УДК 519.653.8
519.653.2

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В. В. Рыков

Модели и методы теории массового обслуживания находят широкие применения в задачах организации производства, при построении систем связи и вычислительных систем, в военном деле и т. п. Естественно, что задачи оптимального управления, постоянно возникающие в этих областях, привели к формированию понятия управляемой системы массового обслуживания и постановке задач оптимального управления системами массового обслуживания. В работе [77] отмечалось, что исследование управляемых систем является одним из актуальных и наиболее перспективных направлений развития теории массового обслуживания.

Различные теоретические аспекты и обилие приложений управляемых систем массового обслуживания привлекает внимание широкого круга специалистов: математиков, математиков-прикладников и специалистов по системному анализу. Количество публикаций как теоретического, касающихся вопросов теории управляемых случайных процессов, используемых в теории управляемых систем, так и прикладного, касающихся исследования конкретных управляемых систем, характера быстро растет, а обобщающей литературы (монографии или обзора) на эту тему в настоящее время нет. Следует отметить, что в последнее время в научной печати стали появляться работы, повторяющие или популяризующие полученные ранее результаты, а иногда содержащие и ошибочные выводы. Поэтому без обстоятельного обзора в настоящее время трудно разобраться в проблематике и достигнутых успехах теории управляемых систем массового обслуживания и её приложений, и лица, желающие заняться этими вопросами, вынуждены тратить много времени на изучение литературы, что задерживает развитие этого очень нужного направления.

Настоящий обзор написан по инициативе Б. В. Гнеденко, которому, я выражаю свою искреннюю благодарность за постоянное внимание к работе. Благодарю также О. И. Бронштейна, который обратил мое внимание на некоторые неизвестные мне ранее работы.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие управляемой системы массового обслуживания было введено О. И. Бронштейном и В. В. Рыковым в работе [50].

Как объект математического исследования система массового обслуживания (СМО) характеризуется следующими элементами: α) входящими потоками требований, β) механизмом и длительностями обслуживания, γ) структурой системы, δ) дисциплиной обслуживания.

Каждый из этих элементов задается определенной математической моделью, зависящей от ряда параметров.

Под абстрактной системой массового обслуживания (СМО) будем понимать математический объект $S=(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, задаваемый этими четырьмя элементами.

Определение. Систему, в которой какие-либо из параметров, определяющих тот или иной из её элементов, допускают применение управляющих воздействий, назовем управляемой системой массового обслуживания (УСМО).

При этом задание правила использования управляющих воздействий во времени (стратегии) является необходимым условием полного описания функционирования СМО. На класс стратегий могут быть наложены ограничения. В таких случаях возникают задачи определения стратегий с учетом этих ограничений, являющихся оптимальными в принятом смысле. Решением задач такого рода и занимается теория УСМО.

Критерием качества управления в зависимости от целей исследования могут служить различные характеристики СМО: производительность системы, среднее количество требований в системе или средняя длина очереди, среднее время пребывания требований в системе или среднее время ожидания, вероятности потерь, коэффициент загрузки системы или среднее время простоя приборов и т. п., а также различные экономические показатели, связанные с этими характеристиками.

Задачи оптимального управления следует отличать от задач оптимального синтеза СМО, в которых также решаются вопросы выбора параметров системы с целью обеспечить наилучшее (по заданному критерию) качество её функционирования. В первых управляющие воздействия выбираются оперативно в процессе работы системы, в то время как для вторых этот выбор производится однажды на стадии проектирования системы. Однако в задачах управления иногда оказывается, что оптимальную стратегию можно искать в классе стационарных и не зависящих от процесса функционирования системы стратегий. Такая ситуация имеет место, например, в задачах оптимизации приоритетов. В этом случае задачи оптимального управления и оптимального синтеза практически совпадают. Однако при решении задач управления необходимо обоснование возможности выбора стратегии в классе стационарных и не зависящих от процесса функционирования системы стратегий, поэтому задачи управления и синтеза систем принципиально различны. Задачи синтеза можно рассматривать как задачи управления при очень узком классе допустимых стратегий.

Приведенное понятие УСМО позволяет указать один из возможных способов их классификации на системы: 1) с управляемым входящим потоком требований; 2) с управляемым механизмом и длительностями обслуживания; 3) с управляемой структурой; 4) с управляемой дисциплиной обслуживания. Предложенную классификацию можно уточнять, например, различая среди систем с управляемой дисциплиной обслуживания системы: 1) с управляемым порядком обслуживания требований, 2) с управляемым порядком занятия приборов, 3) с управляемым режимом работы приборов и т. п. По этой классификации в настоящее время наибольшее развитие получили системы с управляемой дисциплиной обслуживания. В частности, к задачам оптимизации порядка обслуживания требований относится широкий класс задач оптимального назначения приоритетов. Исследованию этих вопросов посвящены работы О. И. Бронштейна, Е. Б. Веклерова, В. В. Рыкова [42—50, 54—59, 169, 170], И. М. Духовного [91—94], Б. Г. Питтеля [152], Г. П. Климова [105,106] и др. [122, 127—131, 199, 205, 208, 209, 212, 213, 257, 263—265, 267, 269, 283, 284, 291, 292, 316 326, 330, 331, 328, 348—351, 368, 369]. Сюда же относятся задачи определения оптимального порядка обслуживания требований в марковских системах с конечным числом состояний, рассматривавшиеся В. В. Рыковым [164, 165, 167] применительно к задачам оперативного управления производством В. В. Мовой и Л. А. Пономаренко [134—137] и др. [83, 183, 184, 333, 334], а также задачи определения оптимального порядка обслуживания требований в замкнутых системах, рассматривавшиеся применительно к задачам диспетчерского контроля, например, в работах [1, 2, 155, 157, 283, 284].

Системы с управляемым порядком занятия приборов изучались в [79, 90, 98, 99, 200] в рамках назначения приоритетов на занятие приборов.

Системы с управляемым режимом работы прибора рассматривались М. Г. Теплицким [178—180] применительно к задачам оперативного управления производством (см. гл. I, § 4.1) и Ю. И. Неймарком, М. А. Федоткиным и др. [143, 144, 188—190] применительно к задачам управления транспортными потоками (гл. I, § 4.4).

К задачам исследования систем с управляемой дисциплиной обслуживания приводят также многие задачи теории надежности, в частности, вопросы организации профилактического обслуживания сложных технических систем, которым посвящены работы Е. Ю. Барзиловича [16—22], И. Б. Герцбаха [70, 71, 74], Дермана, Сакса [242, 250, 251] Клейна [290] и др. [27, 51, 162, 166, 216—218, 347].

Системы с управляемым входящим потоком изучались И. Н.Коваленко, А. А. Натаном, Б. И. Петриным, О. М. Юркевичем и др. [11, 107, 110, 137—142, 201] в связи с задачами фильтрации потока на входе системы применительно к вопросам классификации (см. гл. II, § 2.3). Задачи управления потоком требований рассматривались также в работах [14, 15, 60, 109, 185, 186, 102, 103, 158, 224, 280].

К системам с управляемым механизмом обслуживания относятся системы с управляемой скоростью обслуживания. В рамках систем, описываемых процессами гибели и размножения вопросы управления скоростью обслуживания довольно полно изучены А. Д. Соловьевым [172]; в различных постановках аналогичные задачи рассматривались в работах [3, 66, 321, 322, 325, 327, 359, 376]. Сюда же можно отнести задачи выбора интервалов недоступности для обслуживания и квантов обслуживания в моделях систем с разделением времени (СРВ), которые упоминаются в разделах 4,5 гл. I и 5.1 гл. II.

В работе Г. П. Климова [103] (гл. I, § 4.1) содержатся постановки задач, относящиеся как к системам с управляемым входящим потоком, так и к системам с управляемым механизмом обслуживания. Близкие вопросы об экстремальных свойствах входящего потока и длительности обслуживания рассматривались Г. П. Климовым [102] Б. А. Рогозиным [158] и др. [343, 344].

Системы с управляемой структурой рассматривал Бенеш [31, 220—222] в связи с задачами телетраффика. Сюда же можно отнести задачи о включении резервного прибора [12, 211, 214, 225, 234, 271, 273, 352, 357, 370], задачи оптимального включения резервных элементов, динамического резервирования и др., задачи теории надежности [69, 72, 87—89 101, 166, 268, 289].

Однако в обзоре целесообразно придерживаться других принципов классификации, а именно: классифицировать работы по методам решения соответствующих задач и областям их приложения.

Заметим, что с точки зрения методов исследования и решения задач теория УСМО примыкает к теории управляемых случайных процессов, так как поведение СМО описывается обычно некоторым случайным процессом, а наличие управляемых воздействий приводит к изменению его траекторий.

Специфика задач СМО накладывает определенные ограничения на класс допустимых стратегий и выдвигает дополнительные требования к критериям, что естественно приводит к специфическим постановкам задач. Поэтому теория УСМО развивается в двух направлениях: с одной стороны, развиваются и применяются общие результаты теории оптимального управления и управляемых случайных процессов, с другой стороны — развиваются методы решений специфических задач.

Эти два направления отражены и в настоящем обзоре: первая глава посвящена применениям теории управляемых случайных и детерминированных процессов к исследованию УСМО, вторая — решению специфических задач. В каждой главе содержится краткий обзор работ, посвященных различным областям приложений.

При этом из работ по теории управляемых случайных процессов упоминаются лишь основополагающие работы и работы по теории управляемых марковских и полумарковских процессов, имеющие широкие применения в УСМО, а также работы, в которых развиваются методы фактического определения оптимальных стратегий. Многие важные и принципиальные вопросы теории управляемых случайных процессов не затрагиваются вовсе. Так, в обзоре совсем не освещены вопросы управления по неполным данным (см. на эту тему обзорную работу А. Н. Ширяева [203]), лишь вскользь в связи с одной из первых работ по управляемым системам массового обслуживания [103] упоминаются задачи программного управления [115]. Наконец, мы совершенно не касаемся вопросов применения теории стохастических дифференциальных уравнений к задачам управления (с этими вопросами можно ознакомиться, например, по обзорной работе Вонема [64] или монографиям [121, 196]), а также задач, близких по своей постановке к задачам автоматического регулирования и управления [10, 115, 116, 121, 191]. Все эти методы и подходы, хотя, по-видимому, и могут найти, в настоящее время еще не нашли применения в задачах управления системами массового обслуживания.

В разделах, посвященных прикладным вопросам, также невозможно было отразить все области приложения УСМО. Например, не затрагиваются вопросы применения теории управляемых случайных процессов к задачам управления запасами и их связь с УСМО. Здесь отмечены лишь основные области применения УСМО, которые проиллюстрированы на примерах наиболее интересных и характерных работ.

В обзоре приняты традиционные обозначения для систем массового обслуживания, которые поясняются, например, в [108].

Глава I

ТЕОРИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Для количественного изучения СМО ее поведение описывают обычно некоторым, вообще говоря случайным (а для управляемой системы — управляемым) процессом.

Общего определения управляемого случайного процесса в настоящее время не существует. Для процессов с дискретным параметром, т. е. для управляемых случайных последовательностей основные определения и понятия теории сформулированы И. В. Гирсановым, Е. Б. Дынкиным, А. Н. Ширяевым в докладе на VII Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике, состоявшемся в г. Тбилиси в октябре 1963 г., и содержатся в работе Е. Б. Дынкина [95].

Общие концепции управления при случайных возмущениях рассматривались Блекуэллом [35—37], некоторые подходы к построению общей схемы управляемого случайного процесса содержатся в недавней работе А. В. Скорохода [171]. Различные классы, области приложения и подходы к исследованию управляемых случайных процессов рассматривались многими авторами (А. А. Боровов, О. В. Висков, И. В. Гирсанов, Дерман, Е. Б. Дынкин, Н. В. Крылов, Г. Д. Кушнер, Р. Ш. Липцер, Ю. В. Прохоров, В. В. Рыков, Р. Л. Стратонович, Э. М. Хазен, А. А. Фельдбаум, Р. З. Хасьминский, А. Н. Ширяев и др.)

Вопросы теории управляемых случайных процессов заслуживают самостоятельного обзора, отчасти они освещены в обзорной работе [203]. Здесь будут приведены лишь некоторые результаты, относящиеся к управляемым марковским и полумарковским процессам (УМП, УПМП), так как они находят наибольшее применение в УСМО.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Построение процесса, описывающего функционирование СМО, связано с определенными выборами, от которых во многом зависит успех исследования. Рекомендации относительно этих выборов в общем случае бессмыслены. Укажем основные направления этих выборов и приведем некоторые определения и обозначения.

1.1. Способ наблюдения. Наблюдения над системой во времени можно производить в дискретные (случайные или детерминированные с равными или не равными интервалами) моменты времени t_i $(i=0, 1, \ldots)$ или непрерывно $0 \leqslant t < \infty$. В зависимости от способа наблюдения соответствующая система будет описываться процессом с дискретным (цепью) или непрерывным временем.

1.2. Множество состояний и пространство траекторий. В качестве состояний системы можно наблюдать различные характеристики, связанные с ее поведением (количество требований в системе или в очереди, время ожидания или время пребывания в системе и т. п.). Отождествляя состояния системы с некоторыми числовыми значениями (скалярными или векторными, дискретными или непрерывными), будем обозначать их через x, $y, \ldots$, а множество этих значений через X. При этом из-за наличия случайности в элементах системы ее поведение во времени описывается некоторым случайным процессом $\xi(t)$, траектории которого обозначим через $\mathrm{x}=x(t)$, а пространство траекторий — через $\mathscr{X}$. Когда необходимо особо подчеркнуть, что траектория рассматривается на участке $[s, t)$, будем пользоваться обозначением $\mathrm{x}_s{}^t=\{x(\tau), s \leqslant \leqslant \tau < t\}$.

1.3. Множество управлений и пространство стратегий. Управляющие воздействия будем обозначать буквой u (можно считать, что u принимает численные значения), а множество управлений — U. Если управления в разных состояниях различны, то через U_x обозначим множество управлений в состоянии x. Тогда $U = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$.

При определении стратегии управления следует различать случаи а) полностью наблюдаемого процесса, б) частично-наблюдаемого и в) не наблюдаемого процесса. Проблемы, связанные с частично наблюдаемыми и не наблюдаемыми процессами, здесь затрагиваться не будут (см. об этом, например, в [203]), и мы остановимся лишь на случае полностью наблюдаемых процессов. В этом случае предполагается, что наблюдателю доступна вся необходимая для управления информация о поведении системы, и она содержится в траектории $x(t)$ системы.

Управление $u(t)$, быть может, рандомизированное, в момент времени t принимается на основании наблюдений за траекторией системы до этого момента времени и не зависит от будущего течения процесса $u(t)=u[t, \mathrm{x}^t] \equiv u \equiv [t, x(\tau); \; 0 \leqslant \tau < t]$*), где $u[t, \mathrm{x}^t]$ — вообще говоря, слу-

*) Индексы 0 снизу и ∞ сверху опускаются.

чайный функционал над пространством траекторий $\mathscr{X}$ процесса $\xi(\tau)$ на участке $[0, t)$. Семейство управлений во времени образует стратегию*)

$$\delta = \{u[t, \mathrm{x}^t], \quad 0 \leqslant t < \infty\}.$$

На множество стратегий обычно накладываются некоторые ограничения, вызванные как потребностями математического анализа (например, измеримость) или физической осуществимостью (кусочная непрерывность), так и спецификой рассматриваемой задачи (например, в системах с приоритетами). Для обозначения различных пространств допустимых стратегий вводятся символы Δ, $\Delta'\mathfrak{D}$ и т. д.

Фактическое определение оптимальных стратегий сопряжено с большими трудностями. Поэтому естественно стремление сузить класс исследуемых на оптимальность стратегий. В некоторых случаях такое сужение оказывается естественным и не ухудшает качества управления, в других накладывается искусственно или обуславливается требованиями практической реализуемости. В этих случаях требуется оценка того, насколько накладываемые ограничения ухудшают управление.

Для широкого класса систем оказывается, что оптимальную стратегию можно искать в классе так называемых однородных марковских стратегий.

Определение. Стратегия $\delta = \{u[t, \mathrm{x}^t], \ 0 \leqslant t < \infty\}$ называется марковской, если для любого t $u[t, \mathrm{x}^t] = u(t, x(t))$, если, кроме того, $u(t, x(t)) = u(x(t))$, то такая стратегия называется однородной марковской и обозначается $\mathfrak{d} = \{u(x), x \in X\}$. Пространство марковских стратегий будем обозначать через Δ', а однородных марковских — через $\mathfrak{D}$.

1.4. Описание УСМО управляемым случайным процессом. Наличие случайности в элементах системы (потоки требований, обслуживание) приводит к тому, что функционирование системы описывается случайным процессом $\xi(t)$ ($x(t)$ — его траектории). Управления $u(t)$ естественно влияют на вероятностные характеристики процесса $\xi(t)$. Поэтому поведение УСМО описывается управляемым случайным процессом, который характеризуется парой (ξ, δ). В соответствующих разделах приводятся способы конкретного описания отдельных классов управляемых случайных процессов.

1.5. Функционалы потерь, риска (цели) и цены. Качество управления на участке $[s, t)$ характеризуется некото-

*) Стратегии случаях частично наблюдаемых $y(t) = f[t, \mathrm{x}^t]$ и не наблюдаемых процессов следует определить как $\delta = \{u[t, \mathrm{y}^t], 0 \leqslant t < \infty\}$, $\delta = u(t), 0 \leqslant t < \infty\}$. Управление, при котором информация о течении управляемого процесса либо недоступна наблюдателю, либо не используется, называется программным [115].

рым функционалом

$$L_s^t = L_s^t[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = L[x(\tau),\ u(\tau);\ s \leqslant \tau < t],$$

зависящим от траекторий $\mathbf{x}_s^t$ процесса и применяемых на этом участке управлений $\mathbf{u}_s^t = u[\tau, \mathbf{x}^\tau]$ $(s \leqslant \tau < t)$. Для единообразия будем интерпретировать этот функционал как функционал потерь (хотя во многих работах рассматривается доход от эксплуатации системы). В качестве функционала L_s^t можно рассматривать различные характеристики, связанные с поведением системы, например, время, проведенное в некотором множестве состояний, время до попадания в некоторое множество состояний, время ожидания, время простоя приборов или некоторые экономические издержки, связанные с этими явлениями.

Часто оказывается возможным считать функционал L_s^t аддитивным, т. е. таким, что

$$L_s^t = L_s^\tau + L_\tau^t \quad (s \leqslant \tau < t).$$

Всюду в дальнейшем, где это особо не оговаривается, функционал L_s^t будем полагать аддитивным.

Для определения цели управления заметим, что так как течение процесса случайно, то «риск», связанный с использованием на участке $[s, t)$ стратегии δ, определяется обычно с помощью некоторого оператора усреднения и зависит, вообще говоря, от наблюдений $\mathbf{y}^\tau = f[\mathbf{x}^\tau]$ за траекторией $x(\tau)$ процесса и принимаемых на этом участке управлений $u(\tau)$

$$R_s^t(\delta) = R_s^t[\mathbf{y}^s, \mathbf{u}^s; \delta] = M^\delta\{L_s^t/\mathbf{y}^s, \mathbf{u}^s\},$$

где символом M^δ обозначается математическое ожидание при использовании стратегии δ.

В случае программного управления (не наблюдаемого течения процесса) имеем

$$R_s^t(\delta) = R_s^t[\mathbf{u}^s, \delta],$$

в случае полностью наблюдаемого процесса имеем соответственно

$$R_s^t(\delta) = R_s^t[\mathbf{x}^s, \mathbf{u}^s; \delta].$$

Цель управления состоит в минимизации целевого функционала

$$R(\delta) \Rightarrow \min,$$

т. е. в построении такой стратегии δ^* (если она существует), для которой

$$R_s^t(\delta^*) = \inf_{\delta} R_s^t(\delta) \quad (0 \leqslant s < t < \infty).$$

Целевой функционал $R(\delta)$ называют также функционалом риска.

Заметим, что целевой функционал вида

$$\mathbf{P}\{L_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}] > v\} \Rightarrow \min$$

также может быть выражен с помощью усреднения. Для этого следует рассмотреть новый функционал потерь

$$\tilde{L}_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}] = \begin{cases} 0, & \text{если } L_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}] \leqslant v, \\ 1, & \text{если } L_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}] > v. \end{cases}$$

Для определения понятия оптимальности стратегии и формулировки задач определения оптимальных стратегий введем предварительно понятие цены управляемой системы. Ценой управляемой системы на участке $[s, t)$ называется функционал

$$\Phi_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}] = \inf_{\delta} R_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta].$$

Видоизменения, которые нужно внести в это определение, в случае не наблюдаемых или частично наблюдаемых траекторий процесса, очевидны.

Конкретизируем теперь понятие оптимальной стратегии. При этом придется отдельно рассмотреть случаи конечного и бесконечного времени функционирования системы.

1.6. Постановки задач. В зависимости от продолжительности наблюдения за системой будем различать несколько вариантов постановок задач определения оптимальной стратегии управления системой массового обслуживания. Заметим, прежде всего, что наряду с функционалом $L_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}]$ полезно рассматривать функционал потерь вида

$$\mathscr{L}_s^t = \mathscr{L}_s^t[z; \mathrm{x}, \mathrm{u}] = \int_s^t e^{-z\tau} dL(\tau),$$

который для аддитивных функционалов L_s^t существует с вероятностью 1. Этот функционал можно интерпретировать как потери при эксплуатации системы в течение случайного и не зависимого от ее работы времени θ с функцией распределения $\mathbf{P}\{\theta \leqslant t\} = 1 - e^{-zt}$ или, в случае, когда L_s^t носит экономический характер, как функционал потерь с переоценкой.

Связанные с функционалом $\mathscr{L}_s^t[z, \mathrm{x}, \mathrm{u}]$ риск и цену системы обозначим соответственно

$$\mathscr{R}_s^t[z; \mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta] = \mathbf{M}^{\delta}\{\mathscr{L}_s^t \mid \mathrm{x}^s, \mathrm{u}^s\},$$

$$\mathfrak{F}_s^t[z; \mathrm{x}, \mathrm{u}] = \inf_{\delta} \mathscr{R}_s^t[z; \mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta]$$

и будем называть z-риском и z-ценой системы соответственно; при этом, так как для обозначения функционалов потерь с переоценкой, z-риска и z-цены вводятся другие буквы, зависимость от переменной z можно не указывать.

Управление на конечном интервале времени. В случае, если работа системы рассматривается на заданном конечном интервале времени T, функционалы риска и цены (z-риска и z-цены) принимают соответственно вид

$$\left.\begin{aligned} &R_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta] = \mathrm{M}^\delta\{L_t^T/\mathrm{x}^t, \mathrm{u}^t\};\\ &\Phi_t^T \equiv \Phi_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}] = \inf_\delta R_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta];\\ &\mathscr{R}_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta] = \mathrm{M}^\delta\{\mathscr{L}_t^T/\mathrm{x}^t, \mathrm{u}^t\};\\ &\mathfrak{Q}_t^T \equiv \mathfrak{F}_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}] = \inf_\delta \mathscr{R}_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta]. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Стратегии δ^T управления системой на конечном интервале времени $[0, T)$ будем называть для краткости T-стратегиями.

Определение. T-стратегии δ^{T*}, $\delta^{T*}(z)$, ${}_\varepsilon\delta^{T*}$, ${}_\varepsilon\delta^{T*}(z)$ называются соответственно:

а) оптимальной, если $R^T(\delta^{T*}) = \Phi^T$,

б) z-оптимальной, если $\mathscr{R}^T(\delta^{T*}(z)) = \mathfrak{F}^T$,

в) ε-оптимальной, если $R^T({}_\varepsilon\delta^{T*}) \leqslant \Phi^T + \varepsilon$,

г) (z, ε)-оптимальной, если $\mathscr{R}^T({}_\varepsilon\delta^{T*}(z)) \leqslant \mathfrak{F}^T + \varepsilon$.

Управление на бесконечном интервале времени. При управлении на бесконечном интервале времени потери, связанные с функционалом $L^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}]$, неограниченно растут. Поэтому можно говорить лишь об оптимальности относительно функционала $\mathscr{L}^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}]$, для которого цена $\mathfrak{P}^T$ ограничена при $T \to \infty$, но неограниченно возрастает при $z \to 0$. Оптимальность относительно функционала $L^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}]$ естественно понимать в смысле минимизации средних потерь в единицу времени*)

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{M}^\delta\{L^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}]\} \Rightarrow \min.$$

Поэтому наряду с функционалами риска и цены (z-риска и z-цены соответственно) введем понятия среднего риска и средней цены (среднего z-риска, средней z-цены соответственно), которые определим соотношениями (в предположении, что соответствующие пределы существуют)

---

*) По поводу других подходов см. [35].

$$
\left.\begin{aligned}
&r_t[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta] = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} R_t^{t+T}[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta],\\
&\varphi_t[\mathrm{x}, \mathrm{u}] = \inf_{\delta} r_t[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta],\\
&\mathfrak{r}_t[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta] = \lim_{z\to 0} z\mathscr{R}_t[z; \boldsymbol{x}; \boldsymbol{u}; \delta],\\
&\mathfrak{p}_t[\mathrm{x}, \mathrm{u}] = \inf_{\delta} \mathfrak{r}_t[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta].
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

Определение. При управлении системой на интервале $[0, \infty)$ стратегии $\delta^*(z)$, $\delta^*(0)$, δ^* назовем соответственно

а) z-оптимальной, если $\mathscr{R}(\delta^*(z)) = \mathfrak{F}$,

б) 0-оптимальной, если $\mathfrak{r}(\delta^*(0)) = \mathfrak{p}$,

в) и, наконец, просто оптимальной, если $r(\delta^*) = \varphi$,

Определение. Стратегии ${}_\varepsilon\delta(z)$, ${}_\varepsilon\delta(0)$, ${}_\varepsilon\delta$ называются (z, ε)-, $(0, \varepsilon)$-, ε-оптимальными, если

а) $\mathscr{R}({}_\varepsilon\delta(z)) \leqslant \mathfrak{F} + \varepsilon$,

б) $\mathfrak{r}({}_\varepsilon\delta(0)) \leqslant \mathfrak{p} + \varepsilon$,

в) $R({}_\varepsilon\delta) \leqslant \varphi + \varepsilon$.

В дальнейшем будет полезно также следующее определение.

Определение. Стратегии (T-стратегии) δ и $\overline{\delta}$ ($\overline{\delta}^T$ и δ^T) называются эквивалентными, если $r(\delta) = r(\overline{\delta})$ $(R^T(\delta^T) = R^T(\overline{\delta}^T))$.

Аналогично определяется понятие эквивалентности относительно функционалов $\mathscr{R}^T$ и $\mathfrak{r}$.

При исследовании УСМО нужно прежде всего решить вопрос о существовании оптимальной или ε-оптимальной стратегии, по возможности сузить класс стратегий, в котором следует искать оптимальную стратегию и разработать методы фактического построения оптимальных стратегий. Естественно, при этом приходится ограничиваться некоторыми определенными классами УСМО. В следующем параграфе содержится обзор работ, в которых эти вопросы решаются для управляемых марковских и полумарковских процессов с конечным пространством состояний, а стало быть, и для УСМО, описываемых подобными процессами.

§ 2. УПРАВЛЯЕМЫЕ МАРКОВСКИЕ И ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ

Впервые понятие управляемого марковского процесса было сформулировано и систематически изучалось, по-видимому, Карлином [287] и Беллманом [219]. Одна из первых прикладных постановок задач, проводящих к модели управляемого марковского процесса, принадлежит А. Н. Колмогорову и связана с обнаружением разладки производственного процесса. Доложенная на VI Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике в г. Вильнюсе в 1960 г., эта модель изучалась в дальнейшем А. Н. Ширяевым и послужила отправной точкой большого числа исследований об оптимальной остановке случайного процесса. Одна из первых монографий, посвященных последовательному изложению теории управляемых марковских процессов, принадлежит Р. Л. Стратоновичу [175]. В последнее время появились монографии Дермана [248], Минэ и Осаки [317], Росса [341], Ховарда [279], обобщающие исследования различных авторов по теории управляемых марковских и полумарковских процессов (УПМ, УПМП) с конечными пространствами состояний и управлений и их приложениям.

Работы, посвященные управляемым марковским и полумарковским процессам, можно разбить на три группы. К первой группе относятся работы, содержащие обоснования теории УМП, исследование вопросов существования оптимальных стратегий и изучение их свойств. В первую очередь здесь следует отметить работы Блекуэлла [35—37, 226—228], Дермана [240—252], О. В. Вискова и А. Н. Ширяева [62], Н. В. Крылова [118, 119], которые рассматривали схему управляемой марковской цепи (УМЦ). В различных постановках и при различных предположениях эти вопросы исследовались затем многими авторами [6—8, 81, 84, 161, 195, 204, 206, 198, 229, 230, 239].

Управляемые марковские скачкообразные процессы рассматривались В. В. Рыковым [168], Л. Г. Губенко и Э. С. Штатландом [80]. УМП с полукомпактным множеством состояний и борелевским множеством управлений исследовал А. К. Звонкин [97]. А. Д. Соловьев [172] исследовал управляемые процессы гибели и размножения. Некоторые постановки задач управления неоднородными процессами гибели и размножения содержатся в работе [9].

Условия существования оптимальных стратегий управления УПМП для различных классов пространств и управлений исследовали Липпман [299, 300], Росс [340, 341], Стоун [358], Хаусман [270] и др. [30, 73, 82, 83, 89, 180—182, 237, 238, 266, 259—261]. Читгопекер [232] исследовал структуру оптимальных стратегий управления УПМП.

Вторую группу составляют работы, в которых разрабатываются методы фактического определения оптимальных стратегий. Известно два таких метода. Первый основывается на идеях динамического программирования и заключается в использовании некоторой итерационной процедуры, впервые предложенной для УМЦ и УМП Ховардом [198] и обобщенной затем на случай УПМП в классе марковских допустимых стратегий Джевеллом [85], Денардо и Фоксом на УМЦ и УПМП с несколькими эргодическими классами [237, 239]. Читгопекер [232] распространил применение этого метода на более широкий класс допустимых стратегий (см. п. 2.3). Уточнениями этой процедуры занимались Миллер и Вейнотт [313—315] и др. [229, 230, 266, 301].

Второй способ определения оптимальных стратегий управления сводится к применению методов линейного или дробно-линейного программирования. На связь задачи определения оптимальной стратегии управления в классе $\mathfrak{D}$ с задачами линейного программирования для УМЦ указали Ф. Вольф и Г. Данциг [63], аналогичную связь для рандомизированных марковских нестационарных стратегий установили Челлинк и Эппен [231]. Минэ и Табата [318, 319] распространили эти результаты на УМП. Ховард [276—279] и Фокс [258—261] исследовали возможность применения методов линейного и дробно-линейного программирования для определения оптимальной стратегии управления УПМП. Этим вопросам посвящены также работы Д'Эпену [256], Манне [311], Б. Г. Питтеля [151] и др.

Наконец, в третью группу входят работы прикладного характера. По-видимому, одно из первых применений УМП и УПМП связано с задачами замены оборудования и профилактического обслуживания, которые рассматривали Дерман, Клейн [242, 249—251, 290] и др. Эти вопросы получили в дальнейшем широкое распространение (см. § 4.3). В задачах оперативного управления производством (см. § 4.1) модели УМП использовались В. В. Рыковым [164, 165, 167] и др. [83, 134—137, 183, 184]. Модели УПМП в этих же целях использовал М. Г. Теплицкий [178—182].

Применительно к задачам диспетчерского контроля (см. § 4.2) модели УМП и УПМП рассматривались в работах [1, 2, 155, 157]. В работах Ю. И. Неймана и М. А. Федоткина [143, 144, 188—190] УМП использовались как модели управления транспортными потоками (см. § 4,4). В задачах теории надежности (см. § 4.3) модели УМП и УПМП используются также в связи с задачами оптимального резервирования [68, 69, 72] и контроля сложных систем при ограниченных средствах контроля [21, 87—89] и т. д.

2.1. Управляемые марковские цепи. Пусть наблюдения над системой производятся в дискретные детерминированные моменты времени $t_n=n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ (случай, когда t_n — случайные моменты, описывается полумарковским процессом). Множество наблюдаемых состояний X состоит из конечного или счетного числа точек $\{x, y, \ldots\}$, управления u принимают конечное число значений. Пространство допустимых стратегий Δ состоит из множества различных последовательностей

$$\delta=\{u(0, x(0)),\ u(1, x(0),\ u(0),\ x(1)), \ldots\}.$$

Наряду с пространством всех допустимых стратегий Δ будем рассматривать пространство Δ' марковских стратегий $\delta \in \Delta'$

$$\delta=\{u(0, x(0)),\ u(1, x(1)), \ldots\}$$

и пространство $\mathfrak{D}$ однородных марковских стратегий $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}$

$$\mathfrak{d}=\{u(x),\ x \in X\}.$$

Предположим, что наблюдения над состояниями системы удовлетворяют условию

$$\mathbf{P}\{\xi(t+1)=y/\xi^t=\mathrm{x}^t,\ \delta^t=u^t\}=$$
$$=\mathbf{P}\{\xi(t+1)=y/\xi(t)=x,\ u(t)=u\}=p_{xy}(u).^*$$

Тогда поведение соответствующей УСМО описывается управляемой марковской цепью (УМЦ); определяемой вероятностями переходов $p_{xy}(u)$. Качество управления в этом случае характеризуется функционалом потерь

$$L_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}]=\sum_{i=s}^{t} l_{x(i)\,x\,(i+1)}(u(i)), \tag{3}$$

где $l_{xy}(u)$ — потери, связанные с переходом из состояния x в состояние y при управлении u.

Выражения (1) для риска, цены, z-риска, z-цены для конечного времени функционирования T в этом случае принимают вид:

$$R_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta]=\mathrm{M}^\delta\left\{\sum_{i=t}^{T} l_{x\,(i),\,x\,(i+1)}(u(i))/\mathrm{x}^t, \mathrm{u}^t\right\},$$

$$\Phi_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}]=\inf_\delta R_t^T[\mathrm{x},\mathrm{u}; \delta],$$

$$\mathcal{R}_t^T[z; \mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta]=\frac{1-e^{-z}}{z}\mathrm{M}^\delta\left\{\sum_{i=t}^{T} e^{-zi} l_{x\,(i),\,x\,(i+1)}(u(i))/\mathrm{x}^t, \mathrm{u}^t\right\}$$

или, заменяя e^{-z} на z, отбрасывая сомножитель $\frac{1-e^{-z}}{z}$,

$$\mathcal{R}_t^T[z; \mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta]=\mathrm{M}^\delta\left\{\sum_{i=1}^{T} z^i l_{x\,(i),\,x\,(i+1)}(u(i))/\mathrm{x}^t, \mathrm{u}^t\right\},$$

$$\mathfrak{F}_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}]=\inf_\delta \mathcal{R}_t^T[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta].$$

Аналогично в соответствии с формулами (2) записываются

*) Заметим, что при произвольной стратегии δ последовательность $\xi(t)$ не образует, вообще говоря, марковскую цепь, так как управления $u(t)$ и, стало быть, вероятности $p_{xy}(u)$ могут зависеть от предыдущих состояний системы.

выражения для среднего риска $r_t[\mathrm{x}, \mathfrak{u}; \delta]$ средней цены $\varphi_t[\mathrm{x}, \mathfrak{u}]$, среднего z-риска $\nu_t[\mathrm{x}, \mathfrak{u}; \delta]$ и средней z-цены $\mathfrak{p}_t[\mathrm{x}, \mathfrak{u}]$ системы при бесконечном времени наблюдения.

Схема УМЦ изучалась в работах [6—8, 35—37, 62, 81, 84, 95, 118, 119, 161, 195, 198, 204, 206, 219, 226—228, 230, 240—249, 252, 287, 303—307, 308, 317, 337, 338, 341, 346, 356]. Основное внимание исследователей при этом было направлено на решение следующих вопросов.

1. Существование оптимальных, z-, ε- и (z, ε)-оптимальных стратегий и T-стратегий в классах всех допустимых стратегиймарковских стратегий Δ', однородных марковских стратегий Δ, $\mathfrak{D}$.

2. Эквивалентность оптимальных стратегий из различных классов Δ, Δ', $\mathfrak{D}$.

3. Поведение z-оптимальных стратегий при $z \to 1$, в частности существование равномерно (по z при $z \to 1-0$) z-оптимальных стратегий.

Для УМЦ с конечными пространствами состояний X и управлений U Блекуэлл [35], Дерман [240], О. В. Висков и А. Н. Ширяев [62] доказали существование z-оптимальных и оптимальных стратегий в классах Δ, Δ', $\mathfrak{D}$ и их эквивалентность. М. Л. Дашевский и Р. Ш. Липцер [84] установили существование равномерно (по $z \to 1-0$) z-оптимальной стратегии.

В случае счетного пространства состояний X z-оптимальные стратегии в классах Δ, Δ', $\mathfrak{D}$ существуют и эквивалентны [118, 119], но как показал Дерман [245], равномерно (по $z \to 1-0$) z-оптимальной стратегии может не существовать. Может не существовать также оптимальной стратегии в классе Δ [245], но если она существует, то всегда найдется эквивалентная ей из $\mathfrak{D}$ [118, 119]. Условия существования оптимальной стратегии в случае конечного пространства управлений исследовал Росс [337].

Случай счетного пространства управлений изучали Маитра [304, 305], Н. В. Крылов [118, 119] и др.

Доказано существование (z, ε)- и ε-оптимальных стратегий в классах Δ, $\mathfrak{D}$ и их эквивалентность.

Более общие случаи, когда пространства X и (или) U являются компактными множествами или борелевскими подмножествами в полном сепарабельном метрическом пространстве, исследовались Блекуэллом [35], Маитрой [307], Россом [338] и др. [7, 8, 81, 195, 206, 262, 308, 346, 356].

Е. Б. Фрид [195] исследовал вопросы существования ε- и (z, ε)-оптимальных стратегий для УМЦ со счетными пространствами состояний X и управлений U при ограничениях вида

$$\mathrm{M}^{\delta} \sum_{l=1}^{\infty} z^l f(x_l, u_l, x_{l+1}) \leqslant k.$$

А. А. Юшкевич [206] ввел понятие канонической стратегии — стационарной стратегии, оптимальной на всех конечных интервалах времени $[0, T]$ и исследовал вопросы существования канонических стратегий.

Сводка основных результатов, полученных в направлении решения вопросов 1)—3) для УМЦ с дискретными пространствами состояний и управлений при бесконечном времени функционирования системы*), представлена в виде таблицы, заимствованной в основных чертах из работы [203].

Таблица 1

Сводка результатов о поведении оптимальных стратегий для управляемых марковских цепей.

U \ X	Конечно	Счетно
Конечно	1. Существуют и эквивалентны z-оптимальные стратегии в классах Δ, Δ', $\mathfrak{D}$ [35, 62, 240] 2. Существуют (равномерно по $z \to 1-0$) z-оптимальные стратегии в классе $\mathfrak{D}$ [84] 3. Существуют и эквивалентны оптимальные стратегии в классах Δ, Δ', $\mathfrak{D}$ [62, 240]	1. Существуют и эквивалентны z-оптимальные стратегии в классах Δ, Δ', $\mathfrak{D}$ [35, 119,245] 2. Равномерно (по $z \to 1-0$) z-оптимальные стратегии могут не существовать [245] 3. Может не существовать оптимальной стратегии в $\mathfrak{D}$ [245]
Счетно	1. Существуют и эквивалентны (z, ε)-оптимальные стратегии в классах Δ, Δ', $\mathfrak{D}$. Если существует оптимальная стратегия в классе Δ, то существует оптимальная и в классе $\mathfrak{D}$ и они эквивалентны [118, 304]. 2. Существует ε-оптимальная стратегия в классе $\mathfrak{D}$ [304].	

Из таблицы видно, что в случае конечных пространств X и U оптимальная стратегия всегда существует и эквивалентна некоторой однородной марковской стратегии, поэтому при фактическом определении оптимальной стратегии можно ограничиться более узким классом $\mathfrak{D}$ однородных марковских стратегий.

Если пространства X и (или) U счетны, то оптимальной стратегии может не существовать (если U — конечно, всегда существует z-оптимальная стратегия), но если она

*) В случае конечного времени функционирования системы, естественно справедливы аналогичные утверждения, с учетом того, что оптимальные стратегии не будут вообще говоря, однородными.

существует (для конечного U условия этого указаны в [337]), то всегда можно подобрать эквивалентную ей из класса $\mathfrak{D}$ [118].

Наконец, для счетного пространства U всегда существуют в Δ (z, ε)- и ε-оптимальные стратегии, эквивалентные соответствующим стратегиям из $\mathfrak{D}$ [118, 304]. Поэтому и в этих случаях при определении оптимальной стратегии также можно ограничиться более узким классом однородных марковских стратегий.

Далее в разделах 2.4, 2,5 мы более подробно остановимся на методах фактического определения оптимальных стратегий в классе $\mathfrak{D}$ при конечном и бесконечном времени функционирования системы.

Как основные теоретические результаты, представленные в таблице, так и практические методы определения оптимальных стратегий для УМЦ основываются на уравнении динамического программирования для соответствующей цены процесса. Можно показать, что для УМЦ с аддитивным функционалом потерь цена на конечном участке времени $\Phi_t^T[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ и z-цена $\mathfrak{F}_t^T[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ не зависят от траекторий $\mathbf{x}^t$ и принимаемых управлений $\mathbf{u}^t$ до момента t, а зависят лишь от состояния процесса $x(t)$ в последний момент времени t, т. е. для всех t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ справедливы соотношения

$$\Phi_t^T[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \Phi_t^T(x(t)) = \Phi^{T-t}(x),$$

$$\mathfrak{F}_t^T[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \mathfrak{F}_t^T(z, x(t)) = z^t \mathfrak{F}^{T-t}(z, x).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $T \to \infty$, что возможно в силу ограниченности z-цены, получим

$$\mathfrak{F}_t[z; \mathbf{x}, \mathbf{u}] = \mathfrak{F}_t(z, x(t)) = z^t \mathfrak{F}(z, x). \tag{4}$$

Для вывода уравнений динамического программирования будем отправляться от соответствующего уравнения для z-цены на конечном участке времени $[s, t)$

$$\mathfrak{F}_s^t(z, x) = \min_{u \in U_x}\left[z^s l_x(u) + \sum_{y \in X} p_{xy}(u)\, \mathfrak{F}_{s+1}^t(z, y)\right], \tag{5}$$

где $l_x(u) = \sum_{y \in X} p_{xy}(u)\, l_{xy}(u)$, которое вытекает непосредственно из определения z-цены $\mathfrak{P}_s^t(z, x)$. Принимая далее во внимание соотношение (4), сокращая на z^s и заменяя $t-s$ на t, из уравнения (5) получим «прямое» уравнение динамического программирования для z-цены.

$$\mathfrak{F}^t(z, x) = \min_{u \in U_x}\left[l_x(u) + z \sum_{y \in X} p_{xy}(u)\, \mathfrak{F}^{t-1}(z, y)\right]. \tag{6}$$

Переходя теперь в уравнении (5) к пределу при $t \to \infty$, что возможно в силу ограниченности z-цены, и заменяя s на t, получим «обратное» уравнение для z-цены

$$\mathfrak{F}_t(z, x) = \min_{u \in U_x} \left[z^t l_x(u) + \sum_{y \in X} p_{xy}(u) \mathfrak{F}_{t+1}(z, y) \right]. \qquad (7)$$

Заметим теперь, что, в силу ограниченности z-цены в прямом уравнении (6), можно перейти к пределу при $t \to \infty$. При этом оно принимает вид

$$\mathfrak{F}(z, x) = \min_{u \in U} \left[l_x(u) + z \sum_{y \in X} p_{xy}(u) \mathfrak{F}(z, y) \right],$$

совпадающий в силу (4) с обратным уравнением (7) при $t = 0$.

Наконец, соотношения (5) и (6) допускают предельный переход при $z \to 1-0$. Замечая, что $\mathfrak{F}^t(z, x) \to \Phi^t(x)$ при $z \to 1-0$, получим

$$\Phi^t(x) = \min_{u \in U_x} \left[l_x(u) + \sum_{y \in X} p_{xy}(u) \Phi_1^t(y) \right]$$

и соответствующее «прямое» уравнение для цены $\Phi^t(x)$ УЦМ

$$\Phi^t(x) = \min_{u \in U_x} \left[l_x(u) + \sum_{y \in X} p_{xy}(u) \Phi^{t-1}(y) \right]. \qquad (8)$$

Соотношения (6, 8) можно использовать для фактического определения оптимальных стратегий управления УМЦ с конечным временем функционирования.

2.2. Управляемые марковские процессы. Предположим теперь, что система, которая может находиться в одном из состояний конечного или счетного множества состояний $X = \{x, y, \ldots\}$, наблюдается непрерывно. Управление u принимает конечное число значений.

Будем предполагать, что пространство траекторий $\mathscr{X}$ состоит из множества всех измеримых функций $x(t)$, а пространство допустимых стратегий Δ — из всех измеримых стратегий, т. е. таких стратегий $\delta = \{u[t, \mathrm{x}^t], 0 \leqslant t < \infty\}$, что

$$\{(t, \mathrm{x}^t) : u[t, \mathrm{x}^t] = u\} \in \mathfrak{S}_T \times \mathfrak{S}_{\mathscr{X}},$$

где $\mathfrak{S}_T$ — σ-алгебра множеств на прямой, а $\mathfrak{S}_{\mathscr{X}}$ — σ-алгебра в пространстве $\mathscr{X}$, порожденная цилиндрическими множествами.

Предположим, что наблюдения над системой удовлетворяют условиям

1) $\mathbf{P}^\delta\{\xi(t+h) = y / \xi^t = \mathrm{x}^t, \delta^t = \mathrm{u}^t\} = \mathbf{P}^\delta\{\xi(t+h) = y / \xi(t) = x, u(t) = u\} =$

$$= \begin{cases} 1 + a_{xx}(u) h + o(h) & \text{при } y = x, \\ a_{xy}(u) h + o(h) & \text{при } y \neq x, \end{cases}$$

$$a_{xy}(u) \geqslant 0 \ (y \neq x), \ a_{xx}(u) = -\sum_{y \in X} a_{xy}(u);$$

2) при любой стратегии δ вероятность того, что за время $[t, t+h)$ в процессе произойдет более одного изменения, бесконечно мала по сравнению с h.

Определение. Управляемый процесс, удовлетворяющий условиям 1), 2), назовем скачкообразным марковским управляемым процессом.

Заметим, что приведенное определение накладывает ограничение на класс рассматриваемых стратегий(или на управляемый процесс). Грубо говоря, введенное определение исключает слишком частые колебания стратегий, т. е. предполагается, например, что стратегии принадлежат классу стратегий, имеющих пределы справа и слева в каждой точке. По-другому это ограничение можно интерпретировать так, что процесс не реагирует на слишком частые изменения стратегии.

Требование аддитивности функционала приводит к тому, что

$$L_t^{t+h}[x(\tau), u(\tau)] =$$

$$= \begin{cases} l_{xx}(u)h + o(h) & \text{при } x(t+h) = x(t) = x, u(t) = u, \\ l_{xy}(u) + O(h) & \text{при } x(t+h) = y, \ x(t) = x, \ u(t) = u. \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{X}^t(\delta, y)$ — множество траекторий, приходящих в момент t в точку y при стратегии δ.

Аналогично п. 2.1 можно показать [168], что при любой стратегии δ на участке $[0, t)$ для $\mathbf{P}^\delta$ почти всех траекторий $\mathbf{x}^t \in \mathscr{X}^t(\delta, y)$ цена $\Phi_t^T[\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t]$ и z-цена $\mathfrak{F}_t^T[z; \mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t]$ не зависят от траекторий $\mathbf{x}^t$ процесса и управлений $\mathbf{u}^t$ на участке $[0, t)$, а зависят лишь от состояния процесса $x(t) = y$ в последний момент времени t.

$$\Phi_t^T[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \Phi_t^T(x(t)) = \Phi^{T-t}(y),$$

$$\mathfrak{F}_t^T[z; \mathbf{x}, \mathbf{u}] = \mathfrak{F}_t^T(z, x(t)) = e^{-zt}\mathfrak{F}^{T-t}(z, y),$$

и при $T \to \infty$

$$\mathfrak{F}_t^T[\mathbf{x}, \mathbf{u}] \to \mathfrak{F}_t[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \mathfrak{F}_t(z, x(t)) = e^{-zt}\mathfrak{F}_t(z, y). \qquad (9)$$

Это свойство позволяет выписать «прямые» дифференциальные уравнения, связывающие функции цены $\Phi^t(x)$ и z-цены $\mathfrak{F}^t(x)$ с оптимальными стратегиями

$$-\frac{d\Phi^t(x)}{dt} = \min_{u \in U_x}\left[l_x(u) + \sum_{y \in X} a_{xy}(u)\,\Phi^t(y)\right], \qquad (10)$$

$$-\frac{d\mathfrak{F}^t(x)}{dt}+z\mathfrak{F}^t(x)=\min_{u\in U_x}\left[l_x(u)+\sum_{y\in X}a_{xy}(u)\,\mathfrak{F}^t(y)\right], \qquad (11)$$

где $l_x(u)=l_{xx}(u)+\sum\limits_{\substack{y\in X\\(y\neq x)}}a_{xy}(u)\,l_{xy}(u).$

При неограниченном времени функционирования системы для z-цены $\mathfrak{F}_t(x)$ имеет место обратное уравнение

$$-\frac{d\mathfrak{F}_t(x)}{dt}=\min_{u\in U_x}\left[e^{-zt}l_x(u)+\sum_{y\in X}a_{xy}(u)\,\mathfrak{F}_t(y)\right]. \qquad (12)$$

Из уравнения (11) при $t\to\infty$ и из уравнения (12) при $t=0$ получаем с учетом (9)

$$z\mathfrak{F}(x)=\min_{u\in U_x}\left[l_x(u)+\sum_{y\in X}a_{xy}(u)\,\mathfrak{F}(y)\right].$$

Доказывая существование и единственность решения уравнений (10)—(12) в пространстве цен (для уравнения (11) — см. [168]), убеждаемся в существовании соответствующих оптимальных стратегий, а также в том, что они могут быть выбраны марковскими в случаях (10, 11) и однородными марковскими в случае (12). Можно показать, далее, [168], что для уравнения (12) существует равномерно (по z при $z\to+0$) z-оптимальная однородная марковская стратегия, откуда в силу

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,\Phi^T(x)=\lim_{z\to+0}z\mathfrak{F}(zx)$$

следует факт существования оптимальной стратегии в классе Δ и эквивалентность её оптимальной однородной марковской стратегии.

Последнее утверждение показывает, что изменения управления в оптимальной стратегии для скачкообразного марковского процесса могут происходить лишь в моменты изменения его состояний. Таким образом, для определения оптимальной стратегии можно ограничиться изучением вложенной по моментам изменения состояний марковской цепи. Более того, в некоторых случаях специфика задачи может привести к различным ограничениям на изменения управления при определенных изменениях состояний (см. § 3.1). В таких случаях достаточно ограничиться изучением марковской цепи по моментам, допускающим изменения управления, которые будем называть моментами управления. При этом нужно иметь в виду, что при переходе к вложенной марковской цепи изменяется критерий оптимизации, а именно: минимизация потерь в единицу времени заменяется их минимизацией за переход. Методы, позволяющие сохранить в качестве критерия потери в единицу времени, развиваются в теории управляемых полумарковских процессов (УПМП).

В задачах теории массового обслуживания и теории надежности особое место занимают, как известно, процессы гибели и размножения. Исследованию вопросов управления процессами гибели и размножения посвящена работа А. Д. Соловьёва [172]. Состояние n ($n=0, 1, 2, \ldots$) процесса, характеризующегося параметрами (α_n, β_n), интерпретируется как количество требований в некоторой системе массового обслуживания. За единицу времени пребывания в системе платится штраф в размере c единиц, за единицу времени работы системы с суммарной интенсивностью β платится штраф $\varphi(\beta)$, где $\varphi(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\varphi(x)$ — определена и дважды дифференцируема на $[0, b]$, $0<b\leqslant+\infty$;

2) $\varphi(x)>0$, $\varphi'(x)>0$, $\varphi''(x)>0$, $0<x<b$,

3) $\varphi'(x)\to\infty$ при $x\to b-0$.

При заданных параметрах α_n требуется выбрать параметры β_n так, чтобы минимизировать средний риск, имеющий в данном случае вид

$$r(p)=\sum_{n=0}^{\infty}[nc+\varphi(\beta_n)]\,p_n, \tag{13}$$

где p_n—вероятности состояний системы $(p_0, p_1, \ldots)=p$

$$p_n=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k\right]^{-1}\theta_n,\quad \theta_k=\frac{\alpha_0\ldots\alpha_{k-1}}{\beta_1\ldots\beta_k}.$$

Достаточное условие существования минимума функционала (13) дается следующей теоремой: если найдется последовательность β_n, $0<\beta_n<b$, такая, что

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\psi(\beta_n)}<\infty \\ 2)\ \alpha_n\leqslant\psi(\beta_n)\,[\varphi'(\beta_{n+1})]^{-1},\ \text{начиная с некоторого } n \end{array}\right\} \tag{14}$$

где $\psi(x)=x\varphi'(x)-\varphi(x)$, то существует минимум функционала $r(p)$.

Далее, если выполняется условие регулярности

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\varphi'(\beta_{n+1})\,p_n=0, \tag{15}$$

то функционал $r(p)$ достигает своего минимального значения

$$r_0=\min_{\{p\}} r(p)=\alpha_0\varphi'(\beta_1^*),$$

а интенсивности обслуживания $\{\beta_n^*\}$, обеспечивающие это минимальное значение, удовлетворяют следующему необходимому условию

$$\left.\begin{aligned} \beta_0^* &= 0 \\ \alpha_n\varphi'\left(\beta_{n+1}^*\right) &= \psi\left(\beta_n^*\right) - nc + \alpha_0\varphi'\left(\beta_1^*\right) \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Соотношение (16) позволяет последовательно вычислить значения β_n^* $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$, если известно β_1^*.

В случае конечного, скажем N, числа состояний $\alpha_N=0$. Тогда достаточные условия (14) существования минимума функционала $r(p)$ и условие регулярности (15) выполнены. необходимое условие (16) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \beta_0^* &= 0 \\ \alpha_n\varphi'\left(\beta_{n+1}^*\right) &= \psi\left(\beta_n^*\right) - nc + \alpha_0\varphi'\left(\beta_1^*\right) \\ 0 &= \psi\left(\beta_N^*\right) - Nc + \alpha_0\varphi'\left(\beta_1^*\right) \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Система уравнений (17) имеет единственное решение.

Возвращаясь к случаю бесконечного числа состояний, обозначим через β_1^N решение системы (17). В работе [172 показано, что последовательность β_1^N монотонно возрастает, ограничена и, следовательно, имеет предел $\lim\limits_{N\to\infty}\beta_1^N=\beta_1^*$, который совпадает с соответствующим значением в случае бесконечного числа состояний. Приведенные соображения дают способ вычисления значения β_1^* в соотношениях (16).

Наконец, так как проверка условия регулярности (15) затруднительна, приводятся достаточные для регулярности признаки: условие регулярности (15) выполнено, если имеет место хотя бы одно из трех приводимых ниже условий:

1) Функция $\dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ ограничена в окрестности точки $x=b$;

2) функция $\dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ монотонно возрастает при $x>x_0$, но существует последовательность $\nu_n\to b-0$, для которой:

а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(\nu_n)}{\nu_n\varphi'(\nu_n)}=\infty$,

б) начиная с некоторого n для любого $k\leqslant n$; $\psi(\nu_n)/\varphi'(\nu_{n+1})\leqslant\alpha_k$;

3) для любого n $\alpha_n\geqslant\alpha>0$, $b=+\infty$, $\dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ монотонно возрастает при $x>x_0$.

2.3. Управляемые полумарковские процессы. Основные соотношения. Во многих практических ситуациях марковские модели оказываются недостаточными. Более широкий класс систем массового обслуживания описывается полумарковскими процессами, которые изучались многими авторами (Леви, Смит, Пайк, Кингмэн, В. С. Королюк, И. И. Ежов, Г. И. Призва и др.). Одно из возможных определений полумарского процесса $\xi(t)$ состоит в следующем [85]. Пусть система может находиться в одном из состояний конечного или счетного множества $X=\{x, y, \ldots\}$, причем переходы из состояния x в состояние y происходят с вероятностями p_{xy} независимо от предыдущей истории, а время пребывания в состоянии x до перехода в состояние y является случайной величиной τ_{xy} с заданной ФР $F_{xy}(t)=P\{\tau_{xy}\leqslant t\}$.

Процесс $\xi(t)=x$, если в момент t система находится в состоянии x, называется полумарковским процессом.

Обозначим через $N(t)$ число изменений состояний системы за время t; S_n — момент n-го изменения состояния системы, так, что $S_0=0$, $S_1=\tau_{x_0 x_1}, \ldots, S_n=\sum\limits_{l=1}^{n}\tau_{x_{l-1}, x_l}, \ldots$; $x_l=x(S_l-0)$ — состояние системы непосредственно перед моментом i-го изменения.

Пусть теперь имеется управляющий параметр, принимающий значения u из некоторого конечного множества U, так что вероятностные характеристики процесса зависят от значения управления. Семейство управлений во времени определяет стратегию

$$\delta=\{u[t, \mathrm{x}^t], 0\leqslant t<\infty\}.$$

Пара (ξ, δ) называется управляемым полумарковским процессом (УПМП).

Однородной марковской стратегией, как и ранее, называется стратегия, при которой управления в каждый момент времени зависят лишь от состояния процесса в этот момент времени $u[t, \mathrm{x}^t]=u(x(t))$.

Если ограничиться лишь однородными марковскими стратегиями, то УПМП описываются наборами:

$p_{xy}(u)$ $(x, y\in X, u\in U)$ — вероятностей переходов и

$F_{xy}(t; u)$ $(x, y\in X, u\in U)$ — ФР длительностей пребывания.

Заметим, что в отличие от марковских управляемых процессов в данном случае это предположение является некоторым искусственным сужением класса исследуемых на оптимальность стратегий, так как, вообще говоря, для полумарковского процесса управление в каждый момент времени может зависеть не только от состояния, в котором находится система, но и от времени, проведенного в этом состоянии. Упомянем по этому поводу работу Читгопекера [232], в которой пространство всех допустимых стратегий Δ характеризуется следующим образом.

В момент попадания процесса в любое из состояний $x \in X$ назначается случайное время θ_x с ФР $G_x(t) = P\{\theta_x < t\}$ такое, что если до момента θ_x система не перейдет в новое состояние, этот переход совершается в момент θ_x с вероятностями $p_{xy}(\theta_x, u)$ и назначается новое время пребывания в состоянии y с ФР $F_y(t, u)$ (u — управление).

Для стратегий класса Δ функции распределения «неопределенности» $G_x(t)$ и управления $u(t)$ могут зависеть от всей предшествующей истории системы.

Наряду с классом Δ рассматривается класс стационарных нерандомизированных стратегий Δ', для которого управления u, ФР $G_x(t)$ зависят только от состояния, в котором находится система, а ФР $G_x(t)$ имеет, кроме того, вид одноточечного распределения. Основной результат работы [232] состоит в том, что существует стратегия $\delta^* \in \Delta'$, оптимальная в Δ.

Для определения стратегии δ^* предлагается использовать модифицированную процедуру Ховарда [198].

Ограничимся теперь классом однородных марковских стратегий $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}$. Для УПМП аддитивный функционал потерь $L_s^t[\mathrm{x}, \mathrm{u}]$ можно представить в виде

$$L_s^t[x(\tau), u(\tau)] = l''_{x_{N(x)} x_{N(s)+1}}(u(s))(S_{N(s)+1} - s) +$$
$$+ \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} \left(l'_{x_i, x_{i+1}}(u(S_i - 0)) + l''_{x_i, x_{i+1}}(u(S_i - 0))\,\tau_{x_i x_{i+}}\right) -$$
$$- l''_{x_{N(t)}, x_{N(t)+1}}(u(t))(S_{N(t)+1} - t),$$

где $l'_{xy}(u)$ — потери, вызванные переходом из состояния x в состояние y при управлении u, а $l''_{xy}(u)$ — потери за единицу времени пребывания в состоянии x в ожидании перехода в состояние y при управлении u.

Переходя к определению функционалов риска и цены (ε-риска и ε-цены соответственно), заметим, что если ограничиться поиском оптимальных стратегий в классе марковских стратегий, то достаточно определить функционалы лишь на участках $[s, t)$, начинающихся некоторым изменением состояния системы. Пусть $s = S_n$ является моментом изменения полумарковского процесса, тогда, так как S_n является моментом регенерации процесса, условные риск $R_{S_n}^{S_n+T}(\delta) = M^\delta\left\{L_{S_n}^{S_n+T} \middle| \mathrm{x}^{S_n}, \mathrm{u}^{S_n}, S_n\right\}$ и ε-риск $\mathcal{R}_{S_n}^{S_n+T}(\delta) = M^\delta\left\{\mathcal{L}_{S_n}^{S_n+T} / \mathrm{x}^{S_n}, \mathrm{u}^{S_n}, S_n\right\}$, соответственно, цена $\Phi_{S_n}^{S_n+T}[\mathrm{x}, \mathrm{u}]$ и ε-цена $\mathfrak{F}_{S_n}^{S_n+T}[\mathrm{x}, \mathrm{u}]$ не зависят от траекторий $x(\tau)$ и принимаемых до момента S_n управлений $u(\tau)$, т. е. с вероятностью 1 выполняются равенства

$$R_{S_n}^{S_n+T}[\mathrm{x}, \mathrm{u}; \delta] = R_{S_n}^{S_n+T}(x(S_n); \delta) = R^T(x(S_n); \delta),$$

$$\Phi_{S_n}^{S_n+T}[\mathrm{x}, \mathrm{u}] = \Phi_{S_n}^{S_n+T}(x(S_n)) = \Phi^T(x(S_n)),$$

$$\mathcal{R}_{S_n}^{S_n+T}[\mathrm{x}, \mathrm{u}, \delta] = \mathcal{R}_{S_n}^{S_n+T}(x(S_n); \delta) = e^{-zS_n}\mathcal{R}^T(x(S_n), \delta),$$

$$\mathfrak{F}_{S_n}^{S_n+T}[\mathrm{x}, \mathrm{u}] = \mathfrak{F}_{S_n}^{S_n+T}(x(S_n)) = e^{-zS_n}\mathfrak{F}^T(x(S_n)).$$

Рассмотрим прямое уравнение для z-цены УПМП. Имеем

$$\mathfrak{F}^T(x) = \min_{u \in U_x}\Bigg[\sum_{y \in X} p_{xy}(u)\Bigg\{[1 - F_{xy}(u)]\, l''_{xy}\,\frac{1-e^{-zT}}{z} +$$

$$+\int_0^T dF_{xy}(s, u)\left[l''_{xy}\,\frac{1-e^{-zs}}{z} + l'_{xy}e^{-zs} + e^{-zs}\mathfrak{F}^{T-s}(y)\right]\Bigg\}\Bigg] =$$

$$= \min_{u \in U_x}\Bigg\{\tilde{\varepsilon}_x^T(z; u) + \tilde{l}_x^T(z; u) +$$

$$+ \sum_{y \in X} p_{xy}(i)\int_0^T e^{-zs}\mathfrak{F}^{T-s}(y)\, dF_{xy}(s, u\Bigg\}, \qquad (18)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_x^T(z; u) = \frac{1-e^{-zT}}{z}\sum_{y \in X} p_{xy}(u)\, l''_{xy}(u)[1 - F_{xy}(T, u)],$$

$$\tilde{l}_x^T(z; u) = \sum_{y \in X} p_{xy}(u)\int_0^T\left[l'_{xy}(u)\, e^{-zs} + l''_{xy}(u)\,\frac{1-e^{-zs}}{z}\right] dF_{xy}(s; u).$$

Переходя к пределу при $z \to +0$, из этого уравнения получим соответствующее прямое уравнение для цены системы $\Phi^T(x)$ на конечном участке $[0, T)$

$$\Phi^T(x) = \min_{u \in U_x}\left\{\varepsilon_x^T(u) + l_x^T(u) + \sum_{y \in X} p_{xy}(u)\int_0^T \Phi^{T-s}(y)\, dF_{xy}(s)\right\}, \quad (19)$$

где

$$\varepsilon_x^T(u) = \lim_{z \to +0}\tilde{\varepsilon}_x^T(z; u); \quad l_x^T(u) = \lim_{z \to +0}\tilde{l}_x^T(z; u).$$

Наряду с уравнениями (18), (19) для z-цены и цены часто полезно рассматривать соответствующие уравнения для конечного числа переходов, т. е. в случае, когда система эксплуатируется в течение случайного времени $T = S_n$ до момента n-го перехода. Уравнения (18), (19) в этом случае принимают вид:

$$\mathfrak{F}^{S_n}(x)=\min_{u\in U_x}\left\{\tilde{l}_x(z,u)+\sum_{y\in X}p_{xy}(u)\,\tilde{f}_{xy}(z;u)\,\mathfrak{F}^{S_{n-1}}(y)\right\},\qquad(20)$$

$$\Phi^{S_n}(x)=\min_{u\in U_x}\left\{{}_xL(u)+\sum_{y\in X}p_{xy}(u)\,\Phi^{S_{n-1}}(y)\right\},\qquad(21)$$

где

$$\tilde{l}_x(z;u)=\lim_{T\to\infty}\tilde{l}_x^T(z;u)=\sum_{y\in X}p_{xy}(u)\Big[l'_{xy}(u)\,\tilde{f}_{xy}(z;u)+$$

$$+l''_{xy}(u)\,\frac{1-\tilde{f}_{xy}(z,u)}{z}\Big];$$

$$\tilde{f}_{xy}(z,u)=\int_0^\infty e^{-zt}dF_{xy}(t;u);$$

$$L_x(u)=\lim_{z\to+0}\tilde{l}_x(z;u)=\sum_{y\in X}p_{xy}(u)[l'_{xy}(u)+l''_{xy}(u)\,m_{xy}(u)],$$

$$m_{xy}(u)=\boldsymbol{M}\,[\tau_{xy}/u]=\int_0^\infty t\,dF_{xy}(t;u).$$

Наконец, в силу ограниченности z-цены УПМП в уравнениях (18), (20) можно перейти к пределу при $T\to\infty$ и $n\to\infty$ соответственно. При этом получим обратное уравнение для z-цены УПМ. Оно имеет вид

$$\mathfrak{F}(x)=\min_{u\in U_x}\left\{\tilde{l}_x(z;u)+\sum_{y\in X}p_{xy}(u)\,\tilde{f}_{xy}(z;u)\,\mathfrak{F}(y)\right\},\qquad(22)$$

т. к. $\tilde{\varepsilon}_x^T(z;u)\to 0$ при $T\to\infty$.

2.4. Управление на конечном интервале времени. Метод динамического программирования. Оптимальную стратегию управления системой, описываемой УМЦ, УМП или УПМП, на конечном интервале времени $[0,T]$ можно определить, пользуясь соотношениями (6), (8), (10)—(12), (18)—(21).

В случае УМЦ, считая заданными величины $\Phi^0(x)$ или $\mathfrak{F}^0(x)$, которые можно интерпретировать как потери, вызванные прекращением эксплуатации системы в момент времени $t=T$, из соотношений (6) и (8) можно последовательно (в обратном направлении изменения времени $t=T$, $t=T-1,\ldots$) определить значения оптимального управления $u^*(T)$, $u^*(T-1),\ldots$. При этом оказывается, что оптимальные значения управления зависят от времени лишь в конце интервала эксплуатации системы, т. е. для значений t, близких к T.

Для систем, описываемых УМП, аналогичный результат можно получить из уравнений (10) и (11), переходя, например, к конечно-разностной аппроксимации. Однако так как оптимальная стратегия принадлежит классу марковских стратегий, то есть управления могут изменяться лишь в моменты изменения состояний системы, то удобно перейти к вложенной (по моментам управления*)) марковской цепи. При этом для УМП удобные с вычислительной точки зрения формулы (20), (21) получим, если за критерий оптимальности принять потери за n переходов. Если же критерием оптимальности являются потери за конечное время T функционирования системы, то приходится пользоваться формулами (10), (11) или (18), (19), переходя к конечно-разностной аппроксимации.

Аналогичные рассуждения справедливы для УПМП. Соотношения динамического программирования (20), (21) удобны для определения оптимальной стратегии управления в течение конечного числа переходов. При определении оптимальной стратегии управления системой на конечном интервале времени ее функционирования приходится прибегать к формулам (18), (19), используя конечно-разностную аппроксимацию.

Ясно, что если имеется возможность, то желательно сформулировать критерий оптимизации в виде минимизации потерь за конечное число переходов. Преимущества такого подхода с вычислительной точки зрения очевидны, так как объем вычислений при этом резко сокращается, да и не требуется оценки точности вычисления оптимальной стратегии при переходе к аппроксимации дифференциальных уравнений (10), (11) или интегральных (18), (19) конечно-разностными.

2.5. Управление на бесконечном интервале времени. Метод Ховарда. При длительной эксплуатации системы естественной математической абстракцией является изучение системы на бесконечном интервале времени. Различные понятия оптимальности в этом случае были введены в разделе 1.6. Одним из возможных методов фактического определения оптимальных в классе однородных марковских стратегий в этом случае является метод итераций в пространстве стратегий, впервые предложенный Ховардом [198] для управляемых марковских цепей и процессов и получивший дальнейшее развитие и применение в работах [85, 232].

Здесь этот метод будет изложен применительно к УПМП, так как соотношения для УМЦ и УМП вытекают из соответст-

*) Напомним, что специфика задачи, математические соображения или физические ограничения могут привести к тому, что любое изменение состояния вызывает изменение управления. Моментами управления назовем те моменты изменения состояний системы, в которые возможны изменения управления.

вующих соотношений для УПМП. Следует различать случаи, когда за критерий оптимальности принимаются средние потери (риск) в единицу времени

$$r(x, \delta)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}R^T(x, \delta),$$

средний риск за один переход

$$R(x, \delta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}R^{S_n}(x, \delta)$$

или средний z-риск

$$\mathfrak{r}(x, \delta)=\lim_{z\to+0} z\mathcal{R}(z; x, \delta).$$

Соответствующие оптимальные стратегии, вообще говоря, не совпадают. В разделах 2.1 и 2.2 было показано, что оптимальную стратегию управления на бесконечном интервале для УМЦ и УМП с конечными пространствами состояний X и управлений U следует искать в классе однородных марковских стратегий $\mathfrak{D}$. Для УПМП также условимся ограничиться этим классом (хотя это, вообще говоря, и не гарантирует оптимальности). Для всякой системы, описываемой УМЦ, УМП или УПМП, риск R, связанный с однородной марковской стратегий $\mathfrak{d}$, можно представить в виде

$$R^{S_n}(x, \mathfrak{d})=R(x, \mathfrak{d})\,n+V(x, \mathfrak{d})+o(1), \tag{23}$$

$$R^T(x, \mathfrak{d})=r(x, \mathfrak{d})\,T+v(x, \mathfrak{d})+o(1), \tag{24}$$

$$\mathcal{R}(z; x, \mathfrak{d})=\mathfrak{r}(x, \mathfrak{d})\,z^{-1}+\mathfrak{v}(x, \mathfrak{d})+o(1). \tag{25}$$

В этих формулах величины $R(x, \mathfrak{d})$, $r(x, \mathfrak{d})$, $\mathfrak{r}(x, \mathfrak{d})$, $V(x, \mathfrak{d})$, $v(x, \mathfrak{d})$, $\mathfrak{v}(x, \mathfrak{d})$ для УМЦ, УМП и УПМП имеют, естественно, различные выражения через исходные характеристики процесса. Представления (23)—(25) для УМЦ и УМП получены в работе [198], для УПМП—в [85]. Представления (23)—(25) наряду с рекуррентными соотношениями (19), (21), (22) позволяют получить необходимые условия оптимальности стратегии $\mathfrak{d}^*$ в виде

$$\left.\begin{aligned} G_x&=\min_{u\in U_x}\sum_{y\in X}P_{xy}(u)\,G_y\\ K_xG_x+V_x&=\min_{u\in U_x}\left\{L_x(u)+\sum_{y\in X}P_{xy}(u)\,V_y\right\}\end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

В этих равенствах величины $P_{xy}(u)$, $L_x(u)$ определяются параметрами соответствующего процесса, а G_x и V_x совпадают с выражениями для R, r, $\mathfrak{r}$ и V, v, $\mathfrak{v}$ соответственно при оптимальной стратегии $\mathfrak{d}^*$.

Рассматривая равенства (26) как уравнения относительно величин G_x и V_x, доказывая существование и единственность их решений, можно убедиться в достаточности условий (26) для оптимальности стратегии $\mathfrak{d}^*$. Уравнения (26) лежат в основе итерационного метода Ховарда для определения оптимальной стратегии. Процедура Ховарда приводится в конце настоящего параграфа, ниже следует вывод уравнений (26) для различных случаев.

В случае оптимизации риска за переход, подставляя соотношение (23) в уравнение (21), получим с точностью до бесконечно малых

$$R(x, \mathfrak{d}^*)n + V(x, \mathfrak{d}^*) =$$

$$= \min_{u \in U_x} \left\{ L_x(u) + (n-1) \sum_{y \in X} p_{xy}(u) R(y, \mathfrak{d}^*) + \sum_{y \in X} p_{xy}(u) V(y, \mathfrak{d}^*) \right\}.$$

Имея в виду, что последнее равенство должно выполняться для всех n, из него получим две системы уравнений

$$R(x, \mathfrak{d}^*) = \min_{u \in U_x} \sum_{y \in X} p_{xy}(u) R(y, \mathfrak{d}^*)$$

$$R(x, \mathfrak{d}^*) + V(x, \mathfrak{d}^*) = \min_{u \in U_x} \left\{ L_x(u) + \sum_{y \in X} p_{xy}(u) V(y, \mathfrak{d}^*) \right\},$$

которые совпадают с (26), если положить $K_x \equiv 1$, $R(x, \mathfrak{d}^*) = G_x$, $V(x, \mathfrak{d}^*) = V_x$, $p_{xy}(u) = P_{xy}(u)$, $L_x(u) = \bar{L}_x(u)$.

При этом так как в случае УМЦ интервалы между переходами постоянны и равны, скажем, единице, то

$$F_{xy}(t) = \begin{cases} 0, t < 1, \\ 1, t \geqslant 1, \end{cases}$$

откуда $m_{xy} = \mathbf{M}\tau_{xy} = 1$ и для $L_x(u)$ получаем выражение

$$L_x(u) = \sum_{y \in X} p_{xy}(u) \left[l'_{xy}(u) + l''_{xy}(u) \right],$$

которое совпадает с $l_x(u)$ для УМЦ, если обозначить

$$l'_{xy}(u) + l''_{xy}(u) = l_{xy}(u).$$

Таким образом, параметры уравнений (26) определяются характеристиками УМЦ в виде

$$P_{xy}(u) = p_{xy}(u), \quad L_x(u) = l_x(u) = \sum_{y \in X} p_{xy}(u)\, l_{xy}(u).$$

В случае УМП при минимизации потерь за переход имеем

$$p_{xx}(u) = 0, \quad p_{xy}(u) = -\frac{a_{xy}(u)}{a_{xx}(u)} \quad (y \neq x),$$

$$l'_{xy}(u) = l_{xy}(u), \quad l''_{xy}(u) = l_{xx}(u), \quad m_{xy}(u) = -\frac{1}{a_{xx}(u)}, \quad (y \neq x)$$

откуда

$$L_x(u)=\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\left[l'_{xy}(u)+l''_{xy}(u)\,m_{xy}(u)\right]=$$

$$=-\frac{1}{a_{xx}(u)}\left[l_{xx}(u)+\sum_{\substack{y\in X,\\ y\neq x}} a_{xy}(u)\,l_{xy}(u)\right]=-\frac{1}{a_{xx}(u)}\,l_x(u),$$

где $a_{xy}(u)\geqslant 0$ $(y\neq x)$, $a_{xx}(u)=-\sum\limits_{y\in X,\ y\neq x} a_{xy}(u)$, $l_{xx}(u)$, $l_{xy}(u)$ — параметры, определяющие УМП.

При оптимизации риска в единицу времени, подставляя соотношение (24) в уравнение (19), найдем

$$r(x,\mathfrak{d}^*)\,T+v(x,\mathfrak{d}^*)=\min_{u\in U_x}\Big\{\varepsilon_x^T(u)+l_x^T(u)+$$

$$+\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\left[r(y,\mathfrak{d}^*)\int_0^T F_{xy}(t,u)\,dt+v(y,\mathfrak{d}^*)\,F_{xy}(T;u)\right]\Big\}.$$

Представляя T в левой части этого равенства в виде

$$T=\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\int_0^T\left[F_{xy}(t;u)+(1-F_{xy}(t;u))\right]dt,$$

собирая члены одного порядка и учитывая, что при $T\to\infty$ $\varepsilon_x^T(u)\to 0$, $l_x^T(u)\to L_x(u)$, $F_{xy}(T;u)\to 1$, $\int\limits_0^T(1-F_{xy}(t,u))\,dt\to$ $\to m_{xy}(u)$, получим, переходя к пределу при $T\to\infty$, пару систем уравнений

$$\left.\begin{aligned} &r(x,\mathfrak{d}^*)=\min_{u\in U_x}\Big\{\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\,r(y,\mathfrak{d}^*)\Big\}\\ &r(x,\mathfrak{d}^*)\,m_x(\mathfrak{d}^*)+v(x,\mathfrak{d}^*)=\min_{u\in U_x}\Big\{L_x(u)+\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\,v(y,\mathfrak{d}^*)\Big\}\\ &\text{где}\\ &m_x(u)=\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\,m_{xy}(u), \end{aligned}\right\}\quad(27)$$

которые при $r(x,\mathfrak{d}^*)=G_x$, $v(x,\mathfrak{d}^*)=V_x$, $m_x(\mathfrak{d}^*)=K_x$ $p_{xy}(u)=P_{xy}(u)$, $l_x(u)=L_x(u)$ совпадают с (26).

Для УМП имеем

$$p_{xx}(u)=0,\quad p_{xy}(u)=-\frac{a_{xy}(u)}{a_{xx}(u)}\ (y\neq x),\quad m_{xy}(u)=-\frac{1}{a_{xx}(u)},$$

$$l'_{xy}(u)=l_{xy}(u),\quad l''_{xy}(u)=l_{xx}(u),$$

откуда

$$L_x(u)=\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\left[l'_{xy}(u)+l''_{xy}(u)m_{xy}(u)\right]=$$

$$=-\frac{1}{a_{xx}(u)}\left[l_{xx}(u)+\sum_{\in X,\, y\neq x} a_{xy}(u)\, l_{xy}(u)\right]=-\frac{1}{a_{xx}(u)}l_x(u)$$

и уравнения (27) сводятся к

$$r(x,\mathfrak{d}^*)=\min_{u\in U_x}\left\{-\frac{1}{a_{xx}(u)}\sum_{\substack{y\in X\\ y\neq x}} a_{xy}(u)\, r(y,\mathfrak{d}^*)\right\},$$

$$-\frac{r(x,\mathfrak{d}^*)}{a_{xx}(u^*(x))}+v(x,\mathfrak{d}^*)=$$

$$=\min_{u\in U_x}\left\{-\frac{1}{a_{xx}(u)}\left[l_x(u)+\sum_{\substack{y\in X\\ y\neq x}} a_{xy}(u)\, v(y,\mathfrak{d}^*)\right]\right\}.$$

Можно показать, что последняя система уравнений эквивалентна используемой в работе [198] системе

$$\left.\begin{aligned} 0&=\min_{u\in U_x}\sum_{y\in X} a_{xy}(u)\, r(y,\mathfrak{d}^*)\\ r(x,\mathfrak{d}^*)&=\min_{u\in U_x}\left\{l_x(u)+\sum_{y\in X} a_{xy}(u)\, v(y,\mathfrak{d}^*)\right\}\end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

которую можно получить, подставляя соотношение (24) для УМП непосредственно в систему дифференциальных уравнений (10).

Наконец, при минимизации среднего z-риска из (22) и (25) вытекает

$$\mathfrak{r}(x,\mathfrak{d}^*)z^{-1}+\mathfrak{b}(x,\mathfrak{d}^*)=$$

$$=\min_{u\in U_x}\left\{\tilde{l}_x(z),u)+\sum_{y\in X} p_{xy}(u)[1-m_{xy}(u)z+o(z)]\times\right.$$

$$\left.\times[\mathfrak{r}(y,\mathfrak{d}^*)z^{-1}+\mathfrak{b}(y,\mathfrak{d}^*)]\right\},$$

откуда при $z\to+0$, как и ранее, получаем пару систем уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}(x,\mathfrak{d}^*)&=\min_{u\in U_x}\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\,\mathfrak{r}(y,\mathfrak{d}^*)\\ \mathfrak{b}(x,\mathfrak{d}^*)&=\min_{u\in U_x}\left\{L_x(u)+\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\,\mathfrak{b}(y,\mathfrak{d}^*)-\right.\\ &\left.-\sum_{y\in X} p_{xy}(u)\, m_{xy}(u)\,\mathfrak{r}(y,\mathfrak{d}^*)\right\}\end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

совпадающую, как показано в [85], с уравнениями (26).

Переходя к методу определения оптимальных стратегий, заметим, что для систем с конечным числом n состояний, система (26) содержит $2n$ уравнений и $2n$ неизвестных G_x и V_x. Однако можно показать [198], что если при некоторой стратегии $\mathfrak{d}=\{u(x), x \in X\}$ вложенная марковская цепь, определяемая вероятностями переходов $p_{xy}(u(x))$, содержит m эргодических классов E_i $(i=\overline{1, m})$, содержащих по k_i состояний и k_0 несущественных состояний E_0, то для всех $x \in E_i$ $G_x = G_i$. Далее, так как из системы уравнений (26) веса V_x определяются лишь с точностью до аддитивных постоянных, то, положив для каждого эргодического класса E_i по одному из значений V_x, скажем $V_{x_i^0}$, равным 0, получим систему из $\sum_{i=1}^{m} k_i + 2k_0 = n + k_0$ независимых уравнений с $k_0 + m$ неизвестными G_x и $n-m$ неизвестными V_x, из которой они определяются однозначно. Далее, как показано Ховардом и Джевеллом [85, 198], определение оптимальной однородной марковской стратегии сводится к следующей итерационной процедуре.

Оценка стратегии. Для данной стратегии $\mathfrak{d}=\{u(x), x \in X\}$ решить систему уравнений

$$G_x = \sum_{y \in X} P_{xy}(u) G_y,$$

$$G_x + V_x = L_x(u) + \sum_{y \in X} P_{xy}(u) V_y,$$

приравняв нулю по одному из весов V_x для каждого эргодического класса.

Улучшение стратегии. Для каждого состояния $x \in X$ найти управление $u(x)$, минимизирующее основной критерий

$$\sum_{y \in X} P_{xy}(u) G_y,$$

и принять за новое управление в состоянии x.

Если минимальное значение основного критерия достигается на нескольких управлениях, за новое управление принимается то из них, которое минимизирует дополнительный критерий

$$L_x(u) + \sum_{y \in X} P_{xy}(u) V_y.$$

Если две последовательные итерации приводят к одинаковым значениям критериев, управление остается с предыдущей итерации. Процедура заканчивается, когда в двух последовательных итерациях будут получены одинаковые стратегии.

Примеры применения метода динамического программирования и итерационного метода для оптимизации работы системы на конечном и бесконечном интервале времени рассмотрены в § 4.

2.6. Задачи программного управления и применение классических методов теории оптимального управления. Если траектории поведения системы не доступны наблюдению или по другим причинам исследование ограничивается стратегиями, не зависящими от поведения системы, приходим к задачам программного управления для УСМО. В этом случае стратегия δ ищется в виде функции времени $\delta=u(t)$, и если поведение системы описывается, скажем, марковским процессом, вероятностные характеристики которого являются решениями дифференциальных уравнений с зависящими от управляющего параметра правыми частями, а критерий качества стратегии выражается через эти вероятностные характеристики, то приходим к классической постановке задачи теории оптимального управления [153].

Примером подобной постановки задачи служит работа Г. П. Климова [103] (см. § 4.1). Задачи программного управления УСМО рассматривались также Ю. И. Нейманом, М. А. Федоткиным и др. [143, 144, 188—190] в связи с задачами управления транспортными потоками (§ 4.4).

§ 3. СВЯЗЬ ТЕОРИИ УСМО С ЗАДАЧАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В предыдущих параграфах задачи УСМО рассматривались, как частный класс задач теории управляемых случайных или детерминированных процессов. Укажем на другой возможный подход к изучению УСМО, который иногда может оказаться полезным — это сведение задач УСМО к задачам математического программирования.

На связь теории управляемых марковских и полумарковских процессов с линейным программированием обращали внимание различные авторы.

Для УМЦ с конечными пространствами состояний и управлений, если в качестве пространства допустимых стратегий принять класс $\mathfrak{D}$ однородных марковских стратегий, эту связь установили Вольф и Данциг [63]. Челлинк и Эппен [231], а также Минэ и Табата [318] установили аналогичную связь, если в качестве пространства допустимых стратегий принимается множество всех рандомизированных марковских нестационарных стратегий.

Минэ и Табата [319] показали, что z-оптимальные и оптимальные в классе $\mathfrak{D}$ стратегии управления для УМП и некоторой специально построенной УМЦ совпадают. Затем, пользуясь соответствующими результатами для УМЦ [231, 318], они сводят задачу определения ε-оптимальной и оптимальной стратегии в классе $\mathfrak{D}$ к аналогичной задаче линейного программирования.

Возможности применения линейного и дробно-линейного программирования для определения оптимальных марковских стратегий управления для УПМП исследовали Ховард и Фокс [276—279, 258—261].

Минэ и Табата [318] показали, что соответствующая задача представима в виде разложимой задачи линейного программирования и исследовали свойства двойственной задачи. Связь прямой и двойственной задач с итерационной процедурой Ховарда исследовал также Ведекинд [367].

Ранее уже отмечалось, что для определения оптимальной стратегии управления системой на конечном интервале времени можно пользоваться методами динамического программирования.

И. В. Гирсанов [76] рассматривал игровые постановки задач для УМП диффузионного типа. Подобный подход при управлении системами массового обслуживания использовал Г. П. Климов [103].

В действительности имеет место довольно глубокая связь теории управляемых систем массового обслуживания с задачами математического программирования.

3. 1. Общая постановка задачи определения оптимальноо стратегии управления УСМО как задачи математическогпрограммирования. В § 1 указывалось, что качество управйления УСМО характеризуется некоторым функционалом над произведением пространств траекторий и стратегий процесса, описывающего работу УСМО. При этом усредненное значение потерь за конечное время T (целевой функционал) R^T может быть выражено через некоторые характеристики поведения системы на участке $[0, T]$, например, вероятности состояний системы $\pi^\delta(x, t)$ в момент времени t $(0 \leqslant t < T)$, функции распределения длительностей ожидания $F^\delta(v, t)$ и т. п.

$$R^T(\delta) = R^T[\pi^\delta(x, t),\ F^\delta(v, t), \ldots],$$

зависящие в свою очередь от выбранной стратегии управления $\delta \in \Delta$.

При исследовании системы на бесконечном интервале времени и использовании однородной стратегии средний риск $r(\delta)$ выражается через соответствующие стационарные характеристики $\pi^\delta(x)$, $F^\delta(v)$, образующие при различных стратегиях управления некоторое множество значений характеристик, которое обозначим через $A = \{\pi^\delta,\ F^\delta,\ \delta \in \Delta\}$,

$$r(\delta) = r[\pi^\delta, F^\delta] = r(\pi, F).$$

Таким образом, задачу оптимизации УСМО можно сформулировать в виде общей задачи математического программирования

$$r(\pi, F) \Rightarrow \min \tag{30}$$

при условии, что

$$\{\pi, F\} \in A. \tag{31}$$

В случае, когда процесс $\xi(t)$, описывающий функционирование системы, задается аналитически, например, является марковским процессом, величины $\pi^\delta(x)$, $F^\delta(v)$ могут быть решениями алгебраических, дифференциальных, интегро-дифференциальных, функциональных уравнений, или уравнений смешанного типа, причем класс допустимых стратегий выделяет семейство соответствующих уравнений, а стало быть, и их решений. В более сложных случаях прибегают к алгоритмическому описанию функционирования системы, и величины $\pi^\delta(x)$, $F^\delta(v)$ в выражении (30) могут быть вычислены, например, методом статистических испытаний [52].

Однако при таком подходе нужно учитывать, что решением задачи математического программирования является минимальное значение целевого функционала $r(\pi, F)$ и оптимальные значения характеристик системы, а для определения оптимальной стратегии управления необходимо установить взаимно однозначное соответствие между стратегиями и характеристиками. В некоторых случаях такое соответствие удается довольно просто установить [63], иногда оно устанавливается косвенным путем [106, 152, 170, 122, 201].

3.2. Применение методов линейного программирования. В случаях, когда работа системы описывается УМЦ, УМП или УПМП и исследование ограничивается марковскими стратегиями, задача (30)-(31) сводится к задаче линейного программирования.

Для УМЦ с аддитивным функционалом потерь вида (3) средний риск $r(\delta)$ при любой стратегии δ можно представить в виде

$$r(\delta) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}M^\delta\sum_{t=0}^{T-1} l_{x(t)\,x(t+1)}(u(t)) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{x,y\in X}\pi^\delta(x,t)\,p_{xy}(u)\,l_{xy}(u) =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{x\in X} l_x(u(t))\,\pi^\delta(x, t),$$

где $l_x(u) = \sum_{y\in X} p_{xy}(u)\,l_{xy}(u)$ — средние потери за один переход при выходе из состояния x и выборе управления $u = u(t)$, $u(t) = u[t, x^t]$ — управление в момент времени t, отвечающее стратегии $\delta = \{u(t)\}$, $\pi^\delta(x, t)$ — вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии x, если используется стратегия $\delta=\{u(t)\}$. Так как оптимальная стратегия, согласно разделу 2. 1., принадлежит классу однородных марковских стратегий $\mathfrak{D}$, т. е. $u^*[t, \mathrm{x}^t]= =u^*(x(t))$, то, ограничиваясь этим классом, получим

$$r(\mathfrak{d})=\sum_{x\in X} l_x(u(x))\,\pi^{\mathfrak{d}}(x), \tag{32}$$

где $\pi^{\mathfrak{d}}(x)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum\limits_{t=0}^{T-1}\pi^{\mathfrak{d}}(x, t)$, $(x\in X)$ — стационарные вероятности процесса при стратегии $\mathfrak{d}=\{u(x),\ x\in X\}$, которые для однородных марковских стратегий удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{x\in X}\pi^{\mathfrak{d}}(x)\,p_{xy}(u(x))=\pi^{\mathfrak{d}}(y)\\ &\sum_{x\in X}\pi^{\mathfrak{d}}(x)=1,\ 0\leqslant\pi^{\mathfrak{d}}(x)\leqslant 1\end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Таким образом, целевой функционал (30) при любой однородной марковской стратегии $\mathfrak{d}$ принимает вид линейной относительно вероятностей состояний $\pi^{\mathfrak{d}}(x)$ функции (32), а сами стационарные вероятности $\pi^{\mathfrak{d}}(x)$ удовлетворяют системе линейных уравнений (33). Форма (32) и система уравнений (33) выписаны для фиксированной однородной марковской стратегии $\mathfrak{d}=\{u(x),\ x\in X\}$. Дополняя форму (32) и систему уравнений (33), рассмотрим задачу линейного программирования.

Минимизировать линейную форму

$$\sum_{x\in X}\sum_{u\in U_x} l_x(u)\,\zeta_{x,u} \tag{34}$$

при заданных ограничениях

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{x\in X}\sum_{u\in U_x}(\delta_{xy}-p_{xy}(u))\zeta_{x,u}=0\quad (y\in X)\\ &\sum_{x\in X}\sum_{u\in U_x}\zeta_{x,u}=1,\ 0\leqslant\zeta_{x,u}\leqslant 1\end{aligned}\right\}. \tag{35}$$

В работе Вольфа и Данцига [63] показано, что решение задачи (34)-(35) обладает тем свойством, что для всякого $x\in X$ значение переменной $\zeta_{x,u}$, положительно не более, чем для одного значения u, и это решение определяет оптимальную однородную марковскую стратегию следующим образом.

Пусть $\zeta^*_{x,u}$ — решение задачи (34)-(35). Положим $u^*(x)=u$, для которого $\zeta^*_{x,u}>0$ и $\mathfrak{d}^*=\{u^*(x),\ x\in X\}$.

Стратегия $\mathfrak{d}^*=\{u^*(x),\ x\in X\}$ является оптимальной однородной марковской стратегией.

Подобным же образом задача определения оптимальной стратегии управления системой, описываемой УМП, может быть сведена к задаче линейного программирования (34)-(35), где коэффициенты линейной формы (34) заменяются на

$$l_x(u)=l_{xx}(u)+\sum_{y\in X,\ y\neq x} a_{xy}(u)\,l_{xy}(u),$$

а коэффициенты $\delta_{xy}-p_{xy}(u)$ системы уравнений (35) на $a_{xy}(u)$. Здесь $a_{xy}(u)\geqslant 0$, $a_{xx}(u)=-\sum\limits_{y\in X(y\neq x)} a_{xy}(u)$, $l_{xx}(u)$, $l_{xy}(u)$ — исходные параметры, определяющие УМП.

Аналогичный результат можно получить, если не ограничиваться заранее классом стационарных нерандомизированных стратегий, а предполагать, что стратегия определяется совместным распределением вероятностей $\pi(t,\ x,\ u)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии x и будет принято управление u, а в качестве критерия оптимизации использовать z-риск. Потери в момент t характеризуются при этом величиной

$$l(t)=\sum_{x\in X}\ \sum_{u\in U_x} l_{x(t)}(u(t))\,\pi(t,\ x(t),\ u(t)),$$

а z-риск для стратегии $\mathfrak{d}(z)$ запишется в виде

$$\mathcal{R}(z,\ \mathfrak{d})=\sum_{t=0}^{\infty} z^t l(t)=\sum_{x\in X}\ \sum_{u\in U_x} l_x(u)\,\zeta_{x,u},$$

где

$$\zeta_{x,u}=\sum_{t=0}^{\infty} z^t\pi(t,\ x,\ u).$$

Соотношения

$$\sum_{u\in U_y}\pi(t,\ y,\ u)=\begin{cases}\pi(0,\ y)=b_y \text{ при } t=0,\\ \sum\limits_{x\in X}\ \sum\limits_{u\in U_x}\pi(t-1,\ x,\ u)\,p_{xy}(u) \text{ при } t>0,\end{cases}$$

связывающие вероятности $\pi(t,\ x,\ u)$ при применении z-преобразования примут вид:

$$\sum_{x\in X}\ \sum_{u\in U_x}(\delta_{xy}-zp_{xy}(u))\,\zeta_{x,u}=b_y\ (y\in X).$$

Таким образом, снова приходим к задаче линейного программирования:

$$\sum_{x\in X}\sum_{u\in U_x} l_x(u)\zeta_{x,u}\Rightarrow\min \tag{36}$$

при ограничениях

$$\sum_{x\in X}\sum_{u\in U_x}(\delta_{xy}-zp_{xy}(u))\zeta_{x,u}=b_y. \tag{37}$$

Подобный подход развивается в работах Челлинка и Эппена, Минэ и Табата [231, 318, 319]. В работе [318] задача определения оптимальной стратегии управления УМЦ сводится к задаче линейного программирования вида (36)-(37). Аналогичные результаты для УМП содержатся в работе [319].

Б. Г. Питтель [151] исследовал вопрос об определении оптимальной стратегии методами линейного программирования в случае, когда процесс может обладать несколькими эргодическими классами.

В работе [231] показано, что при $b_y>0$ существует взаимно однозначное соответствие между однородными стратегиями и допустимыми планами задачи (36)-(37), а также существование оптимального плана задачи (36)-(37) и единственность решения двойственной задачи.

Для УСМО, описываемых УПМП, очевидно, можно получить аналогичные результаты, если ограничиться определением оптимальных стратегий в классе $\mathfrak{D}$ однородных марковских стратегий.

3.3. Соотношения двойственности. Связь с алгоритмом Ховарда. Итак, во всех рассмотренных в предыдущем разделе случаях задача определения оптимальной стратегии управления УСМО, описываемой УМЦ, УМП и УПМП, сводится к задаче линейного программирования вида

$$\sum_{x\in X}\sum_{u\in U_x} L_{x,u}\zeta_{x,u}\Rightarrow\min$$

при ограничениях

$$0\leqslant\zeta_{xu}\leqslant 1,\quad \sum_{x\in X}\sum_{u\in U_x}\zeta_{x,u}=1,$$

$$\sum_{x\in X}\sum_{u\in U_x} P_{xy}(u)\zeta_{x,u}=b_y\quad (y\in X)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{L}'\zeta\Rightarrow\min, \tag{38}$$

$$\mathbf{P}\zeta = \mathbf{b}. \tag{39}$$

Задача (34)-(35) получается отсюда при

$$L_{x,u} = l_x(u), \quad P_{xy}(u) = \delta_{xy} - p_{xy}(u), \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_0,$$

задача (36)-(37) — при

$$L_{x,u} = l_x(u), \quad P_{xy}(u) = \delta_{xy} = z p_{xy}(u), \ \mathbf{b} = \pi(0).$$

Для наглядности представим задачу (38), (39) в виде таблицы (см. табл. 2).

Известно, что в задачах линейного программирования большую роль играют соотношения двойственности. Рассмотрим двойственную к (38)-(39) задачу

$$\mathbf{b}'\eta \Rightarrow \max, \tag{40}$$

$$\mathbf{P}'\eta \leqslant \mathbf{L}. \tag{41}$$

Разбивая ограничения в этой задаче на совокупность ограничений

$$\sum_{y \in X} P_{xy}(u)\eta_y \leqslant L_{xu}, \quad (u \in U_x, \ x \in X),$$

рассмотрим, наряду с задачей (40)-(41), совокупность задач

$$\mathbf{b}'\eta \Rightarrow \max,$$

$$\mathbf{P}'_x\eta \leqslant \mathbf{L}_x \quad (x \in X)$$

и их прямую сумму [281, 318, 323, 324]

$$\oplus\mathbf{b}' \cdot \oplus\eta \Rightarrow \max, \tag{42}$$

$$\oplus P'_x \cdot \oplus\eta \leqslant \oplus\mathbf{L}_x. \tag{43}$$

Довольно просто показать, что допустимые и оптимальные планы задач (40)-(41) и (42)-(43) совпадают [318].

Задача, двойственная к (34)-(35), примет вид:

$$\eta_0 \Rightarrow \max, \tag{44}$$

$$\mathbf{P}'_x\eta \leqslant \mathbf{L}_x \ (x \in X). \tag{45}$$

Принимая во внимание результат Вольфа и Данцига (см. стр. 79) и соотношение двойственности в задачах линейного программирования, найдем, что для оптимального плана в каждой группе неравенств (45) в точности одно обращается в равенство. Отсюда видно, что решение задачи (44)-(45) следует искать среди планов, содержащих по одному вектору из каждой группы векторов, соответствующих неравенствам (45). Перебор именно таких планов осуществляется с помощью алгоритма Ховарда. Таким образом (см. Ведекинд [367]) использование симплекс-метода для решения задачи (44)-(45) с учетом сделанных замечаний эквивалентно применению алгоритма Ховарда.

Таблица 2

	x	1	2		n	
	u	$1, 2, \ldots, k_1$	$1, 2, \ldots, k_2$		$1, 2, \ldots, k_n$	
	ζ	$\zeta_{11}\zeta_{12} \quad \zeta_{1k_1}$	$\zeta_{21}\zeta_{22} \ldots \zeta_{2k_2}$		$\zeta_{n1}\zeta_{n2} \quad \zeta_{nk_n}$	
η_0		$1\ 1 \ldots 1$	$1\ 1 \ldots 1$	$\ldots$	$1\ 1 \ldots 1$	$(1-z)^{-1}$
η_1		$P_{11}(1)\, P_{11}(2) \ldots \ldots P_{11}(k_1)$	$P_{21}(1)\, P_{21}(2) \ldots \ldots P_{21}(k_2)$	$\ldots$	$P_{n1}(1)\, P_{n1}(2) \ldots \ldots P_{nn}(k_n)$	b_1
η_2						b_2
$\cdot$						
$\cdot$						
$\cdot$						
η_n		$P_{1n}(1)\, P_{1n}(2) \ldots \ldots P_{1n}(k_1)$	$P_{2n}(1)\, P_{2n}(2) \ldots \ldots P_{2n}(k_2)$	$\ldots$	$P_{nn}(1)\, P_{nn}(2) \ldots \ldots P_{nn}(k_n)$	b_n
		$L_{11}L_{12} \ldots L_{1k_1}$	$L_{21}L_{22} \ldots L_{2k_2}$	$\ldots$	$L_{n1}L_{n2} \ldots L_{nk_n}$	

В последнее время методы линейного программирования завоевывают все большую популярность при решении задач управления, так как они позволяют не только численно определять оптимальные стратегии [122, 134—137], но и получать в некоторых случаях необходимые и достаточные условия оптимальности [106, 122, 152, 170, 201].

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ УСМО

В приведенном ниже обзоре работ, посвященных применению интерационной процедуры Ховарда, принципа максимума, динамического программирования для фактического определения оптимальных стратегий управления УСМО, выделены несколько классов задач, которые, однако, не исчерпывают всех возможных применений.

4.1. Задачи оперативного управления. Широкой областью применения ТМО является анализ производственных процессов. Возникающие при этом задачи оперативного управления могут быть решены в некоторых случаях с помощью методов теории УСМО.

В работах В. В. Рыкова [164, 165, 167] в качестве модели нагревательного отделения металлургического комбината рассматривалась система массового обслуживания, состоящая из n одинаковых приборов и бункера неограниченной емкости. В систему поступает простейший (с параметром α) поток требований, распределение времени обслуживания — показательное (с параметром β). Требования, застающие все приборы занятыми, теряются (можно считать, что они направляются в бункер, сразу изменяя при этом характеристики, как указано ниже). Система, однако, работает с недогрузкой, т. е. потери происходят с малой вероятностью; наборот, приборы простаивают. Для увеличения производительности системы имеется возможность направлять на обслуживание требования из бункера, обслуживание которых длится случайное время, распределенной по показательному закону с параметром γ ($\gamma<\beta$). Задача состоит в том, чтобы так организовать работу системы, так управлять ею, чтобы производительность была максимальной.

Обозначим через (i, j) состояние системы, при котором i приборов заняты обслуживанием требований, поступивших из потока, и j приборов заняты обслуживанием требований, поступивших из бункера. Тогда пространство состояний системы состоит из конечного числа $N=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ точек (i, j) таких, что $0\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant j\leqslant n$, $0\leqslant i+j\leqslant n$.

Поставим в соответствие каждому состоянию системы (i, j) по некоторому правилу число $x\in X=\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Работу системы можно описать тогда случайным процессом $\xi(t)$ с конечным числом N значений $x\in X$: $\xi(t)=$ $=x=x(i, j)$, если в момент времени t система находится в состоянии (i, j).

Возможность управления системой состоит в том, что в любой момент времени можно принять одно из двух решений, не направлять на обслуживание требование из бункера ($u=0$) или послать требование из бункера на обслуживание ($u=1$), т. е. пространство допустимых решений состоит из двух точек $U=\{0, 1\}$.

Таким образом, получаем управляемый процесс, который в силу сделанных предположений о входящем потоке и времени обслуживания требований первого и второго типа будет марковским и однородным.

Действительно, обозначая $x=x(i, j)$, $y=y(k, l)$ независимо от траектории процесса до момента t и принимаемых решений

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\mathbf{R}\{\xi(t+h)=y/\xi(t)=x,\ u(t)=u\}=a_{xy}(u),$$

где

$$a_{xy}(u)=\begin{cases} \alpha \text{ при } u=0 \text{ и } k=i+1,\ l=j, \\ i\beta \text{ при } u=0 \text{ и } k=i-1,\ l=j, \\ j\gamma \text{ при } u=0 \text{ и } k=i,\ l=j-1, \\ 0 \text{ при } u=0 \text{ в остальных случаях}, \\ \infty \text{ при } u=1 \text{ и } k=i,\ l=j+1, \\ 0 \text{ при } u=1 \text{ в остальных случаях}. \end{cases}$$

Чтобы сравнивать различные управления, нужно ввести еще функционал качества.

Критерием качества работы системы является ее производительность. Естественным функционалом, соответствующим этому критерию, является число обслуженных на заданном интервале времени требований.

Для этого функционала $l_{xx}(u)=0$,

$$l_{xy}(u)=\begin{cases} 1, \text{ если } k=i-1 \text{ или } l=j-1, \\ 0 \text{ в остальных случаях}. \end{cases}$$

В такой постановке, однако, процесс $\xi(t)$ имеет мгновенные состояния, что не удобно для расчетов. В работе [164] рассматриваемый процесс сводится к цепи $\xi_n=\xi(t_n)$, где t_n — моменты принятия управлений, соответствующие моментам освобождения приборов. Так как при переходе к цепи ξ_n моменты t_n являются моментами окончания обслуживания требований, то средний риск от выбора стратегии управления $\mathfrak{d}$, соответствующий принятому критерию примет вид

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{M}^{\mathfrak{d}}t_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{M}^{\mathfrak{d}}\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k).$$

Соответствующие принятому критерию средние потери за переход для цепи ξ_n имеют вид

$$l_x(u)=\mathrm{M}\left[(t_{k+1}-t_k)/\xi_k=x,\ u(x)=u\right].$$

В [165] приводятся формулы для вычисления вероятностей переходов $p_{xy}(u)$ и средних потерь за переход $l_x(u)$. Для управляемой марковской цепи, характеризующейся вероятностями переходов $p_{xy}(u)$ и средними потерями за переход $l_x(u)$ применяется итерационная процедура Ховарда. В [165, 167] приводятся результаты расчетов на ЭВМ.

Оказывается, что все множество состояний разбивается на два подмножества X_0 и X_1, в каждом из которых принимаются управления $u=0$ или $u=1$ соответственно.

В работе Юнга [375] рассматривается более узкий класс управлений, определяемый целочисленным параметром k следующим образом: требования 2-го типа направляются на обслуживание, если только число занятых приборов не превышает k. Благодаря этому, задача решается гораздо проще, так как легко находится зависимость различных характеристик СМО от параметра k. Последняя модель используется в качестве модели системы медицинского обслуживания.

Подобная же модель исследовалась Оттерманом [333, 334] при изучении обслуживания двух потоков сообщений.

В работе Т. М. Мищенко [133] в качестве модели организации процесса выплавки стали рассматривается задача минимизации вероятностей попадания УМЦ в заданное множество состояний.

Численные методы определения оптимальных стратегий для УСМО с конечным числом состояний, основанные на применении линейного программирования, использовались в работах В. В. Мовы и Л. А. Пономаренко [134—137] и др. [83, 183, 184].

Примером применения метода динамического программирования может служить работа Эммонса [255], в которой исследуется многолинейная система $M|M|s$ на конечном интервале времени. Изучается структура оптимальной стратегии, обсуждаются вычислительные аспекты ее определения.

Мэгэзин [302] методом динамического программирования исследовал задачу управления числом обслуживающих приборов при дискретном способе наблюдения за системой.

Аналогичную систему $M|M|s$ с ожиданием исследовали Айреланд и Томас [280] с целью минимизации потерь от ожидания путем распределения требований по очередям с помощью распределительного устройства на входе системы.

Примером применения теории УПМП могут служить работы М. Г. Теплицкого [178—180]. В них рассматривается система, которая состоит из бункера, содержащего бесконечное число требований, двух приборов 1-го типа, предназначенных для обслуживания требований, и одного прибора 2-го типа. После окончания обслуживания каждого требования прибор 1-го типа проверяется прибором 2-го типа, после чего он переходит к обслуживанию следующего требования, выбранного из бункера. Для проверки прибора 1-го типа имеется конечное число возможных режимов. Длительности обслуживания каждого требования, проверки прибора 1-го типа прибором 2-го типа и доход, связанный с обслуживанием одного требования, зависят от номера прибора 1-го типа и режимов его обслуживания. Задача состоит в определении правила, определяющего в каждый момент окончания обслуживания требования режимы и очередность проверки приборов 1-го типа, с целью максимизации производительности СМО при бесконечном времени ее эксплуатации. Эта задача ставится в терминах управляемых полумарковских процессов, что позволяет использовать для ее решения алгоритм Ховарда.

Примером программного управления системой массового обслуживания и применения принципа максимума может служить рассмотренная Г. П. Климовым [103] СМО, состоящая из m приборов и $n-m$ мест для ожидания, так что общее число требований в системе не превосходит n, в которую поступает простейший нестационарный поток требований с интенсивностью $\alpha(t)$, обслуживание происходит в порядке очереди. Длительность обслуживания требования каждым прибором подчинена показательному распределению, параметр которого $\beta(t)$ зависит от времени.

Предполагается, что функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют следующим ограничениям:

1) $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ измеримы на $[0, T]$,

2) $\underline{a} \leqslant \alpha(t) \leqslant \overline{a}$; $\underline{b} \leqslant \beta(t) \leqslant \overline{b}$,

3) $\underline{a} \leqslant \underline{A} \leqslant \frac{1}{T}\int\limits_0^T \alpha(t)\,dt \leqslant \overline{A} \leqslant \overline{a}$, $\underline{b} \leqslant \underline{B} \leqslant \frac{1}{T}\int\limits_0^T \beta(t)\,dt \leqslant \overline{B} \leqslant \overline{b}$.

Качество работы системы характеризуется некоторым функционалом $R^T(\alpha, \beta) = R^T[\alpha(t), \beta(t)]$, например,

$$R^T(\alpha, \beta) = R_i^T(\alpha, \beta) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T h_i(t)\,dt \quad (i = 1, 2),$$

где $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — соответственно интенсивности выходящего потока требований и потока потерь.

В [103] рассматривается несколько задач оптимизации (минимизации или максимизации) функционалов $R_1^T(\alpha, \beta)$ или $R_2^T(\alpha, \beta)$ путем:

1) выбора функции $\alpha(t)$ при известной $\beta(t)$;

2) выбора функции $\beta(t)$ при известной $\alpha(t)$;

3) выбора обеих функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ (игровая ситуация в случаях, когда интересы игроков совпадают или антагонистичны);

4) выбора одной из функций $\alpha(t)$ или $\beta(t)$, если заранее известна связь между ними: $\alpha(t) = \sigma\beta(t)$ (σ — постоянная).

Пусть $\xi(t)$ означает число требований в системе в момент t. Тогда $\xi(t)$ — марковский процесс и если

$$\pi_i(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = i\} \quad (i = \overline{0, n}),$$

то для $\pi_i(t)$ справедлива система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\pi_0'(t) = -\alpha(t)\pi_0(t) + \beta(t)\pi_1(t) \\ &\pi_i'(t) = \alpha(t)\pi_{i-1}(t) - (\alpha(t) + \min(i, m)\beta(t))\pi_i(t) + \\ &\quad + \min(i+1, m)\beta(t)\pi_{i+1}(t) \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1) \\ &\pi_n'(t) = \alpha(t)\pi_{n-1}(t) - m\beta(t)\pi_n(t) \end{aligned}\right\}. \tag{46}$$

Исходя из описания проведения СМО системой дифференциальных уравнений (46), автор ставит эту задачу как задачу теории оптимальных процессов и применяет для ее решения принцип максимума [153]. Показано, что во всех случаях экстремальные функции $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$ принимают на отрезке $[0, T]$ только свои крайние значения — $\underline{a}$, $\overline{a}$ или $\underline{b}$, $\overline{b}$ — соответственно. В некоторых случаях приводятся теоремы, позволяющие определять точки переключения.

В близкой постановке задача определения интенсивности потока с целью максимизации среднего числа обслуженных требований на конечном интервале времени рассматривалась П. И. Велевой [60].

4.2. Задачи диспетчерского контроля. При автоматизации управления производственными процессами обычно несколько контролируемых объектов подключаются к одному управляющему органу, скажем, ЭВМ. При этом возможны ситуации, когда нескольким управляемым объектам одновременно потребуется внимание управляющего органа для выработки управляющих воздействий, причем задержка в выработке соответствующих управляющих воздействий для различных контролируемых объектов оценивается по-разному (например, имеет различные последствия для производства). Возникает задача определения оптимального порядка обслуживания требований от контролируемых объектов с целью минимизации среднего риска, связанного с задержками в выдаче управляющих воздействий. Такого рода задачи рассматривались в [1, 2, 155, 157].

Рассмотрим систему, состоящую из одного обслуживающего прибора и конечного числа n источников требований разного типа, разбитых на m однотипных групп по n_i источников в каждой, так что $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$. Пусть $A_i(t)$ — функция распределения времени между вызовами объекта i-го типа $(i = \overline{1, m})$; $B_i(t)$ — функция распределения длительности обслуживания требования от источника i-го типа; c_i — штраф за единицу времени ожидания требования i-го типа. Управление состоит в назначении типа обслуживаемого в данный момент требования. Таким образом, пространство управлений U состоит из $m+1$ точек; $u=0$ означает, что прибор свободен от обслуживания $u=k$ — обслуживается требование k-го типа.

Предположим, что время между вызовами объекта i-го типа и длительность обслуживания соответствующего требования имеют показательные распределения

$$A_i(t)=1-e^{-\alpha_i t}, \quad B_i(t)=1-e^{-\beta_i t}.$$

Если на класс допустимых стратегий Δ не накладывается никаких ограничений, кроме измеримости (система с прерыванием обслуживания), то обозначая вектором $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ состояние системы, при котором x_i источников i-ой группы ожидают обслуживания или обслуживаются, получим, что поведение системы описывается управляемым марковским скачкообразным процессом с интенсивностями переходов

$$a_{\mathbf{xy}}(u)=\left\{\begin{array}{ll}\alpha_i(n_i-x_i) & \text{при } \mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i \\ -(\alpha_{\mathbf{x}}+\beta_u) & \text{при } \mathbf{y}=\mathbf{x} \\ \beta_u & \text{при } \mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{e}_u \\ 0 \text{ в остальных случаях,} & \end{array}\right\} \tag{47}$$

где $\mathbf{e}_i=(0,\ldots,0,\ 1,\ 0,\ldots,0)$ — единичный вектор i-го направления, $\alpha_{\mathbf{x}}=\sum_{i=1}^{m}(n_i-x_i)\,\alpha_i$.

Соответствующий поставленному критерию качества управления функционал потерь для рассматриваемого управляемого марковского процесса характеризуется следующими величинами

$$l_{\mathbf{xx}}(u)=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i, \quad l_{\mathbf{xy}}(u)=0. \tag{48}$$

При этом средние потери в единицу времени в стационарном режиме имеют вид

$$r(\delta)=\sum_{x\in X}\pi^{\delta}(\mathbf{x})\sum_{i=1}^{m}c_i x_i=\sum_{i=1}^{m}c_i \mathrm{M}^{\delta}\xi_i,$$

где $\pi^{\delta}(\mathbf{x})$ — стационарная вероятность состояния $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ при стратегии δ, а $\mathrm{M}^{\delta}\xi_i$ — математические ожидания числа ожидающих объектов i-го типа при стратегии δ.

Пусть теперь на класс допустимых стратегий накладывается дополнительное ограничение, состоящее в том, что прерывания в обслуживании не допускаются (система без прерывания обслуживания). В этом случае для описания работы системы марковским процессом приходится расширять пространство состояний, а именно: необходимо в каждый момент времени указывать тип обслуживаемого требования; при этом управление $u(t)$ в каждый момент времени t указывает тип требования, которое будет принято к обслуживанию, если в данный момент времени освободится прибор.

Значение управления может изменяться между моментами окончания обслуживания (например, при поступлении нового требования), однако эти изменения не реализуются.

Итак, будем обозначать состояния системы парой $(\mu, \mathbf{x})$, где компоненты вектора $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_m)$, как и ранее, обозначают количества источников, требования от которых обслуживаются или ожидают обслуживания, а μ указывает тип обслуживаемого требования. Тогда работа рассматриваемой системы описывается управляемым марковским процессом с интенсивностями переходов

$$a_{(\mu\mathbf{x}),(\nu\mathbf{y})}(u)=\begin{cases}\alpha_i(n_i-x_i) & \text{при } \nu=\mu,\ \mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{e}_i\\ -(\alpha_{\mathbf{x}}+\beta_\mu) & \text{при } \nu=\mu,\ \mathbf{y}=\mathbf{x}\\ \beta_\mu & \text{при } \nu=u,\ \mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{e}_\mu\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (49)$$

Аналогично предыдущему, функционал потерь характеризуется величинами

$$l_{(\mu\mathbf{x}),(\nu\mathbf{y})}(u)=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i, \quad l_{(\mu\mathbf{x}),(\nu\mathbf{y})}(u)=0. \qquad (50)$$

Однако для систем без прерывания обслуживания можно решить задачу определения оптимального порядка выполнения операций и при произвольных распределениях $B_i(t)$ длительностей обслуживания требований от различных источников. Эта задача сводится к исследованию некоторого управляемого полумарковского процесса. Формулировка задачи в виде УПМП содержится в работе Н. А. Правоторовой [155], аналогичная постановка рассматривалась Р. М. Рейдманом [157]. Вероятности и ФР длительностей переходов $p_{xy}(u)$, $F_{xy}(t;\ u)$ и потери за переход $l_x(u)$ для соответствующего УПМП, необходимые для применения алгоритма Ховарда, вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} p_{\mathbf{xy}}(u)&=\prod_{i=1}^{m}\int_0^\infty C_{n_i-x_i}^{y_i-x_i+\delta_{iu}}\left(1-e^{-\alpha_i t}\right)^{y_i-x_i+\delta_{iu}}\times\\ &\times e^{-(n_i-y_i-\delta_{iu})\alpha_i t}\,dB_u(t)\\ p_{0\mathbf{e}_i}&=\frac{\alpha_i}{\sum\alpha_i}\end{aligned}\right\}, \qquad (51)$$

$$F_{\mathbf{xy}}(t;\ u)=B_u(t)\ (x_u\neq 0), \qquad F_{0\mathbf{e}_i}(t)=1-e^{-\alpha_i t}, \qquad (52)$$

$$\left.\begin{aligned} l_{\mathbf{x}}(u)&=\sum_{i=1}^{m}(n_i-x_i)\,c_i\left[b_u^{-1}-\alpha_i^{-1}\left(1-\tilde{b}_u(\alpha_i)\right)\right]\ (\mathbf{x}\neq 0)\\ l_0&=0,\end{aligned}\right\}, \qquad (53)$$

$$\tilde{b}_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}dB_i(t), \quad b_i=-b_i'(0)=\int_0^\infty t dB_i(t).$$

В ВЦ ЦНИИКА проводились исследования УМП, характеризующегося интенсивностями переходов (47), (49) и функционалом потерь, с параметрами вида (48), (50) и УПМП, определяемого параметрами (51)—(53) при $m=3$, $n_i=1$, $B_i(t)=\theta(t-b_i)$ $(i=\overline{1, m})$.

В результате этого исследования показано, что при малых нагрузках, как и следовало ожидать, оптимальный порядок определяется соответствующим правилом абсолютных и относительных приоритетов (см. далее гл. II, §§ 1.1, 1.2). Однако с ростом нагрузки это правило перестает работать и, более того, оптимальная стратегия существенно начинает зависеть от состояний системы, т. е. она не принадлежит классу стратегий, задаваемых последовательностью приоритетов. При большой нагрузке, когда все источники практически находятся в состоянии ожидания, порядок обслуживания практически безразличен.

В рамках приоритетных дисциплин обслуживания замкнутые системы исследовались различными авторами [57, 58, 86, 283, 284] (см. § 2.2 гл. II). Применительно к задачам диспетчерского контроля они рассматриваются в § 5.1 гл. II.

4.3. Оптимизация скорости обслуживания, стратегии включения приборов и приложения к задачам теории надежности.

В задачах обслуживания, когда, кроме штрафа за ожидание требований, учитываются затраты на эксплуатацию приборов в различных режимах, возникают задачи определения оптимального режима работы прибора (скорости обслуживания), а также задачи организации оптимального порядка включения приборов в работу.

В общей постановке задача о выборе параметров обслуживания в системе, описываемой процессами гибели и размножения, решена А. Д. Соловьевым [172] (см. § 2.2). Некоторые постановки задач управления неоднородными процессами гибели и размножения содержатся в работе [9]. В различных постановках задачи определения оптимального режима обслуживания в СМО рассматривались разными авторами.

А. Х. Абрамов и А. Д. Цвиркун [3] исследовали однолинейную систему с неограниченной очередью, в которую поступает простейший поток требований, обслуживаемых в порядке очереди. Всякое требование может быть обслужено за показательно распределенное время с интенсивностью либо β_1, либо β_2. Ставится задача отыскания управления, минимизирующего средние потери за единицу времени в установившемся режиме в классе стратегий, определяемом целочисленным параметром k следующим образом: если число требований в СМО меньше k, то обслуживание вести с интенсивностью β_1, в противном случае — с интенсивностью β_2. Потери складываются из затрат на обслуживание, зависящих от интенсивности, с которой оно ведется, и потерь от простоев требований в очереди. Найдена явная зависимость функции потерь от k. Задача сведена к решению некоторого трансцендентного уравнения. Получены условия, при которых целесообразно вести обслуживание всегда с интенсивностью β_1 (или β_2).

Аналогичная задача выбора оптимального режима обслуживания, когда интенсивность обслуживания β может меняться непрерывно в заданных пределах $[0, \bar{\beta}]$, рассмотрена в работе Закса и Ядина [376].

Митчелл [322] рассмотрел задачу определения оптимальной стратегии обслуживания путем выбора скорости обслуживания в определенном интервале для выпуклой функции убытка. Аналогичные вопросы рассматриваются в [321] для кусочно-линейных марковских систем обслуживания.

В работе Судзуки и Эбэ [359] рассматривается система $M|G|1$ с двумя режимами обслуживания, для которых время обслуживания распределено соответственно с ФР $G_1(t)$ или $G_2(t)$. Определяется критическое значение длины очереди, при котором следует переходить с одного режима на другой.

Задачу выбора скорости обслуживания β_1, β_2 каждым из каналов в системе $GI|M|2$ с потерями рассмотрели Нишида, Тахара и Ханаи [327]. Показано, что при наилучшем выборе $\beta_1 \neq \beta_2$.

Общую модель управляемой адаптивной СМО и задачу оптимизации скорости обслуживания рассматривал Нельсон [325].

Задачи оптимизации стратегии включения приборов в различных предположениях рассматривались Л. Г. Афанасьевой [12], Бейкером [211], Бартошевичем и Рольским [214], Блекбурном [225], Коннором [234], Хейманом и Маршаллом [271, 273], Джейсуолом и Симха [283], Собелем [357], Ядиным и Наором [370], Сингхом [352].

Общая постановка близка к постановке задачи о выборе скорости обслуживания, однако специфика этих задач состоит в том, что скорость обслуживания не может выбираться произвольно.

В работах [211, 214, 271, 357, 370] рассматривается система $M|M(G)|1+1$ с одним основным и одним резервным прибором. В [211, 271, 370] оптимальная стратегия ищется в классе стратегий типа $(0, n_1)$, когда резервный прибор включается по достижении очередью уровня n_1 и отключается в момент опустошения системы. В [214, 357] устанавливается два таких уровня n_0, n_1, по достижении очередью уровня n_1 прибор включается, по достижении уровня $n_0 < n_1$ — отключается. В [225] рассматривается случай, когда оптимальная в классе (n_0, n_1) стратегия принадлежит на самом деле классу $(0, n_1)$-стратегий. Указывается на связь этих задач с задачами теории управления запасами.

Л. Г. Афанасьева [12] рассмотрела задачу о включении группы резервных приборов при постоянном времени обслуживания.

Хейман и Маршалл [273] исследовали эту задачу для рекуррентного потока в классе минимаксных стратегий. Блекбурн [225] исследовал более широкий класс стратегий и показал, что оптимальными являются управления типа (n_0, n_1). Коннор [234] рассмотрел задачу управления включением прибора на конечном интервале времени.

Джейсуол и Симха [283] решили задачу о включении резервного прибора для системы с конечным источником требований.

При обслуживании ненадежными приборами или в задачах контроля сложных технических систем возникают вопросы оптимизации порядка контроля и включения резервной аппаратуры при ограниченных средствах контроля, оптимизации порядка восстановления отказавшей аппаратуры, организации оптимального профилактического контроля и т. п.

Вопросам оптимального включения резервных элементов посвящена статья И. Б. Герцбаха [69], в работе [72] рассмотрена задача динамического резервирования, когда в процессе работы системы допускается перераспределение резерва. В. А. Добрыдень [87—89] для решения задач оптимизации структуры резервирования и контроля технических систем применил теорию УПМП. В работе Е. Ю. Барзиловича [21] рассматриваются вопросы контроля сложных технических систем при ограниченных средствах контроля.

Гросс [268] рассмотрел задачу поиска неисправности в системе из двух элементов при ограниченных поисковых ресурсах. Задачу контроля конечного числа каналов при ограниченных средствах контроля с целью выявления максимального числа неисправностей применительно к системам связи рассмотрели Кирби и Никольсон [289].

Различные математические модели оптимального резервирования, контроля и обслуживания технических систем описаны в монографии А. Л. Райкина [156].

В работах [14, 15, 109, 185—187, 339] рассматриваются задачи контроля случайного потока путем выбора моментов контроля с целью минимизации потерь, вызванных штрафом за обнаружение процесса в момент контроля в том или ином состоянии и стоимостью контроля.

Росс [339] рассмотрел задачу выбора момента τ освобождения системы от поступивших в нее за это время требований с целью минимизации среднего времени пребывания требований в системе на конечном интервале времени $[0, T]$ при пуассоновском входящем потоке.

В работах А. В. Тупчиенко [185—187] решаются задачи контроля пуассоновского и рекуррентного потоков при различных предположениях в виде функций штрафа. Аналогичную задачу управления процессом восстановления рассмотрел И. Н. Коваленко [109].

Г. А. Багдасарян и Е. С. Кочетков [14, 15] исследовали вопросы определения моментов включения прибора в связи с оптимизацией регистрации требований пуассоновского потока.

В работе Эл-Бардаи [254] рассматривается задача управления неизвестным параметром простейшего входящего потока на основе его статистической оценки по наблюдениям за числом требований в системе с целью ограничить вероятность превышения очередью заданного уровня малым числом ε. В работе Дженссона [285] изучается вопрос оптимального выбора интервала между поступлением требований в систему $D|M|1$ с целью минимизации линейного функционала потерь от ожидания требований и простоя обслуживающего прибора.

Отметим еще работы Г. П. Климова [102], Б. А. Рогозина [158] и др. [343, 344], в которых изучаются экстремальные свойства потоков и длительностей обслуживания в СМО.

Задача определения оптимального порядка обслуживания отказавших приборов рассматривалась А. Ф. Климовым и И. А. Ушаковым [101] применительно к системе, состоящей из двух ненадежных приборов и одного ремонтирующего устройства. Время между отказами приборов имеет показательное распределение с параметром α. Длительности восстановления приборов также имеют показательные распределения с параметрами β_i $(i=1, 2)$. В моменты, когда оба прибора оказываются в состоянии отказа, возникает вопрос, какой из приборов восстанавливать в первую очередь. Таким образом, пространство управлений U состоит из двух точек $U=\{1, 2\}$ и управление u в каждый момент времени t указывает, какой из приборов следует восстанавливать в данный момент времени. Ставится задача построения оптимальной стратегии управления с целью минимизации вероятности находиться в некотором множестве (отказовом множестве) состояний или минимизации среднего времени пребывания в этом множестве.

Рассматриваемая задача для соответствующих функционалов потерь решается в [101] простым перебором, т. е. для любой из двух возможных стратегий выписываются уравнения для вероятностей состояний соответствующего марковского процесса. Их решения находятся в явном виде и используются для выбора лучшей стратегии по заданному критерию.

Задачи оптимизации показателей надежности систем, описываемых УПМП, рассматривались Л. Н. Сучковым и Я. А. Матвиншиным [126, 176, 177].

Вопросы организации профилактического обслуживания и принудительной замены элементов в сложных технических системах хорошо описываются моделями управляемых случайных процессов. В различных предположениях их исследовали многие авторы: Дерман, Сакс, Клейн, Е. Ю. Барзилович, И. Б. Герцбах, В. В. Рыков, Б. Г. Питтель и др. [16—22, 27, 51, 70, 71, 74, 162, 166, 242, 250, 251, 290].

Количество работ, посвященных исследованию вопросов профилактического обслуживания систем, очень велико. Уже в обзоре [18—21], относящемся к 1968 г., насчитывается несколько сот наименований. Подробное освещение вопросов профилактического обслуживания с обширной библиографией на эту тему можно найти в обзорах [18—20, 22] и монографиях И. Б. Герцбаха [74] и Байхельта [216]. В последнее время появились новые работы, посвященные вопросам профилактического обслуживания, среди которых отметим работы Байхельта [217, 218], посвященные организации профилактического обслуживания на конечном интервале времени, работу Ю. Д. Буртина и Б. Г. Питтеля [51], в которой для анализа вопросов профилактического контроля используются модели УПМП.

4.4. Задачи управления транспортными потоками. Методы ТМО находят широкое применение при изучении транспортных потоков и решении задач, связанных с организацией движения [197]. Естественно, вопросы управления транспортными потоками, имеющие большое практическое значение, порождают широкий класс задач УСМО.

Систему управления транспортным потоком на перекрестке можно представить себе как СМО, состоящую из одного обслуживающего прибора (светофор), на который поступает несколько потоков требований. Обслуживание каждого требования занимает определенное время работы прибора. Задача состоит в распределении времени работы прибора между потоками таким образом, чтобы среднее время ожидания требований было минимальным.

В общем случае модель управления транспортными потоками может быть описана следующим образом [143, 144, 188—190]. На обслуживающий прибор, который может находиться в n состояниях $A_1, A_2, \ldots, A_n$, поступает m потоков требований $П_1, П_2, \ldots, П_m$. Процесс обслуживания определяется распределением вероятностей $P(A_i, \tau; k_1, \ldots k_m)$ того, что, находясь в состоянии A_i, прибор за время τ обслужит k_j требований j-го потока $(j=\overline{1, m})$. Система управляема. Управление в каждый момент состоит в выборе состояния прибора. Таким образом, пространство управлений U состоит из n точек. Стратегия определяется правилом назначения состояний прибора во времени. В работах Ю. И. Неймарка и М. А. Федоткина [143, 188, 189] рассматриваются задачи программного управления, когда пространство допустимых стратегий ограничивается классом стратегий Δ, при котором состояния прибора изменяются по периодическому закону $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \ldots, \tau_{i_p}$, не зависящему от состояний системы, где τ_{i_s} — время, в течение которого прибор находится в состоянии A_{i_s}. Величина $\tau = \sum_{s=1}^{l} \tau_{i_s}$ называется периодом (в течение одного периода некоторые состояния могут встречаться, вообще говоря, по нескольку раз). Систему, стратегия управления которой принадлежит классу Δ, назовем системой с фиксированным ритмом работы прибора.

Периодически повторяющаяся последовательность $\tau^*_{i_1}$, $\tau^*_{i_2}, \ldots, \tau^*_{i_p}$, обеспечивающая минимальное среднее время простоя машин произвольного потока, называется оптимальной. В работах [143, 188, 189] изучается задача управления транспортными потоками автоматом с фиксированным ритмом переключения при постоянной и показательно распределенной длительности обслуживания при пуассоновских (стационарных и не стационарных) потоках машин.

Рангараджаном и Оливером [336] задача определения оптимальной стратегии для систем с фиксированным ритмом работы автомата решается для случая регулярных входящих потоков.

Если через $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обозначить состояние системы, при котором на перекрестке находится x_i машин потока Π_i $(i = \overline{1, m})$, то уравнения, связывающие вероятности $p(t, A, \mathbf{x})$ состояний системы в два последующих момента изменения состояния автомата $t = 0$ и $t = 0 + \tau_i$, определяют некоторое точечное отображение в пространстве $\mathcal{P}$ всех бесконечномерных векторов $\mathbf{p} = \{p(A, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\}$ с неотрицательными элементами, равными в сумме единице. Устанавливаются условия существования единственной неподвижной точки $\mathbf{p}^* = \{p^*(A, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\}$ этого отображения, которая соответствует стационарному распределению числа машин на перекрестке в моменты изменения состояний автомата. С помощью этих распределений вычисляются средние значения времени пребывания машины произвольного потока на перекрестке. Для некоторых критериев с помощью ЭВМ численными методами находятся оптимальные параметры работы автомата с фиксированным ритмом работы.

Наряду с системами с фиксированным ритмом работы автомата, в работах Ю. И. Неймарка и М. А. Федоткина и др. [144, 190] рассматривались системы с обратной связью. Состояния автомата для таких систем могут изменяться через фиксированные промежутки времени τ и зависят как от предыдущего его состояния, так и от числа требований $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ каждого из потоков $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ в системе

$$A(t+\tau) = g(A(t),\ x_1,(t), \ldots,\ x_m(t)). \qquad (54)$$

Стратегию управления такой системой можно задать с помощью разбиения пространства состояний системы $X = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)\}$ на множества X_{ij} такие, что если момент возможного изменения состояния автомата застает его в состоянии A_i и систему в состоянии X_{ij}, то автомат переходит в состояние A_j. Потери, связанные с простоем машин за один такт работы автомата, если в начале такта система находилась в состоянии $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, составляют $l_{\mathbf{x}}(A)$. Аналогично случаю системы, управляемой автоматом с фиксированным ритмом работы, выписываются уравнения, связывающие вероятности состояний $p(t, A, \mathbf{x})$ в два последовательных момента возможного изменения состояния автомата $t = \theta$ и $t = \theta + \tau$, которые задают некоторое точечное отображение в пространстве $\mathcal{P}$. Неподвижная точка этого отображения $\mathbf{p}^* = \{p^*(A, \mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X\}$ соответствует стационарному распределению вероятностей. При этом риск, отнесенный к одному такту работы автомата в стационарном режиме, имеет вид

$$r = \Sigma l_{\mathbf{x}}(A) p^*(A, \mathbf{x}), \qquad (55)$$

где суммирование производится по всем допустимым значениям A, $\mathbf{x}$. Стратегия (54), для которой величина r достигает минимального значения, называется оптимальной.

В [144, 190] исследуется задача управления движением транспорта на перекрестке с двумя потоками Π_1, Π_2 с помощью автомата с обратной связью, имеющего три состояния A_1, A_2, A_3, при упрощенном законе управления (54), характеризующемся следующим разбиением пространства состояний на множества X_{ij}

$$X_{11} = \{\mathbf{x} = (x_1,\ x_2) : x_1 \geqslant a_1 x_2 - b_1\};\ X_{12} = \overline{X}_{11},$$

$$X_{21} = \{\mathbf{x} = (x_1,\ x_2) : x_1 \geqslant x_2\};\ X_{23} = \{\mathbf{x} = (x_1,\ x_2) : x_1 < x_2\},$$

$$X_{33} = \{\mathbf{x} = (x_1,\ x_2) : x_2 \geqslant a_2 x_1 - b_2\};\ X_{32} = \overline{X}_{33}.$$

В [144] приводится метод определения констант управления a_i, b_i $(i = 1, 2)$; в ряде случаев вычисляются эти константы, описаны свойства оптимальной стратегии и проводится сравнительный анализ систем, управляемых автоматом с фиксированным ритмом переключения и с обратной связью.

В [190] задача управления транспортными потоками на перекрестке с ограниченными очередями сводится к модели управляемого марковского процесса с несколькими эргодическими классами. Приводятся результаты численного решения задачи.

В работе С. И. Спиваковского [173] для определения оптимальной стратегии управления движением транспорта на перекрестке предлагается использовать метод динамического программирования [28]. Качество управления при этом характеризуется отношением

$$f_n(A, \mathrm{x}) = \frac{S_n(A, \mathrm{x})}{t_n(A, \mathrm{x})} = \frac{S_n(A, x_1, \ldots, x_m)}{t_n(A, x_1, \ldots, x_m)},$$

где $S_n(A, \mathrm{x}) = \sum_{t=1}^{n} l_{\mathrm{x}(t)}(A(t), A(t+\tau))$ — суммарные затраты при оптимальной стратегии и n-кратном принятии решения, $l_{\mathrm{x}(t)}(A(t), A(t+\tau))$ — штраф за работу в течение одного такта τ при переходе автомата из состояния в $A(t)$ в состояние $A(t+\tau)$ в момент, когда система находилась в состоянии $\mathrm{x}(t)$; $t_n(A, \mathrm{x})$ — полное время работы системы при n-кратном принятии решения.

Приводятся алгоритмы построения таблиц управления, которые предлагается использовать в конкретных случаях для построения оптимальных стратегий.

В работе И. Б. Герцбаха и А. Б. Фраймана [75] алгоритм Ховарда используется для определения оптимального правила предварительной продажи билетов в транспортных системах с учетом льгот и транзитных рейсов.

4.5. Математические модели систем с разделением времени. Все возрастающие потребности в вычислительной технике привели к созданию вычислительных систем с разделением времени (СРВ) [32, 123, 154, 202], которые позволяют эффективно использовать потенциальные возможности вычислительной техники при переработке информации и создают значительные удобства для пользователей машин. СРВ применяются для организации работы машины при необходимости использовать ее многими территориально разобщенными пользователями для работы с центральным вычислителем или для организации доступа многочисленных пользователей к хранящейся в запоминающих устройствах ЭВМ информации. При наличии многих пользователей некоторое устройство ЭВМ может потребоваться одновременно нескольким пользователям. Следовательно, нужно определить порядок использования устройств вычислительной машины. С другой стороны, некоторым пользователям для решения их задач может потребоваться очень большое время работы машины, что надолго задержит решение быстро решаемых задач. Поэтому время работы машины нужно распределить между пользователями таким образом, чтобы обеспечить наилучший режим ее работы. В этом и состоит сущность работы СРВ. Заметим, что при организации работы СРВ появляются «издержки», связанные со временем, необходимым на организацию самой СРВ (планирование прохождения программ, размещение их в памяти, обмен с внешней памятью, операции ввода и вывода и т. п.), вступающие в противоречие с интересами пользователей. Если учесть, что программы поступают от отдельных пользователей в случайные моменты времени и время их выполнения заранее неизвестно, т. е. также может считаться случайным, то мы имеем дело с УСМО, причем стратегия управления состоит в организации оптимального алгоритма вычислительного процесса, а цель — в минимизации издержек.

Математические модели задач организации работы СРВ [4, 5, 32, 202] близки к моделям задач управления транспортными потоками. Здесь роль автомата, регулирующего движение, выполняет программа-диспетчер, потоками требований являются задачи, поступающие от пользователей. Состояние автомата соответствует обращению центрального вычислителя (процессора) к различным пользователям. Задача состоит в распределении времени работы центрального вычислителя между пользователями таким образом, чтобы удовлетворить некоторому поставленному критерию.

Задачи оптимальной организации работы СРВ имеют большое практическое значение и в последнее время привлекали внимание многих исследователей. Здесь накопился значительный фактический материал, содержащий ряд специфических постановок задач, подходов к их решению и результатов. Одна модель такого типа рассмотрена Фольцем [366]. С помощью принципа максимума [153] автор решает задачу распределения времени ЦВМ между пользователями при ограничениях на интервал между переключениями.

Задачи организации работы ЭВМ в режиме разделения времени близки к моделям приоритетного обслуживания и более подробно рассматриваются в § 5.1 гл. II.

Обзор задач, моделей и методов изучения СРВ содержится в работах [4, 5, 32, 123, 154, 202].

Модели управляемых случайных процессов находят применение также при решении ряда других вопросов, связанных с организацией работы ВС. Так, в работе И. И. Бронштейна [41] рассматриваются вопросы организации оптимального обмена информации между оперативной и долговременной памятью ЭВМ, в работах И. Б. Герцбаха и др.

[61, 67] исследуются вопросы организации счета больших задач.

4.6. Вычислительные трудности и другие численные методы определения оптимальных стратегий. Как видно из сказанного, итерационная процедура Ховарда является довольно универсальным способом нахождения оптимальных или почти оптимальных стратегий в случаях, когда систему удается описать марковским или полумарковским процессом с конечным числом состояний. Эта процедура может быть использована также и в более общих ситуациях.

Вычислительные трудности, связанные с возможными мгновенными состояниями марковского процесса, могут быть преодолены переходом к управляемым марковским цепям [165, 167].

Отметим, что широкий класс УСМО составляют системы, в которых управление принимает лишь два значения $U=\{u_0, u_1,\}$, причем одно из них $u=u_0$ не изменяет нормального течения процесса. Именно такая система рассматривалась в [165]. В этом случае можно переходить к вложенной марковской цепи, соответствующей моментам принятия управления u_1.

Использование метода Ховарда для процессов с большим числом состояний (этим, как правило, и характеризуются практически интересные случаи) даже с помощью современных вычислительных средств весьма затруднительно, а зачастую и невозможно. В таких случаях может быть полезен рассмотренный в работе М. Г. Теплицкого [180] приближенный способ реализации метода Ховарда, основанный на группировке состояний (примеры успешного использования этого приема при реализации метода динамического программирования известны). Анализ и эксперименты, приведенные в [180], показывают, что этот способ является гораздо более доступным для практической реализации, чем известные точные методы, и достаточно эффективным для довольно широкого класса практически интересных процессов. Он был, например, с успехом использован в лаборатории по системам оперативного планирования и управления производством ЦНИИКА для решения одной задачи из области металлургического производства, поставленной в терминах УСМО в работе [179]. Соответствующий управляемый полумарковский процесс имел 249 состояний. Решение для него было найдено за 4 часа машинного времени ЭВМ «БЭСМ-4». Заметим, что решение этой задачи известными точными методами на ЭВМ этого класса практически невозможно.

Вопросы укрупнения состояний УМЦ применительно к задачам ТМО рассматриваются также в статье Е. Я. Рубиновича [163].

Далеко не всегда работу УСМО можно описать процессом, допускающим вложенную марковскую цепь с конечным или счетным пространством состояний и выписать соответствующие формулы для вероятностей переходов и потерь при различных управлениях.

С другой стороны, существует мощный метод анализа сложных СМО — метод Монте-Карло. Естественно попытаться использовать этот метод для численного определения оптимального управления СМО.

Так, в работе Н. П. Бусленко и Г. А. Соколова [52] специально рассматривается вопрос о решении задач математического программирования, в которых функция цели задана алгоритмически. Предложен метод, основанный только на возможности вычисления функционала в любой заданной точке, требующий минимального в некотором смысле числа вычислений функционала для достижения минимума. Недостатком этого подхода является сравнительно небольшая точность вычисления функционала с помощью статистической модели, что может привести в отдельных случаях к неверному определению точки минимума. Однако отклонение полученного решения от оптимального (по значению функционала) находится в пределах погрешности метода статистических испытаний.

В работе [2] этот метод используется для определения оптимального режима функционирования системы управления. Рассматривалась замкнутая система с конечным числом источников, при постоянной длительности обслуживания требований, которая может служить моделью диспетчерского пункта (см. 3.2), и определялась оптимальная стратегия управления такой системой с учетом возможных прерываний в обслуживании. Метод оптимизации функционала, задаваемого статистической моделью, используется также в работе [174].

Для управления работой сложных УСМО на бесконечном интервале времени часто применяют так называемый метод динамического планирования, который состоит в следующем. Задаются числа T_0, T_1, T_2 такие, что $T_0<T_1<T_2$. В каждом из интервалов времени $[nT_1, nT_1+T_0)$ (n=0, 1, 2, ...) строится, как правило, с помощью ЭВМ, оптимальное в принятом смысле управление объектом на время $[nT_1+T_0, nT_1+T_2)$ с учетом его состояния на момент nT_1 и используется в течение времени $[nT_1+T_0, (n+1)T_1+T_0)]$. Величину T_2 иногда называют горизонтом планирования.

Этот способ построения управления сложными объектами при разумно выбранных T_0, T_1, T_2 на практике оправдывает себя. Так, он был использован для управления весьма сложной многофазной УСМО, формализующей работу участка металлургического производства в работах [29, 53]. Эффективность этого подхода в этом случае была показана с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

Глава II

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ ПРИОРИТЕТОВ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Приоритетные системы массового обслуживания получили в последнее время широкое распространение. Опубликовано много работ, посвященных исследованию приоритетных систем и их применению при анализе работы вычислительных систем, систем связи и др. Вышли из печати первые монографии по приоритетным системам [78, 86], в которых содержится обширная библиография и обзор состояния этого направления исследований в ТМО в настоящее время. Однако в этих монографиях мало внимания уделено вопросам оптимизации приоритетов, а если эти вопросы и ставятся, то в отрыве от общей теории управляемых систем.

В настоящей главе вопросы оптимального назначения приоритетов и смежные вопросы рассматриваются в связи с общей проблемой оптимального управления системами массового обслуживания. Мы касаемся здесь только тех работ, которые связаны с оптимизацией приоритетов и их применениями, а также других специфических задач управления системами массового обслуживания, например, назначения приоритетов на занятие приборов, и не затрагиваем широкого круга работ, посвященных анализу различных классов приоритетных систем, отсылая читателя к обзору и библиографии, приведенным в монографиях [78, 86] и обзорной статье И. Н. Коваленко [108].

Можно выделить два широких класса систем с приоритетами: 1) системы, в которых приоритет устанавливается при выборе требований на обслуживание — именно эти системы получили в последнее время наиболее широкое распространение, и примыкающие к ним системы с фильтрацией потока на входе и т. п.; 2) системы, в которых приоритет устанавливается на занятие прибора и близкие к ним системы.

Для систем первого класса характерно поступление требований нескольких, скажем m, типов и наличие дополнительных ограничений, накладываемых на класс допустимых стратегий, вызванных спецификой задачи. Так, в системах с относительными приоритетами изменения управлений допускаются лишь в моменты окончания обслуживания. В системах с абсолютными приоритетами это ограничение состоит в том, что управление может изменяться лишь в моменты окончания обслуживания и поступления требований. В обоих случаях управление не зависит от конкретного состояния очередей, а лишь от наличия в ней требований того или иного типа.

Указанные ограничения упрощают в ряде случаев решение задач, но при этом остается нерешенным вопрос, насколько можно улучшить качество функционирования системы, переходя от систем с приоритетами к системам с более широким классом допустимых стратегий управления. Для решения подобного рода вопросов можно расширить понятие приоритетов, например, вводя понятие динамических приоритетов [170]. Оказывается, что в ряде случаев подобное расширение не приводит к улучшению качества функционирования системы [54, 106, 122, 152, 170], в других — за счет расширения пространства допустимых стратегий можно добиться улучшения качества работы системы.

§ 1. ПРИОРИТЕТНЫЕ СИСТЕМЫ С ОЖИДАНИЕМ

Обратимся к модели однолинейной системы с неограниченной очередью и несколькими простейшими входящими потоками требований, которая может быть получена из модели с несколькими группами конечного числа источников, рассмотренной в § 4.2 главы 1, предельным переходом при $n_i \to \infty$ $(i=\overline{1, m})$, так что $n_i \alpha_i \to a_i$.

Пусть заданы функции распределения $B_i(t)$ длительностей обслуживания τ_i требований из каждого потока $(i=\overline{1, m})$ и штрафы c_i за единицу времени пребывания требования i-го типа в системе.

Имеется возможность управлять системой в том смысле, что в любой момент времени t можно направить на обслуживание любое из имеющихся в очереди требований или не занимать прибора. Таким образом, множество управлений U состоит из $m+1$ точек. Управление $u=0$ означает, что прибор не занимается обслуживанием, управление $u=k$ означает, что на обслуживании находится требование типа k. В общем случае задача состоит в построении стратегии, обеспечивающей минимизацию потерь от пребывания требований разных типов в системе. В системах с приоритетами, как указывалось выше, на класс допустимых стратегий накладываются различные ограничения. Рассмотрим более подробно различные классы систем с приоритетами.

1.1. Относительные приоритеты. В системах с относительными приоритетами изменение управления допускается лишь в моменты окончания обслуживания. При этом множество всех допустимых стратегий может быть описано множеством подстановок $I=(i_1, i_2, \ldots i_m)$.

Подстановка $I=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ указывает, что первый (высший) приоритет в обслуживании предоставляется требованиям из потока с номером i_1, второй — требованиям из потока с номером i_2 и т. д.

Стратегия (последовательность приоритетов I) определяет порядок обслуживания следующим образом. В каждый момент освобождения прибора требование i_s-го типа направляется на обслуживание в том и только том случае, если $x_{i_k}=0$ для всех $k<s$ и $x_{i_s}>0$. Требования одного и того же типа обслуживания в порядке поступления. Здесь x_i — число требований i-го типа в системе.

Будем для краткости называть требования, имеющие при заданной последовательности приоритетов I s-ый приоритет, $s(I)$-требованиями и обозначим через $\theta_s^{(k)}(I)$ время пребывания в системе k-го поступившего $s(I)$-требования. Тогда если качество работы системы характеризовать потерями от пребывания требований в системе, то функционал потерь (потери за продолжительное время T работы системы) можно представить в виде

$$L^T=\sum_{s=1}^{m} c_{i_s} \sum_{k=1}^{N_s(T)} \theta_s^{(k)}(I), \tag{1}$$

где $N_s(T)$ — количество $s(I)$-требований, поступивших за время T. При этом цель управления состоит в том, чтобы минимизировать средние потери в единицу времени

$$r(I)=\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} ML^T(I) \Rightarrow \min. \tag{2}$$

Известно [104], что для систем с относительными приоритетами условие существования стационарного режима состоит в том, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i < 1,$$

где $b_i=\int\limits_0^\infty t\,dB_i(t)$ — математическое ожидание длительности обслуживания. При выполнении этого условия и принимая во внимание независимость величин $\theta_s^{(k)}(I)$ и $N_s(T)$, целевую функцию (2) можно переписать в виде

$$r(I)=\sum_{s=1}^{m} a_{i_s} c_{i_s} v_s(I) \Rightarrow \min, \tag{3}$$

где

$$v_s(I)=\mathrm{M}\theta_s^{(k)}(I) \quad (k\to\infty).$$

Теперь задача может быть сформулирована следующим образом: минимизировать выражение (3) по всевозможным перестановкам индексов I. Заметим, что вопросов, связанных с существованием оптимальной стратегии, здесь не возникает, так как число всевозможных стратегий здесь конечно и равно $m!$.

Средние значения времени пребывания $s(I)$ — требований в системе $v_s(I)$ при любой последовательности приоритетов I выражаются по известным формулам (см., например, [104]), так что в принципе задача (3) может быть решена, например, полным перебором. Однако в данном случае довольно просто получить необходимое условие оптимальности последовательности приоритетов I^*, которое в силу единственности выделяемой им последовательности I оказывается и достаточным. Действительно, предположим, что оптимальной (а такая всегда существует) является тождественная подстановка $I^*=E$ (всегда можно перенумеровать потоки соответствующим образом). Тогда из необходимого условия оптимальности

$$r(E)\leqslant r(T_kE) \quad (k=1, 2, \ldots, m-1),$$

где $T_kE=(1, 2, \ldots, k-1, k+1, k, \ldots, m)$, простыми преобразованиями нетрудно вывести необходимое условие оптимальности в виде

$$\frac{b_k}{c_k}\leqslant\frac{b_{k+1}}{c_{k+1}} \quad (k=1, 2, \ldots, m-1), \tag{4}$$

которому удовлетворяет единственная (с точностью до равенства) подстановка, откуда следует и достаточность приведенного условия. Эти результаты содержатся в работах О. И. Бронштейна, В. В. Рыкова, Кокса и Смита [49, 50, 111].

Вопросы оптимального назначения приоритетов в системах с ожиданием исследовал затем Б. К. Мебуке [129, 131].

1.2. Абсолютные приоритеты. Ослабим теперь несколько ограничения, накладываемые на класс допустимых стратегий Δ, и предположим, что, помимо моментов окончания обслуживания, управления могут изменяться в моменты поступления требований. Подобное предположение приводит нас к системам с абсолютными приоритетами. Более точно класс допустимых стратегий в системах с абсолютными приоритетами так же, как и в системах с относительными приоритетами, определяется множеством всевозможных подстановок $I=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$. Стратегия (последовательность абсолютных приоритетов) I задает порядок обслуживания требований следующим образом: требование из потока i_s обслуживается в том и только том случае, если в системе нет требований из потоков с номерами i_k в последовательности I, для всех $k<s$, т. е. если $x_{i_k}=0$ для всех $k<s$ и $x_{i_s}>0$.

Таким образом, если во время обслуживания $s(I)$-требования поступает $k(I)$-требование с $k<s$, то, согласно правилу абсолютных приоритетов, последнее немедленно принимается к обслуживанию, а относительно судьбы требования, обслуживание которого было прервано, можно делать различные допущения. В работах по ТМО (см., например, [104]) рассматривались следующие схемы, определяющие судьбу требования, обслуживание которого было прервано:

— прерванное требование направляется в очередь и его обслуживание будет продолжено, как только прибор освободится от требований более высокого приоритета;

— прерванное требование возвращается в очередь и будет обслуживаться заново, как только прибор освободится от требований более высокого приоритета;

— прерванное требование теряется.

Возможны и другие схемы, определяющие судьбу прерванного требования, а также различные модификации указанных правил, например, возвращение требования в «голову» или в «хвост» требований того же приоритета и т. п.

Наиболее полные результаты при определении оптимальных последовательностей приоритетов получены для первой схемы, когда время, затраченное на обслуживание, не теряется, для линейного функционала цели вида (3).

Для всех указанных выше схем условия существования стационарного режима и выражения для основных характеристик системы содержатся, например, в работе [104]. Таким образом, принципиально для любых конкретных исходных данных оптимальную последовательность приоритетов для любой схемы можно установить хотя бы прямым перебором.

Получить необходимые и достаточные условия оптимальности последовательности приоритетов здесь удается лишь для первой из приведенных схем и только для показательных распределений длительностей обслуживания $B_i(t)=1-e^{-\beta_i t}$. Метод и результаты аналогичны случаю относительных приоритетов [49, 50], а именно, оптимальной оказывается последовательность приоритетов E, для которой

$$\beta_k c_k \geqslant \beta_{k+1} c_{k+1} \quad (k=1, 2, \ldots, m-1). \tag{5}$$

Ввиду явной незавершенности результатов для систем с абсолютными приоритетами предпринимались и предпринимаются попытки их усиления. Так, если заметить, что величина $v_s(I)$ в формуле (3) для абсолютных приоритетов зависит лишь от первых двух моментов распределения длительностей обслуживания требований, то можно ожидать, что правило определения оптимальной последовательности приоритетов окажется справедливым и в более широких условиях. Действительно, в работе Е. Б. Веклерова [55] указываются условия в форме неравенств на первые два момента распределений $B_i(t)$, при которых условие оптимальности (5) для последовательности абсолютных приоритетов остается справедливым.

1.3. Системы с ориентацией и чередованием приоритетов. В различных прикладных задачах, связанных с исследованием систем с несколькими типами требований, для перехода от обслуживания требования одного типа к обслуживанию требования другого типа необходима «ориентация» прибора, на которую затрачивается некоторое, вообще говоря, случайное время или (и) некоторое количество какого-либо другого ресурса. Подобные ситуации возникают, например, при исследовании транспортных систем [335, 336] или вычислительных систем, работающих в режиме коллективного пользования [350, 351, 368, 369] и т. п.

В системах с ориентацией может оказаться невыгодным слишком часто переходить от обслуживания требований одного типа к обслуживанию требований другого типа, и естественно возникает потребность ограничить число переключений. Такой подход приводит к постановке задачи организации обслуживания в классе систем с чередующимися приоритетами, в которых переключение прибора с обслуживания требований одного типа на обслуживание требований другого типа возможно лишь тогда, когда в системе не остается требований обслуживаемого типа.

Вопрос об организации рационального обслуживания в системах с ориентацией был поставлен и исследовался для двух типов требований Гейвером [263—265]. В работе [263] исследовался вопрос о зависимости среднего времени ожидания требований от числа переключений для простейших потоков требований в [264] — для случая, когда суммарный поток — простейший, а типы поступающих требований управляются цепью Маркова с заданной матрицей переходов. В работе [265] показано, что наилучшей в смысле минимизации среднего времени ожидания требований (в критерии (3) $c_i=1$ $(i=\overline{1, m})$) является дисциплина обслуживания с чередованием приоритетов.

А. Ахмедов [13] рассмотрел систему с абсолютными приоритетами и ориентацией в предположении, что в момент освобождения системы от неприоритетных требований переориентация прибора на приоритетные требования происходит с заданной вероятностью p.

Систему с относительными чередующимися приоритетами с двумя типами требований исследовали также Ави-Ицхок, Максвелл и Миллер [209]. Различные характеристики для таких систем получены в работе Ньютса и Ядина [326]. Рангараджан и Оливер [336] рассмотрели задачу минимизации среднего времени ожидания требований в системе с ориентацией при постоянном времени обслуживания применительно к управлению транспортными потоками.

Гергели [267] исследовал систему с ориентацией и чередованием приоритетов при двух типах требований, когда переключение с обслуживания требований одного типа на обслуживание требований другого типа допускается только в том случае, когда количество требований того или другого типа в системе превзойдет некоторый пороговый уровень.

При произвольном количестве типов требований системы с чередующимися приоритетами исследовались И. М. Духовным [91, 92]

Б. Г. Питтель [152] исследовал систему с чередующимися приоритетами в широком классе стратегий управления, зависящих от состояния системы. Для линейного функционала потерь вида (3) им получено оптимальное правило назначения приоритетов (см. § 3.1).

1.4. Системы со смешанными приоритетами. Модели систем с относительными, абсолютными и чередующимися приоритетами можно объединить в общую модель СМО. Одна модель такого сорта рассматривалась в работе [94], в которой изучена однолинейная СМО с m входящими простейшими потоками требований, произвольным временем обслуживания и ненадежным прибором с произвольными распределениями длительности жизни и восстановления. Потоки требований разбиты на два класса: к первому относятся потоки с номерами от 1 до s, ко второму — с номерами от $s+1$ до m. Требования 1-го класса обладают относительным приоритетом перед требованиями 2-го класса. Внутри 1-го класса используется правило с чередованием приоритетов, внутри второго — обычное правило относительных приоритетов. Выполнен анализ указанной системы. Получены производящая функция числа требований и ФР времени ожидания в стационарном режиме. В качестве частных случаев изучены системы с комбинированными (абсолютными и относительными) приоритетами.

О. И. Бронштейн [42] рассмотрел систему со смешанными приоритетами для «стареющих» (с растущей условной плотностью распределения) ФР длительностей обслуживания требований. Найдено оптимальное правило назначения относительных и абсолютных приоритетов между потоками, обобщающее соответствующие результаты работ [49, 50, 55].

Р. М. Эйдинов и Л. А. Афанасьев [205] исследовали задачу выбора оптимального числа k ($k<m$) приоритетных классов в системе с требованиями m типов.

§ 2. ПРИОРИТЕТНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОТЕРЯМИ. ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ

Если в системе не предусмотрено мест для ожидания (например, в системах диспетчерского контроля без промежуточной памяти), или если число мест для ожидания ограничено, мы приходим к модели СМО с потерями. Качество функционирования таких систем, или качество управления ими, естественно, зависит от числа потерянных требований. В более общем случае системы смешанного типа (систем с ограниченной очередью) качество управления можно характеризовать функционалом цели вида

$$r(I)=\sum_{s=1}^{m} a_{i_s}[c'_{i_s}\pi_s(I)+c''_{i_s}v_s(I)] \tag{6}$$

где $\pi_s(I)$, $v_s(I)$ — вероятность потери и среднее время ожидания, $s(I)$ — требования в системе при выбранной стратегии управления, I, c'_{i_s}, c''_{i_s} — штрафы за потерю одного требования и единицу времени ожидания соответственно.

Как и в случае систем с ожиданием, на класс допустимых стратегий Δ накладываются ограничения, состоящие в том, что изменение управления допускается лишь в моменты поступления требований или моменты окончания обслуживания. Как и ранее, множество всех стратегий такого типа описывается множеством всех подстановок $I=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, которые определяют порядок обслуживания аналогично случаю систем с ожиданием, и называются стратегиями типа приоритетов.

Задачи оптимального назначения приоритетов на обслуживание требований в замкнутых системах, хотя в них и невозможны потери, близки к соответствующим задачам для смешанных систем. Вопросы оптимального назначения приоритетов в системах с потерями и замкнутых системах рассматривали О. И. Бронштейн, Е. Б. Веклеров, И. М. Духовный, В. В. Рыков, М. И. Ланин и Л. Б. Шварц и др. [46, 49, 50, 56, 57, 93, 122, 296, 297]. Сюда же примыкают задачи фильтрации потока на входе системы, которые изучали И. Н. Коваленко, А. А. Натан, Б. И. Петрин, О. М. Юркевич и др. [107, 110, 132, 137—142, 201].

2.1. Системы с чистыми потерями. В работах О. И. Бронштейна, А. А. Райкина, В. В. Рыкова, М. И. Ланина, Л. Б. Шварца, Коуцкого [46, 49, 50, 122, 296, 297] рассматривались системы с несколькими входящими потоками требований, ожидание в которых не допускается, т. е. если в момент поступления некоторого требования прибор оказывается занятым, то одно из требований, вновь поступившее или обслуживаемое, теряется. При этом, естественно, моментами управления являются лишь моменты поступления требований, и последовательность приоритетов I определяет порядок обслуживания аналогично случаю системы с очередью и абсолютными приоритетами.

Пусть в систему, состоящую из одного прибора, поступает m простейших потоков требований с интенсивностями a_i $(i=\overline{1, m})$. Длительности обслуживания имеют показательные распределения с параметрами β_i $(i=\overline{1, m})$. Класс допустимых стратегий Δ задается с помощью множества последовательностей приоритетов $I=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$: если в момент поступления требования потока i_k обслуживается требование потока i_s и $k<s$, то это последнее требование теряется и начинается обслуживание первого. При $k \geqslant s$ теряется поступающее требование. Очереди в системе не допускаются. Так как ожидания требований не допускается, то $v_s(I) \equiv 0$ и целевой функционал (6) принимает вид

$$r(I)=\sum_{s=1}^{m} a_{i_s} c_{i_s} \pi_s(I)=\sum_{s=1}^{m} a_{i_s} c_{i_s}(1-q_s(I)),$$

где $q_s(I)$ — вероятность полного обслуживания $s(I)$-требования в системе с потерями, дисциплина обслуживания в которой определяется последовательностью приоритетов I.

Поэтому в качестве критерия оптимизации можно использовать функционал

$$\sum_{s=1}^{m} a_{i_s} c'_{i_s} q_s(I) \Rightarrow \max$$

и если $c'_i=c_i$ интерпретировать как доход за полное обслуживание требований i-го типа, то задача состоит в отыскании последовательности приоритетов I^*, максимизирующей средний доход в единицу времени в установившемся режиме. Решение этой задачи для случая одинаковых c_i, $c_i=c$ $(i=\overline{1, m})$, который соответствует оценке качества функционирования СМО по вероятности полного обслуживания требований из суммарного потока, получено в работе [46] и состоит в управлении, определяемом последовательностью приоритетов E, для которой

$$\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_m.$$

Случай различных c_i $(i=\overline{1, m})$ рассмотрен в [49, 50], и для него получено необходимое условие оптимальности приоритетов.

Эти же вопросы рассматривались в работах Б. К. Мебуке [127, 128, 130], однако содержащееся в них доказательство достаточности условий оптимальности последовательности приоритетов неверно.

В работе Коуцкого [296] изучается система с потерями, в которой не допускается прерывание обслуживания, а стратегия управления задается вектором $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ следующим образом: если требование потока k застает прибор свободным, то оно с вероятностью p_k принимается на обслуживание и с вероятностью $1-p_k$ теряется, а требование, застающее прибор занятым, всегда теряется. Единица времени обслуживания требования k-го потока приносит доход c_k $(k=\overline{1, m})$, а единица времени простоя прибора — потери в одну денежную единицу. Приводится алгоритм для отыскания стратегии управления — $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$, максимизирующей доход за единицу времени работы СМО в стационарном режиме.

В [297] эта модель обобщается на случай, когда вероятность приема требования p_{kj} зависит от состояния j системы.

В работе М. И. Ланина и Л. Б. Шварца [122] вводится класс вероятностных приоритетов, обобщающих введенное ранее понятие простых приоритетов. Класс вероятностных приоритетов определяется следующим образом. Каждая стратегия (система вероятностных приоритетов) задается матрицей $Q=\|q_{ij}\|$ $(i, j,=\overline{1, m})$ $(0 \leqslant q_{ij} \leqslant 1)$, элементы которой q_{ij} представляют собой вероятности замещения требования i-го потока требованием j-го в случае поступления последнего во время обслуживания первого.

Задача определения оптимальной стратегии в классе вероятностных приоритетов для однолинейной модели с потерями и функционалом цели вида

$$r(Q)=\sum_{i=1}^{m} a_i[c_i' q_i(Q)-c_i''\pi_i'(Q)-c_i'''\pi_i''(Q)] \Rightarrow \max,$$

где $q_i(Q)$, $\pi_i'(Q)$, $\pi_i''(Q)$ — соответственно вероятности полного обслуживания и потери при поступлении в систему или в результате замещения требования i-го типа, а c_i', c_i'', c_i''' — соответствующие им доходы или штрафы, сводится в [122] к задаче линейного программирования, что позволяет накладывать на условия задачи дополнительные ограничения, например, на ассортимент обслуженных требований

$$\underline{a}_i \leqslant a_i q_i(Q) \leqslant \overline{a}_i$$

и т. п. В рассматриваемой работе показано, что в случае отсутствия дополнительных ограничений решение задачи достигается на целочисленной матрице Q^*, элементы которой равны либо 0, либо 1. Таким образом, в этом случае расширение пространства стратегий не приводит к улучшению качества работы системы. Однако использованный метод позволил авторам путем анализа соответствующей задачи линейного программирования доказать достаточность условий оптимальности последовательности приоритетов в случае трех ($m=3$) типов требований, необходимость которых была показана ранее в общем случае в [49].

Указанный подход является примером непосредственного применения методов математического программирования для решения задач УСМО (см. гл. I § 3) и позволяет не только численно искать оптимальную последовательность приоритетов, но и выписывать необходимые и достаточные условия оптимальности системы вероятностных приоритетов.

2.2. Системы с ограниченной очередью. Замкнутые системы. В гл. I упоминались работы [134—137, 164, 165, 167, 178—180] по исследованию систем с ограниченной очередью и несколькими типами требований в связи с задачами оперативного управления (гл. I § 4.1), а также работы [1, 2, 155, 157] по исследованию замкнутых систем в связи с задачами диспетчерского контроля (гл. I, § 4.4). Метод исследования соответствующих систем состоял в сведении рассматриваемого процесса к управляемому случайному (марковскому или полумарковскому) процессу и определении для него оптимальной стратегии управления численными методами.

Для систем с ограниченной очередью и замкнутых систем так же, как и для систем с неограниченной очередью, возможна постановка вопроса об определении оптимальной дисциплины обслуживания в классе приоритетных дисциплин. Однако решение этой задачи в общем случае весьма затруднительно и, по-видимому, не целесообразно, так как в этом случае, как следует из результатов гл. I, оптимальная стратегия сильно зависит от параметров и состояний системы.

Для многолинейных систем с ограниченной очередью типа $M_m|M|n|l$ задачу оптимизации порядка обслуживания в классе приоритетных дисциплин при большой и малой нагрузке рассматривал И. М. Духовный [93]. Для замкнутых систем аналогичное исследование при малых нагрузках выполнено Е. Б. Веклеровым [57, 58]. Полученные асимптотические правила назначения приоритетов совпадают с соответствующими правилами для разомкнутых систем с неограниченной очередью.

В. В. Мова и Л. А. Пономаренко [134—137] численными методами (см. гл. I, § 4.1) исследовали вопросы оптимизации порядка обслуживания требований в многолинейных системах с ограниченной очередью типа $M_m|M_n|n|l$. В этих случаях оптимальная стратегия не принадлежит классу приоритетных стратегий и за счет перехода от стратегий приоритетного типа к оптимальным, как показано в [136, 137], можно получить значительное улучшение качества работы системы.

В работах Г. П. Башарина и его учеников [23—26, 38—40, 124] разрабатываются алгоритмы численного анализа приоритетных СМО с ограниченной очередью, которые могут быть использованы при сравнении различных приоритетных дисциплин обслуживания.

Систему $M_2|M_2|1$ с двумя простейшими входящими потоками требований, замкнутую по приоритетному потоку и разомкнутую по неприоритетному потоку при показательно распределенных длительностях обслуживания исследовал С. Н. Драницын [90].

Различные аспекты анализа и оптимизации замкнутых приоритетных систем изучались Джейсуолом и содержатся в его монографии [86].

Для систем, работающих в условиях не критической (большой или малой) нагрузки, интересной является постановка задачи исследования областей в пространстве состояний системы, внутри которых оптимальным является правило приорететного обслуживания.

2.3. Задачи фильтрации входящего потока. В предыдущих разделах этого параграфа рассматривались задачи оптимизации порядка обслуживания требований в системах с потерями путем назначения приоритетов на их обслуживание с целью минимизации функционала (6). Решение этих задач приводит к своеобразному просеиванию (фильтрации) входящего потока требований, причем отбрасываются требования менее ценные (относительно заданного критерия) для системы.

Близкие задачи возникают при анализе информационных систем, где ценность требования определяется наличием или отсутствием у него определенных признаков. Подобные задачи рассматривались И. Н. Коваленко, А. А. Натаном, Б. И. Петриным, Л. Б. Шварцем, О. М. Юркевичем и др. [11, 107, 110, 132, 137—142, 201, 296, 297].

Здесь ставится задача организации предварительной фильтрации требований для систем с ограниченной пропускной способностью таким образом, чтобы минимизировать вероятность потери требования, обладающего нужным признаком.

Общая постановка задачи такова. В систему с ограниченной пропускной способностью поступает поток требований, обладающих ненаблюдаемым признаком ξ и наблюдаемым η. По ненаблюдаемому признаку ξ требования разбиваются на два класса: требований, не нуждающихся в обслуживании $\xi \in X_0$, и «полезных» требований $\xi \in X_1$. Заданы априорное распределение признака ξ: $p(X_0)$, $p(X_1)$ и условные распределения признака η: $f(y/X_0)$, $f(y/\overline{X}_1)$. Обслуживание состоит в установлении типа ненаблюдаемого признака и занимает некоторое, вообще говоря, случайное время. Нагрузка на систему такова, что она, вообще говоря, не справляется с обслуживанием всех поступающих на ее вход требований. Поэтому возникает задача фильтрации на входе в систему требований по наблюдаемому признаку η таким образом, чтобы минимизировать вероятность потери π требования, обладающего нужным значением признака $\xi:\xi\in X_1$.

Подобные модели возникают в задачах организации работы систем обработки информации, состоящей из полезной информации и «шума», систем контроля, диагностики и т. п.

В работах А. А. Натана [139, 140] рассматриваются однолинейные системы с регулярным входящим потоком требований и показательным распределением длительности обслуживания. В [139] изучается модель с чистыми потерями, в работе [140] — смешанная система (система с ограниченной очередью). Процедура фильтрации задается следующим образом; апостериорная вероятность $\mathbf{P}\{\xi\in X_1/y\}$ принадлежности требования к классу, нуждающихся в обслуживании требований, сравнивается с некоторым фиксированным пороговым уровнем p, и принимаются к обслуживанию лишь те требования, для которых $\mathbf{P}\{\xi\in X_1/y\}>p$. Стратегия фильтрации определяется значением порогового уровня p и оптимальной является стратегия p^*, для которой вероятность потери $\pi=\pi_1+\pi_2$ (в результате фильтрации π_1 или занятости прибора π_2) требования, обладающего нужным значением признака, минимальна.

В работе [142] рассматривается процедура фильтрации, при которой значения апостериорной вероятности принадлежности признака ξ классу X_1 — $\mathbf{P}\{\xi\in X_1/y\}$ определяют систему приоритетов в обслуживании требований следующим образом. Область значений наблюдаемого признака η разбивается на m подобластей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, таких что $\mathbf{P}\{\xi\in X_1/y_i\}>\mathbf{P}\{\xi\in X_1/y_j\}$; если $y_i\in Y_i$, $y_j\in Y_j$, тогда требование, обладающее наблюдаемым признаком y_i, имеет преимущество в обслуживании перед требованием с признаком y_j.

В работах [139—142] получены формулы, связывающие вероятность потери «полезного» требования π с характеристиками потока требований, параметрами СМО, распределениями используемых при фильтрации признаков, пороговым уровнем и структурой приоритетов. Для систем фильтрации по пороговому уровню отсюда обычными вариационными методами можно получить оптимальное значение порогового уровня. Для систем фильтрации по приоритетам в [142] показано, как с помощью метода динамического программирования выбрать структуру приоритетов, минимизирующую указанную вероятность.

И. Н. Коваленко [107] изучил многолинейную систему с простейшим входящим потоком требований и произвольно распределенной длительностью обслуживания, когда задержка в обслуживании требований не допускается. Указывается алгоритм оптимального регулирования порогового уровня в зависимости от числа занятых приборов, обеспечивающий минимальную интенсивность потока потерь полезной информации.

Аналогичные результаты получены И. Н. Коваленко и О. М. Юркевичем [110] для системы с ограниченным временем ожидания начала обслуживания. Задача минимизации относительно p_i $(i=\overline{0, n})$, интенсивности $\lambda(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ потока потерянных требований, обладающих полезным значением признака ξ при назначении пороговых уровней фильтрации p_i при i занятых приборах сводится к задаче динамического программирования.

Л. Б. Шварц [201] для решения задачи фильтрации потока на входе однолинейной системы с показательными распределениями длительностей обслуживания использовал модель вероятностных приоритетов. Сведение к задаче линейного программирования позволило разбить конечную область значений признака η на две подобласти, для признаков из которых требование следует принимать или не принимать к обслуживанию.

А. В. Набеев и В. П. Ревельс [138] исследовали вопрос о распределении требований по каналам в классе вероятностных приоритетов с целью максимизации средней ценности обслуженной информации, которая определяется функционалом

$$Q=\int_0^\infty [1-Z(t)]\,dV(t),$$

где $Z(t)$ — ФР времени старения информации, а $V(t)$ — ФР времени ожидания.

Вопросы выбора требований для обслуживания в связи с задачами обработки информации рассматривались также в работах В. Н. Асеева [11], Д. Г. Михалева и И. Б. Руссмана [132], а также в упоминавшихся уже работах Коуцкого [296, 297].

§ 3. ОБОБЩЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПРИОРИТЕТОВ

Понятие приоритетов возникло, с одной стороны, как формализация естественного порядка работы СМО специального класса. С другой стороны, приоритеты можно рассматривать как класс стратегий, подчиненных некоторым ограничениям. Отправляясь от этого второго подхода к понятию приоритетов, естественно поставить вопросы: в каких случаях оптимальные приоритеты оказываются оптимальными стратегиями в более широком классе допустимых стратегий, насколько влияет информация о состоянии СМО на выбор управления, насколько можно улучшить качество управления, переходя от приоритетов к более широкому классу допустимых стратегий. В направлении решения указанных вопросов были получены некоторые результаты, имеющие и самостоятельное значение. Они будут рассмотрены в настоящем параграфе.

3.1. Динамические приоритеты. Рассмотрим вопрос о зависимости управления от состояния очередей, который обсуждался в работах Е. Б. Веклерова, Э. Е. Лемберг, Б. Г. Питтеля, В. В. Рыкова, Г. П. Климова [54, 106, 152, 170]. В настоящем разделе состояние системы с ожиданием будем характеризовать вектором $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где x_i — число требований i-го типа в системе. Множество таких векторов с целочисленными неотрицательными компонентами образует пространство состояний системы $X=\{\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_m)\}$.

Предположим, что все пространство состояний системы X разбито на непересекающиеся множества X_k $(k=\overline{0, m})$, $X=\bigcup\limits_{k=0}^{m} X_k$, $X_k \cap X_l=\varnothing$. Определим для каждого такого разбиения $\chi=\{X_k,\ k=\overline{0, m}\}$ стратегию $\delta=\delta(\chi)$ следующим образом. Если в момент принятия управления система находится в одном из состояний подмножества X_k, принимается управление $u=u(X_k)=k$. Ограничения на моменты управления (моменты изменения управления) оговариваются особо. Систему, в которой стратегия управления определяется только что описанным способом с помощью разбиений пространства состояний, назовем системой с динамическими приоритетами.

Понятие динамических приоритетов было введено В. В. Рыковым и Э. Е. Лемберг [170]. Оно является обобщением понятия приоритетов в обычном смысле слова и совпадает с последним, если определяющее его разбиение имеет, например, вид

$$\chi=\{X_k=[\mathbf{x}: x_1=x_2=\cdots=x_{k-1}=0,\ x_k>0],\ k=\overline{0, m}\}. \quad (7)$$

Такому разбиению соответствует последовательность приоритетов, задаваемая тождественной подстановкой $E=(1, 2, \ldots, m)$.

В работе [170] задача минимизации функционала (3) в классе систем с относительными динамическими приоритетами сводится к задаче линейного программирования. Для произвольного разбиения $\chi=\{X_k,\ k=\overline{0,m}\}$ функционал (3) можно представить в виде

$$r(\chi)=\sum_{i=1}^{m} a_i c_i v_i(\chi)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m} c_i \mathbf{M}\,[\xi_i|\xi \in X_j]\cdot \mathbf{P}\{\xi \in X_j\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m} c_i \pi_j g_{ij}, \qquad (8)$$

где $\xi(t)=(\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t))$, ξ_i — число требований i-го типа в системе в момент принятия управления. В [170] показано, что вероятности $\pi_j=\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\xi(t)\in X_j\}$ при выполнении условия эргодичности $R<1$ не зависят от дисциплины обслуживания (разбиения χ), а величины $g_{ij}=M\{\xi_i|\xi \in X_j\}$ при любой дисциплине обслуживания удовлетворяют системе линейных уравнений

$$g^0_{ij}+g^0_{ji}-\sum_{k=1}^{m}\rho_k g^0_{ik}-\sum_{k=1}^{m}\rho_k g^0_{jk}=\frac{b^{(2)}}{R} \quad (i, j=\overline{1, m}), \qquad (9)$$

где $g^0_{ij}=\frac{g_{ij}-\delta_{ij}}{a_i}$, $\rho_k=a_k b_k$, $R=\sum\limits_{k=1}^{m}\rho_k$, $b^{(2)}=\sum\limits_{k=1}^{m} a_k b^{(2)}_k$. Показано, далее, что все точки $\{g_{ij}\}$, соответствующие приоритетным дисциплинам обслуживания, т. е. разбиениям типа (7), являются крайними точками множества $G_0=\{g^0_{ij}\}$ решений системы (9).

Б. Г. Питтель [152] рассмотрел более широкий класс дисциплин обслуживания, включающий, наряду с описанными, также чередующиеся динамические приоритеты. Для этого класса систем им также получено представление функционала (3) в виде линейной формы вида (8) от некоторых величин g_{ij}, которые при любой дисциплине из рассматриваемого класса связаны системой линейных уравнений, аналогичной (9). Путем анализа соответствующих двойственных задач линейного программирования автор показал, что оптимальная стратегия в классе динамических как относительных, так и чередующихся приоритетов достигается в классе дисциплин, не зависящих от состояний системы. Для относительных приоритетов оно определяется соотношением (4), для чередующихся в [152] приводится алгоритм определения оптимальной последовательности приоритетов и условия, достаточные для того, чтобы оптимальной являлась последовательность, определяемая соотношением (4).

Рассмотрим [169] в качестве пространства допустимых стратегий в системе с динамическими приоритетами множество рандомизированных стратегий $\delta=\{u_i(\mathrm{x}),\ \mathrm{x}\in X\}$, $u_i(\mathrm{x})\geqslant 0$,

$\sum_{i=0}^{m} u_i(\mathrm{x})=1$, определяемых вероятностями $u_i(\mathrm{x})$ того, что в момент управления на обслуживание будет направлено требование i-го типа, если система находится в состоянии $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Регулярной назовем стратегию $\delta=\{u_i(\mathrm{x}), \mathrm{x}\in X\}$, для которой $\sum_{i=0}^{m} u_i(\mathrm{x})=1$ для любого x, $u_0(\mathrm{x})=0$ для $\mathrm{x}\neq 0$.

Множество величин $\{g_{ij}\}$ для множества всех регулярных стратегий выпукло. Оказывается, что все крайние точки множества G_0, соответствующие регулярным стратегиям, отвечают обычным приоритетным дисциплинами обслуживания. Таким образом, среди всех стратегий управления из класса рандомизированных динамических приоритетов оптимальной является обычная последовательность приоритетов, определяемая соотношением (4).

Систему с абсолютными динамическими приоритетами (моменты управления в классе абсолютных динамических приоритетов совпадают с моментами поступления требований и моментами окончания обслуживания) при показательно распределенных длительностях обслуживания исследовал Е. Б. Веклеров [54]. Оптимальная дисциплина также не зависит от состояния системы. Более того, этот же результат справедлив и для многолинейных систем при одинаковых распределениях длительностей обслуживания требований [59].

Естественно, все полученные результаты справедливы для линейного целевого функционала вида (3), для целевых функционалов более общего вида они не имеют места (см. § 3.4).

3.2. Зависимость управления от длительности обслуживания. В предыдущем пункте указывалось, что для систем с неограниченной очередью информация о состоянии очередей не влияет на выбор управления. Конечно, этот факт не имеет места в системах с конечным числом источников (см. гл. I, § 4.2) и в системах с ограниченной очередью.

Обратимся теперь к вопросу о том, какое влияние оказывают сведения о длительности обслуживания на стратегию управления. Оказывается, что стратегия управления существенно зависит от информации об оставшейся длительности обслуживания требований.

Если имеется возможность каким-либо образом (прямо или косвенно) оценивать время, оставшееся до конца обслуживания (например, наблюдая за временем, прошедшем с его начала), то естественно поставить вопрос, в каких случаях целесообразно прерывать обслуживание требования при поступлении «более важного» требования. Таким образом, при такой постановке вопроса мы отказываемся от ограничений на моменты изменения управлений, т. е. переходим от стратегий типа приоритетов к более широкому классу допустимых стратегий управления. Подобный подход к исследованию УСМО развивался в работах [44, 45, 59, 65, 66, 316, 330].

Влияние информации о длительности обслуживания (или затраченной ее части) на решение вопроса о необходимости прерывания обслуживания исследуется в работе Е. Б. Веклерова и В. В. Рыкова [59] на примере однолинейной УСМО, в которую требования направляются из неограниченного бункера. Длительность обслуживания требований имеет произвольное распределение $B(t)$, быть может, с бесконечным математическим ожиданием. Имеется возможность прервать обслуживание и приступить к обслуживанию нового требования, при этом требование, обслуживание которого было прервано, теряется. Задача состоит в выборе момента прерывания обслуживания «засидевшихся» требований таким образом, чтобы среднее число обслуженных в единицу времени требований было максимально. В общем случае оптимальный момент прерывания u^* определяется из уравнения

$$[1-B(u)]\,B(u)=B'(u)\left[u-\int_0^u B(t)\,dt\right].$$

В некоторых частных случаях можно получить явное выражение для u^*.

О. И. Бронштейном и Е. Б. Веклеровым [44] рассмотрена задача отыскания оптимального управления однолинейной системой с постоянными длительностями обслуживания b_i $(i=\overline{1, m})$ в следующем классе стратегий: в любой момент освобождения прибора из очереди выбирается требование согласно последовательности приоритетов E, установленной согласно правилу (4). В моменты поступления требований вопрос о прерывании обслуживания решается с учетом времени, уже затраченного на обслуживание. Понятно, что в этот класс стратегий включаются стратегии типа как относительных, так и абсолютных приоритетов. Показано, что оптимальным является правило: из числа находящихся в СМО требований всегда обслуживать то, для которого отношение $\frac{\tau_i}{c_i}$ минимально, где τ_i — время дообслуживания требования $(i=\overline{1, m})$.

Заметим, что решение задачи здесь удалось получить благодаря наличию полной информации о длительности обслуживания требований. Чуть более общая модель рассмотрена в работе Миллера и Шраге [316], где длительности обслуживания требований имеют произвольные распределения $B_i(t)$ $(i=\overline{1, m})$, однако точное значение этой длительности (реализация соответствующей случайной величины) становится известным сразу же по поступлении требования в систему. Естественно, результат совпадает с предыдущим.

В работе Оливера и Песталоцци [330] изучается однолинейная система с ожиданием, в которую поступает простейший поток требований. До момента поступления требования известна ФР $B(t)$ времени его обслуживания, после момента поступления — точная длительность обслуживания. Это значит, что требования, находящиеся в очереди, отличаются друг от друга временем обслуживания. Задача состоит в определении порядка их обслуживания, минимизирующего среднее время ожидания в установившемся режиме. Для любого целого N класс управлений задается множеством наборов $\{(y_{i-1}, y_i], i=\overline{1, N}, y_0=0, y_{i-1}<y_i\}$ следующим образом: требованию предоставляется i-й приоритет, если длительность его обслуживания принадлежит интервалу $(y_{i-1}, y_i]$. Прерывание обслуживания не допускается. Для конечного N дан способ расчета оптимальных значений y_i^* $(i=\overline{1, N})$, основанный на использовании метода динамического программирования. Показано, что при $N\to\infty$ оптимальным является правило: на обслуживание направлять требование, имеющее наименьшую длительность обслуживания.

Краткий обзор результатов, полученных в направлении исследования оптимального момента прерывания обслуживания в однолинейных СМО, содержится в работе [45].

В несколько иной постановке задача об определении момента прерывания обслуживания рассмотрена в работах Н. М. Воробьева [65, 66], где изучена однолинейная СМО с простейшим потоком требований и ограниченной длиной очереди. В каждом интервале $(t, t+\Delta t)$ требование из очереди может покинуть систему с вероятностью $\beta\Delta t+o(\Delta t)$. Дисциплина обслуживания — в порядке очереди. Задана функция $c(\theta)$ — доход, получаемый от обслуживания одного требования, если оно длилось θ единиц времени. Обслуживание требования может быть прервано в любой момент времени, после чего оно считается обслуженным. Задача состоит в отыскании правила прерывания обслуживания, т. е. выбора длительности обслуживания в зависимости от длины очереди, максимизирующего средний доход за единицу времени в стационарном режиме. Методом динамического программирования составляется система дифференциальных уравнений, которая при некоторых дополнительных условиях определяет решение задачи в виде вектора $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ (N — максимально возможная длина очереди), который задает искомое управление так: обслуживание требования в момент t заканчивается, если длина очереди равна n и $\theta(t) \geqslant \theta_n$, где $\theta(t)$ — время, в течение которого это требование обслуживается к рассматриваемому моменту t ($n=\overline{1, N}$). Для простых частных случаев предложенный подход позволяет довольно просто найти решение задачи.

3.3. Многоэтапное обслуживание и зоны недоступности для прерывания. Системы с многоэтапным обслуживанием [42, 43] имеют большое самостоятельное практическое значение. Однако модель многоэтапного обслуживания может дать частичный ответ и на вопросы, сформулированные в начале данного параграфа. Разбивая, например, длительность обслуживания требований на фиктивные (но наблюдаемые) этапы, можно оценить влияние затраченного на обслуживание требования времени на решение вопроса о необходимости прерывания обслуживания при поступлении «более важного» требования.

Пусть в систему, состоящую из одного прибора, поступает m простейших потоков требований с интенсивностями a_j ($j=\overline{1, m}$). Обслуживание каждого требования j-го типа состоит из n_j последовательных этапов. Длительность выполнения i-го этапа при обслуживании требования типа j есть случайная величина с произвольной функцией распределения $B_{ij}(t)$, $i=\overline{1, n_j}$, $j=\overline{1, m}$, $b_{ij}=\int\limits_0^\infty t\,dB_{ij}(t)$, $b_j=\sum\limits_{i=1}^{n_j} b_{ij}$, c_j — стоимость простоя требования j-го типа в течение единицы времени. Допускается неограниченная очередь.

В момент поступления некоторого требования, застающего на обслуживании требование j-го типа на i-м этапе, или в момент окончания обслуживания i-го этапа требования j-го типа мы оказываемся перед выбором: продолжать обслуживание требования или перейти к обслуживанию вновь поступившего или какого-либо из находящихся в очереди требований.

Порядок обслуживания требований (стратегия управления системой) определяется следующим образом. Не обслуживавшиеся ранее требования поступают на обслуживание в соответствии с правилом относительных приоритетов (4). Далее вводится матрица

$$\mathbf{K}=\|k_{ij}\|,\ 0 \leqslant k_{ij} \leqslant n_j,\ k_{ij} \leqslant k_{i+1,j},\ k_{ij}=n_j \text{ при } i \geqslant j,$$

определяющая порядок обслуживания следующим образом. Если обслуживается требование j-го типа, причем осталось выполнить не более k_{ij} этапов, и в систему поступило требование i-го типа, то оно уже не имеет права прервать обслуживаемое требование. В противном случае обслуживание этого последнего прерывается, причем прерывание может произойти либо сразу, либо в конце этапа. Требование, обслуживание которого прервано, возвращается в очередь и дообслуживается затем с прерванного места, когда в системе нет более важных требований. Требования одного типа обслуживаются в порядке поступления.

В работах О. И. Бронштейна [42, 43] исследуется задача определения оптимального по критерию минимума средних потерь

$$r(\mathrm{K})=\sum_{j=1}^{m} a_j c_j v_j(\mathrm{K})$$

порядка обслуживания требований в классе стратегий, определяемых множеством матриц $\mathcal{K}=\{\mathrm{K}\}$ рассмотренного вида. Здесь $v_j(\mathrm{K})$ означает, как и ранее, среднее время пребывания требований j-го типа в системе.

В [42] рассматривается случай, когда прерывание происходит сразу в момент поступления более важного требования. В работе [43] — более общий случай, когда для некоторых этапов прерывание возможно лишь в конце этапа, а внутри этапа не допускается. В этом случае более важное требование ждет окончания соответствующего этапа. Время, затраченное на обслуживание, не теряется, т. е. рассматриваются модели с дообслуживанием прерванных требований.

Получены явные выражения для оптимальных значений элементов k_{ij}^* матрицы K^*, для «стареющих» (т. е. с неубывающей условной плотностью дообслуживания) законов распределения длительности обслуживания. Они имеют довольно громоздкий вид, однако их смысл простой: на обслуживание следует направлять требование, для которого отношение оставшегося среднего времени обслуживания к стоимости c_j простоя требования в единицу времени минимально.

Подобный же подход к исследованию однолинейных СМО с требованиями нескольких типов развивается в работах К. Р. Балачандрана [212, 213].

Заметим, что описанные результаты дают лишь частичные ответы на вопросы, сформулированные в начале § 3, так как они не затрагивают вопросов о выборе числа и длительностей этапов.

Более полный ответ на этот вопрос содержится в работах [47, 48]. В [47] рассматривается однолинейная СМО, обслуживающая требования нескольких типов. Дисциплина обслуживания задается матрицей $\mathbf{Z}=\|z_{ij}\|$ $(i, j=\overline{1, m})$, элементы которой z_{ij} характеризуют «зону недоступности» для прерывания требований j-го типа требованиями типа i следующим образом. Занумеруем потоки первоначально в порядке, соответствующем правилу относительных приоритетов (4), и обозначим через τ время, затраченное на обслуживание требования, занимающего прибор. Тогда прерывание обслуживания требования j-го типа требованием i-го типа ($i < j$) происходит в том и только том случае, если $\tau < z_{ij}$.

Интервал $[z_{ij}, \infty)$ называется зоной недоступности для прерывания требований типа j требованиями i-го типа $i < j$). В предположении, что функции

$$\varphi_j(z) = [1 - B_j(z)]^{-1} \int_z^\infty (t - z)\, dB_j(t) \quad (j = \overline{1, m})$$

не возрастают, в работе [47] найдена оптимальная по критерию

$$r(\mathbf{Z}) = \sum_{j=1}^m a_j [c'_j v_j(\mathbf{Z}) + c''_j h_j(\mathbf{Z})]$$

дисциплина обслуживания в классе $\mathscr{L}$ дисциплин, описываемых матрицами $\mathbf{Z} = \|z_{ij}\|$.

Здесь $v_j(\mathbf{Z})$ — среднее время пребывания, а $h_j(\mathbf{Z})$ — среднее суммарное время перерывов в обслуживании требований j-го типа; c'_j, c''_j — соответствующие штрафы за единицу времени. Элементы оптимальной матрицы $\mathbf{Z}^* = \|z^*_{ij}\|$ находятся, как решения уравнений

$$\varphi_j(z_{ij}) = b_i \frac{c'_j + c''_j}{c'_i}.$$

Аналогичная задача оптимизации в предположении, что зоны недоступности для прерываний зависят лишь от типа прерываемого требования $[z_j, \infty)$, рассмотрена Ичмайером [257].

Заметим, что в работах [42, 43, 47] оптимальная стратегия прерывания ищется в классе стратегий с единственным для каждой пары типов требований уровнем недоступности для прерывания, устанавливаемым либо дискретно в виде этапов k^*_{ij} [42, 43], либо непрерывно в виде зон недоступности z^*_{ij} [47].

О. И. Бронштейном и Г. О. Розенталем [48] результаты работ [42, 43, 47] обобщаются на случай, когда число этапов может быть случайным, а приоритеты между этапами могут выбираться произвольным образом. Получено правило оптимального назначения порядка выполнения этапов, которое обобщает соответствующие результаты для оптимального расписания выполнения работ случайной длительности одной машиной [159, 160].

Аналогичные результаты получены Оливиром [331] для несколько более общего критерия, когда штраф за ожидание в течение времени τ требования j-го типа, на обслуживание которого необходимо время t, задается функцией $c_j(t)\cdot\tau$.

Г. П. Климов [105, 106] рассмотрел следующую общую модель управляемой системы с разделением времени. Один обслуживающий прибор предназначен для выполнения нескольких (m) видов работ (фаз обслуживания). Каждое требование, моменты поступления которых образуют простейший поток с интенсивностью a, с вероятностью p_i обслуживается сначала на фазе i, любое требование, обслуженное на фазе i, с вероятностью p_{ij} может потребовать обслуживания на фазе j, а с вероятностью $1-\sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ покинуть систему. Предполагается, что любое требование с положительной вероятностью покидает систему, т. е. что для любого i существует n такое, что $1-\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(n)}>0$, где $p_{ij}^{(n)}$ — элементы матрицы $\mathbf{P}^n=\|p_{ij}\|^n$.

Задача состоит в определении правила назначения требований на обслуживание в моменты освобождения прибора, т. е. в построении функции переключения $u(\mathbf{x})=u(x_1, \ldots, x_m)$ (x_i — число требований, ожидающих обслуживания на i-й фазе в момент освобождения прибора), минимизирующей средние потери вида

$$r(u)=\sum_{i=1}^{m} c_i \mathrm{M}\xi_i.$$

Как и в случае систем с динамическими приоритетами [170], задача сводится к задаче линейного программирования. Показано, что оптимальная дисциплина обслуживания существует и достигается в классе приоритетных дисциплин. Оптимальное назначение приоритетов $I^*=(i_1^*, i_2^*, \ldots, i_m^*)$ устанавливается следующим рекуррентным правилом:

$$M_m=\Omega \ (\Omega \text{ — множество фаз обслуживания}),$$

$$c_i(M_m)=c_i; \ \gamma(M_m)=(\mathbf{I}_m-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{b};$$

$\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — вектор средних длительностей обслуживания. Для $k=m, m-1, \ldots, 1$

$$\frac{c_{i_k^*}}{\gamma_{i_k^*}}=\min_{i\in M_k}\frac{c_i(M_k)}{\gamma_i(M_k)}=m_k,$$

$$M_{k-1}=M_k-\{i^*\},\ \gamma(M_k)=(\mathbf{I}_k-\mathbf{P}(M_k))^{-1}\,\mathfrak{b}(M_k),$$
$$c_i(M_{k-1})=\gamma_i(M_k)\left[\frac{c_i(M_k)}{\gamma_i(M_k)}-m_k\right],$$

$\mathbf{I}_k$ — единичная матрица размерности $k\times k$, $\mathbf{P}(M_k)$ — матрица переходов, соответствующая фазам множества M_k, которая получается из $\mathbf{P}$ вычеркиванием строк и столбцов, отвечающих отброшенным фазам $\{i^*_m,\ i^*_{m-1},\ \ldots,\ i^*_{m-k+1}\}$, $\mathfrak{b}(M_k)$ — вектор средних значений длительностей обслуживания, соответствующих фазам из множества M_k, который получается из вектора $\mathfrak{b}$ вычеркиванием элементов, отвечающих фазам $\{i^*_m,\ i^*_{m-1},\ \ldots,\ i^*_{m-k+1}\}$.

3.4. Нелинейные функции штрафа и переменные приоритеты. До сих пор рассматривались задачи о назначении приоритетов при аддитивном функционале потерь, т. е. когда функции штрафа за ожидание или потерю требования являются линейными функциями времени. Однако часто возникают задачи, когда штраф за ожидание требования является нелинейной функцией времени, например, ступенчатой функцией, т. е. когда для требований каждого типа существует критическое время ожидания t_i^0 такое, что если время ожидания $\tau_i\leqslant t_i^0$, то штраф равен 0, а при $\tau_i>t_i^0$ он равен некоторой постоянной величине, скажем c_i.

В этом случае критерий качества работы системы принимает вид

$$r=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbf{P}\{\tau_i\geqslant t_i^0\},$$

а задачи оптимизации порядка обслуживания требований становятся значительно труднее. В частности, в этом случае оптимальная дисциплина обслуживания, вообще говоря, не принадлежит классу приоритетных дисциплин, и необходимо расширение понятия приоритетов, чтобы получить оптимальную или близкую к ней дисциплину обслуживания. Например, в классе дисциплин с динамическими приоритетами могут быть получены лучшие результаты [57, 136].

Однако так как в данном случае потери зависят от времени, проведенного требованием в системе, а не от количества находящихся в ней требований, целесообразно ввести новый класс приоритетных дисциплин, которые в отличие от динамических приоритетов будем называть переменными приоритетами*). Дисциплины этого класса характеризуются тем, что приоритетный индекс $\gamma_i(t)$ требования i-го типа зависит от времени, проведенного соответствующим требова-

*) Рассматриваемый класс дисциплин в некоторых работах встречается также под названием динамических приоритетов.

Таблица 3

Сводка результатов по оптимальному назначению приоритетов в СМО

Стратегии \ Системы	Разомкнутые: Неограниченная очередь	Разомкнутые: С потерями	Разомкнутые: Ограниченная очередь или время ожидания	Замкнутые
Без прерывания обслуживания	1. Найдена оптимальная стратегия в классе $\mathcal{I}_0$ [49, 50, 111] 2. Эквивалентность оптимальных стратегий в классах χ_0, $\mathcal{I}_0$ [152, 170] 3. Оптимальная стратегия из класса рандомизированных динамических относительных приоритетов эквивалентна стратегии из $\mathcal{I}_0$ [169]	1. Найдена оптимальная стратегия в классе вероятностных стратегий фильтрации входящего потока [296, 297] 2. Оптимальные стратегии фильтрации входящего потока по наблюдаемому признаку: —по уровню [107, 139] —разбиение на приоритетные классы [142, 201]	1. Оптимизация стратегий в классе стратегий фильтрации [110, 140] 2. Асимптотические правила назначения приоритетов при большой и малой нагрузке [93]	1. Численное исследование оптимальной стратегии в классе $\mathfrak{D}$ итерационным методом [1, 155] 2. Асимптотические правила назначения приоритетов при малой нагрузке [58]
С прерыванием обслуживания	1. Найдена оптимальная стратегия в классе $\mathcal{I}_а$ при показательных распределениях длительностей обслуживания [49, 50] и их обобщения на произвольные распределения [55] 2. Эквивалентность оптимальных стратегий в классах $\chi_а$, $\mathcal{I}_а$ [54]	1. Найдена оптимальная стратегия в классе $\mathcal{I}_а$ при $c_i = c$ [46]; получены необходимые условия оптимальности в общем случае [49, 50]	1. Определение оптимальной стратегии в классе $\mathfrak{D}$ численными методами: —метод линейного программирования [134—137] —метод Ховарда [157]	1. Численное исследование оптимальной стратегии в классе итерационным методом [1, 155]

С прерыванием обслуживания	3. Системы со смешанными приоритетами и сравнение стратегий из классов $\mathcal{I}_{\text{о}}$, $\mathcal{I}_{\text{а}}$ [43, 94] 4. Определение оптимального момента прерывания при фиксированной длит. обслуживания [44, 45, 316] 5. Системы многоэтапного обслуживания [42, 43] и зоны недоступности [47, 48, 257]	2. Эквивалентность оптимальных стратегий в классах вероятностных приоритетов и $\mathcal{I}_{\text{а}}$ [122], необходимые и достаточные условия оптимальности в $\mathcal{I}_{\text{а}}$ [122]	2. Асимптотические правила назначения приоритетов при большой и малой нагрузке [93]	2. Определение оптимального момента прерывания численными методами [2]
Учет числа переключений ориентации и др. ограничение	1. Сравнительный анализ систем с чередующимися приоритетами [91, 92, 263—265] 2. Эквивалентность оптимальных стратегий в классах $\chi_{\text{ч}}$ и $\mathcal{I}_{\text{ч}}$, необх. и достаточные условия оптимальности [152]	1. Возможен учет дополнительных ограничений, например, на ассортимент обслуживаемых требований [122]		

Примечание: $\mathcal{I}_{\text{а}}$, $\mathcal{I}_{\text{о}}$, $\mathcal{I}_{\text{ч}}$—классы стратегий с абсолютными, относительными, чередующимися приоритетами, $\chi_{\text{а}}$, $\chi_{\text{о}}$, $\chi_{\text{ч}}$—классы стратегий с абсолютными, относительными и чередующимися динамическими приоритетами, $\mathfrak{D}$—класс однородных марковских стратегий нием в системе, а задача оптимизации сводится к определению приоритетных индексов $\gamma_i(t)$ в некотором классе таким образом, чтобы минимизировать средние потери, связанные с эксплуатацией системы.

Приоритетные индексы часто выбираются пропорциональными функции штрафа. Так, в работе Клейнрока и Финкельштейна [292] рассматривается система с переменными приоритетами, в которой приоритетные индексы имеют вид $\gamma_i(t)=c_i\cdot(t-\tau)^k$, где c_i, k — некоторые постоянные, а τ — момент поступления рассматриваемого требования в систему. Обслуживается всегда требование с наибольшим значением приоритетного индекса. При этом приоритетные индексы «отслеживают» нелинейные штрафы за ожидание требований. Для требований двух типов $m=2$ решается задача определения приоритетных индексов $\gamma_i^*(t)$, при которых потери за ожидание требований минимальны.

Е. Б. Веклеров [56, 57] рассмотрел задачу оптимального назначения приоритетов для ступенчатой функции штрафа за ожидание отдельного требования. Аналитического правила назначения приоритетов для таких функций штрафа в общем случае получить не удается. В работе [56] рассматриваются асимптотические правила, когда штраф платится за длительное время ожидания $t_i^0 \gg 1$. В [57] приведены результаты численных расчетов потерь r при различных правилах назначения приоритетов методом статистического моделирования.

В работах В. В. Мовы и Л. А. Пономаренко [135—137] численными методами, связанными с использованием идей линейного программирования, исследуются вопросы улучшения качества функционирования многолинейных систем с ограниченной очередью типа $M_m|M_n|n|l$ с нелинейной функцией штрафа при переходе от приоритетных дисциплин к оптимальным.

Основные результаты по оптимальному назначению приоритетов, полученные к настоящему времени, сведены в табл. 3.

§ 4. ПРИОРИТЕТЫ ПРИ ЗАНЯТИИ ПРИБОРОВ И ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

Другое направление сужения класса допустимых стратегий в УСМО состоит во введении приоритетов при занятии приборов в многолинейных СМО при наличии приборов различной производительности. Такие задачи рассматривались в работах [79, 98, 99]. В [145] изучалась задача распределения требований двух типов между двумя приборами в условиях, когда один прибор может обслуживать требования только 1-го типа, а второй — обоих типов.

Задачи о порядке включения дополнительных приборов в СМО или резервных элементов в теории надежности при недоступности информации в течение процесса, т. е. когда решение принимается лишь на основании априорной информации о свойствах приборов и элементов, можно сформулировать как задачи о назначении приоритетов (порядка) на включение резервных приборов или элементов. Одна задача теории надежности в такой постановке рассмотрена в [295].

Необходимо отметить связь задач об оптимальном назначении приоритетов с задачами теории расписаний. Эту связь можно проследить, например, в работах [159, 160, 294].

Близкие к задачам теории расписаний задачи об оптимальном назначении приоритетов в классе θ-приоритетов рассматривались в [112—114, 146—150].

4.1. Приоритеты на занятие приборов. В работе Г. Л. Ионина и М. А. Шнепса [99] рассматривается многолинейная система с потерями, в которую поступает простейший поток требований. Длительности обслуживания имеют показательные распределения с параметрами, зависящими от номера прибора. В каждый момент поступления требований, застающих свободными более одного прибора, нужно решить, на какой из этих приборов направить поступившее требование.

Весьма просто показано, что правило, минимизирующее вероятность потери в установившемся режиме, состоит в том, чтобы обслуживание всегда осуществлять прибором с максимальной интенсивностью обслуживания.

Г. Л. Иониным [98] рассмотрена система с потерями, на которую поступает неординарный пуссоновский поток требований. Показано, что при заданной суммарной интенсивности потока потери минимальны для простейшего потока.

В случае обслуживания двумя приборами ($m=2$) в работе [79] оценивается разность вероятностей потерь при перестановке обслуживающих приборов.

Многолинейную систему обслуживания приборами различной производительности с ожиданием исследовал А. А. Шахбазов [200]. Полученные им результаты могут быть использованы для оптимального назначения приоритетов на занятие приборов.

В работе [145] рассмотрена система из двух приборов, предназначенная для обслуживания двух простейших потоков требований. 1-й прибор может обслуживать требования только 1-го потока, 2-й прибор — требования обоих потоков. Предполагается образование двух очередей требований на каждый из приборов. В любой момент поступления требования 1-го потока нужно решать, в какую из очередей его направить. Рассматривается класс управлений, определяемый целочисленным параметром k следующим образом: вновь поступившее требование становится в очередь на 1-й прибор, если длина этой последней в данный момент не превышает k. В противном случае это требование направляется в другую очередь. Требования каждой очереди обслуживаются в порядке поступления. Для показательно распределенных длительностей обслуживания в статье находятся различные характеристики СМО (например, среднее время ожидания) как функции k. Это позволяет просто выбирать значения k^*, оптимизирующие работу системы по этим характеристикам. Поставленные задачи возникают, например, при организации работы поверочных лабораторий.

В теории надежности возникают задачи подключения резервных элементов. Так, в [295] изучается система, состоящая из одного основного и $m-1$ элементов «теплого» резерва. Исследуется задача определения оптимального порядка включения элементов в работу по двум критериям; обеспечения максимальной надежности работы системы в начальный период ее работы (максимум производной функции распределения длительности безотказной работы системы в нуле) и обеспечения максимального среднего времени работы системы.

Оптимальный по первому критерию порядок подключения элементов в работу определяется соотношением

$$\frac{\lambda_1}{\Lambda_1} \geqslant \frac{\lambda_2}{\Lambda_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\lambda_m}{\Lambda_m},$$

где λ_i, Λ_i — интенсивности отказа i-го по порядку включаемого в работу элемента в резерве и рабочем состоянии соответственно.

Необходимое условие оптимальности порядка включения элементов в работу по второму критерию имеет вид:

$$\frac{\lambda_{m-1}}{\Lambda_{m-1}} \geqslant \frac{\lambda_m (\lambda_{m-1} + \Lambda_m)}{\Lambda_m (\Lambda_{m-1} + \lambda_m)}.$$

4.2. Связь с задачами теории расписаний. θ-приоритеты. Интересно отметить связь между задачами управления СМО с несколькими типами требований и различными приборами с задачами теории расписаний. В сущности, перечисленные выше задачи могут служить простейшими примерами задач расписания, в которых моменты времени, после которых могут выполняться операции, и (или) длительности их выполнения являются случайными величинами. Задачи определения оптимальных расписаний при случайных длительностях выполнения операций рассматривались в [159, 160]. Однако в целом класс стохастических задач теории расписаний, весьма важный с точки зрения приложений, исследован мало. Изучение связи между стохастическими задачами теории расписаний и задачами УСМО и применение при этом методов обеих этих теорий может, по-видимому, значительно обогатить как ту, так и другую.

Задачи, близкие к задачам теории расписаний, рассматривались в работах [112—114, 146—150], где изучалась однолинейная система, предназначенная для обслуживания потока требований от m источников. Длительности обслуживания требований зависят от источника, от которого они поступают. Рассматривается класс дисциплин обслуживания, определяемый множеством векторов $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ следующим образом: в каждый момент времени t обслуживается требование, имеющее наименьшее значение величины $t'+\theta_i$ среди требований, находящихся в этот момент в очереди, где i — номер источника, от которого требование поступило, и t' — момент его поступления. Введенный таким образом класс дисциплин назовем θ-приоритетами. Он обобщает ряд известных дисциплин. Например, при $\theta_i=\theta$ $(i=\overline{1, m})$ получим дисциплину обслуживания в порядке очереди. Если разности $\theta_i-\theta_{i-1}$ очень велики, то θ-приоритеты практически эквивалентны классу абсолютных приоритетов. Рассматриваются задачи нахождения θ-приоритетов, удовлетворяющих некоторым ограничениям на сроки окончания обслуживания требований. Для решения этих задач предложены методы последовательных приближений.

4.3. Задачи управления на сетях. Сети систем массового обслуживания находят широкие применения при исследовании различных реальных объектов [33, 34, 120, 192—194, 199]. К одним из первых работ по управлению на сетях относятся работы по оптимизации структуры ненадежных сетей и организации оптимальной (с целью минимизации потерь) передачи информации по ненадежным сетям связи. В математическом плане возникающие здесь задачи близки к задачам оптимального резервирования в теории надежности и также сводятся к задачам линейного программирования.

В работах [33, 34] описан широкий класс управляемых сетей СМО при дискретном способе наблюдения, исследование которых сводится к УМЦ. В общем случае исследование таких сетей наталкивается на «непреодолимые», как указано в [33] вычислительные трудности. В [34] приводятся результаты численных расчетов оптимальной стратегии управления для упрощенного варианта сети, выполненных с помощью итерационной процедуры Ховарда.

В [192—194] для анализа сетей и оптимизации распределения требований по сети используются методы статистического моделирования и случайного поиска.

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ПРИОРИТЕТАМИ

В предыдущих параграфах задачи определения оптимальных стратегий управления в системах с приоритетами рассматривались в методическом плане. В настоящем параграфе, не претендующем на полноту обзора прикладных работ, будут кратко указаны основные направления приложения систем с приоритетами, причем нужно иметь в виду, что как области приложения систем с приоритетами и общих управляемых систем совпадают (см. § 4, гл. I), так и рассматриваемые классы допустимых стратегий не всегда позволяют точно указать, к какому типу систем целесообразно отнести ту или иную работу.

5.1. Задачи диспетчерского контроля и организации работы вычислительных систем. Широкое развитие автоматизированных систем управления (АСУ) и использование в них вычислительной техники привело к созданию вычислительных систем (ВС) и поставило перед исследователями вопросы организации их работы, в том числе задачи диспетчеризации прохождения программ при работе ВС в различных режимах.

О задачах организации работы ВС в режиме разделения времени при работе несколькими пользователями уже упоминалось в § 4.5 гл. I.

Шраге [350, 351] использовал приоритетные модели СМО с возвращением прерванного требования в очередь низшего приоритета, со смешанными приоритетами и др. для анализа работы ВС в реальном масштабе времени.

Исследованием приоритетных систем с разделением времени и изучением влияния величины кванта времени, выделяемого на обслуживание требований, на различные характеристики системы и связанные с ними издержки занимался Вольф [368, 369]. Отметим здесь еще работы В. И. Герасимова [67], в которой предлагается алгоритм оптимального распределения времени работы ЭВМ между несколькими пользователями при постоянном времени обслуживания, и Г. П. Климова [106] (см. § 3.3), которая позволяет исследовать широкий круг вопросов организации работы ВС в режиме разделения времени.

Вопросы диспетчеризации обработки информации и решения задач при работе ВС в режиме «запрос—ответ» при наличии в ВС «пакетов» программ, характерном для работы АСУ [154], достаточно адекватно описываются приоритетными СМО, и многие вопросы организации работы таких систем могут быть решены в рамках оптимизации назначения приоритетов. Так, при решении вопросов диспетчеризации прохождения программ через ВС в монографиях [123, 154] и других работах по организации работы ВС используется большинство результатов об оптимальном назначении приоритетов в классе относительных [49, 50], абсолютных [49, 50], динамических [54, 59, 106, 170], чередующихся [91, 92, 152] приоритетов.

Решение задачи на ЭВМ обычно включает в себя несколько этапов (ввод, формирование и трансляция программы, собственно вычисления, обращение к стандартным программам, обращение к внешней памяти, вывод и т. п.). Поэтому различные вопросы, организации работы ВС, в том числе вопросы организации параллельного прохождения программ при работе в мультипрограммном режиме могут быть исследованы с использованием приоритетных систем многоэтапного обслуживания, систем с зонами недоступности для прерывания и т. п. И если некоторые вопросы, связанные с оптимизацией приоритетов, например, в системах с многоэтапным обслуживанием [42, 43] или с зонами недоступности [47, 48], еще не нашли достаточного применения при решении вопросов диспетчеризации прохождения программ в ВС, то нет сомнения в том, что в недалеком будущем и они будут взяты на вооружение специалистами по вычислительной технике и математическому обеспечению ЭВМ.

Отметим, что модели УСМО с приоритетами успешно используются также при организации диспетчеризации выполнения программ в АСУ при не замкнутом контуре управления, когда ЭВМ выступает в роли советчика диспетчеру.

5.2. Задачи организации обработки информации. Очень близкие к организации работы ВС вопросы возникают при организации первичной обработки информации. Например, задачи многих АСУ фактически сводятся к сбору и первичной обработке данных по заранее разработанным относительно простым алгоритмам. В силу важности и специфики соответствующий круг вопросов возлагается обычно на отдельные подсистемы, которые получили название автоматизированных систем обработки данных (АСОД). При наличии интенсивных потоков информации, имеющей различную ценность или обладающей различными по важности признаками, задача организации ее обработки может оказаться весьма сложной. Однако, если нет необходимости учитывать технологические ограничения на порядок обработки информации, то многие вопросы организации ее обработки могут быть решены в рамках приоритетных СМО, рассмотренных в предыдущих разделах.

Укажем еще на цикл работ [112—114, 146—150], в которых для исследования вопросов организации работы АСОД вводится понятие θ-приоритетов, близкое к понятию переменных приоритетов (см. § 3.4), развивается аппарат исследования систем с θ-приоритетами и решаются различные прикладные задачи.

В несколько ином плане ставятся задачи автоматизации обработки информации при создании больших информационных массивов с целью долговременного хранения и оперативного выбора из памяти соответствующей информации. Основным вопросом здесь является классификация информации по некоторым признакам, запись ее в соответствующем месте памяти и поиск соответствующей информации по указанным признакам.

В математическом плане эти задачи сводятся к различным вариантам задачи фильтрации входящего потока с целью определения требований, содержащих полезные признаки, которые рассматривались в § 2.3 гл. II. Кроме рассмотренных там работ, укажем еще на [11, 132, 201], в которых рассматриваются различные прикладные аспекты указанных задач.

5.3. Задачи управления транспортными потоками. В § 4.4 гл. I рассматривались задачи управления транспортными потоками, описываемые моделями УСМО. Частные модели систем с приоритетами также находят широкое применение при исследовании задач управления транспортными потоками. В первую очередь это относится к системам с ориентацией и чередованием приоритетов [91, 92, 152, 263—265, 267], которые используются в качестве моделей движения транспорта, соответственно на регулируемых или нерегулируемых перекрестках.

Например, в [335] применительно к задачам исследования задержек транспорта на перекрестке проводится сравнение качества работы систем с чередующимися приоритетами и системы, управляемой автоматом с фиксированным ритмом (см. § 4.4 гл. I).

Для изучения процессов обгона можно использовать модели многоэтапного приоритетного обслуживания, в которых встречный поток обладает абсолютным приоритетом по отношению к потоку обгоняющих машин на первой фазе и не имеет приоритета, если требование неприоритетного потока (обгоняющая машина) находится на втором этапе обслуживания (на второй стадии обгона).

5.4. Задачи теории надежности и коммутации. Известно, какое большое значение имеют модели СМО с приоритетами при расчете надежности систем. Здесь поток отказов рассматривается как поток, имеющий высший абсолютный приоритет. Во многом возникновение таких моделей как раз обязано задачам теории надежности.

В теории надежности возникают также задачи, близкие к задачам оптимизации приоритетов, например, упоминавшаяся уже задача об оптимальном включении в работу резервных приборов [295].

Отметим также задачи, рассмотренные в [31, 33, 34, 220—223], которые могут быть использованы в качестве простейших моделей оптимальной коммутации в системах связи.

5.5. Задачи организации работы предприятий сферы обслуживания. Отметим, наконец, еще одно важное направление применения УСМО — организацию работы предприятий сферы обслуживания.

Рассмотренная в работе [145] модель СМО с двумя различными обслуживающими приборами (см. § 4.1) использовалась для определения наилучших режимов работы поверочных лабораторий.

Модель госпитализации рассмотрена в [293].

В [329] исследовалась задача оптимальной организации отправки почты между двумя почтовыми станциями.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Абрамов А. Х.**, Агаларов Ч. С., Бронштейн О. И., Правоторова Н. А., Об оптимальной последовательности обработки информации в системе централизованного управления. Тр. I Всесоюзного симпозиума по стат. пробл. в техн. кибернет. Адаптивн. системы. М., «Наука», 1971, 416—423
2. —, Рыков В. В., Татарская П. М., Определение оптимального режима функционирования системы управления. Экономика и мат. методы, 1971, 7, № 2, 276—282 (РЖМат, 1971, 10В720)
3. —, Цвиркун А. Д., Об оптимальном назначении скорости обслуживания. Автоматика и телемеханика, 1968, № 2, 76—80
4. **Авен О. И.**, Коган Я. А., Математические модели вычислительных систем с разделением времени. В сб. «Большие системы. Массовое обслуживание. Надежность». (Доклады II Всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления. Ташкент, 1970). М., «Наука», 1970, 170—186 (РЖМат, 1971, 3В531)
5. —, —, Математические модели сложных вычислительных систем. Автоматика и телемеханика, 1971, № 1, 109—128 (РЖМат, 1971, 6В614)
6. **Андреев Н. В.**, Губенко Л. Г., Штатланд Э. С., Управляемые марковские последовательности (конечное множество решений). I. В сб. «Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. 5». Киев, 1968 (1969), 103—111 (РЖМат, 1970, 3В108)
7. —, —, —, Управляемые марковские последовательности (компактное множество решений). II. В сб. «Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара, Вып. 2». Киев, 1969, 86—91 (РЖМат, 1970, 8В76)
8. —, —, —, О существовании стационарной оптимальной стратегии в задаче управления марковской последовательностью. В сб. «Теор. оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. 4». Киев. 1969, 40—43 (РЖМат, 1970, 10В76)
9. —, Штатланд Э. С., О некоторых задачах управления неоднородными процессами рождения и гибели. В сб. «Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. 4». Киев, 1969, 42—46 (РЖМат, 1970, 1В91)

10. **Аоки М.**, Оптимизация стохастических систем. М., «Наука», 1971
11. **Асеев В. Н.**, Сравнение двух методов селекции полезных объектов в системах обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5, 83—88 (РЖМат, 1972, 1В122)
12. **Афанасьева Л. Г.**, Система с включением резервного прибора. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 2, 34—40 (РЖМат, 1971, 8В102)
13. **Ахмедов А.**, К решению одной задачи теории массового обслуживания. Туркм.ССР Ылымл. Акад. хабарлары. Физ.-техн., хим. ве геол. ылымл. сер., Изв. АН Туркм.ССР. Сер. физ.-техн., хим., геол. н., 1965, № 6, 33—41 (РЖМат, 1966, 6В43)
14. **Багдасарян Г. А.**, Оптимальные процессы регистрации пуассоновских потоков заявок с обучением и без обучения. Автоматика и телемеханика, 1972, № 8, 35—41 (РЖМат, 1972, 11В224)
15. —, Кочетков Е. С., Оптимальный режим регистрации стохастических потоков заявок. Автоматика и телемеханика, 1972, № 3, 24—27 (РЖМат, 1972, 7В80)
16. **Барзилович Е. Ю.**, Определение оптимальных сроков профилактических работ на автоматических системах. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 3, 38—45 (РЖМат, 1965, 2В295)
17. —, Об оптимальном управлении контролируемым монотонно возрастающим случайным процессом. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 3, 144—149
18. —, К проблеме обслуживания сложных технических систем. I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 6, 73—85 (РЖМат, 1967, 7В160)
19. —, К проблеме обслуживания сложных технических систем. II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 1, 65—75 (РЖМат, 1967, 9В118)
20. —, К проблеме обслуживания сложных технических систем. III. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 2, 73—84 (РЖМат, 1968, 11В232)
21. —, Оптимизация периодичности контроля систем, недоступных непрерывным проверкам. Автоматика и телемеханика, 1969, № 8, 175—177 (РЖМат, 1970, 2В314)
22. —, Воскобоев В. Ф., О марковских задачах профилактики стареющих систем (обзор). Автоматика и телемеханика, 1967, № 12, 88—102 (РЖМат, 1968, 7В203)
23. **Башарин Г. П.**, О сложных системах массового обслуживания с несколькими конечными очередями и нетерпеливыми клиентами. В сб. «Кибернетика на службу коммунизму», т. II, М.-Л., изд-во «Энергия», 1964, 274—302 (РЖМат, 1965, 6В42)
24. —, Один прибор с конечной очередью и заявки нескольких видов. Теор. вероятн. и ее применения, 1965, 10, № 2, 282—296 (РЖМат, 1965, 12В36)
25. —, О пуассоновских обслуживающих системах с абсолютным приоритетом и обратной связью. В сб. «Массовое обслуживание в системах передачи информации». М., «Наука», 1969, 3—20
26. —, Некоторые результаты для систем с приоритетом. В сб. «Массовое обслуживание в системах передачи информации». М., «Наука», 1969, 39—53
27. **Белецкий А. Я.**, Об оптимальном правиле профилактики. В сб. «Теория точности и надежности кибернетических систем. Семинар. Вып. I.». Киев, 1967, 106—110 (РЖМат, 1968, 11В222)
28. **Беллман Р.**, Динамическое программирование. М., Из-во ин. лит., 1960
29. **Белостоцкий А. А.**, Вальденберг Ю. С., Система оперативно-диспетчерского управления «Импульс» для участка металлургического комбината. В сб. «Управление производством». Тр. III Всес. совещ. по автомат. упр. (техн. киберн.), 1965. М., «Наука», 1967

30. **Белявская Т. Г.**, Структура оптимального поведения для полумарковского процесса решения специального вида. В сб. «Материалы научно-техн. конференции Лен. электротехн. ин-та связи. Вып. 2». Л., 1971, 214—216
31. **Бенеш В. Е.**, Системы с автоматическим управлением структурой. В сб. «Теория непрерывных автоматических систем». (Тр. II международного конгресса ИФАК, Базель, Швейцария, 28 авг. — 4 сен. 1963 г.). М., «Наука», 1965, 35—49
32. **Бертэн Ж.**, Риту М., Ружие Ж., Работа ЭВМ с разделением времени. М., «Наука», 1970
33. **Беседин Б. А.**, Синтез эффективных управляемых сетей массового обслуживания. В сб. «Итоги исслед. по кибернет.» Томск, Томский ун-т, 1968, 117—133 (РЖМат, 1969, 8В32)
34. —, Рыжаков А. П., Марковские управления в оптимальных по надежности сетях массового обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 3, 14—24 (РЖМат, 1969, 2В156)
35. **Блекуэлл Д.**, Динамическое программирование в задачах с затухающим действием. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1967, 11, № 4, 151—160 (РЖМат, 1968, 1В427)
36. —, Положительное динамическое программирование. Математика. Период сб. перев. ин. статей, 1969, 13, № 5, 103—106 (РЖМат, 1970, 1В426)
37. —, О стационарных стратегиях. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1970, 14, № 2, 155—159 (РЖМат, 1970, 7В451)
38. **Бочаров П. П.**, Об однолинейной обслуживающей системе с ограниченным числом мест для ожидания и приоритетом. Пробл. передачи информ., 1970, 6, № 3, 70—77 (РЖМат, 1971, 3В48)
39. —, О вычислении стационарных вероятностей в системе с относительным приоритетом и ограниченной очередью. В сб. научных работ аспирантов. Ун-т дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Фак. физ.-матем. и естеств. н. М., 1970, вып. 7, 3—9 (РЖМат, 1971, 5В67)
40. —, Лысенкова В. Т., Об однолинейной системе с относительным приоритетом и ограниченным числом мест для ожидания. В сб. «Вероятностные задачи в структурно — сложных системах коммутации». М., «Наука», 1969, 59—65
41. **Бронштейн И. И.**, Об оптимальной стратегии замещения программ равных длин в оперативной памяти ЦВМ. Автоматика и телемеханика, 1972, № 3, 117—125 (РЖМат, 1972, 6В521)
42. **Бронштейн О. И.**, Об управляемой системе многоэтапного обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 2, 45—50 (РЖМат, 1969, 12В50)
43. —, О многоэтапном обслуживании одним прибором. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1970, № 5, 59—64 (РЖМат, 1971, 2В54)
44. —, Веклеров Е. Б., Об одной управляемой системе обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 5, 101—105 (РЖМат, 1969, 2В65)
45. —, —, Об одном классе дисциплин обслуживания. В сб. «Массовое обслуживание в системах передачи информации». М., «Наука», 1969, 54—58
46. —, Райкин А. Л., Рыков В. В., Об однолинейной системе массового обслуживания с потерями. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965; № 4, 45—51 (РЖМат, 1966, 3В73)
47. —, Розенталь Г. О., Приоритетная система обслуживания с зонами прерываний. Автоматика и телемеханика, 1971, 162—168 (РЖМат, 1972, 2В72)
48. —, —, Об оптимальном приоритетном обслуживании в режиме разделения времени. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 4, 92—100 (РЖМат, 1973, 12В88)

49. —, Рыков В. В., Об оптимальных приоритетах в системах массового обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 6, 28—37 (РЖМат, 1966, 7В47)
50. —, —, Об оптимальных дисциплинах обслуживания в управляющих системах. В сб. «Управление производством». Тр. III Всес. совещ. по автомат. упр. (техн. кибернет.), 1965. М., «Наука», 1967 (РЖМат, 1968, 11В429)
51. **Буртин Ю. Д.**, Питтель Б. Г., Полумарковские решения в задачах оптимизации профилактического контроля ненадежных систем массового обслуживания. Теория вероятностей и ее применения, 1972, 17, № 3. 496—517 (РЖМат, 1973, 1В84)
52. **Бусленко Н. П.**, Соколов Г. А., Об одном классе задач оптимального распределения. Экон. и мат. методы, 1965, **1**, № 1, 123—136 (РЖМат, 1965, 9В203)
53. **Вальденберг Ю. С.**, Белостоцкий А. А., Построение системы управления участком металлургического комбината с помощью управляющей вычислительной машины. В сб. «Вычисл. техн. для автоматиз. произ-ва». М., «Машиностроение», 1964, 117—134 (РЖМат, 1965, 7В291)
54. **Веклеров Е. Б.**, Об оптимальных абсолютных динамических приоритетах в системах массового обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 2, 87—90 (РЖМат, 1968, 1В57)
55. —, Об оптимальных приоритетах в системе массового обслуживания. Автоматика и телемеханика, 1971, № 6, 149—153 (РЖМат, 1971, 11В105)
56. —, Вероятности больших ожиданий в приоритетных системах. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 1, 57—62
57. —, Назначение оптимальных приоритетов программам в управляющих вычислительных системах. В сб. «Методы реализации алгоритмов контроля и управления в АСУ предприятий. Вып. 2». Институт проблем управления. М., 1972
58. —, Об управляемой замкнутой системе обслуживания. Пробл. передачи информ., 1972, 8, № 3, 109—111 (РЖМат, 1973, 1В86)
59. —, Рыков В. В., Об оптимальном синтезе систем обслуживания. Тр. I Всесоюзного симпозиума по стат. пробл. в техн. кибернет. Адаптивн. системы. М., «Наука», 1971, 384—389
60. **Велева П. И.**, Определение оптимального входящего потока для одной системы массового обслуживания. В сб. «Мат. вопр. упр. произ-вом. Вып. 2». М., Моск. ун-т, 1970, 158—164 (РЖМат, 1971, 4В49)
61. **Веневцев В. М.**, Герцбах И. Б., Максим И. С., Оптимальная организация счета больших задач на ЭЦВМ. Автоматика и вычисл. техн., 1967, № 3, 81—84 (РЖМат, 1968, 2В489)
62. **Висков О. В.**, Ширяев А. Н., Об управлениях, приводящих к оптимальным стационарным режимам. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1964, **71**, 35—45 (РЖМат, 1965, 4В50)
63. **Вольф Ф.**, Данциг Г., Марковские цепи и линейное программирование. Кибернет. сб., 1967, 4, 86—96
64. **Вонэм В. М.**, Стохастические дифференциальные уравнения в теории управления. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1973, 17, № 4, 129—167 (РЖМат, 1973, 11В143)
65. **Воробьев Н. М.**, Об управлении системой массового обслуживания одного вида. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 3, 86—93 (РЖМат, 1967, 12В383)
66. —, Управление временем обслуживания простейшего потока требований. Тр. I Всес. симпозиума по стат. пробл. в техн. кибернет. Адаптивн. системы. М., «Наука», 1971, 447—451
67. **Герасимов В. И.**, Оптимальный алгоритм распределения времени обслуживания приборов в системе массового обслуживания с прерываниями. Автоматика и вычисл. техн., 1973, № 6, 49—54

68. **Герцбах И. Б.**, Оптимальное правило обслуживания системы со многими состояниями. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 3, 46—52 (РЖМат, 1965, 1В325)
69. —, Об оптимальном управлении включением резервных элементов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 5, 75—80 (РЖМат, 1967, 4В149)
70. —, О профилактике по прогнозирующему параметру. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 1, 56—64 (РЖМат, 1967, 7В155)
71. —, Модели профилактики (теоретические основы планирования профилактических работ). М., «Сов. радио», 1969 (РЖМат, 1969, 8В133 К)
72. —, Динамические резервирование. Оптимальное включение резервных элементов. Автоматика и вычисл. техн., 1970, № 1, 28—34 (РЖМат, 1970, 7В236)
73. —, Оптимальное управление полумарковским процессом при наличии ограничений на вероятности состояний. Кибернетика, 1970, № 5, 56—61 (РЖМат, 1971, 6В87)
74. —, Некоторые вопросы математической теории профилактического обслуживания сложных систем. В сб. «Моделир. сложн. систем. Вып. I». Рига, «Зинатне», 1972, 19—30
75. —, Фрайман А. Б., Об одной задаче оптимального управления в системе массового обслуживания (продажа билетов в транспортной системе). Автоматика и вычисл. техн., 1973, № 3, 71—73 (РЖМат, 1973, 10В549)
76. **Гирсанов И. В.**, Минимаксные задачи в теории диффузионных процессов. Докл. АН СССР, 1961, 136, № 4, 761—764
77. **Гнеденко Б. В.**, Коваленко И. Н., О некоторых задачах теории массового обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернет., 1967, № 5, 88—100 (РЖМат, 1968, 7В41)
78. —, и др., Приоритетные системы обслуживания. М., Моск. ун-т, 1973
79. **Гринберг Э. Я.**, Ионин Г. Л., Оценка максимальной разности потерь при перестановке двух приборов. Лат. мат. ежегодник. т. 2. Рига, 1966, 71—78 (РЖМат, 1968, 1В58)
80. **Губенко Л. Г.**, Штатланд Э. С., Об управлении марковскими ступенчатыми процессами. В сб. «Теория оптим. решений. Тр. Семинара. Вып. 4». Киев, 1969, 24—39 (РЖМат, 1970, 10В75)
81. —, —, Об управляемых марковских процессах с дискретным временем. «Теория вероятностей и матем. стат. Межвед. научн. сб.», 1972, вып. 7, 51—64 (РЖМат, 1В118)
82. —, —, Об управляемых полумарковских процессах. Кибернетика, 1972, № 2, 26—29 (РЖМат, 1972, 9В56)
83. —, —, Управляемые марковские и полумарковские модели и некоторые конкретные задачи оптимизации стохастических систем. В сб. «Управляемые случайн. процессы и системы». Киев, 1973, 87—119 (РЖМат, 1973, 5В98)
84. **Дашевский М. Л.**, Липцер Р. Ш., Моделирование стохастических дифференциальных уравнений, связанных с задачей о «разладке» на аналоговой машине. Автоматика и телемеханика, 1966, № 4, 142—150 (РЖМат, 1966, 10В314)
85. **Джевелл В. С.**, Управляемые полумарковские процессы. Кибернет. сб., 1967, № 4, 97—137
86. **Джейсуол Н. К.**, Очереди с приоритетами. М., «Мир», 1973
87. **Добрыдень В. А.**, Оптимизация одной структуры резервирования при двух типах отказов. «Приборы и средства автоматики». Респ. межвед. научн.-техн. сб., 1970, вып. 16, 20—24
88. —, Оптимальная стратегия фиксации отказов в системах одного класса. В сб. «Вычисл. мат. и вычисл. техн. Вып. 2.» Харьков, 1971, 26—28 (РЖМат, 1972, 3В214)

89. —, Оптимальное наблюдение полумарковского процесса. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 4, 47—52 (РЖМат, 1972, 2В265)
90. **Драницын С. Н.**, Преимущественное обслуживание потоков с конечным числом требований. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 1, 100—104 (РЖМат, 1970, 6В43)
91. **Духовный И. М.**, Однолинейная система обслуживания с чередованием приоритетов. Пробл. передачи информ., 1969, 5, № 2, 61—71 (РЖМат, 1970, 1В78)
92. —, Об однолинейной системе с чередованием приоритетов и «разогревом». Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1969, 4, № 4, 66—67 (РЖМат, 1970, 2В73)
93. —, Об оптимальных приоритетах в одной полнодоступной системе с ограниченным числом мест для ожидания. В сб. «Теория надежности и массовое обслуж.». М., «Наука», 1969, 252—257 (РЖМат, 1970, 6В71)
94. —, Системы обслуживания с обобщенными приоритетами и ненадежным прибором. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 1, 89—99 (РЖМат, 1970, 8В200)
95. **Дынкин Е. Б.**, Управляемые случайные последовательности. Теория вероятностей и ее применения, 1965, 10, № 1, 3—18 (РЖМат, 1966, 1В93)
96. **Захаров Г. П.**, Набеев А. В., Ревельс В. П., Одноканальные системы связи. Пробл. передачи информ., 1970, 6, № 3, 92—95 (РЖМат, 1971, 3В49)
97. **Звонкин А. К.**, О последовательно управляемых марковских процессах. Мат. сб., 1971, 86, № 4, 611—621 (РЖМат, 1972, 3В90)
98. **Ионин Г. Л.**, Об оптимальных потерях в случае поступления неординарного потока. Пробл. передачи информ., 1966, 2, № 3, 100—101 (РЖМат, 1967, 4В55)
99. —, Шнепс М. А., Задача об оптимальном размещении приборов различной производительности. Латв. мат. ежегодник, т. 2. Рига, 1966 (РЖМат, 1967, 9В54)
100. **Каштанов В. А.**, Бузукин В. Г., Исследование систем массового обслуживания с потерями и приоритетным обслуживанием. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 2, 78—81 (РЖМат, 1971, 8В103)
101. **Климов А. Ф.**, Ушаков И. А., Одна задача выбора оптимальной дисциплины обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 2, 40—44 (РЖМат, 1966, 11В140)
102. **Климов Г. П.**, Об экстремальных потоках в теории массового обслуживания. Успехи мат. наук, 1962, 17, № 5, 193—195 (РЖМат, 1963, 9В308)
103. —, Экстремальные задачи в теории массового обслуживания. В сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 2. М., «Энергия», 1964, 310—325 (РЖМат, 1965, 6В43)
104. —, Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966, (РЖМат, 1968, 6В47К)
105. —, Эргодическая теорема для регенерирующих процессов. Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 25—30 июня 1973 г. Тезисы докладов, т. I, 308—310. Вильнюс, 1973
106. —, Системы обслуживания с разделением времени. I. Теория вероятностей и ее применения, 1974, № 3, 558—576.
107. **Коваленко И. Н.**, Об одной задаче, связанной с оптимальной обработкой информации системой массового обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 5, 75—79 (РЖМат, 1969, 5В61)

108. —, Теория массового обслуживания. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. 1970 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)», М., 1971, 5—109 (РЖМат, 1972, 4В34)

109. —, Об одной задаче управления процессом восстановления. В сб. «Управляемые случайн. процессы и системы». Киев, 1973, 176—187 (РЖМат, 1973, 5В99)

110. —, Юркевич О. М., О некоторых вопросах оптимального обслуживания требований в системах с ограниченным временем ожидания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 1, 26—35 (РЖМат, 1971, 6В74)

111. **Кокс Д. Р.**, Смит В. Л., Теория очередей. М., «Мир», 1966 (РЖМат, 1966, 12В56К)

112. **Котюжанский Г. А.**, Нисневич Л. Б., Средняя продолжительность обслуживания в классе θ-приоритетов. Автоматика и телемеханика, 1969, № 10, 94—102

113. —, —, Стецюра Г. Г., Децентрализованное приоритетное управление в одноканальной системе обмена данными. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 6, 115—119 (РЖМат, 1971, 6В265)

114. —, —, —, Тинт Л. С., Эпштейн В. Л., Цифровая модель для оценки параметров АСОД. Автоматика и телемеханика, 1970, № 1, 159—169 (РЖМат, 1970, 6В579)

115. **Красовский Н. Н.**, Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах. Успехи мат. наук, 1965, **20**, № 3, 153—174 (РЖМат, 1965, 2Б459)

116. —, Моисеев Н. Н., Теория оптимальных управляемых систем. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 5, 14—17 (РЖМат, 1969, 7Б465)

117. **Креденцер Б. П.**, Об оптимальной загрузке двухприоритетной системы с ожиданием. Автоматика и телемеханика, 1970, № 9, 145—150 (РЖМат, 1971, 3В47)

118. **Крылов Н. В.**, О существовании ε-оптимальных однородных марковских стратегий для управляемой цепи. Докл. АН СССР, 1964, **155**, № 4, 747—750 (РЖМат, 1964, 11В31)

119. —, Построение оптимальной стратегии для конечной управляемой цепи. Теория вероятностей и ее применения, 1965, **10**, № 1, 54—60 (РЖМат, 1966, 1В95)

120. **Курилов В. И.**, Конечные потоки в сетях и вопросы оптимизации многофазового обслуживания. В сб. «Управляемые случайн. процессы и системы». Киев, 1973, 222—238 (РЖМат, 1973, 5В82)

121. **Кушнер Г. Д.**, Стохастическая устойчивость и управление. М., «Мир», 1969

122. **Ланин М. И.**, Шварц Л. Б., Об оптимизации приоритетов в однолинейной системе массового обслуживания с потерями. Автоматика и телемеханика, 1972, № 5, 163—168 (РЖМат, 1972, 9В48)

123. **Липаев В. В.**, Колин К. К., Серебровский Л. А., Математическое обеспечение управляющих ЦВМ. М., «Сов. радио», 1972 (РЖМат, 1972, 6В525 К)

124. **Лысенкова В. Т.**, Анализ многолинейной системы массового обслуживания с ограниченной очередью и приоритетами. В сб. «Проблемы распределения информации». М., «Наука», 1973, 66—73 (РЖМат, 1974, 2В72)

125. **Малышев В. А.**, Пинский А. И., Оптимальность однородного управления в одной задаче теории надежности. Теория вероятностей и ее применения, 1970, **15**, № 1, 149—156 (РЖМат, 1970, 12В257)

126. **Матвиншин Я. А.**, Сучков Л. Н., Об одной задаче оптимального управления полумарковским объектом. В сб. «Сложн. системы и моделир. Тр. Семинара. Вып. 2». Киев, 1969, 42—49 (РЖМат, 1970, 8В80)

127. **Мебуке Б. К.**, Задача оптимального распределения приоритетов в однолинейной системе массового обслуживания с потерями. Сакартвелос ССР, Мецниеребата Академиис моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1967, **46**, № 2, 423—430
128. —, Об одной системе массового обслуживания. В сб. «Управл. вычисл. машины и системы». М., «Энергия», 1967, 157—160 (РЖМат, 1968, 8В380)
129. —, Определение оптимальной последовательности приоритетов в одноканальной системе массового обслуживания с неограниченной очередью (абсолютные приоритеты). В сб. «Тр. проблемной лаборатории автоматики и вычислительной механики». Тбилиси, 1967, 151—155
130. —, К одной задаче оптимального распределения приоритетов в одноканальной системе массового обслуживания с потерями. Сакартвелос ССР. Мецниеребата Академиис моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1968, **50**, № 2, 457—462
131. —, Церетели В. Б., Об одной задаче оптимального распределения приоритетов в одноканальной системе массового обслуживания с неограниченной очередью. Сакартвелос политекникури институти Шромеби. Тр. Груз. политехн. ин-т, 1968, № 2, 231—236
132. **Михалев Д. Г.**, Руссман И. Б., Оптимальное формирование информационных потоков в системах контроля и управления. Пробл. передачи информ., 1972, **8**, № 3, 89—93 (РЖМат, 1973, 1В85)
133. **Мищенко Т. М.**, Оптимальное управление одним стохастическим процессом. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 2, 54—56 (РЖМат, 1970, 9В219)
134. **Мова В. В.**, Пономаренко Л. А., Обоснование одного метода управления в системе массового обслуживания. В сб. «Системы и средства автомат. упр.». Киев, 1970
135. —, —, Управление системой массового обслуживания с конечной очередью. В сб. «Пром. кибернетика». Киев, 1971, 328—338 (РЖМат, 1972, 12В66)
136. —, —, Алгоритмы управления обслуживающими системами с очередью. Препринт. 72—6, Киев, 1972
137. —, —, Итеративный алгоритм определения оптимальных приоритетов в одной системе массового обслуживания. В сб. «Общ. теория систем». Киев, 1972, 121—134 (РЖМат, 1973, 6В52)
138. **Набеев А. В.**, Ревельс В. П., Исследование многоканальных систем передачи информации методом оптимизации стратегии распределительного устройства. Пробл. передачи информ., 1970, **6**, № 3, 96—99 (РЖМат, 1971, 3В50)
139. **Натан А. А.**, Статистический отбор заявок при массовом обслуживании с отказами. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 1, 27—30 (РЖМат, 1966, 8В115)
140. —, Статистический отбор заявок при массовом обслуживании с ограниченной длиной очереди. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 3, 54—56 (РЖМат, 1967, 3В55)
141. —, Оптимальная настройка статистических фильтров в системах массового обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 1, 90—100 (РЖМат, 1973, 6В235)
142. —, Петрин Б. И., Статистическая фильтрация требований в системе массового обслуживания с обратной связью по приоритетам. Изв АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 4, 54—61 (РЖМат, 1970, 5В69)
143. **Неймарк Ю. И.**, Федоткин М. А., О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке. Автоматика и телемеханика, 1966, **27**, № 3, 78—87 (РЖМат, 1966, 12В180)
144. —, —, Преображенская А. М., Работа автомата с обратной связью, управляющего уличным движением на перекрестке. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 5, 129—141 (РЖМат, 1969, 6В279)

145. **Немировский А. С.**, Калякин Б. К., Закашанский Л. Н., О системе массового обслуживания, содержащей каналы с различной дисциплиной обслуживания. Экономика и матем. методы, 1969, 5, № 2, 311—316 (РЖМат, 12В476)
146. **Ниснсвич Л. Б.**, Последовательность обработки данных в реальном масштабе времени. Автоматика и телемеханика, 1969, № 4, 129—136 (РЖМат, 1969, 8В128)
147. —, Организация обслуживания в классе θ-приоритетов. Автоматика и телемеханика, 1969, № 8, 71—78 (РЖМат, 1970, 2В625)
148. —, Стецюра Г. Г., Организация выбора статических приоритетов в системах с децентрализованным управлением. Автоматика и телемеханика, 1971, № 6, 99—105 (РЖМат, 1971, 11В104)
149. —, —, Многоканальная децентрализованная приоритетная система. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 2, 105—109
150. —, Эпштейн В. Л., Адаптивный процесс поиска последовательности обработки данных. Автоматика и телемеханика, 1969, № 5, 130—136 (РЖМат, 1969, 12В560)
151. **Питтель Б. Г.**, Об одной задаче линейного программирования, связанной с оптимальным стационарным управлением в динамической задаче принятия решений. Теория вероятностей и ее применения, 1971, **16**, № 4, 743—748 (РЖМат, 1972, 4В64)
152. —, Оптимальное управление в системе массового обслуживания с несколькими потоками требований. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 6, 101—116 (РЖМат, 1973, 5В701)
153. **Понтрягин Л. С.**, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. М., «Физматгиз», 1966
154. **Поспелов Д. А.**, Введение в теорию вычислительных систем. М., «Сов. радио», 1972 (РЖМат, 1972, 7В99 К)
155. **Правоторова Н. А.**, К определению оптимальной дисциплины обслуживания в системе с разнотипными конечными источниками. В сб. «Теория и средства автоматики». М., «Наука», 1968, 199—204 (РЖМат, 1969, 12В69)
156. **Райкин А. Л.**, Вероятностные модели функционирования резервированных устройств. М., «Наука», 1971 (РЖМат, 1972, 2В274 К)
157. **Рейдман Р. М.**, Об одной системе массового обслуживания с ограниченными очередями. В сб. «Тр. I Всес. симпозиума по стат. пробл. в техн. кибернет. Адаптивн. системы». М., «Наука», 1971, 423—431
158. **Рогозин Б. А.**, Некоторые экстремальные задачи теории массового обслуживания. Теория вероятностей и ее применения, 1966, **11**, № 1, 161—169 (РЖМат, 1966, 10В47)
159. **Розенталь Г. О.**, Об одной задаче составления расписаний. В сб. «Вопросы промышл. кибернетики». Тр. ЦНИИКА, вып. 22. ОНТИ ЦНИИКА, 1969, 52—54
160. —, Об оптимальном оперативном расписании. В сб. «Вопросы промышл. кибернетики». Тр. ЦНИИКА, вып. 30. ОНТИ ЦНИИКА, 1971, 45—46
161. **Романовский И. В.**, Существование оптимального стационарного управления в марковском процессе решения. Теория вероятностей и ее применения, 1965, **10**, № 1, 130—133 (РЖМат, 1965, 7В185)
162. **Рубен Р. В.**, Оптимальная по экономическому показателю периодичность профилактики системы с возможными нарушениями. Автоматика и вычисл. техн., 1971, № 2, 30—34 (РЖМат, 1971, 9В319)
163. **Рубинович Е. Я.**, Об укрупнении состояний управляемых марковских цепей в задачах массового обслуживания. Автоматика и телемеханика, 1972, № 9, 109—114 (РЖМат, 1973, 1В88)
164. **Рыков В. В.**, Об одной задаче оптимального управления системой массового обслуживания. В сб. «Применение и усовершенствование вычислительной техники для обработки деловой информации», вып. II, М., ОНТИПРИБОР, 1964, 30—39

165. —, Определение оптимальной дисциплины обслуживания в системе с бункером. В сб. «Системы управления и коммутации». М., «Наука», 1965, 52—69
166. —, Определение оптимального времени между профилактиками. Тр. ЦНИИКА, вып. 12. М., 1965, 258—266
167. —, Об оптимальной дисциплине обслуживания в системе со складом. В сб. «Прикл. задачи техн. кибернет.» М., «Сов. радио», 1966, 437—449 (РЖМат, 1967, 10В345)
168. —, Управляемые марковские процессы с конечными пространствами состояний и управлений. Теория вероятностей и ее применения, 1966, 11, № 2, 343—351 (РЖМат, 1968, 1В62)
169. —, Применение теории управляемых случайных процессов в задачах массового обслуживания. Международная конференция по теории вероятностей и матем. статист., Вильнюс, 25—30 июня 1973. Тезисы докладов, т. II, 199—200. Вильнюс, 1973
170. —, Лемберг Э. Е., Об оптимальных динамических приоритетах в однолинейных системах массового обслуживания. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 1, 25—34 (РЖМат, 1967, 8В29)
171. **Скороход А. В.**, Об одной общей схеме управляемого случайного процесса. В сб. «Управляемые случайн. процессы и системы». Киев, 1973, 4—23 (РЖМат, 1973, 6В62)
172. **Соловьев А. Д.**, Задача об оптимальном обслуживании. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 5, 40—50 (РЖМат, 1971, 5В56)
173. **Спиваковский С. И.**, Об оптимальном управлении в некоторых системах массового обслуживания. В сб. «Большие системы. Массовое обслуживание. Надежность (доклады II Всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления, Ташкент, 1970)». М., «Наука», 1970, 126—136
174. **Старосельский В. А.**, К вопросу об оптимизации некоторых систем массового обслуживания. Кибернетика, 1967, № 3, 47—52 (РЖМат, 1969, 2В53)
175. **Стратонович Р. Л.**, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., Моск. ун-т, 1966
176. **Сучков Л. Н.**, Оптимизация времени пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний. В сб. «Сложн. системы и моделир. Тр. Семинара. Вып. 1». Киев, 1969, 67—73 (РЖМат, 1970, 10В74)
177. —, Оптимизация показателей надежности сложных систем, функционирование которых представимо посредством полумарковских процессов. В сб. «Сложн. системы и моделир. Тр. Семинара. Вып. 2». Киев, 1969, 33—41 (РЖМат, 1970, 9В235)
178. **Теплицкий М. Г.**, Об одной системе массового обслуживания с управляемым режимом работы прибора. Автоматика и вычисл. техн., 1968, № 2, 36—42 (РЖМат, 1968, 12В84)
179. —, Отыскание оптимальной дисциплины обслуживания для одной системы массового обслуживания с управляемым режимом работы приборов. Автоматика и вычисл. техн., 1968, № 2, 36—42 (РЖМат, 1968, 12В84)
180. —, Об управляемых полумарковских процессах с конечным числом состояний и управлений. Автоматика и телемеханика, 1969, № 10, 45—53
181. —, Об управляемых периодических полумарковских процессах. Автоматика и вычисл. техн., 1973, № 5, 56—61 (РЖМат, 1974, 3В51)
182. —, Об управляемых полумарковских процессах с несколькими видами доходов. Автоматика и телемеханика, 1973, № 3, 38—44
183. **Трушко Т. Г.**, Штатланд Э. С., Об однолинейной системе массового обслуживания, управляемой цепью Маркова и соответствующей ей системе управления запасами. В сб. «Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. 1». Киев, 1968, 51—58 (РЖМат, 1969, 2В396)

184. —, —, Предельное поведение одной системы массового обслуживания и задача управления этой системой в стационарном режиме. В сб. «Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. 2». Киев, 1968, 84—90 (РЖМат, 1969, 5В52)
185. **Тупчиенко А. В.**, Оптимальное управление пуассоновским процессом. Кибернетика, 1972, № 6, 84—89 (РЖМат, 1973, 6В64)
186. —, Некоторые задачи контроля стохастических процессов. Кибернетика, 1973, 95—98 (РЖМат, 1973, 10В96)
187. **Ушаков И. А.** (ред.), Оптимальные задачи надежности. Ком-т стандартов, мер и измерит. приборов при Сов. Мин. СССР, 1968 (РЖМат, 1968, 11В210 К)
188. **Федоткин М. А.**, О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке при показательном законе обслуживания машин. Изв. высш. учебных заведений. Радиофизика, 1967, **10**, № 7, 912—925 (РЖМат, 1969, 2В77).
189. —, Управление уличным движением на перекрестке автоматом с фиксированным ритмом переключения при периодическом случайном потоке прибывающих машин. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 3, 66—76
190. —, Исследование статистической устойчивости движения транспортных потоков на перекрестке, управляемом автоматом с обратной связью. Теория вероятностей и ее применения, 1969, **14**, № 3, 526—536
191. **Фельдбаум А. А.**, Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1964
192. **Фликоп З. И.**, Некоторые вопросы оптимизации систем массового обслуживания. В сб. «Применение математических методов в экономических исследованиях и планировании. Семинар. Вып. 1». Киев, 1967, 114—124 (РЖМат, 1968, 7В410)
193. —, Применение случайного поиска для оптимизации сетей массового обслуживания. Кибернетика, 1969, № 4, 75—79 (РЖМат, 1970, 1В217)
194. —, Оптимизация распределения потоков задач в иерархических системах оперативного управления. В сб. «Мат. методы исслед. и оптимиз. систем». Киев, 1971, 249—255
195. **Фрид Е. Б.**, Об оптимальных стратегиях в задачах управления с ограничениями. Теория вероятностей и ее применения, 1972, **17**, № 1, 194—199 (РЖМат, 1972, 6В57)
196. **Хасьминский Р. З.**, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969
197. **Хейт Ф.**, Математическая теория транспортных потоков. М. «Мир», 1966
198. **Ховард Р. А.**, Динамическое программирование и марковские процессы. М., «Сов. радио», 1964 (РЖМат, 1965, 2В431 К)
199. **Хоулт Ч. С.**, Правила приоритетов, минимизирующие затраты из-за задержек изделий в очередях при календарном планировании станочных работ. В сб. «Календарное планирование». М., «Прогресс», 1966, 109—122 (РЖМат, 1967, 7В335)
200. **Шахбазов А. А.**, Обслуживая приборами разной производительности. Елми әсәрләр Азерб. унив. Физ.-риjазиjат елмләри сер., Уч. зап. Азерб. ун-т. Сер. физ.-мат. н., 1962, № 3, 107—113
201. **Шварц Л. Б.**, Об оптимальном статистическом отборе сообщений системой массового обслуживания с потерями. Бюллетень научно-технической информации по агрономической физике. Л., Гидрометеоиздат, 1973, № 15—16, 32—36
202. **Шерр А. Л.**, Анализ вычислительных систем с разделением времени. М., «Мир», 1970
203. **Ширяев А. Н.**, Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. Trans. 4th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct, Random Process. Prague, 1967, 131—203 (РЖМат, 1968, 4В49)

204. **Штраух Р. Е.**, Отрицательное динамическое программирование. Математика. Период сб. перев. ин. статей, 1969, 13, № 5, 107—127 (РЖМат, 1970, 1В427)
205. **Эйдинов Р. М.**, Афанасьев Л. А., Об оптимальной диспетчеризации в однолинейных системах массового обслуживания. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1973, № 2, 53—60
206. **Юшкевич А. А.**, Об одном классе стратегий в общих управляемых марковских моделях. Теория вероятностей и ее применения, 1973, 18, № 4, 815—817
207. **Akimaru Haruo**, Shimizu Keiichi., Optimum assignment of waiting times in common control systems. Rev. Electr. Commun. Lab., 1966, 14, № 3—4, 188—202
208. **Avi-Itzhak B.**, Brosh I., Naor P., On discretionari priority queueing. Z. angew. Math. und Mech., 1964, 44, № 6, 235—242 (РЖМат, 1965, 6В45)
209. —, Maxwell W. L., Miller L. W., Queueing with alternating priorities. Oper. Res., 1965, 13, № 2, 306—318 (РЖМат, 1967, 2В336)
210. **Bagga P. C.**, Sequencing with random service times. Technometrics, 1970, 12, № 2, 327—334 (РЖМат, 1971, 2В56)
211. **Baker K. R.**, A note on operating policies for queue $M/M/1$ with exponential startus. INFOR. Can. J. Oper. Res. and Inform. Process, 1973, 11, № 1, 70—72 (РЖМат, 1973, 7В71)
212. **Balachandran K. R.**, Parametric priority rules: an approach to optimization in priority queues. Oper. Res., 1970, 18, № 3, 526—540 (РЖМат, 1971, 2В50)
213. —, Queue length dependent priority queues. Manag. Sci., 1971, 17, № 7, 463—471 (РЖМат, 1972, 10В579)
214. **Bartoszewicz J.**, Rolski T., Queueing systems with a reserve service channal. Zast. mat., 1970, 11, № 4, 439—449 (РЖМат, 1971, 6В76)
215. **Beckman M. J.**, On the theory of stochastic control processes. Bull. Soc. roy. sci Liège, 1964, 33, № 9—10, 520—529 (РЖМат, 1965, 6В193)
216. **Beichélt F.**, Zuverlässigkeit und Erneurung. — Die optimale Instandhaltung. Berlin, VEB Verl. Techn. 1970 (РЖМат, 1971, 10В472К)
217. —, Optimale Inspektionsstrategien bei beliebiger verlustfunktion. Biometr. Z., 1971, 13, № 6, 384—395 (РЖМат, 1972, 11В245)
218. —, Minimax-Inspektionsstrategien bei partieller Information über die Lebengszeitverteilung. Wiss. Z. Tech. Univ. Dresden, 1971, 20, № 2, 557—561 (РЖМат, 1972, 11В247)
219. **Bellman R.**, A Markovian decision process. J. Math. and Mech. 1957, 6, № 5, 679—684 (РЖМат, 1958, 6024)
220. **Beneš V. E.**, Heuristic remarks and mathematical problems regarding the theory of connecting systems. Bell Syst. Techn. J., 1962, 41, № 4, 1201—1247 (РЖМат, 1963, 6В301)
221. —, Programming and control problems arising from optimal routing in telephone networks. SIAM J. Contr., 1966, 4, № 1, 6—8 (РЖМат, 1967, 4В129)
222. —, Optimal routing in connecting networks over finite time intervals. Bell Syst. Techn. J., 1967, 46, № 10, 2341—2352 (РЖМат, 1969, 4В78)
223. —, Existence of optimal stochastic control laws. SIAM J. Contr., 1971, 9, № 3, 446—472 (РЖМат, 1972, 5В67)
224. **Bhat U. Narayan**, Rao S. Subba, A statistical technique for the control of traffic intensity in the queueing systems $M/G/1$ and $GI/M/1$. Oper. Res., 1972, 20, № 5, 955—966 (РЖМат, 1973, 5В75)
225. **Blackburn J. D.**, Optimal control of queueing systems with intermittent service. Doct diss. Stanf. Univ., 1971, 169 pp. Diss. Abstrs Int., 1972, B32, № 8, 4718—4719 (РЖМат, 1972, 8В75)
226. **Blackwell D.**, On the functional equation of dynamic programming. J. Math. Anal. and Appl., 1961, 2, № 2, 273—276 (РЖМат, 1962, 7В229)

227. —, Discrete dymanic programming. Ann. Math. Stat., 1962, **33**, № 2, 719—726 (РЖМат, 1963, 7В413)
228. —, Memoryless strategies in finite-stage dynamic programming. Ann. Math. Stat., 1964, **35**, № 2, 863—865 (РЖМат, 1965, 6В195)
229. **Brown B. W.**, On the iterative method of dynamic programming on a finite space discrete time Markov process. Ann. Math. Stat., 1965, **36**, № 4, 1279—1285 (РЖМат, 1966, 12В38)
230. **Cani J. S. de**, A dynamic programming algorithm for embedded Markov chains when the planning horizon in at infinity. Manag. Sci., 1964, **10**, № 4, 716—733 (РЖМат, 1965, 7В182)
231. **Chellinck G. T. de**, Eppen G. D. Linear programming solutions for separable Markov decision problem. Manag. Sci., 1967, **13**, № 5, 371—394 (РЖМат, 1967, 10В334)
232. **Chitgopeker S. S.**, Continuous time Markovian sequential control processes. SIAM J. Contr., 1969, **7**, № 3, 367—389 (РЖМат, 1970, 8В74)
233. **Chosal A.**, Cybernetic queueing systems. Cah. Cent. étud. rech. opér., 1971, **13**, № 4, 188—202 (РЖМат, 1972, 9В44)
234. **Connor M. A.**, Optimal addition of servers time-dependent queueing process. Int. J. Contr., 1970, **12**, № 2, 353—356 (РЖМат, 1971, 2В57)
235. **Conway R. W.**, Maxwell W. L., Miller L. W., Theory of scheduling. Addison. Wesley Mass., 1967
236. **Crabil T. B.**, Maxwell W. L., Single machine sequencing with random processing times and random due-dates. Nav. Res. Log. Quart., 1969, **16**, № 4, 549—554 (РЖМат, 1971, 1В66)
237. **Denardo E. V.**, Sequential decision processes. Doct. diss. Northwest Univ., 1965, 101 pp. Diss. Abstrs Int., 1965, **26**, № 5, 2772 (РЖМат, 1966, 12В49Д)
238. —, Fox B. L., Multichain Markov renewal programs. SIAM J. Appl. Math., 1968, **16**, № 3, 468—487
239. —, Miller B. L., An optimality condition for discrete dynamic programming with no discounting. Ann. Math. Stat., 1968, **39**, № 4, 1220—1227 (РЖМат, 1971, 10В116)
240. **Derman C.**, On sequential decisions and Markov chains. Manag. Sci., 1962, **8**, № 1, 16—24 (РЖМат, 1963, 12В520)
241. —, Stable sequential control rules and Markov chains. J. Math. Anal. and Appl., 1963, **6**, № 2, 257—265 (РЖМат, 1964, 3В275)
242. —, Optimal replacement and maintenance under Markovian deterioration with probability bounds on a failure. Manag. Sci., 1963, **9**, № 3, 478—481 (РЖМат, 1964, 2В285)
243. —, On sequential control process. Ann. Math. Sat., 1964, **35**, № 1, 341—349 (РЖМат, 1965, 4В58)
244. —, Markovian sequential decision processes. Stochastic Processes, Math. Phys. and Engng., Providance, R. I., Amer. Math. Soc., 1964, 281—289 (РЖМат, 1966, 5В67)
245. —, Markovian sequential control processes — denumerable state space. J. Math. Anal. and Appl., 1965, **10**, № 2, 295—302 (РЖМат, 1966, 1В94)
246. —, Denumerable state Markovian decision process — average cost criterion. Ann. Math. Stat., 1966, **37**, № 6, 1545—1554 (РЖМат, 1971, 10В111)
247. —, Markovian decision processes — average cost criterion. Math. Decis. Sci. Part 2. Providance, R. I., 1968, 139—148 (РЖМат, 1970, 3В102)
248. —, Finite state Markovian decision processes. (Mathematics in Science and engineering v. 67). New York—London, Academic Press, 1970
249. —, Klain M., Some remarks on finite horizon Markovian decision models. Oper. Res., 1965, **13**, № 2, 272—278 (РЖМат, 1966, 3В288)
250. —, Lieberman G. J., A Markovian decision model for a joint replacement and stocking problem. Manag. Sci., 1967, **13**, № 9, 609—617 (РЖМат, 1968, 11В454)

251. —, Sacks J., Replacement of periodically inspected equipment (an optimal stopping rule). Nav. Res. Log. Quart., 1960, 7, № 4, 597—607 (РЖМат, 1962, 8В97)
252. —, Strauch R. E., A note on memoryless rules for controlling sequential control processes. Ann. Math. Stat., 1966, 37, № 1, 276—278 (РЖМат, 1966, 12В47)
253. **Eckles J. E.**, Optimum maintenance with incomplete information. Oper. Res., 1968, 16, № 5, 1058—1067
254. **El Bardai M. T.**, Load regulation of a finite size queue. Int. J. Syst. Sci., 1971, 2, № 2, 163—170 (РЖМат, 1972, 4В46)
255. **Emmons H.**, The optimal admisson policy to a multiserver queue with finite horizon. J. Appl. Probab., 1972, 9, № 1, 103—116 (РЖМат, 1972, 8В72)
256. **D'Epenoux F.**, Sur un probleme de production et de stokage dans l'aleatoire. Rev. franç. et rech. opér., 1960, 4, № 4, 3—15 (РЖМат, 1961, 8В148)
257. **Etschmaier M. M.**, Optimal priority queues: the simple discretionary priority rule. Z. für Oper. Res., 1972, 16, 101—112. Würzburg, Physica—Verlag
258. **Fox B.**, Discrete optimization via margine analysis. Manag. Sci., 1966, 13, № 3, 210—217 (РЖМат, 1967, 8В297)
259. —, Markov renewal programming by linear fractional programming. SIAM J. Appl. Math., 1966, 14, № 6, 1418—1432 (РЖМат, 1967, 9В79)
260. —, Existence of stationary optimal policies for some Markov renewal programs. SIAM Rev., 1967, 9, № 3, 573—576 (РЖМат, 1968, 11В69)
261. —, (g,w)-optima in Markov renewal programs. Manag. Sci., 1968, 15, № 3, 210—212 (РЖМат, 1969, 12В67)
262. **Furukawa Nagata**, Markovian decision processes with compact action spaces. Ann. Math. Stat., 1972, 43, № 5, 1612—1622 (РЖМат, 1973, 5В102)
263. **Gaver D. P., Jr.**, Competitive queueing: idleness probabilities under priority disciplines. J. Roy. Statist. Soc., 1963, B25, № 2, 489—499 (РЖМат, 1965, 1В305)
264. —, Comparison of disciplines for queues subject to setups of orientations. Actes 3-e Conf. internat. rech. operationnelle, Oslo 1963. Paris—London, 1964, 867—870 (РЖМат, 1965, 4В31)
265. —, A comparison of queue disciplines when service orientation time occur. Nav. Res. Log. Quart., 1963, 10, № 3, 219—235 (РЖМат, 1965, 12В35)
266. **Gergely J.**, Fél-Markov folyamatok vezérlése. Közl. Magyar tud. akad. Számítástechn. közl., 1967, 3, 68—84 (РЖМат, 1968, 11В70)
267. —, Система обслуживания с переключением. Studia scient. Math. Hung., 1968, 3, № 1—3, 167—179 (РЖМат, 1969, 5В56)
268. **Gross A. J.**, Minimization of misclassification of component failuries in two-component system. IEEE Trans. Reliab., 1970, 19, № 3, 120—122 (РЖМат, 1971, 11В401)
269. **Haji R., Newell G. F.**, Optimal strategies for priority queues with nonlinear costs of delay. SIAM J. Appl. math., 1971, 20, № 2, 224—240 (РЖМат, 1971, 11В97)
270. **Haussmann U. G.**, On the optimal long-run control Markov renewal processes. J. Math. Anal. and App., 1971, 36, № 1, 123—140 (РЖМат, 1972, 4В60)
271. **Heyman D. P.**, Optimal operating policies for $M/G/1$ queueing systems Oper. Res., 1968, 16, № 2, 362—382 (РЖМат, 1969, 5В474)
272. —, A priority queueing system with server interference. SIAM J. Appl. Math., 1969, 17, № 1, 74—82 (РЖМат, 1970, 6В72)
273. —, Marchall K. T., Bounds on the optimal operating policy for a class of single-server queues. Oper. Res., 1968, 16, № 6, 1138—1146 (РЖМат, 1969, 12В474)

274. **Holtzmann I. M.**, Bounds for a dynamic priority queue. Oper. Res., 1971, **19**, № 2, 461—468 (РЖМат, 1971, 12B128)
275. **Horn W. A.**, Allocating service periods to minimize delay time. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1968, **B72**, № 3, 215—227 (РЖМат, 1969, 12B55)
276. **Howard R. A.**, Semi-Markovian decision processes. Bull. Inst. Intern. Stat., 1963, **40**, 625—652
277. —, System analysis of semi-Markov processes. IEEE Trans. Milit. Electron., 1964, 8, № 2, 114—124 (РЖМат, 1965, 2B75)
278. —, Research in semi-Markovian decision structures. Oper. Res. Soc. Japan., 1964, № 4, 163—199 (РЖМат, 1967, 6B67)
279. —, Dynamic probabilistic systems. Vol. 1,2. New York, Wiley, 1971
280. **Ireland R. J.**, Thomas M. E., Optimal control of customer-flow through a system of parallel queues. Int. J. Syst. Sci., 1972, **2**, № 4, 401—410 (РЖМат, 1972, 5B58)
281. **Jaeger A.**, Mond B., On direct sums and tensor products of linear programs. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1964, № 3, 19—31 (РЖМат, 1966, 2B249)
282. **Jagla F.**, Matczak W., Parys S., Sterowanie systemem obslugiwania *M/M/1* methodą histerezy. Biul WAT J. Dąbrowskiego, 1972, **21**, № 5, 75—79 (РЖМат, 1973, 10B97)
283. **Jaiswal N. K.**, Simha P. S., Optimal operating policies for the finite-source queuing process. Oper. Res., 1972, **20**, № 3, 698—707 (РЖМат, 1972, 1B82)
284. —, Thiruvengadam K., Finite-sourse priority queues. SIAM J. Appl. Math., 1967, **15**, № 5, 1278—1293 (РЖМат, 1968, 7B42)
285. **Jansson B.**, Choosing a good appointment system — a study of queues of the type *D/M/1*. Oper. Res., 1966, **14**, № 2, 292—312 (РЖМат, 1967, 2B54)
286. **Jaquette S. C.**, Markov decision processes with a new optimality criterion: small interest rates. Ann. Math. Stat., 1972, **43**, № 6, 1894—1901 (РЖМат, 1973, 8B72)
287. **Karlin S.**, The structure of dynamic programming models. Nav. Res. Log. Quart., 1955, 2, № 4, 285—294 (РЖМат, 1958, 4B88)
288. **Kashyap R. L.**, Optimal control of stochastic finite state systems. Proc. Nav. Electron. Conf. Chicago, III, 1966, **22**, Chicago, 1966, 839—844 (РЖМат, 1969, 7B137)
289. **Kirby M. J. L.**, Nicholson P. J., An optimal monitoring policy for a surveillance model. CORS Journal, 1968, **6**, № 2, 101—114 (РЖМат, 1969, 2B166)
290. **Klein M.**, Inspection-maintenance-replacement schedules under Markovian deterioration. Manag. Sci., 1962, **9**, № 1, 25—32 (РЖМат, 1963, 6B297)
291. **Kleinrick L.**, A delay dependent queue discipline. Naval Res. Log. Quart., 1964, **11**, № 4, 326—341 (РЖМат, 1966, 10B236)
292. —, Finkelstein R. P., Time dependent priority queues. Oper. Res., 1967, **15**, № 1, 104—116 (РЖМат, 1967, 11B374)
293. **Kolesar P.**, A Markovian model for hospital admission scheduling. Manag. Sci., 1970, **16**, № 6, B384—B386 (РЖМат, 1970, 9B261)
294. **Konheim A. G.**, A note on time sharing with preferred customers. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1968, **9**, № 2, 112—130 (РЖМат, 1968, 12B87)
295. **Kopocinski B.**, On the sequence of facility installation. Zast. Mat., 1970, **11**, № 2, 131—136 (РЖМат, 1971, 4B331)
296. **Koutsky Z.**, O jedne ulozo optimalniho rozhodovani v Markovskych processech. Ekon-Mat. obz., 1965, **1**, № 4, 370—382 (РЖМат, 1966, 8B43)
297. —, Probability of a service systems ruin in the case of finite initial capital. Trans. 4th Prague Conf. Inform. theory, statist., decis. functions, random. proc., 1965. Prague, 1967, 425—433 (РЖМат, 1968, 2B57)
298. **Kushner H. J.**, Kleinman A. J., Accelereted procedures for the

solution of descrete Markov control problems. IEEE Trans. Autom. Contr., 1971, 16, № 2, 147—152 (РЖМат, 1972, 4В222)
299. Lippman S. A., Maximal average-reward policies for semi-Markov decision processes with arbitrary state and action space. Ann. Math. Stat., 1971, 42, № 5, 1717—1726 (РЖМат, 1972, 6В56)
300. —, Semi-Markov decision processes with unbounded rewards. Manag. Sci., 1973, 12, № 7, 717—731
301. Mac Queen J., A modified dynamic probramming method for Markovian decision problems. J. Math. Anal. and Appl., 1966, 14, № 1, 38—43 (РЖМат, 1966, 11В67)
302. Magazine M. J., Optimal control of multi-channel service systems. Nav. Res. Log. Quart., 1971, 18, № 2, 177—183 (РЖМат, 1972, 10В82)
303. Maitra A. P., Dynamic programming for countable state systems. Doct. diss. Berkeley Univ., California, 1963, Diss. Abstrs. Int., 1964, 24, № 12, Part 1, 5434 (РЖМат, 1965, 7В184D)
304. —, Dynamic programming for countable action spaces (preliminary report). Ann. Math. Stat., 1965, 36, № 2, 735
305. —, A note on undiscounted dynamic programming. Ann. Math. Stat., 1966, 37, № 4, 1042—1044 (РЖМат, 1971, 10В699)
306. —, Dynamic programming for countable state systems. Sankhya, Indian J. Statist., 1967, A27, № 2—4, 259—266 (РЖМат, 1967, 3В334)
307. —, Discounted dynamic programming on compact metric spaces. Sankhya, Indian J. Statist., 1968, A30, № 2, 211—216 (РЖМат, 1969, 5В451)
308. Mandl P., Analytical methods in the theory of controlled Markov peocesses. Trans. 4th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct., Random Process., 1965. Prague, 1967, 45—53 (РЖМат, 1968, 2В61)
309. —, An identity for Markovian replacement processes. J. Appl. Probab., 1969, 6, № 2, 348—354 (РЖМат, 1970, 7В85)
310. —, On the variance in controlled Markov chains. Kybernetika, 1971, № 1, 1—12 (РЖМат, 1972, 10В114)
311. Manne A. S., Linear programming and sequential decisions. Manag. Sci., 1960, 6, № 3, 259—267 (РЖМат, 1962, 4В314)
312. Meister B., Müller H. R., Rudin H. R. K., On the optimization of message-switching networks. IEEE Trans. Communs, 1972, 20, № 1, 8—14
313. Miller B. L., Finite state continuious time Markov decision process with an infinity planning horizon. J. Math. Anal. and Appl., 1968, 22, № 3, 552—569 (РЖМат, 1970, 1В89)
314. —, Finite state continuous time Markow decision processes with a finite planning horizon. SIAM J. Contr., 1968, № 6, 266—280 (РЖМат, 1969, 9В101)
315. —, Veinott A. F., Jr., Discrete dynamic programming with a small interest rate. Ann. Math. Stat., 1969, 40, № 2, 366—370 (РЖМат, 1971, 8В118)
316. Miller L. W., Schrage L., The queue $M/G/1$ with the shortest remaining processing time discipline. Oper. Res., 1966, 14, № 4, 670—684 (РЖМат, 1967, 10В343)
317. Mine H., Osaki S., Markovian decision processes. New York, Elsevier, 1970, XI, 142 (РЖМат, 1972, 11В64К)
318. —, Tabata Y., On direct sums of Markovian decision process. J. Math. Anal. and Appl., 1969, 28, № 2, 284—293 (РЖМат, 1970, 7В84)
319. —, —, Linear programming and continiuous Markovian decision problems. J. Appl. Probab., 1970, 7, № 3, 657—666 (РЖМат, 1971, 6В90)
320. —, —, On a set of optimal policies in continuous time Markovian decision problem. J. Math. Anal. and Appl., 1971, 34, № 1, 53—66 (РЖМат, 1972, 4В61)

321. **Mitchell B.**, Optimal service-rate selection on an $M/G/1$ queue. SIAM J. Appl. Math., 1973, **24**, № 1, 19—35 (РЖМат, 1973, 10В72)
322. **Mitchell W. L.**, Optimal service rate selection in piecewise linear Markovian service systems. Doct. diss., Berkeley Univ. California, 1970, 66 pp., Diss. Abstrs Int., 1971, **B32**, № 2, 1079 (РЖМат, 1972, 1В128)
323. **Mond B.**, On the direct sum and tensor product of matrix games, Nav. Res. Log. Quart., 1964, № 3, 205—217 (РЖМат, 1966, 6В281)
324. —, On the direct sum and tensor product of linear and nonlinear programs. Doct. diss., Univ. Cincinnati, 1963. Diss. Abstrs, 1964, **24**, № 12, Part 1, 5435—5436 (РЖМат, 1966, 2В250)
325. **Nelson R. T.**, A decision-making model for applications of queueing theory. AIIE Trans., 1970, **2**, № 2, 112—117 (РЖМат, 1971, 4В55)
326. **Neuts M. F.**, Yadin M., The transient behavior of queue with alternating priorities, with special reference to the waiting time. Bull Soc. Math. Belg., 1968, **20**, № 4, 343—376 (РЖМат, 1969, 12В49)
327. **Nishida Toshio**, Tahara Akihiho, Hanai Hiromi, Optimal design for heterogeneous twoserver queue. Technol. Repts Osaka Univ., 1972, **22**, 295—301 (РЖМат, 1973, 5В74)
328. **O'Donovan T. M.**, The queue $M/G/1$ with the semipreemptivepriority queueing discipline. Oper. Res., 1972, **20**, № 2, 434—439 (РЖМат, 1972, 12В59)
329. **Oliver R. M.**, Optimal dsipatches between two post offices. Actes 3-e Conf. internat rech. operationnelle, Oslo, 1963. Paris—London, 1964, 394—402 (РЖМат, 1965, 6В250)
330. —, Pestalozzi G., On a problem of optimum priority classification. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, **13**, № 3, 890—901 (РЖМат, 1966, 8В44)
331. **Olivier G.**, Kostenminimale Prioritäten im Wartesystemen vom Typ $M/G/1$. Elektron. Rechenanlagen, 1972, **14**, № 3, 262—271 (РЖМат, 1973, 6В45)
332. **Osaki Shunji**, Mine Hisashi, Linear programming considerations on Markovian decision processes with no discounting. J. Math. Anal. and Appl., 1969, **26**, № 1, 221—232 (РЖМат, 1970, 1В429)
333. **Otterman J.**, Grade of service of direct traffic mixed with store-and-forward traffic. Bell Syst. Techn. J., 1962, **41**, № 4, 1415—1437
334. —, Probability distribution of delays for store-and-forward traffic mixed with direct traffic. IEEE Trans. Communs Syst. (formerly IRE Trans. Communs Syst.), 1963, **11**, № 1, 41—48 (РЖМат, 1964, 11В309)
335. **Passau P.**, Files d'attente et processus Markoviens a une intersection de traffic. Comparison de divers modes de controle. Queueing theory London, 1967, 185—192 (РЖМат, 1970, 10В71)
336. **Rangarajan R.**, Oliver R. M., Allocations of servicing periods that minimize average delay for N time-shared traffic streams. Transp. Sci., 1967, **1**, № 2, 74—80 (РЖМат, 1968, 12В88)
337. **Ross S. M.**, Non-discounted denumirable Markovian decision models. Ann. Math. Stat., 1968, **39**, № 2, 412—423 (РЖМат, 1971, 12В174)
338. —, Arbitrary State Markovian decision processes. Ann. Math. Stat., 1968, **39**, № 6, 2118—2122 (РЖМат, 1971, 10В115)
339. —, Optimal dispatching of a Poisson process. J. Appl. Probab., 1969, **6**, № 3, 692—699 (РЖМат, 1970, 7В194)
340. —, Average cost semi-Markov decision processes. J. Appl. Probab., 1970, **7**, № 3, 649—656 (РЖМат, 1971, 6В88)
341. —, Applied probability models with optimizations applications. San-Francisco Holden-Day, 1970
342. —, On the nonexistence of ε-optimal randomized stationary policies in average cost Markov decision models. Ann. Math. Stat., 1971, **42**, № 5, 1567—1568 (РЖМат, 1972, 5В69)

343. **Rossberg H. J.**, Optimale Eigenshaften einiger Wartesysteme bei regelmässigem Eingang bzw. konstanten Bedienungszeiten. Z. angew. Math. und Mech., 1968, **48**, № 6, 395—403 (РЖМат, 1969, 5В53)
344. —, Verschärfung eines Setzes von B. A. Rogosin über extremale Eigenschaften der Waitemodelle $D/G/1$ und $GI/D/1$. Schriftenr. Inst. Math. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, 1970, **B**, № 9, 25—30 (РЖМат, 1971, 7В85)
345. **Sakaguchi Minoru**, A sequential assignment problem for randomly arriving jobs. Repts Statist. Appl. Res. Union Jap. Sci. and Eng., 1972, **19**, № 3, 99—109 (РЖМат, 1973, 12В116)
346. **Schäl M.**, On continuous dynamic programming with discrete timeparameter. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1972, **21**, № 4, 279—288 (РЖМат, 1972, 4В465)
347. **Scheaffer R. L.**, Optimum age replacement policies with an increasing cost factor. Technometrics, 1971, **13**, № 1, 139—144 (РЖМат, 1972, 10В468)
348. **Schrage L. E.**, The queue $M/G/1$ with feedback to lower priority queues. Manag. Sci., 1967, **13**, № 7, 466—475 (РЖМат, 1968, 1В55)
349. —, A proof of the optimality of the shortest remaining processing time discipline. Oper. Res., 1968, **16**, № 3, 687—690
350. —, A mixed-priortiy queue with applications to the analysis of realtime systems. Oper. Res., 1969, **17**, № 4, 728—742
351. —, Analysis and optimization of a queueing model of a real-time computer control system. IEEE Trans. Comput., 1969, **C18**, № 11, 997—1003 (РЖМат, 1970, 8В188)
352. **Singh V. P.**, Queue-dependent servers. J. Eng. Math., 1973, **7**, № 2, 123—126 (РЖМат, 1973, 8В55)
353. **Sladky K.**, Jedna uloha optimalni obsluhy několika vyrobnich procesu s nahodnymi parametry. Kybernetika, 1967, **3**, № 4, 352—376 (РЖМат, 1968, 7В411)
354. —, Poznamky o programovany v procesech markovskeho typu. Kibernetika, 1968, **4**, № 2, 144—150 (РЖМат, 1969, 3В334)
355. —, O metode postupuyck aproximace pro nalezem optimalniho rizeni markovského retezce. Kybernetika, 1969, **5**, № 12, 166—176 (РЖМат, 1969, 11В427)
356. —, Necessary and sufficient optimality conditions for average reward of controlled Markov chains. Kybernetika, 1973, **9**, № 2, 124—137 (РЖМат, 1973, 7В85)
357. **Sobel M. J.**, Optimal average-cost policy for a queue with start-up and shut-down costs. Oper. Res., 1969, **17**, № 1, 145—162
358. **Stone L. D.**, Necessary and sufficient conditions for optimal control of semi-Markov jump processes. SIAM J. Contr., 1973, **11**, № 2, 187—201 (РЖМат, 1973, 12В106)
359. **Suzuki Takeji**, Ebe Masao, Decision rules for the queueing system $M/G/1$ with service depending on queue length. Mem. Def. Acad. Jap., 1967, **7**, № 3, 1263—1273 (РЖМат, 1971, 5В60)
360. **Sworder D. D.**, On the control of stochastic systems. I. Int. J. Control, 1967, **6**, № 2, 179—188
361. —, On the control of stochastic systems. II. Int. J. Control, 1969, **10**, № 3, 271—277 (РЖМат, 1970, 4В79)
362. **Taylor H. M.**, Markovian sequential replacement processes. Ann. Math. Stat., 1965, **36**, № 6, 1677—1694 (РЖМат, 1967, 2В59)
363. **Valadier M.**, Sur la commande optimale stochastique en temps discret avec equation d'observation. C. r. Acad. Sci., 1969, **169**, № 2, A105—A108 (РЖМат, 1970, 6В84)
364. **Veinott A. F., Jr.**, On the finding optimal policies in discrete dynamic programming with no discounting. Ann. Math. Stat., 1966, **37**, № 5, 1284—1294 (РЖМат, 1971, 10В698)

365. —, Discrete dynamic programming with sensitive discount optimality criterion. Ann. Math. Stat., 1969, 40, № 5, 1635—1660 (РЖМат, 1971, 8B119)
366. **Volz R. A.**, Optimal control of discrete systems with constrained sample times. Joint automat. Contr. Conf., 1967. Prepr. pap. New York, N. Y. Lewis Winner, 1967, 16—22 (РЖМат, 1969, 3Б401)
367. **Wedekind H.**, Primal-und-dual-Algorithmen zur Optimizirung von Markov Processes. Unternehmensforschung, 1964, 8, № 3, 128—135 (РЖМат, 1965, 6B196)
368. **Wolf R. W.**, Time sharing with priorities. SIAM J. Appl. Math., 1970, 19, № 3, 566—574 (РЖМат, 1971, 6B75)
369. —, Work-conserving priorities. J. App. Probab., 1970, 7, № 2, 327—337 (РЖМат, 1971, 5B65)
370. **Yadin M.**, Naor P., Queueing systems with a removable service station. Oper. Res. Quart., 1963, 14, № 4, 393—405 (РЖМат, 1966, 8B200)
371. —, —, On queueing systems with variable service capacities. Nav. Res. Log. Quart., 1967, 14, № 1, 43—53 (РЖМат, 1968, 2B55)
372. **Yechiali U.**, On optimal balking rules and toll charges in the $GI/M/1$ queueing process. Oper. Res., 1971, 19, № 12, 349—370 (РЖМат, 1971, 12B120)
373. —, Customer's optimal joining rules for the $GI/M/s$ queue. Manag. Sci., 1972, 18, № 7, 434—443 (РЖМат, 1972, 10B580)
374. **Yoshiro Tumura**, On a queueing system $M/G/m(m)$ having the priority order among service stations. TRU Math., 1968, 4, 60—65 (РЖМат, 1970, 2B71)
375. **Young J. P.**, Administrative control of multiple-channel queueing systems with parallel input streams. Oper. Res., 1966, 14, № 1, 145—156 (РЖМат, 1966, 10B51)
376. **Zacks S.**, Yadin M., Analitic characterisation of the optimal control of a queueing system. J. Appl. Probab., 1970, 7, № 3, 617—633 (РЖМат, 1971, 6B69)