовании приоритетных систем массового обслуживания. Кибернетика, 1975, № 6, 105—111. (РЖМат, 1976, 6В77)
84. —, Применение регенерирующих процессов при исследовании управляемых систем. В сб. Теория массового обслуживания. Тр. III Всесоюзной школы — совещания по теории массового обслуживания. М., МГУ, 1976, I, 135—149 (РЖМат, 1977, 5В59)
85. —, Ястребенецкий М. А., О регенерирующих процессах с несколькими типами точек регенерации. Кибернетика, 1971, № 3, 82—86 (РЖМат, 1972, 1В106)
86. Севастьянов Б. А., Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. Теория вероятн. и ее примен., 1957, 2, № 1, 106—116 (РЖМат, 1958, 7970)
87. Симонова С. Н., О многолинейной системе с потерями с входящим полумарковским потоком требований. Кибернетика, 1967, № 6, 48—53 (РЖМат, 1968, 6В59)
88. Сливняк И. М., Некоторые свойства стационарных потоков однородных случайных событий. Теор. вероятн. и её примен., 1962, 7, № 3, 347—352 (РЖМат, 1963, 9В110)
89. —, Стационарные потоки однородных случайных событий. Вестн. Харьковский. ун-та. Сер. мех.-мат., 1966, № 14, 73—116 (РЖМат, 1968, 5В41)
90. Толмачёв А. Л., Некоторые характеристики замкнутых экспоненциальных сетей. В сб. «Теория телеграфика и информационные сети». М., Наука, 1977, 3—6 (РЖМат, 1978, 1В124)
91. Федоткин М. А., О предельных свойствах распределений для состояний систем с переменной структурой обслуживания заявок при управлении конфликтными потоками в классе нелинейных однородных алгоритмов. Лит. мат. сб., 1977, 17, № 3, 73—85 (РЖМат, 1977, 11В449)
92. —, Управление конфликтными потоками заявок по минимальной информации о состоянии с переменной структурой обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1977, № 6, 65—71
93. —, Неполное описание квазирегенерирующих входных потоков неоднородных требований и транспортные потоки. В кн. IV Всес. совещание по статистическим методам теории управления. М., Наука, 1978, 234—236
94. Франкен П., О стационарных вероятностях состояний систем массового обслуживания в различные моменты времени. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1975, № 1, 101—107 (РЖМат, 1975, 7В269)
95. —, Штреллер А., Стационарные обобщенные регенерирующие процессы. Теория вероятн. и ее применен., 1979, 24, № 1, 78—90 (РЖМат, 1979, 8В99)
96. Хинчин А. Я., Математическая теория стационарной очереди. Мат. сб., 1932, 39, № 4, 73—84
97. —, Математические методы теории массового обслуживания. Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1955, 49, 2—122*
98. Целе М., Эргодическая теорема для системы Эрланга с потерями в случае зависимых времен обслуживания, Math. Nachrichten, 1977, 79, 317—323 (РЖМат, 1978, 2В103)
99. Шахбазов А. А., О некоторых задачах теории массового обслуживания, Диссертация. М., МГУ, 1962
100. Штойян Д., Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М., «Мир», 1979

* См. также А. Я. Хинчин, Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963 (РЖМат, 1964, 11В304К)

101. Якушев Ю. Ф., Об одной задаче обслуживания потока вызовов ненадежными приборами. Пробл. передачи информ., 1969, 5, № 4, 84—88 (РЖМат, 1970, 6B276)
102. Яровицкий Н. В., О некоторых свойствах односвязно-зависимых потоков. Укр. мат. ж., 1962, 14, № 2, 170—179 (РЖМат, 1963, 9B185)
103. —, Теорема существования эргодических распределений для одной частной системы автоматов. В сб. «Теория автоматов. Семинар. Вып. 1». Киев, «Наукова думка», 1966, 22—23 (РЖМат, 1967, 12B288)
104. Ярошенко В. М., Об одной задаче теории массового обслуживания. Доп. АН УССР, 1962, № 2, 153—156 (РЖМат, 1963, 2B345)
105. Anderson C. W., Weak convergence in an appointment system. J. Appl. Probab., 1975, 12, 188—194
106. Arjas E., On the use of a fundamental identity in the theory of semi-Markov queues. Adv. Appl. Prob., 1972, 4, № 2, 271—284 (РЖМат, 1973, 1B71)
107. Balagopal K., Limit theorems for the single server queue with non-preemptive service interference. Opsearch, 1977, 14, 244—262
108. —, A conservation law for utilisation in queues. Opsearch, 1978, 15, 12—21
109. Barbour A. O., Networks of queues and the method of stages. Adv. Appl. Probab., 1976, 8, 584—591
110. —, Schassberger R., Insensitive average sojourn times for generalized semi-Markov processes, Adv. Appl. Probab., 1980, 12
111. Bartow R. E., Repairman Problems. Studies in Appl. Prob. and Management Science, Stanford Univ. Press, Stanford (Calif.), 1962, 18—33
112. Baskett F., Chandy K. M., Muntz R. R., Palacios F. G., Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers. J. ACM, 1975, 22, 248—260
113. Beutler F. J., Melamed B., Zeigler B., Equilibrium properties of arbitrarily interconnected queueing networks. In: Multivariate Analysis, 1977, 4, P. R. K. Krishnaiah Ed., North Holland, 351—370
114. Bhat U. N., Queueing systems with first-order dependence. Opsearch, 1969, 6, 1—24
115. Borovkov A. A., Random processes in queueing theory. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1976
116. Boxma O. J., The single-server queue with random service output. J. Appl. Probability, 1975, 12, 763—778
117. Brémaud P., On the output theorem of queueing theory, via filtering, J. Appl. Probab., 1978, 15, № 2, 397—406 (РЖМат, 1979, 2B104)
118. —, Streams of a $M/M/1$ feedback queue. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb., 1978, 45, № 1, 21—33 (РЖМат, 1979, 1B298)
119. —, Point processes and queues: Martingale dynamics. Lect. Notes Springer—Verlag
120. —, Jacod J., Processus ponctuels et martingales: résultats récents sur la modélisation et le filtrage. Adv. Appl. Probability, 1977, 9, 362—416
121. Brill P. H., An embedded level crossing technique for dams and queues. J. Appl. Prob., 1979, 16, № 1, 174—186 (РЖМат, 1979, 11B276)
122. —, Posner M. J. M., Level crossings in point processes applied to queues: single-server case. Operations Res. 1977, 25, № 4, 662—674
123. Brumelle S. L., On the relation between customer and time averages in queues. J. Appl. Probab., 1971, 8, № 3, 508—520 (РЖМат, 1972, 3B62)
124. —, A generalization of $L\lambda W$ to moments of queue length and waiting times. Oper. Res., 1972, 20, № 6, 1127—1136 (РЖМат, 1973, 10B70)
125. —, A generalization of Erlang's loss system to state dependent arrival and service rates. Math. Oper. Res., 1978, 3, № 1, 10—16 (РЖМат, 1979, 2B117)
126. Burke P. J., Delays in single-server queues with batch input. Oper. Res., 1975, 23, 830—833

127. Callahan J. R., A queue with waiting time dependent service times. *Nav. Res. Log. Quart.*, 1973, 20, 321—324
128. Chaiken J. M., Ignall E., An extension of Erlang's formulas which distinguishes individual servers. *J. Appl. Probab.*, 1972, 9, № 1, 192—197 (PЖMat, 1972, 7B75)
129. Chandy K. M., Howard J. H., Towsley D. F., Product form and local balance in queueing networks. *J. ACM*, 1977, 24, № 2, 250—263 (PЖMat, 1977, 10Г320, 12B402)
130. Charlot F., Chidouche M., Hamami M., Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des «Temps d'attente» des files $G1/G/q$. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb.*, 1978, 43, № 3, 187—203 (PЖMat, 1978, 12B82)
131. —, Pujolle G., Recurrence in single-server queues with impatient customers. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1978, B 14, № 4, 399—410 (PЖMat, 1979, 7B87)
132. Chaudhry M. L., Queueing problems with correlated arrivals and service through parallel channels. *CORS Journal*, 1967, 5, № 1, 35—46 (PЖMat, 1967, 10B44)
133. —, Marriage between the supplementary variable technique and the imbedded Markov chain technique I. *Trans. 8th Prague Conf. Inform. Theory, Stat. Decision Functions, Random Processes. Prague 1978, Vol A*, Prague, 1978, 133—141 (PЖMat, 1979, 9B53)
134. Cheong C. K., Heathcote C. R., On the rate of convergence of waiting times. *J. Austral. Math. Soc.*, 1965, 5, № 3, 365—373 (PЖMat, 1966, 5B34)
135. Cinlar E., Time dependence of queues with semi-Markovian services. *J. Appl. Probab.*, 1967, 4, № 2, 356—364 (PЖMat, 1969, 2B67)
136. —, Queues with semi-Markovian arrivals. *J. Appl. Probab.*, 1967, 4, № 2, 365—379 (PЖMat, 1968, 4B57)
137. —, Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.*, 1969, 1, № 2, 123—187 (PЖMat, 1970, 11B82)
138. —, Markov renewal theory: A survey. *Manag. Sci.*, 1975, 21, 727—752
139. Cohen J. W., The generalized Engset formulae, *Philips Telecomm. Rev.*, 1957, 18, 158—170
140. —, The single-server queue. North-Holland Publishing Company, Amsterdam/London 1969 (PЖMat, 1971, 12B114K)
141. —, On regenerative processes in queueing theory. *Lect. Notes in Econ. Math. Syst.* 121, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1976
142. —, On a single-server queue with group arrivals. *J. Appl. Probab.*, 1976, 13, № 3, 619—622 (PЖMat, 1977, 6B72)
143. —, On up- and downcrossings. *J. Appl. Probab.*, 1977, 14, № 2, 405—410 (PЖMat, 1978, 7B85)
144. —, The multiple phase service network with generalized processor sharing. *Acta Informatica*, 1979, 12, № 3, 245—284 (PЖMat, 1980, 4B38)
145. Conolly B. W., The waiting time process for a certain correlated queue. *Operat. Res.*, 1968, 16, № 5, 1006—1015 (PЖMat, 1969, 10B35)
146. —, Chan J., Generalized birth and death queueing processes: Recent results. *Adv. Appl. Probab.*, 1977, 9, № 1, 125—140
147. Cox D. R., The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1955, 51, № 3, 433—441 (PЖMat, 1956, 6749)
148. —, Renewal theory. Mathuen, London 1962. (PЖMat, 1963, 10B119K); Русск. перевод: Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления. М. «Сов. Радио», 1967
149. Czerwińska D., Imbedded stochastic chains for queueing processes in multi-priority systems. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. et Phys.*, 1976, 24, № 12, 1127—1131 (PЖMat, 1977, 12B577)
150. Daley D. I., Queueing output processes. *Adv. Appl. Probab.*, 1976, 8, № 2, 395—415 (PЖMat, 1977, 5B48)

151. —, Vere-Jones D. A summary of the theory of point processes, Stochastic point processes: Statistical analysis theory and applications (editor: P. A. W. Lewis), Wiley-Interscience, New York/London/Sydney/Toronto, 1972, 299—383
152. Davignon G. R., Disney R. L., Queues with instantaneous feedback. Management Sci., 1977, 24, 168—180
153. Delbrouck L. E. N., A set of Wiener-Hopf integral equations with common solution in fluctuation theory. J. Math. Anal. Appl., 1973, 44, 100—112
154. Disney R. L., Random flow in queueing networks, a review and critique. AIIE Transact., 1975, 7, 268—288
155. —, Davignon G. R., Some problems of queues with feedback. Proc. Conf. on Point Processes and Queueing Problems, Keszthely 1978. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1980
156. Erlang A. K., Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. Post Office Electrical Engineer's Journal, 1917, 10, 189—197
157. Feller W., Fluctuation theory of recurrent events. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 98—119
158. Finch P. D., A probability limit theorem with application to a generalization of queueing theory. Acta Math. Acad. Scient. Hung., 1959, 10, № 3—4, 317—325 (PJKMar, 1961, 9B212)
159. —, On the distribution of queue size in queueing problems. Acta Math. Acad. Scient. Hung., 1959, 10, № 3—4, 327—336 (PJKMar, 1961, 1B204)
160. —, A coincidence problem in telephone traffic with nonrecurrent arrival process. J. Austral. Math. Soc., 1963, 3, № 2, 237—240 (PJKMar, 1964, 4B382)
161. —, The single server queueing system with nonrecurrent input process and Erlang service time. J. Austral. Math. Soc., 1963, 3, № 2, 220—236 (PJKMar, 1964, 9B31)
162. —, Pearche C., A second look at queueing systems with moving average input process. J. Austral. Math. Soc., 1965, 5, № 1, 100—106 (PJKMar, 1965, 11B31)
163. Fleischmann K., Zur Stationarität eines modifizierten Erlangschen Bedienungsprozesses. Math. Operationsforsch. und Statist., 1971, 2, № 4, 283—290 (PJKMar, 1972, 7B78)
164. —, Über den Output unempfindlicher verallgemeinerter Erlangscher Bedienungsprozesse. Math. Nachr., 1975, 66, 195—200
165. Fortet R. M., Calcul des probabilités. Centre National de la recherche scientifique, Paris 1950
166. —, Grandjean Ch., Blockierung in einem Verlustsystem, bei dem einige Belegungen mehrere Schaltglieder beanspruchen. Elektrisches Nachrichtenwesen, 1964, 39, № 4, 566—579
167. Franken P., Erlangsche Formeln für semimarkowschen Eingang. Elektron. Informationsverarb. und Kybernet., 1968, 4, № 3, 197—204 (PJKMar, 1969, 5B48)
168. —, Ein Stetigkeitssatz für Verlustsysteme. Operationsforschung und Math. Statistik II, 9—23. Akademie—Verlag Berlin 1970
169. —, Einige Anwendungen der Theorie zufälliger Punktprozesse in der Bedienungstheorie I. Math. Nachr., 1976, 70, 303—319 (PJKMar, 1977, 1B67)
170. —, Kälähne U., Existence uniqueness and continuity of stationary distributions for queueing systems without delay. Math. Nachr., 1978, 86, 97—115 (PJKMar, 1979, 10B58)
171. —, König D., Arndt U., Schmidt V., Queues and point processes. Akademie—Verlag, Berlin/J. Wiley & Sons, New York 1980
172. —, —, Schmidt V., On time-dependent and stationary queue length characteristics. Elektron. Informationsverarb. und Kybernet., 1980, 16, № 4
173. —, Stoyan D., Stabilitätssätze für eine Klasse homogener Markowscher Prozesse. Math. Nachr., 1974, 60, 311—316
174. Friedman H. D., Reduction methods for tandem queueing systems. Oper. Res., 1965, 13, № 1, 121—131 (PJKMar, 1966, 3B808)

175. *Fujisawa T.*, Effects of multiplicity in arrival processes on queue lengths and waiting times. *J. Oper. Res. Soc. Japan*, 1976, 19, 125—136
176. *Gnedenko B. W.*, Asymptotic problems in queueing theory. *Proc. Prague Symp. Asympt. Statist. Vol. I*, Prague 1973, 107—225
177. —, *Kowalenko I. N.*, Einführung in die Bedienungstheorie. Akademie—Verlag Berlin 1971, 1974
178. *Gordon W. J., Newell G. F.*, Closed queueing systems with exponential servers. *Operations. Res.*, 1967, 15, № 2, 254—265 (PJKMar, 1967, 12B384)
179. *Granot D., Granot F., Lemoine A.*, Approximations for a service system with nonindependent interarrival times. *Oper. Res.*, 1975, 23, 162—166
180. *Greenberg I.*, The behaviour of a simple queue at various times and epochs. *SIAM Rev.*, 1967, 9, № 2, 234—248 (PJKMar, 1968, 4B55)
181. *Guseinov B. T.*, Generalization of Kovalenko's theorem on the invariance of state probabilities of service systems with respect to service time distribution. *Lect. on the 6th International Teletraffic Congress, Munich 1970*
182. *Gutjahr R.*, Eine Bemerkung zur Existenz unendlich vieler «Leerpunkte» in Bedienungssystemen mit unendlich vielen Bedienungsapparaten. *Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization*, 1977, 8, 245—251
183. *Haji R., Newell G. F.*, A relation between stationary queue and waiting time distributions. *J. Appl. Probab.*, 1971, 8, № 3, 617—620 (PJKMar, 1972, 3B64)
184. *Harris C. M.*, Some results for bulk-arrival queues with state-dependent service times. *Manag., Sci.*, 1970, 16, № 5, 313—326 (PJKMar, 1970, 11B429)
185. —, *Marlin P. G.*, A note on feedback queues with bulk service. *J. Ass. Comp. Mach.*, 1972, 19, № 4, 727—733 (PJKMar, 1973, 11B105)
186. *Harris R.*, The expected number of idle servers in a queueing system. *Operations Res.* 1974, 22, 1258—1259
187. *Harrison J. M.*, Assembly-like queues. *J. Appl. Probab.*, 1973, 10, 354—367
188. —, *Lemoine A. J.*, On the virtual and actual waiting time distributions of a $GI/G/1$ queue. *J. Appl. Probab.*, 1976, 13, № 4, 833—836 (PJKMar, 1977, 10B47)
189. —, —, Limit theorems for periodic queues. *J. Appl. Probab.*, 1977, 14, № 3, 566—576 (PJKMar, 1978, 7B84)
190. *Heathcote C. R.*, Complete exponential convergence and some related topics. *J. Appl. Probab.*, 1967, 4, № 2, 217—256 (PJKMar, 1968, 8B24)
191. —, *Winer P.*, An approximation for the moments of waiting times. *Oper. Res.* 1969, 17, № 1, 175—186
192. *Hein O.*, Wartezeiten für beliebige Verteilungsfunktionen der Bedienungsszeiten. *Angew. Informatik*, 1973, 7, 281—289
193. *Hordijk A., Tijms H. C.*, A simple proof of the equivalence of the limiting distributions of the continuous-time and the embedded process of the queue size in the $M/G/1$ queue. *Statist. neer.*, 1976, 30, № 2, 97—100 (PJKMar, 1977, 5B40)
194. *Iglehart D. L.*, Multiple channel queues in heavy traffic IV. Law of the iterated logarithm. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb.*, 1971, 17, № 2, 168—180 (PJKMar, 1971, 7B84)
195. —, Weak convergence in queueing theory. *Adv. Appl. Probab.*, 1973, 5, 570—594
196. —, *Whitt W.*, Multiple channel queues in heavy traffic. I. *Adv. Appl. Probability*, 1970, 2, № 1, 150—177 (PJKMar, 1971, 1B68)
197. —, —, Multiple channel queues in heavy traffic. II. Sequences, networks and batches. *Adv. Appl. Probab.*, 1970, 2, № 2, 355—369 (PJKMar, 1971, 4B45)
198. *Jackson J. R.*, Jobshop-like queueing systems. *Manag. Sci.*, 1963, 10, № 1, 131—142
199. *Jacobi H.*, Eine Unempfindlichkeitseigenschaft für geordnete Bündel ungeordneter Teil Bündel. *Wiss. Z. Friedrich—Schiller—Univ. Jena, Math.-naturwiss. Reihe*, 1965, 14, № 5, 251—260 (PJKMar, 1967, 11B35)

200. Jaiswal N. K., Priority queues. New York, Acad. Press, 1968, IX, 239 pp. (PЖMar, 1971, 3B46K)
201. Jankiewicz M., Extended piecewise Markov processes in continuous time. Zast. Matem., 1978, 16, № 2, 175—196 (PЖMar, 1979, 6B68)
202. —, Extended piecewise Markov processes in discrete time. Zast. Matem., 1978, 16, № 2, 197—206 (PЖMar, 1979, 7B69)
203. —, Kopocinski B., Steady-state distributions of piecewise Markov processes. Zast. Mat., 1976, 15, 25—32
204. —, Rolski T., Piecewise Markov processes on a general rate pace. Zast. Matem., 1977, 15, № 4, 421—436 (PЖMar, 1978, 6B63)
205. Jansen U., On the Poisson output of queueing systems with dependent service times. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization, 1980
206. —, Unempfindlichkeitseigenschaft für verschiedene Auswahlregeln ohne Vorliegen der Stationären Verteilung. Electron. Informationsverarb. Kybernet., 1980, 16, № 4
207. —, König D., Invariante stationäre Zustandswahrscheinlichkeiten für eine Klasse stochastischer Modelle mit funktionellen Abhängigkeiten. Math. Operationsforsch. und Statist. 1976, 7, № 4, 497—522 (PЖMar, 1977, 3Г413, 4B380)
208. —, —, Insensitivity and steady-state probabilities in product form for queueing networks. Electron. Informationsverarb. und Kybernet., 1980, 16, № 4
209. —, —, Nawortzki K., A criterion of insensitivity for a class of queueing systems with random marked point processes. Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization, 1979, 10, № 3, 379—403 (PЖMar, 1980, 4B172)
210. Janssen J., Extension of a two-sided inequality of Daley and Moran to the completely semi-Markov queueing model. Cahiers du C. E. R. O., 1976, 18, № 4, 459—469 (PЖMar, 1977, 7B58)
211. Joffe A., Ney P. E., Convergence theorems for multiple channel loss probabilities. Ann. Math. Stat., 1963, 34, № 1, 260—273 (PЖMar, 1964, 4B376)
212. John F. I., Single server queues with dependent service and interarrival times. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1963, 11, № 3, 526—534 (PЖMar, 1964, 9B33)
213. Johnson B. McK., The ergodicity of series queues with general priorities. Ann. Math. Stat., 1965, 36, № 6, 1664—1676 (PЖMar, 1966, 7B50)
214. Kalähne U., Existence, uniqueness and some invariance properties on stationary distributions for general single-server queues. Math. Operationsforsch. und Statist., 1976, 7, № 4, 557—575 (PЖMar, 1977, 6B68)
215. Kallenberg O., Random measures. Schriftver Zentralist Math. und Mech., № 23, Akademie-Verlag, Berlin 1975 (PЖMar, 1977, 1B29)
216. Kaplan N. Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue. Ann. Probability, 1975, 3, 780—789
217. Karr A. F., Weak convergence of a sequence of Markov chains. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb., 1975, 13, 41—48
218. Kelly F. P., Networks of queues. Adv. Appl. Probability, 1976, 8, № 2, 416—432 (PЖMar, 1977, 2B267)
219. —, Reversibility and stochastic networks. J. Wiley & Sons, New York/London/Sydney/Toronto 1979
220. Kendall D. G., Some problems in the theory of queues. J. Royal Statist. Soc., 1951, B 13, 151—185
221. —, Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains. Ann. Math. Statist., 1953, 24, № 3, 338—354 (PЖMar, 1956, 3218)
222. —, Some recent work and further problems in the theory of queues. Теория вероятн. и ее примен., 1964, 9, № 1, 3—15 (PЖMar, 1964, 9B248)
223. Kennedy D. P., The continuity of the single server queue. J. Appl. Probab., 1972, 9, № 2, 370—381 (PЖMar, 1973, 1B76)

224. —, A note on the number of busy servers in a $GI/G/s$ queue in light traffic. *J. Appl. Probab.*, 1972, 9, № 4, 868—869 (ПЖМат, 1973, 6B39)
225. *Kerstan J., Matthes K., Mecke J.*, Unbergrenzt teilbare Punktprozesse. Akademie—Verlag, Berlin 1974
226. *Kiefer J., Wolfowitz J.*, On the theory of queues with many servers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1955, 78, 1—18
227. *Kingman J. F. C.*, Some inequalities for the queue $GI/G/1$. *Biometrika*, 1962, 49, № 3—4, 315—324 (ПЖМат, 1964, 7B70)
228. *Kleinrock L.*, A conservation law for a wide class of queueing disciplines. *Naval. Res. Log. Quart.*, 1965, 12, 181—192
229. —, Queueing systems. Vol. 1: Theory. J. Wiley & Sons, New York/London/Sydney/Toronto 1975 (ПЖМат, 1977, 3Г418Рен); Русск. перевод: *Клейнрок Леонард*. Теория массового обслуживания. М. Машиностроение. 1979
230. —, Queueing systems. Vol. 2: Computer applications. J. Wiley & Sons, New York/London/Sydney/Toronto 1976; Русск. перевод: *Клейнрок Леонард*. Вычислительные системы с очередями. М., Мир., 1979
231. *Klimow G. P.*, Bedienungsprozesse. Akademie—Verlag, Berlin 1978
232. *König D.*, Verallgemeinerungen der Engsettschen Formeln. *Math. Nachr.*, 1965, 28, 145—155
233. —, Anwendung von stochastischen Prozessen mit Geschwindigkeiten zur Untersuchung von Bedienungs- und Zuverlässigkeitsmodellen. *Wiss. Z. der Technischen Hochsch. Otto von Guericke Magdeburg*, 1974, 18, № 4, 363—368
234. —, Stochastic processes with basic stationary marked point processes. *Lect. on the Buffon Bicentenary Symp. on Stoch. Geometry and Directional Statist.*, Erevan 1976, *Adv. Appl. Probab.*, 1977, 9, 440—442
235. —, Methods for proving relationships between stationary characteristics of queueing systems. *Elektron. Informationsverarb. Kyb.*, 1980, 16, № 4
236. —, *Jansen U.*, Stochastic processes and properties of invariance for queueing systems with speeds and temporary interruptions. *Trans. 7th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Dec. Funct., Random Processes*, Prague 1974, 1977, 335—343
237. —, Eine Invarianzeigenschaft zufälliger Bedienungsprozesse mit positiven Geschwindigkeiten. *Math. Nachr.*, 1976, 70, 321—364 (ПЖМат, 1977, 1B63)
238. —, *Kotzurek M., Rabe H.*, Ergebnisse von Invarianzuntersuchungen für ausgewählte Bedienungs- und Zuverlässigkeitssysteme. *Math. Operationsforsch. Statist.*, 1976, 7, № 4, 523—556 (ПЖМат, 1977, 3Г421, 6B67)
239. —, *Matthes K.*, Verallgemeinerungen der Erlangischen Formeln I. *Math. Nachr.*, 1963, 26, № 1—4, 45—56 (ПЖМат, 1964, 12B62)
240. —, *Nawrotzki K.*, Verallgemeinerungen der Erlangischen und Engsettschen Formeln (Eine Methode in der Bedienungstheorie). Akademie—Verlag Berlin 1967 (ПЖМат, 1969, 9B45K)
241. —, —, Unempfindlichkeitseigenschaften von Bedienungsprozessen. Приложение к книге: *Gnedenko B. W., Kowalenko I. N.* Einführung in die Bedienungstheorie. Akademie—Verlag Berlin, 1971, 1974
242. —, *Rolski T., Schmidt V., Stoyan D.*, Stochastic processes with imbedded marked point processes (PMP) and their application in queueing. *Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization*, 1978, 9, 125—141
243. —, *Schmidt V.*, Marked point processes with random behaviour between points. *Proc. 2nd Vilnius Conf. Prob. Theory Math. Statist.*, 1977, Vol. 3, 109—112
244. —, —, Relationships between time- and customer-stationary characteristics of service systems. *Proc. Conf. on Point Processes and Queueing Problems*, Keszthely 1978. North—Holland Publ. Comp., Amsterdam 1980
245. —, —, Imbedded and non-imbedded stationary characteristics of queueing systems with varying service rate and point processes. *J. Appl. Probab.*, 1980, 17

246. —, —, Stochastic inequalities between customer-stationary and time-stationary characteristics of queueing systems with point processes. *J. Appl. Probab.*, 1980, 17
247. —, —, *Stoyan D.*, On some relations between stationary distributions of queue lengths and imbedded queue lengths in $G/G/s$ queueing systems. *Math. Operationsforsch. und Statist.* 1976, 7, № 4, 577—586 (PJKMar, 1977, 6B69)
248. —, *Stoyan D.*, *Methoden der Bedienungstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin 1976 (PJKMar, 1977, 1B64K)
249. *Kopocińska I.*, Piecewise Markov processes in discrete time and their certain extensions. *Zast. Mat.*, 1977, 16, № 1, 23—38 (PJKMar, 1978, 7B77)
250. —, Uogólnione procesy przedziałami markowskie. *Rocz. Pol. tow. mat.*, Sér. 3, *Matematyka stosowana*, 1977, 9, 117—122 (PJKMar, 1978, 7B78)
251. —, Repairman problem with arbitrary distributions of repairment and working times. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. et Phys.*, 1977, 25, № 10, 1023—1028 (PJKMar, 1978, 4B227)
252. —, *Kopociński B.*, Queueing systems with feedback. *Zast. Matem.*, 1972, 12, № 4, 373—384
253. —, —, Włożone łańcuchy Markowa dla pewnych rozbudowanych processów obsługi masowej. *Roczn. Polsk. Tow. Mat., Ser. Mat. Stos.* 1975, 5, 103—127
254. —, —, Steady-state distributions of queue length in the $GI/G/s$ queue. *Zast. Mat.*, 1977, 16, № 1, 39—46 (PJKMar, 1978, 8B89)
255. *Kopociński B., Rolski T.* A note on the virtual waiting time in the $GI/G/s$ queue. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. et Phys.*, 1977, 25, № 12, 1279—1280 (PJKMar, 1978, 8B90)
256. *Kosten L.*, On the validity of the Erlang and Engset lossformulae. *Het. P. T. T. Betrijf*, 1949, 2, 42—45
257. *Kotzurek M.*, Further bounds for waiting time distributions and their means in the case $\rho < 1$. *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization*, 1979, 10, № 3, 405—412 (PJKMar, 1980, 4B171)
258. —, *Stoyan D.*, A quantitative continuity theorem for the mean stationary waiting time in $GI/G/1$. *Math. Operationsforsch. Statist.* 1976, 7, № 4, 595—599 (PJKMar, 1977, 8B79)
259. —, —, A remark on the stability of the stationary distributions of Markov chains. *Math. Nachr.*, 1977, 78, 7—12
260. *Kowalenko I. N.*, Sur la condition pour que, en regime stationnaire, la distribution soit independante des lois des durees de conversation. *Ann. des telecommunications*, 1962, 17, 190—191
261. *Krakovski M.*, Conservation methods in queueing theory. *Rev. franc. automat. inform. rech. oper.*, 1973, 7, 63—83
262. —, Arrival and departure processes in queues. Pollaczek — Khintchine formulas for bulk arrivals and bounded systems. *Rev. Franc. Automat. Inform. Rech. Oper.*, 1974, 8, 45—56
263. *Kuczura A.*, Queues with mixed renewal and Poisson inputs. *Bell. Syst. Techn. J.*, 1972, 51, 1305—1326
264. —, Piecewise Markov processes. *SIAM J. Appl. Math.*, 1973, 24, № 2, 169—181 (PJKMar, 1973, 11B103)
265. —, Loss systems with mixed renewal and Poisson inputs. *Oper. Res.*, 1973, 21, 787—795
266. *Lampard D.*, A stochastic process whose successive intervals between events form a first order Markov chain—I. *J. Appl. Prob.*, 1968, 5, № 3, 648—668 (PJKMar, 1969, 10B33)
267. *Le Gall P.* Stochastic integral equations applied to telecommunications traffic without delay. *Stoch. Proc. Appl.*, 1974, 2, 261—280
268. —, Corrigendum. Comments on the paper «Stochastic integral equations applied to telecommunications traffic without delay». *Stoch. Proc. Appl.*, 1978, 6, 337—338

269. *Lemaire B.*, Méthode de conservation et blocage dans les files d'attente. *RAIRO, Recherche opérationnelle/OR*, 1977, 11, № 4, 363—377 (PJKMar, 1978, 7B94)
270. —, Théorème de conservation des clients dans les files d'attente. *RAIRO, Recherche opérationnelle/OR*, 1978, 12, № 4, 395—399 (PJKMar, 1979, 9B64)
271. *Lemoine A. J.*, On two stationary distributions for the stable $GI/G/1$ queue. *J. Appl. Probability*, 1974, 11, 849—852
272. —, Limit theorems for generalized single server queues. *Adv. Appl. Probability*, 1974, 6, 159—174
273. —, Some limiting results for a queueing model with feedback. *Sankhya*, 1974, A36, 293—304
274. —, Limit theorems for generalized single-server queues: The exceptional system. *SIAM J. Appl. Math.*, 1975, 28, 596—606
275. —, Some limiting results for a queueing model with feedback. II. *Sankhya*, 1977, A39, № 1, 82—93 (PJKMar, 1978, 11B108)
276. —, Networks of queues — A survey of equilibrium analysis. *Management Sci.*, 1977, 24, 464—481
277. *Lewis P. A. W.* (ed.), *Stochastic point processes: Statistical analysis, theory and applications*. Wiley—Interscience, New York/London/Sydney/Toronto 1972
278. —, *Shedler G. S.*, Simulation of non-homogeneous Poisson processes with log linear rate function. *Biometrika*, 1976, 63, 501—505
279. *Lewis T.*, The intervals between regular events displaced in time by independent random deviation of large dispersion. *J. R. Statist. Soc.*, 1961, B23, № 2, 476—483 (PJKMar, 1962, 7B15)
280. —, Evaluation of the queue length distribution for some queues with correlated inputs. *Nature (Engl.)*, 1966, 221, № 5053, 1106—1107 (PJKMar, 1967, 9B58)
281. *Lindley D. V.*, The theory of queues with a single server. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1952, 48, 277—289
282. *Lisek B.*, Construction of stationary state distributions for loss systems. *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics*, 1979, 10, 561—581
283. —, On the rate of convergence in continuity theorems for loss systems. *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization*, 1980, 11
284. *Little J.*, A proof of the queueing formula: $L = \lambda W$. *Oper. Res.*, 1961, 9, № 3, 383—387 (PJKMar, 1962, 6B315)
285. *Loulou R.*, Multi-channel queues in heavy traffic. *J. Appl. Probab.*, 1973, 10, 769—777
286. *Loynes R. M.*, The stability of a queue with non-independent interarrival and service times. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1962, 58, № 3, 497—520 (PJKMar, 1964, 4B375)
287. —, The stability of a system of queues in series. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1964, 60, № 3, 569—574
288. —, On the waiting-time distribution for queues in series. *J. Roy Statist. Soc.*, 1965, B27, № 3, 491—496 (PJKMar, 1966, 9B45)
289. *Mack C.*, The equivalence of assuming exponential servicetimes to assuming and unrealistic queue discipline and how to take advantage of this. *Colloq. on applic. mathem. to econ.* Budapest, 1963 Budapest, Hung. Acad. Sci., 1965, 255—262 (PJKMar, 1966, 5B42)
290. —, The pitfall in assuming exponential service times in queues. *New J. Statist. Oper. Res.*, 1967, 3, № 3, 17—21 (PJKMar, 1969, 1B426)
291. *Marshall K. T.*, Bounds for some generalizations of the $GI/G/1$ queue. *Oper. Res.*, 1968, 16 № 4, 841—848 (PJKMar, 1969, 6B387)
292. —, *Wolff R. W.*, Customer average and time average queue lengths and waiting times. *J. Appl. Probab.*, 1971, 8, № 3, 535—542 (PJKMar, 1972, 3B63)
293. *Matthes K.*, Zur Theorie des Verlustverkehrs. Vortrag auf dem Math. Symposium anlässlich der 150-Jahr-Feier der Humboldt-Universität Berlin, 1960

294. —, Zur Theorie der Bedienungsprozesse. Trans. 3rd Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Dec. Funct., Random Processes, Prague 1962, 1964, 513—528 (PJKMar, 1964, 12B64)
295. —, Kerstan J., Mecke J., Infinitely Divisible Point Processes, Wiley—Interscience, New York/London/Sydney/Toronto 1978
296. McNickle D. C., The number of departures from a semi-Markov queue. J. Appl. Prob., 1974, 11, 825—828
297. Mecke J., Das Erlangsche Modell mit abhängigen Bedienungszeiten. Math. Operationsforsch. und Statist., 1972, 3, № 6, 453—464 (PJKMar, 1973, 9B27)
298. —, Stationäre Verteilungen für das Erlangsche Modell. Math. Nachrichten, 1973, 58, 1—6
299. —, A result on the output of stationary Erlang processes. Math. Nachrichten, 1975, 70, 95—98 (PJKMar, 1977, 1B65)
300. —, Zähle M., Stationäre Erlangsche Prozesse. Math. Nachrichten, 1975, 70, 265—281 (PJKMar, 1977, 1B66)
301. Melamed B., Characterization of Poisson traffic streams in Jackson queueing networks. Adv. Appl. Prob., 1979, 11, № 2, 422—438 (PJKMar, 1980, 1B483)
302. Miller D. R., Sentilles F. D., Translated renewal processes and the existence of a limiting distribution for the queue length of the $GI/G/s$ queue. Ann. Prob., 1975, 3, № 3, 424—439
303. Miyazawa M., Stochastic order relations among $GI/G/1$ queues with a common traffic intensity. J. Oper. Res. Soc. Japan, 1976, 19, № 3, 193—208 (PJKMar, 1977, 7B55)
304. —, Time and customer processes in queues with stationary inputs. J. Appl. Prob., 1977, 1, 349—357
305. —, A formal approach to queueing processes in the steady state and their applications. J. Appl. Prob., 1979, 16, № 2, 332—346 (PJKMar, 1980, 1B121)
306. —, Note on Palm measures in the intensity conservation law and Inversion formula in PMP and their applications. Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization, 1980, 11
307. Mori M., Some bounds for queues. J. Operations Res. Soc. Japan, 1975, 18, 152—181
308. —, Relations between queue size and waiting time distributions. Res. Rep. Dept. Inf. Sci. Tokyo Inst. Technol., 1979, Ser. B., Operations Res. B-70
309. Murari K., A queueing problem with correlated arrivals and general service time distribution. Z. angew. Math. und Mech. 1969, 49, № 3, 151—156 (PJKMar, 1969, 9B46)
310. Nair S. S., A single server tandem queue. J. Appl. Prob., 1971, 8, № 1, 95—109 (PJKMar, 1971, 12B119)
311. Nawrotzki K., Einige Bemerkungen zur Verwendung der Palmischen Verteilung in der Bedienungstheorie. Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization, 1978, 9, № 2, 241—253 (PJKMar, 1979, 3B289)
312. Nelson R. T., Queueing network experiments with varying arrival and service processes. Nav. Res. Log. Quart., 1966, 13, № 3, 321—347 (PJKMar, 1967, 11B38)
313. —, Williams T., Random displacements of regularly spaced events. J. Appl. Probability, 1970, 7, 183—195
314. Neuts M. F., The single server queue with Poisson input and semi-Markov service times. J. Appl. Probab., 1966, 3, № 1, 202—230 (PJKMar, 1967, 3B47)
315. —, Two queues in series with a finite, intermediate waiting room. J. Appl. Probab., 1968, 5, № 1, 123—142 (PJKMar, 1969, 3B48)
316. —, A queue subject to extraneous phase changes. Adv. Appl. Prob., 1971, 3, № 1, 78—119 (PJKMar, 1971, 12B135)
317. —, Some explicit formulas for the steady-state behaviour of the queue with semi-Markovian service times. Adv. Appl. Prob., 1977, 9, № 1, 141—157 (PJKMar, 1978, 3B56)

318. —, Markov chains with applications in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant probability vector. *Adv. Appl. Prob.*, 1978, 10, № 1, 182—212 (PJKMar, 1978, 11B88)
319. —, The $M/M/1$ queue with randomly varying arrival and service rates. *Opsearch*, 1978, 15, 139—157
320. —, Further results on the $M/M/1$ queue with randomly varying rates. *Opsearch*, 1978, 15, 158—168
321. —, *Chen Shun-Zer*, The infinite server queue with semi-Markovian arrival and negative exponential services. *J. Appl. Prob.*, 1972, 9, № 1, 178—184 (PJKMar, 1972, 7B74)
322. —, —, The infinite-server queue with Poisson arrivals and semi-Markovian services. *Oper. Res.*, 1972, 20, № 2, 425—433 (PJKMar, 1972, 12B58)
323. —, *Teugels J. L.*, Exponential ergodicity of the $M/G/1$ queue. *SIAM J. Appl. Math.*, 1969, 17, № 5, 921—929 (PJKMar, 1970, 7B58)
324. *Neveu J.*, *Processus ponctuels*. *Lect. Notes in Mathematics* 598, 249—447, Springer—Verlag, Berlin 1977
325. *Oakes D.*, Random overlapping intervals—a generalization of Erlang's loss formula. *Ann. Prob.*, 1976, 4, № 6, 940—946 (PJKMar, 1977, 8B89)
326. *O'Donovan T. M.*, Distribution of attained and residual service in general queueing systems. *Operations Res.*, 1974, 22, 570—575
327. *Ohno K.*, *Mine H.*, Traffic light queues with dependent arrivals as a generalization to queueing theory. *J. Appl. Prob.*, 1972, 9, 630—641
328. *Pack C. D.*, A comparison of the output process of an $M/D/1$ queue as measured from an arbitrary departure epoch to that measured from an arbitrary instant in time. *SIAM J. Appl. Math.*, 1975, 28, 367—375
329. *Palm C.*, *Intensitätsschwankungen im Fernspreverkehr*. *Ericsson Technics*, 1943, 44, 1—89
330. *Pearce C.*, Queues with moving average service times. *J. Appl. Prob.*, 1967, 4, № 3, 553—570 (PJKMar, 1968, 10B79)
331. —, On a many server queue with non-recurrent input and negative exponential servers. *J. Austral. Math. Soc.*, 1968, 8, № 4, 706—715 (PJKMar, 1969, 5B59)
332. *Pestalozzi G.*, A queue with Markov-dependent service times. *J. Appl. Probability*, 1968, 5, № 2, 461—466 (PJKMar, 1969, 10B38)
333. *Posner M.*, Single-server queues with service time dependent on waiting time. *Operations Res.*, 1973, 21, 610—617
334. *Purdue P.*, The $M/M/1$ queue in a Markovian environment. *Oper. Res.*, 1974, 22, 562—569
335. —, A queue with Poisson input and semi-Markov service times: Busy period analysis. *J. Appl. Prob.*, 1975, 12, 353—357
336. *Pyke R.*, *Schaufele R.*, The existence and uniqueness of stationary measures for Markov renewal processes. *Ann. Math. Stat.*, 1966, 37, № 6, 1439—1462 (PJKMar, 1971, 10B144)
337. *Reich E.*, Note on queues in tandem. *Ann. Math. Stat.*, 1963, 34, № 1, 338—341 (PJKMar, 1964, 5B46)
338. *Reiser M.*, *Kobayashi H.*, Accuracy of the diffusion approximation for some queueing systems. *IBM J. Res. Develop.*, 1974, 18, 110—124
339. *Rice S. O.*, The single-server system — 1. relations between some averages, 2. busy periods. *Bell. Syst. Tech. J.*, 1962, 41, № 1, 269—309 (PJKMar, 1970, 5B70)
340. *Rolski T.*, A relation between imbedded Markov chains in piecewise Markov processes. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. et Phys.*, 1977, 25, № 2, 181—189 (PJKMar, 1978, 3B52)
341. —, A rate conservative principle for stationary piecewise Markov processes. *Adv. Appl. Prob.*, 1978, 10, № 2, 392—410 (PJKMar, 1979, 3B45)
342. —, A note on queues with a common traffic intensity. *Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization*, 1979, 10, № 3, 413—419 (PJKMar, 1980, 5B90)

343. —, An approach to the formula $H=AG$ via the theory of stationary point processes. Preprint 180, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Wrocław 1979
344. Ross S. M., Average delay in queues with non-stationary Poisson arrivals. J. Appl. Probab., 1978, 15, № 3, 602—609 (PJKMar, 1979, 5B109)
345. Rossberg H.-J., Über die Verteilung von Wartezeiten Math. Nachr., 1965, 30, № 1-2, 1—16 (PJKMar, 1966, 6B37)
346. —, Siegel G., The $GI/G/1$ model with warming-up time. Zast. Mat., 1974, 14, 17—26
347. Ryba T., Remark on a service system with mixed input streams. Oper. Res., 1972, 20, № 2, 452—454 (PJKMar, 1973, 2B65)
348. —, Queueing systems with merging of two input streams. Zast. Mat., 1973, 13, 419—427
349. Sacks J., Ergodicity of queues in series. Ann. Math. Stat., 1960, 31, № 3, 579—588 (PJKMar, 1962, 2B435)
350. Sahin I., Equilibrium behaviour of a stochastic system with secondary input. J. Appl. Probability, 1971, 8, № 2, 252—260 (PJKMar, 1972, 1B132)
351. Schäl M., Markov renewal processes with auxiliary paths. Ann. Math. Stat., 1970, 41, № 5, 1604—1623 (PJKMar, 1971, 10B145)
352. —, The analysis of queues with state-dependent parameters by Markov renewal processes. Adv. Appl. Probab., 1971, 3, № 1, 155—175 (PJKMar, 1971, 12B129)
353. Schassberger R., Warteschlangen. Springer—Verlag, Wien/New York 1973
354. —, Insensitivity of steady-state distributions of generalized semi-Markov processes. I. Ann. Probab., 1977, 5, № 1, 87—99 (PJKMar, 1978, 1B105)
355. —, Closed networks of queues. Techn. Report 344, Dept. of Math. and Statist., Univ. of Calgary 1977
356. —, Insensitivity of steady-state distributions of generalized semi-Markov processes with speeds. Adv. Appl. Probab., 1978, 10, № 4, 836—851 (PJKMar, 1979, 7B334)
357. —, The insensitivity of stationary probabilities in networks of queues. Adv. Appl. Probab., 1978, 10, 906—912
358. —, Insensitivity of steady-state distributions of generalized semi-Markov processes. I. Ann. Probab., 1978, 6, 85—93
359. Schmidt V., On some relations between stationary time and customer state probabilities for queueing systems $G/GI/s/r$. Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization, 1978, 9, № 2, 261—272 (PJKMar, 1979, 4B47)
360. Schönherr S., Limit theorems for single server queues with mixed renewal and Poisson inputs. Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization, 1979, 10, 601—612
361. Schrage L., An alternative proof of a conservation law for the queue $G/G/1$. Operations Res., 1970, 18, № 1, 185—187 (PJKMar, 1970, 9B424)
362. —, Miller L., The queue $M/G/1$ with the shortest remaining processing time discipline. Oper. Res., 1966, 14, № 4, 670—684 (PJKMar, 1967, 10B343)
363. Serfozo R. E., Semi-stationary processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. 1972, 23, № 2, 125—132 (PJKMar, 1973, 3B123)
364. —, Stidham S., Semi-stationary clearing processes. Stoch. Proc. Appl., 1978, 6, 165—178
365. Sevcik K. C., Mitrani I., The distribution of queueing network states at input and output instants. Int. Symp. Modell. and Performance Eval. Comput. Systems, Vienna 1979, Conf. Prepr. Vol. 2, 135—151 (PJKMar, 1979, 9B61)
366. Shanbhag D. N., A note on the queueing system $GI/G/\infty$. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1968, 64, № 2, 477—479 (PJKMar, 1968, 9B58)
367. —, Some extensions of Takacs's limit theorems. J. Appl. Probab., 1974, 11, 752—761
368. —, Tambouratzis D. G., Erlang's formula and some results on the departure process for a loss system. J. Appl. Probab., 1973, 10, 233—240

369. *Smith W.*, The infinitely-many server queue with semi-Markovian arrivals and customer dependent exponential service times. *Oper. Res.*, 1972, 20, № 4, 907—913 (PJKMar, 1973, 4B98)
370. —, Shot noise generated by a semi-Markov process. *J. Appl. Probab.*, 1973, 10, 685—690
371. *Smith W. L.*, Regenerative stochastic processes. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1954 Vol. 2, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1954, 304—305 (PJKMar, 1956, 8998)
372. —, Renewal theory and its ramifications. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1958, B20, № 2, 243—284 (PJKMar, 1959, 11288)
373. *Snyders D. L.*, Random point processes. John Wiley & Sons, New York London Sydney Toronto, 1975
374. *Stidham S.*, Regenerative processes in the theory of queues with applications to the alternating priority queues. *Adv. Appl. Probab.*, 1972, 4, № 3, 542—577 (PJKMar, 1973, 7B70)
375. —, $L-\lambda W$: A discounted analogue and a new proof. *Oper. Res.*, 1972, 20, № 6, 1115—1126 (PJKMar, 1973, 10B69)
376. —, A last word on $L-\lambda W$. *Oper. Res.*, 1974, 22, 417—421
377. *Stoyan D.*, Qualitative Eigenschaften und Abschätzungen stochastischer Modelle. Akademie-Verlag, Berlin 1977 (PJKMar, 1978, 1B116K, 3B312K)
378. —, Further stochastic order relations among $GI/GI/1$ queues with a common traffic intensity. *Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization*, 1977, 8, 541—548
379. —, Queueing network—Insensitivity and a heuristic approximation. *Elektron. Informationsverarb. und Kybern.*, 1978, 14, № 3, 135—143 (PJKMar, 1979, 2B118)
380. —, *Stoyan H.*, Some qualitative properties of single-server queues. *Math. Nachr.*, 1976, 70, 29—35 (PJKMar, 1977, 1B68)
381. *Strauch R. E.*, When a queue looks the same to an arriving customer as to an observer. *Manag. Sci.*, 1970, 17, 140—141
382. *Szczotka W.*, Immediate service in a Benes-type $G/G/1$ queueing system, *Zast. Matem.*, 1974, 14, 357—363
383. *Takacs L.*, Introduction to the theory of queues. Oxford University Press, New York 1962
384. —, The limiting distribution of the virtual waiting time and the queue size for a single-server queue with recurrent input and general service times. *Sankhya Indian J. Statist.* 1963, A25, № 1, 91—100 (PJKMar, 1964, 6B28)
385. —, On Erlang's formula. *Ann. Math. Statist.*, 1969, 40, № 1, 71—78 (PJKMar, 1971, 6B65)
386. —, A single-server queue with limited virtual waiting time. *J. Appl. Probab.*, 1974, 11, 612—617
387. —, A queueing model with feedback. *R.A.I.R.O. Recherche operationnelle/OR*, 1977, 11, № 4, 345—354 (PJKMar, 1978, 12B80)
388. *Vaulot E.*, Extensions des formules d'Erlang en cas où les durees des conversations suivent une loi quelconque. *Rev. Gen. d'Elect.*, 1927, 22, 1164—1171
389. *Veraverbeke N., Teugels J. L.*, The exponential rate of convergence of the distribution of the maximum of a random walk. *J. Appl. Probab.*, 1975, 12, 279—288. Part II. *J. Appl. Probab.*, 1976, 13, № 4, 733—740 (PJKMar, 1977, 10B21)
390. *Vere-Jones D.*, Some applications of probability generating functionals to the study of input-output streams. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1968, B30, NO 2, 321—333 (PJKMar, 1969, 9B63)
391. *Walrand J., Varaiya P.*, When is a flow in a queueing network Poissonian. Electronics Research Laboratory Memo ERL-M 78/59, University of California 1978

392. —, The outputs of Jacksonian networks are Poissonian. Electronics Research Laboratory Memo ERL M 78/60, University of California 1978
393. Whitt W., Multiple channel queues in heavy traffic III. Random server selection. Adv. Appl. Probability, 1970, 2, № 2, 370—375 (PZhMar, 1971, 4B46)
394. —, Embedded renewal processes in the $GI/GI/s$ queue. J. Appl. Probab., 1972, 9, № 3, 650—658 (PZhMar, 1973, 3B70)
395. —, The continuity of queues. Adv. Appl. Probability, 1974, 6, 175—183
396. —, Continuity of generalized semi-Markov processes. Math. I. Operations Res., 1980
397. Wolff R. W., Work-conserving priorities. J. Appl. Probab., 1970, 7, № 2, 327—337 (PZhMar, 1971, 5B65)
398. —, Whittleson C. W., An extension of Erlang's loss formula. J. Appl. Probab., 1976, 13, № 3, 628—632 (PZhMar, 1977, 6B73)
-