*Информационные процессы, Том 12, № 2, 2012, стр. 127–140*




# Система $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с двухпороговой гистерезисной стратегией переключения интенсивности обслуживания

**К. Ю. Жерновый, Ю. В. Жерновый**

*Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина*
Поступила в редколлегию 26.04.2012

**Аннотация**—Для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ применяются два режима обслуживания (основной и послепороговый) с функциями распределения времени обслуживания $F(x)$ и $\widetilde{F}(x)$ соответственно. Послепороговый режим начинает функционировать, если в момент $t$ начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе $\xi(t)$ удовлетворяет условию $\xi(t) > h_2$. Возвращение к основному режиму осуществляется в момент начала обслуживания той заявки, для которой $\xi(t) \le h_1$, где $h_1 \le h_2$. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для стационарного распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Рассмотрен пример решения задачи оптимального синтеза системы с заданными характеристиками. Полученные результаты проверены с помощью имитационной модели, построенной с привлечением инструментальных средств GPSS World.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Модели систем массового обслуживания, в которых может применяться разная интенсивность обслуживания в зависимости от длины очереди, а заявки прибывают группами, часто используются для изучения телекоммуникационных процессов [1–7].

Двухпороговая гистерезисная стратегия переключения интенсивности обслуживания (пороги $h_1 \le h_2$, две интенсивности обслуживания, переключение режимов осуществляется, когда число заявок превышает $h_2$ и меньше, чем $h_1$) впервые предложена в статье [8], где для системы $\mathrm{M}/\mathrm{G}/1$ найдено выражение для производящей функции стационарного распределения длины очереди, которое содержит два неизвестных параметра. Для отыскания этих параметров применяется рекурсивный алгоритм. Такая же стратегия рассмотрена в [9, 10] для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$. В работе [9] два режима работы системы отличаются один от другого не только интенсивностями обслуживания, а и интенсивностями входного потока. С помощью метода вложенных цепей Маркова найдено выражение для производящей функции стационарного распределения числа заявок в моменты завершения обслуживания и явная зависимость критерия качества функционирования системы от параметров $h_1$ и $h_2$. В статье [10] с помощью марковской теории принятия решений определён класс правил переключения режимов обслуживания, который позволяет минимизировать стационарное среднее число заявок в системе.

В отличие от статей [8–10], в настоящей работе мы изучим двухпороговую гистерезисную стратегию переключения интенсивности обслуживания для системы с ограниченным буфером $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ и с помощью метода потенциала В. С. Королюка [11] впервые получим для этой системы преобразования Лапласа от распределения числа заявок на периоде занятости, от функции распределения периода занятости, определим среднюю продолжительность периода занятости и выведем удобные формулы для вычисления стационарного распределения числа заявок (соответствующего произвольному моменту времени, а не моментам завершения обслуживания).

В недавних работах [12–14] метод потенциала применялся для исследования систем типа $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой входного потока. Там же можно найти обзор более ранних работ, в которых использовался метод потенциала.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему обслуживания $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, которую формально опишем следующим образом. Пусть заданы последовательности независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{\alpha_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$ $(\,n \geq 1\,)$, где $\alpha_n$ — время между поступлением $(n-1)$–ой и $n$–ой группы заявок, $\theta_n$ — число заявок в $n$–ой группе, а $\beta_n$ — время обслуживания $n$–ой заявки, причём $\mathbf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ $(\,\lambda > 0\,)$, $\mathbf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$ $(\,i \geq 1\,)$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Если $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то заявки в систему поступают по одной.

Заявки обслуживаются по одной, обслуженная заявка покидает систему, и обслуживающее устройство немедленно начинает обслуживать заявку из очереди при её наличии или же ждёт поступления очередной группы заявок. Применяется дисциплина обслуживания FIFO. Очередь внутри одной группы заявок может быть организована произвольно, поскольку изучаемые нами характеристики не зависят от способа её организации.

Пусть $m$ — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Итак, если в систему, в которой уже находится $k \in [0,\, m+1]$ заявок, поступает группа из $\theta_n$ заявок, то только $\min\{\theta_n,\, m+1-k\}$ из них присоединяются к очереди, а остальные теряются.

В зависимости от числа заявок в момент начала обслуживания очередной заявки в системе применяется один из двух режимов обслуживания (основной или послепороговый) с функциями распределения времени обслуживания $F(x)$ и $\widetilde{F}(x)$ соответственно. Обозначим через $\xi(t)$ число заявок в системе в момент времени $t$ и рассмотрим два порога: $h_1 \leq h_2$. Если $t$ — момент начала обслуживания очередной заявки и $\xi(t) > h_2$ $(\,1 \leq h_2 \leq m-1\,)$, то $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = \widetilde{F}(x)$ $(\,x \geq 0\,)$, $\widetilde{F}(0) = 0$, то есть применяется послепороговый режим обслуживания. Возвращение к основному режиму осуществляется в момент начала обслуживания очередной заявки, для которой $\xi(t) \leq h_1$ $(\,1 \leq h_1 \leq m-1\,)$. Для основного режима $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ $(\,x \geq 0\,)$, $F(0) = 0$. Итак, если в момент начала обслуживания заявки $\xi(t) \leq h_1$, то применяется основной режим, если $\xi(t) > h_2$ — послепороговый, а если $h_1 < \xi(t) \leq h_2$, то для очередной заявки сохраняется режим обслуживания предыдущей заявки. Обозначим описанную систему обслуживания через $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2), \widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$.

## 3. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\mathbf{P}_{F,n}$ $(\mathbf{P}_{\widetilde{F},n})$ условную вероятность при условии, что в начальный момент времени в системе находится $n \geq 0$ $(n \geq h_1+1)$ заявок и начинается обслуживание заявки, время обслуживания которой распределено по закону $F(x)$ $\big(\widetilde{F}(x)\big)$, и через $\mathbf{M}$ $(\mathbf{P})$ условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что система начинает работать, когда прибывает первая группа заявок. Будем использовать следующие обозначения: $\eta(x)$ — число заявок, поступивших в систему на промежутке времени $[0;\, x)$; $a_i^{k*}$ — $k$–кратная свёртка последовательности $a_i$; $\rho_k(m) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k\,\}$ — стационарное распределение числа заявок в системе; $a(s,\, z) = s + \lambda\big(1 - \alpha(z)\big)$. Пусть

$$f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF(x), \qquad M = \int\limits_0^\infty x dF(x) < \infty, \qquad \overline{F}(x) = 1 - F(x);$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k < \infty; \qquad \alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k a_k; \qquad \overline{a}_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k,$$

$$\overline{p}_n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k(s), \qquad \overline{q}_n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} q_k(s), \qquad \sum_{k=1}^{0} c_k = 0.$$

Для Re $s \geq 0$ определим последовательности $p_i(s)$ $(i = -1, 0, 1, \dots)$ и $q_i(s)$ $(i = 0, 1, \dots)$ с помощью соотношений

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i(s) = \frac{f(a(s,z))}{z f(s)}, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i(s) = \frac{1 - f(a(s,z))}{a(s,z)}, \tag{1}$$

то есть

$$\begin{gathered} p_i(s) = \frac{1}{f(s)} \int_0^{\infty} e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i+1\}\, dF(x) = \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x); \\ q_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i\,\}\, \overline{F}(x)\, dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}(x)\, dx. \end{gathered} \tag{2}$$

Функции $R_k(s)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ определим с помощью равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(s) = \frac{z}{f\big(a(s,z)\big) - z}, \qquad |z| < \nu_-(s), \tag{3}$$

где $\nu_-(s)$ — единственный корень уравнения $f\big(a(s,z)\big) = z$ на промежутке $[0; 1]$.

Поскольку $\sum\limits_{i=-1}^{\infty} p_i(s) = 1$, то $p_i(s)$ $(i \geq -1)$ можно интерпретировать как распределение скачков некоторого непрерывного снизу случайного блуждания, которое зависит от параметра $s \geq 0$ и соответствует функции распределения $F(x)$ основного режима обслуживания.

Пусть $\rho = \lambda M b_1$, $\nu_- = \lim\limits_{s \to +0,\ \rho > 1} \nu_-(s)$;

$$p_i = \lim_{s \to +0} p_i(s), \qquad R_i = \lim_{s \to +0} R_i(s), \qquad q_i = \lim_{s \to +0} q_i(s). \tag{4}$$

Тогда из равенств (1)–(3) получим:

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i = \frac{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{z}; \qquad p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k = \frac{z}{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) - z}, \qquad |z| < \min\{1, \nu_-\};$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i = \frac{1 - f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{\lambda(1-\alpha(z))}, \quad q_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}(x)\, dx, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = M.$$

Аналогично определим функции и постоянные, описывающие непрерывное снизу случайное блуждание, соответствующее распределению времени обслуживания $\widetilde{F}(x)$ послепорогового режима. Их будем помечать символом "волна", например,

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\widetilde{F}(x), \qquad \widetilde{M} = \int_0^{\infty} x d\widetilde{F}(x) < \infty, \qquad \overline{\widetilde{F}}(x) = 1 - \widetilde{F}(x);$$

$$\widetilde{p}_i(s) = \frac{1}{\widetilde{f}(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, d\widetilde{F}(x);$$

$$\widetilde{q}_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{\widetilde{F}}(x)\, dx; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{q}_k = \widetilde{M}$$

и так далее.

Рассмотрим систему уравнений относительно функций $\Phi_n(s,\,k)$ $(n = \overline{0,m})$

$$\Phi_n(s,\,k) - f(s) \sum_{i=-1}^{m-n-1} p_i(s)\Phi_{n+i}(s,\,k) = f(s)L_n(s)\Phi_m(s,\,k) + M_n(s,\,k) \qquad (n = \overline{1,m}\,), \tag{5}$$

где $M_n(s,\,k)$, $L_n(s)$ — заданные функции. Непосредственно из теоремы 2 работы [15] получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Общее решение системы уравнений* (5) *представляется в виде*

$$\Phi_n(s,\,k) = D_n(s)\Phi_m(s,\,k) - \sum_{i=1}^{m-n} R_i(s)M_{n+i}(s,\,k), \qquad 1 \le n \le m, \tag{6}$$

*где*

$$D_n(s) = R_{m-n}(s) - f(s) \sum_{i=1}^{m-n} R_i(s)L_{n+i}(s), \quad n \ge 0.$$

Отметим, что решения (6) определены с точностью до величины $\Phi_m(s,\,k)$, для отыскания которой следует использовать граничное условие при $n = 0$.

## 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ НА ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ

Пусть $\tau(m) = \inf\{\, t \ge 0 \,:\, \xi(t) = 0 \,\}$ обозначает первый период занятости для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ и

$$\begin{aligned}
&\varphi_{F,n}(t,\,k) = \mathbf{P}_{F,n}\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\} \qquad (\,1 \le n,\ k \le m+1\,);\\
&\varphi_{\widetilde{F},n}(t,\,k) = \mathbf{P}_{\widetilde{F},n}\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\} \qquad (h_1 + 1 \le n \le m+1;\ 1 \le k \le m+1\,);\\
&\varphi_n(t,\,k) = \begin{cases} \varphi_{F,n}(t,\,k), & n = \overline{1,h_2}\,;\\ \varphi_{\widetilde{F},n}(t,\,k), & n = \overline{h_2+1,m+1}\,; \end{cases}\\
&\Phi_n(s,\,k) = \int_0^\infty e^{-st}\varphi_n(t,\,k)\,dt, \qquad \widetilde{\Phi}_n(s,\,k) = \int_0^\infty e^{-st}\varphi_{\widetilde{F},n}(t,\,k)\,dt, \qquad \mathrm{Re}\ s > 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

С помощью формулы полной вероятности для функций $\varphi_n(t,\,k)$ и $\varphi_{\widetilde{F},n}(t,\,k)$ получим равенства

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t,\,k) &= \sum_{j=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = j\,\}\,\varphi_{n+j-1}(t-x,\,k)\,dF(x)\\
&+ \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) \ge m+1-n\,\}\,\varphi_m(t-x,\,k)\,dF(x) + \big(\mathbf{P}\{\eta(t) = k-n\,\}\\
&+ I\{k = m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t) \ge m+2-n\,\}\big)\overline{F}(t) \quad (1 \le n \le h_2);
\end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\widetilde{F},n}(t,\,k) = \sum_{j=0}^{m-n} \int\limits_0^t \mathbf{P}\{\eta(x)=j\,\}\,\varphi_{\widetilde{F},n+j-1}(t-x,\,k)\,d\widetilde{F}(x) \\
+ \int\limits_0^t \mathbf{P}\{\eta(x)\ge m+1-n\,\}\,\varphi_{\widetilde{F},m}(t-x,\,k)\,d\widetilde{F}(x) + \big(\mathbf{P}\{\eta(t)=k-n\,\} \\
+ I\{k=m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t)\ge m+2-n\,\}\big)\overline{\widetilde{F}}(t) \quad (h_1+1\le n\le m).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 либо 0, в зависимости от того, состоялось событие $A$ или нет. Доопределим уравнения (8) и (9) очевидными граничными условиями

$$
\varphi_0(t,\,k)=0, \qquad \varphi_{\widetilde{F},h_1}(t,\,k)=\varphi_{h_1}(t,\,k). \tag{10}
$$

Введём обозначения:

$$
\widetilde{A}_n(s) = 1+\big(1-\widetilde{f}(s)\big)\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s); \quad C_n(s) = R_{h_2-n}(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)p_{h_2-n-i}(s);
$$

$$
\widetilde{D}_n(s) = -f(s)\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)\Bigg(\sum_{j=h_2+1}^{m-1} p_{j-n-i}(s)\widetilde{A}_j(s) + \overline{p}_{m-n-i}(s)\Bigg);
$$

$$
D_n(s,\,k) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)f_{n+i}(s,\,k) - f(s)\sum_{u=1}^{h_2-n} R_u(s)\sum_{j=h_2+1}^{m-1} p_{j-n-i}(s)\sum_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{j+i}(s,\,k);
$$

$$
f_n(s,\,k) = q_{k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s); \quad \widetilde{f}_n(s,\,k) = \widetilde{q}_{k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{q}}_{m+2-n}(s).
$$

Перейдём в (8)–(10) к преобразованиям Лапласа. Учитывая обозначения (7), соотношения (2) и аналогичные равенства для $\widetilde{p}_i(s)$ и $\widetilde{q}_i(s)$, получим две системы уравнений для определения функций $\Phi_n(s,\,k)$ и $\widetilde{\Phi}_n(s,\,k)$

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(s,\,k) = f(s)\sum_{j=0}^{m-n} p_{j-1}(s)\Phi_{n+j-1}(s,\,k) \\
+ f(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_m(s,\,k) + f_n(s,\,k) \qquad (1\le n\le h_2),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_n(s,\,k) = \widetilde{f}(s)\sum_{j=0}^{m-n} \widetilde{p}_{j-1}(s)\widetilde{\Phi}_{n+j-1}(s,\,k) \\
+ \widetilde{f}(s)\overline{\widetilde{p}}_{m-n}(s)\widetilde{\Phi}_m(s,\,k) + \widetilde{f}_n(s,\,k) \qquad (h_1+1\le n\le m)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

с граничными условиями

$$
\Phi_0(s,\,k)=0, \qquad \widetilde{\Phi}_{h_1}(s,\,k)=\Phi_{h_1}(s,\,k). \tag{13}
$$

Используя лемму 1 и равенство

$$
\widetilde{f}(s)\sum_{j=1}^{n}\widetilde{R}_j(s)\overline{\widetilde{p}}_{n-j}(s) = \widetilde{R}_n(s) - \big(1-\widetilde{f}(s)\big)\sum_{j=1}^{n}\widetilde{R}_j(s) - 1 \qquad (n\ge 1),
$$

которое вытекает из соотношения для функций $\widetilde{R}_i(s)$, аналогичного равенству (3), получим решения системы (12)

$$\widetilde{\Phi}_n(s,\, k) = \widetilde{A}_n(s)\widetilde{\Phi}_m(s,\, k) - \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{n+i}(s,\, k) \qquad (h_1 \le n \le m). \tag{14}$$

Систему уравнений (11) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_n(s,\, k) - f(s)\sum_{j=-1}^{h_2-n-1} p_j(s)\Phi_{n+j}(s,\, k) &= f(s)\sum_{j=h_2-n}^{m-n-1} p_j(s)\Phi_{n+j}(s,\, k) \\ &+ f(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_m(s,\, k) + f_n(s,\, k) \qquad (1 \le n \le h_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Снова используя лемму 1, из (15) получим

$$\begin{aligned} \Phi_n(s,\, k) = R_{h_2-n}(s)\Phi_{h_2}(s,\, k) - \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)\Bigg(& f(s)\sum_{j=h_2}^{m-1} p_{j-n-i}\Phi_j(s,\, k) \\ &+ f(s)\overline{p}_{m-n-i}(s)\Phi_m(s,\, k) + f_{n+i}(s,\, k)\Bigg) \qquad (1 \le n \le h_2). \end{aligned} \tag{16}$$

Из (7) следует, что $\Phi_n(s,\, k) = \widetilde{\Phi}_n(s,\, k)$ для $n = \overline{h_2+1, m}$. Поэтому, выразив с помощью (14) все $\Phi_n(s,\, k)$ для $n = \overline{h_2+1, m-1}$ и подставив их в (16), получим

$$\Phi_n(s,\, k) = C_n(s)\Phi_{h_2}(s,\, k) + \widetilde{D}_n(s)\Phi_m(s,\, k) - D_n(s,\, k) \qquad (1 \le n \le h_2 - 1). \tag{17}$$

Нам осталось использовать граничные условия (13) для определения $\Phi_{h_2}(s,\, k)$ и $\Phi_m(s,\, k)$. В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi_{h_2}(s,\, k) &= \frac{1}{C_0(s)}\Big(D_0(s,\, k) - \widetilde{D}_0(s)\Phi_m(s,\, k)\Big); \\ \Phi_m(s,\, k) &= \frac{C_{h_1}(s)D_0(s,\, k) + C_0(s)\left(\sum\limits_{i=1}^{m-h_1} \widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{h_1+i}(s,\, k) - D_{h_1}(s,\, k)\right)}{C_{h_1}(s)\widetilde{D}_0(s) + C_0(s)\big(\widetilde{A}_{h_1}(s) - \widetilde{D}_{h_1}(s)\big)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Используя равенства (14), (17) и (18), приходим к следующему утверждению относительно распределения числа заявок на периоде занятости для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2), \widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ (будем считать, что $R_0(s) \equiv 1$, тогда $C_{h_2}(s) \equiv 1$, и это тождество позволит нам сократить формулировку теоремы).

**Теорема 1.** *Для произвольных* $1 \le k \le m+1$ *и* $\operatorname{Re} s > 0$ *имеют место представления*

$$\begin{aligned} \Phi_n(s,\, k) &= \frac{1}{C_0(s)}\left(C_n(s)D_0(s,\, k) + \Big(C_0(s)\widetilde{D}_n(s) - C_n(s)\widetilde{D}_0(s)\Big)\Phi_m(s,\, k)\right) \\ &\qquad\qquad - D_n(s,\, k) \qquad (1 \le n \le h_2); \\ \Phi_n(s,\, k) &= \widetilde{A}_n(s)\Phi_m(s,\, k) - \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{n+i}(s,\, k) \qquad (h_2 + 1 \le n \le m); \\ \widetilde{\Phi}_n(s,\, k) &= \widetilde{A}_n(s)\Phi_m(s,\, k) - \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{n+i}(s,\, k) \qquad (h_1 + 1 \le n \le h_2), \end{aligned} \tag{19}$$

*где* $\Phi_m(s,\, k)$ *определяется согласно* (18).

## 5. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если система начинает работать в момент прибытия первой группы заявок, то для всех $1 \leq k \leq m+1$ с помощью формулы полной вероятности получим равенства:

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n\Phi_n(s,\,k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}(s,\,k). \tag{20}$$

Учитывая, что

$$\varphi_{m+1}(t,\,k) = \int_0^t \varphi_m(t-x,\,k)\,d\widetilde{F}(x) + I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{F}}(t);$$

$$\Phi_{m+1}(s,\,k) = \widetilde{f}(s)\Phi_m(s,\,k) + I\{k=m+1\}\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,,$$

и используя соотношения (19), можем подробно расписать правую часть (20)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt &= \frac{D_0(s,\,k)}{C_0(s)}\sum_{n=1}^{h_2} a_nC_n(s) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_nD_n(s,\,k)\\ &+ \frac{\Phi_m(s,\,k)}{C_0(s)}\Bigg(\sum_{n=1}^{h_2-1} a_n\Big(C_0(s)\widetilde{D}_n(s) - C_n(s)\widetilde{D}_0(s)\Big) + C_0(s)\sum_{n=h_2+1}^{m} a_n\widetilde{A}_n(s)\\ &- a_{h_2}\widetilde{D}_0(s) + C_0(s)\widetilde{f}(s)\overline{a}_{m+1}\Bigg) - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)\widetilde{f}_{n+i}(s,\,k)\\ &+ \overline{a}_{m+1}I\{k=m+1\}\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Для вычисления $\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau>t\,\}\,dt$ необходимо просуммировать обе части равенства (21) по $k$ от 1 до $m+1$.

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{m+1} f_n(s,\,k) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(s) = \frac{1-f(s)}{s}\,; \qquad \sum_{k=1}^{m+1} \widetilde{f}_n(s,\,k) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{q}_k(s) = \frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,.$$

Обозначив $\sum\limits_{k=1}^{m+1} D_n(s,\,k)$ через $D_n(s)$, получим

$$D_n(s) = \frac{1-f(s)}{s}\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s) - \frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}f(s)\sum_{u=1}^{h_2-n} R_u(s)\sum_{j=h_2+1}^{m-1} p_{j-n-u}(s)\sum_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i(s).$$

Итак, из (21) вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Преобразование Лапласа от функции распределения периода занятости системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ *представляется в виде*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau>t\,\}\,dt &= \frac{D_0(s)}{C_0(s)}\sum_{n=1}^{h_2} a_nC_n(s) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_nD_n(s)\\ &+ \frac{\Phi_m(s)}{C_0(s)}\Bigg(\sum_{n=1}^{h_2-1} a_n\Big(C_0(s)\widetilde{D}_n(s) - C_n(s)\widetilde{D}_0(s)\Big) + C_0(s)\sum_{n=h_2+1}^{m} a_n\widetilde{A}_n(s)\end{aligned} \tag{22}$$

$$-a_{h_2}\widetilde{D}_0(s)+C_0(s)\widetilde{f}(s)\overline{a}_{m+1}\Bigg)-\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\left(\sum_{n=h_2+1}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)-\overline{a}_{m+1}\right),$$

*где*

$$\Phi_m(s)=\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_m(s,\,k)=\frac{C_{h_1}(s)D_0(s)+C_0(s)\left(\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\sum\limits_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{R}_i(s)-D_{h_1}(s)\right)}{C_{h_1}(s)\widetilde{D}_0(s)+C_0(s)\big(\widetilde{A}_{h_1}(s)-\widetilde{D}_{h_1}(s)\big)}.$$

Выполним вычисления, необходимые для перехода в (22) к пределу при $s\to+0$. Будем использовать последовательности $\{p_i\}$, $\{q_i\}$, $\{R_i\}$, определённые в (4), и последовательности $\{\widetilde{p}_i\}$, $\{\widetilde{q}_i\}$, $\{\widetilde{R}_i\}$, определяемые соотношениями

$$\widetilde{p}_i=\lim_{s\to+0}\widetilde{p}_i(s),\qquad \widetilde{R}_i=\lim_{s\to+0}\widetilde{R}_i(s),\qquad \widetilde{q}_i=\lim_{s\to+0}\widetilde{q}_i(s).$$

Учитывая, что

$$f(0)=\widetilde{f}(0)=1;\qquad \lim_{s\to+0}\frac{1-f(s)}{s}=M;\qquad \lim_{s\to+0}\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}=\widetilde{M};$$

$$\widetilde{A}_n(0)=1;\quad R_{k+1}=\frac{R_k-\sum\limits_{i=0}^{k-1}p_iR_{k-i}}{p_{-1}}\quad(k\geq 1);\quad R_n-\sum_{i=1}^{n}R_i\overline{p}_{n-i}=1,$$

получим

$$C_n(0)=R_{h_2-n}-\sum_{i=1}^{h_2-n}R_ip_{h_2-n-i}=p_{-1}R_{h_2+1-n};$$

$$\widetilde{D}_n(0)=-\sum_{i=1}^{h_2-n}R_i\overline{p}_{h_2+1-n-i}=1-R_{h_2+1-n}+R_{h_2+1-n}(1-p_{-1})=1-p_{-1}R_{h_2+1-n};$$

$$D_n(0)=M\sum_{i=1}^{h_2-n}R_i-\widetilde{M}\sum_{u=1}^{h_2-n}R_u\sum_{j=h_2+1}^{m-1}p_{j-n-u}\sum_{i=1}^{m-j}\widetilde{R}_i.$$

Введём обозначения:

$$R(h_1,h_2)=\frac{1}{R_{h_2-h_1+1}}\left(R_{h_2+1}-\sum_{n=1}^{h_2}a_nR_{h_2+1-n}\right);$$

$$r_k(h_2)=\sum_{i=1}^{h_2}R_ip_{k-i}-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\sum_{i=1}^{h_2-n}R_ip_{k-n-i};$$

$$r_k(h_1,h_2)=r_k(h_2)-R(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{h_2-h_1}R_ip_{k-h_1-i}\,.$$

После перехода в равенстве (22) к пределу при $s\to+0$ получим формулу для средней продолжительности периода занятости.

**Теорема 3.** *Для системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ *средняя продолжительность периода занятости определяется в виде*

$$\mathbf{M}\,\tau(m)=M\,T_0(h_1,h_2)+\widetilde{M}T_1(m,h_1,h_2), \tag{23}$$

*где*

$$T_0(h_1,h_2)=\sum_{i=1}^{h_2}R_i\overline{a}_{h_2+1-i}-R(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{h_2-h_1}R_i;$$

$$T_1(m,h_1,h_2)=R(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{R}_i-\sum_{n=h_2+1}^{m-1}r_n(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i-\sum_{n=h_2+1}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i+\overline{a}_{m+1}.$$

Вследствие ограниченности очереди и того, что входной поток является пуассоновским, стационарное распределение числа заявок для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ существует при условии, что математические ожидания случайных величин $\theta_n$ и $\beta_n$ конечны, то есть $b<\infty$, $M<\infty$, $\widetilde{M}<\infty$.

Положив в (21) $s=0$, для всех $1\le k\le m+1$ получим соотношения

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt&=\sum_{i=1}^{h_2}R_if_i(k)-R(h_1,h_2)\Bigg(\sum_{i=1}^{h_2-h_1}R_if_{h_1+i}(k)\\&-\sum_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{R}_i\widetilde{f}_{h_1+i}(k)\Bigg)-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\sum_{i=1}^{h_2-n}R_if_{n+i}(k)-\sum_{n=h_2+1}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i\widetilde{f}_{n+i}(k)\\&-\sum_{n=h_2+1}^{m-1}r_n(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i\widetilde{f}_{n+i}(k)+I\{k=m+1\}\widetilde{M}\overline{a}_{m+1},\end{aligned}\tag{24}$$

где $f_n(k)=q_{k-n}+I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-n}$; $\widetilde{f}_n(k)=\widetilde{q}_{k-n}+I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{q}}_{m+2-n}$.

Из (24), рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 2 статьи [12], получим следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Для системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ *стационарное распределение числа заявок определяется по формулам*

$$\begin{aligned}\rho_0(m)&=\frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\,;\\ \rho_k(m)&=\lambda\rho_0(m)\Bigg(\sum_{i=1}^{k}R_iq_{k-i}-\sum_{n=1}^{k-1}a_n\sum_{i=1}^{k-n}R_iq_{k-n-i}\Bigg)\qquad(\,k=\overline{1,\,h_1}\,);\\ \rho_k(m)&=\lambda\rho_0(m)\Bigg(\sum_{i=1}^{k}R_iq_{k-i}-R(h_1,h_2)\Big(\sum_{i=1}^{k-h_1}R_iq_{k-h_1-i}\\&-\sum_{i=1}^{k-h_1}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-h_1-i}\Big)-\sum_{n=1}^{k-1}a_n\sum_{i=1}^{k-n}R_iq_{k-n-i}\Bigg)\qquad(\,k=\overline{h_1+1,\,h_2}\,);\\ \rho_k(m)&=\lambda\rho_0(m)\Bigg(\sum_{i=1}^{h_2}R_iq_{k-i}-R(h_1,h_2)\Big(\sum_{i=1}^{h_2-h_1}R_iq_{k-h_1-i}\\&-\sum_{i=1}^{k-h_1}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-h_1-i}\Big)-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\sum_{i=1}^{h_2-n}R_iq_{k-n-i}-\sum_{n=h_2+1}^{k-1}a_n\sum_{i=1}^{k-n}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-n-i}\\&-\sum_{n=h_2+1}^{k-1}r_n(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{k-n}\widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-n-i}\Bigg)\qquad(\,k=\overline{h_2+1,\,m}\,);\end{aligned}\tag{25}$$

$$\rho_{m+1}(m) = \lambda\rho_0(m)\Big(\sum_{i=1}^{h_2} R_i\overline{q}_{m+1-i} - R(h_1,h_2)\Big(\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i\overline{q}_{m+1-h_1-i}$$
$$- \sum_{i=1}^{m-h_1} \widetilde{R}_i\overline{\widetilde{q}}_{m+1-h_1-i}\Big) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i\overline{q}_{m+1-n-i} - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i\overline{\widetilde{q}}_{m+1-n-i}$$
$$- \sum_{n=h_2+1}^{m-1} r_n(h_1,h_2) \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i\overline{\widetilde{q}}_{m+1-n-i}) + \widetilde{M}\overline{a}_{m+1}\Big).$$

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Используя свойство эргодичности процесса $\xi(t)$, формулу для стационарной вероятности обслуживания $\mathbf{P}_{\rm sv}(m)$ для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ можно получить как отношение среднего числа обслуженных заявок за единицу времени $\big(1-\rho_0(m)\big)/\overline{M}$ к среднему числу всех прибывших за единицу времени, равному $\lambda b_1$. Здесь $\overline{M}$ — среднее время обслуживания одной заявки, определяемое по формуле

$$\frac{1}{\overline{\overline{M}}} = \frac{\mathbf{M}\,\tau_0(m)}{M\mathbf{M}\,\tau(m)} + \frac{\mathbf{M}\,\widetilde{\tau}(m)}{\widetilde{M}\mathbf{M}\,\tau(m)}\,,$$

где $\mathbf{M}\,\tau_0(m)$ и $\mathbf{M}\,\widetilde{\tau}(m)$ — средние продолжительности частей периода занятости, соответствующих основному и послепороговому режимам обслуживания. В результате получим следующую формулу для вероятности обслуживания

$$\mathbf{P}_{\rm sv}(m) = \frac{T_0(h_1,h_2) + T_1(m,h_1,h_2)}{b_1\big(1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)\big)}\,. \tag{26}$$

Стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{M}\,Q(m)$ и среднее время ожидания $\mathbf{M}\,w(m)$ — найдём по формулам

$$\mathbf{M}\,Q(m) = \sum_{k=1}^{m} k\rho_{k+1}(m); \qquad \mathbf{M}\,w(m) = \frac{\mathbf{M}\,Q(m)}{\lambda b_1\mathbf{P}_{\rm sv}(m)}\,. \tag{27}$$

## 7. ПРИМЕРЫ. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

Из равенств (2)–(4) следуют рекуррентные соотношения:

$$R_1 = \frac{1}{p_{-1}}\,, \qquad R_{k+1} = \frac{R_k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}}{p_{-1}} \qquad (\,k\ge 1\,);$$
$$q_0 = \frac{1-f(\lambda)}{\lambda}\,, \qquad q_k = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda} \qquad (\,k\ge 1\,).$$

Аналогично определяются последовательности $\widetilde{q}_k$ $(k\ge 0)$, $\widetilde{R}_k$ $(k\ge 1)$.

Определим последовательности $p_k$ и $\widetilde{p}_k$ $(k\ge -1)$ для случая, когда заявки могут прибывать только по одной или по две $(a_1+a_2=1)$, время обслуживания основного режима распределено равномерно на отрезке $[a,\,b]$, а время обслуживания послепорогового режима распределено по закону Эрланга второго порядка с параметром $\widetilde{\mu}$. Средние значения времени обслуживания равны $M=(a+b)/2$ и $\widetilde{M}=2/\widetilde{\mu}$ соответственно. Введя обозначения

$$S_n(a,b) = \frac{1}{\lambda(b-a)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(a\lambda)^k}{k!}\,e^{-a\lambda} - \frac{(b\lambda)^k}{k!}\,e^{-b\lambda}\right) \qquad (n\ge 0),$$

по формулам (2), (4) получим

$$p_{-1} = S_0(a,b), \qquad p_0 = a_1 S_1(a,b), \qquad p_1 = a_1^2 S_2(a,b) + a_2 S_1(a,b);$$
$$p_2 = a_1^3 S_3(a,b) + 2a_1 a_2 S_2(a,b), \quad p_3 = a_1^4 S_4(a,b) + 3a_1^2 a_2 S_3(a,b) + a_2^2 S_2(a,b);$$
$$p_4 = a_1^5 S_5(a,b) + 4a_1^3 a_2 S_4(a,b) + 3a_1 a_2^2 S_3(a,b);$$
$$p_5 = a_1^6 S_6(a,b) + 5a_1^4 a_2 S_5(a,b) + 6a_1^2 a_2^2 S_4(a,b) + a_2^3 S_3(a,b);$$
$$p_6 = a_1^7 S_7(a,b) + 6a_1^5 a_2 S_6(a,b) + 10a_1^3 a_2^2 S_5(a,b) + 4a_1 a_2^3 S_4(a,b);$$
$$p_7 = a_1^8 S_8(a,b) + 7a_1^6 a_2 S_7(a,b) + 15a_1^4 a_2^2 S_6(a,b) + 10a_1^2 a_2^3 S_5(a,b) + a_2^4 S_4(a,b);$$
$$\widetilde{p}_{-1} = \frac{\widetilde{\mu}^2}{(\lambda+\widetilde{\mu})^2}; \qquad \widetilde{p}_0 = \frac{2a_1\widetilde{\mu}^2\lambda}{(\lambda+\widetilde{\mu})^3}; \qquad \widetilde{p}_1 = \frac{3a_1^2\widetilde{\mu}^2\lambda^2}{(\lambda+\widetilde{\mu})^4} + \frac{2a_2\widetilde{\mu}^2\lambda}{(\lambda+\widetilde{\mu})^3};$$
$$\widetilde{p}_2 = \frac{4a_1^3\widetilde{\mu}^2\lambda^3}{(\lambda+\widetilde{\mu})^5} + \frac{6a_1a_2\widetilde{\mu}^2\lambda^2}{(\lambda+\widetilde{\mu})^4}; \qquad \widetilde{p}_3 = \frac{5a_1^4\widetilde{\mu}^2\lambda^4}{(\lambda+\widetilde{\mu})^6} + \frac{12a_1^2a_2\widetilde{\mu}^2\lambda^3}{(\lambda+\widetilde{\mu})^5} + \frac{3a_2^2\widetilde{\mu}^2\lambda^2}{(\lambda+\widetilde{\mu})^4};$$
$$\widetilde{p}_4 = \frac{6a_1^5\widetilde{\mu}^2\lambda^5}{(\lambda+\widetilde{\mu})^7} + \frac{20a_1^3a_2\widetilde{\mu}^2\lambda^4}{(\lambda+\widetilde{\mu})^6} + \frac{12a_1a_2^2\widetilde{\mu}^2\lambda^3}{(\lambda+\widetilde{\mu})^5}.$$

Рассмотрим пример со следующими числовыми данными: $a_1 = 0,75$; $a_2 = 0,25$; $m = 6$; $\lambda = 1$; $a = 1/3$; $b = 1$; $\widetilde{\mu} = 6$. Тогда $M = 2/3$; $\widetilde{M} = 1/3$; $b_1 = 1,25$, и, например, для значений порогов $h_1 = 3$, $h_2 = 5$ средняя продолжительность периода занятости $\mathbf{M}\,\tau(m)$, найденная по формуле (23), составляет 3,3878. В строке "$\rho_k(m)$" табл. 1 записаны стационарные вероятности $\rho_k(m)$, вычисленные по формулам (25). В нижней строке этой таблицы для сравнения приведены значения соответствующих вероятностей, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [17, 18] для значения времени $t = 10^6$. В табл. 2 дано сравнение стационарных характеристик, вычисленных при тех же значениях параметров по формулам (26), (27), и полученных с помощью GPSS World [17, 18] для $t = 10^6$.

**Таблица 1.** Стационарное распределение числа заявок ($h_1 = 3$, $h_2 = 5$)

| Число заявок ($k$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_k(m)$ | 0,2279 | 0,2079 | 0,1916 | 0,1542 | 0,1070 | 0,0663 | 0,0320 | 0,0131 |
| $\rho_k(m)$ (GPSS World) | 0,2280 | 0,2080 | 0,1918 | 0,1532 | 0,1076 | 0,0664 | 0,0320 | 0,0130 |

**Таблица 2.** Стационарные характеристики ($h_1 = 3$, $h_2 = 5$)

| Характеристика | $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ | $\mathbf{M}\,Q(m)$ | $\mathbf{M}\,w(m)$ |
|---|---|---|---|
| Аналитическое значение | 0,9805 | 1,3249 | 1,0811 |
| Значение согласно GPSS World | 0,9810 | 1,3250 | 1,0820 |

В табл. 3 приведены значения стационарных характеристик для различных значений порогов $h_1$, $h_2$. Случай, когда $h_1 = h_2 = 6$, соответствует системе $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ со временем обслуживания, равномерно распределённым на отрезке [1/3; 1] (функция распределения $F(x)$).

Анализируя даные табл. 3, видим, что при фиксированном значении $h_1$ с возрастанием $h_2$ монотонно возрастают среднее значение периода занятости $\mathbf{M}\,\tau(m)$, средняя длина очереди $\mathbf{M}\,Q(m)$ и среднее время ожидания $\mathbf{M}\,w(m)$ и монотонно убывает вероятность простоя системы $\rho_0(m)$. Их данных табл. 3 следует, что применяя гистерезисную двухпороговую стратегию и увеличивая в 2 раза интенсивность обслуживания, можно (для данных рассмотренного примера) почти в 3 раза уменьшить среднюю длину очереди и в 3 раза — среднее время ожидания. Среднее число обслуженных заявок за единицу времени возрастает при этом в 1,04 раза.

Пользуясь данными табл. 3, можно найти решения задач оптимального синтеза системы обслуживания с заданными характеристиками. Сформулируем задачу оптимального синтеза так: *для данных рассматриваемого примера найти такие наибольшие значения порогов $h_1$ и $h_2$ (с наибольшей суммой $h_1 + h_2$), при которых характеристики системы удовлетворяют условиям: $\rho_0(m) \le \widetilde{\rho}_0$; $\lambda b_1 \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) \ge S_0$; $\mathbf{M}\,w(m) \le w_0$, где $\widetilde{\rho}_0$, $S_0$, $w_0$ — заданные числа.* Решения этой задачи $h_{1\,\mathrm{opt}}$, $h_{2\,\mathrm{opt}}$, полученные с помощью табл. 3 для различных значений $\widetilde{\rho}_0$, $S_0$ и $w_0$, приведены в табл. 4.

**Таблица 3.** Стационарные характеристики для различных значений $h_1$ и $h_2$

| $h_1$ | $h_2$ | $\mathbf{M}\,\tau(m)$ | $\rho_0(m)$ | $\lambda b_1 \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ | $\mathbf{M}\,Q(m)$ | $\mathbf{M}\,w(m)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1,7985 | 0,3573 | 1,2447 | 0,5752 | 0,4641 |
| 1 | 2 | 2,1955 | 0,3129 | 1,2428 | 0,7388 | 0,5945 |
| 1 | 3 | 2,4960 | 0,2860 | 1,2403 | 0,8854 | 0,7138 |
| 1 | 4 | 2,7870 | 0,2641 | 1,2359 | 1,0461 | 0,8464 |
| 1 | 5 | 3,0486 | 0,2470 | 1,2288 | 1,2026 | 0,9787 |
| 2 | 2 | 2,5434 | 0,2822 | 1,2415 | 0,8520 | 0,6863 |
| 2 | 3 | 2,7623 | 0,2658 | 1,2393 | 0,9674 | 0,7806 |
| 2 | 4 | 3,0010 | 0,2499 | 1,2349 | 1,1099 | 0,8988 |
| 2 | 5 | 3,2227 | 0,2368 | 1,2277 | 1,2535 | 1,0211 |
| 3 | 3 | 3,0367 | 0,2477 | 1,2368 | 1,0942 | 0,8847 |
| 3 | 4 | 3,2082 | 0,2376 | 1,2328 | 1,2018 | 0,9748 |
| 3 | 5 | 3,3878 | 0,2279 | 1,2256 | 1,3249 | 1,0811 |
| 4 | 4 | 3,4182 | 0,2263 | 1,2283 | 1,3220 | 1,0763 |
| 4 | 5 | 3,5449 | 0,2200 | 1,2219 | 1,4126 | 1,1561 |
| 5 | 5 | 3,6989 | 0,2128 | 1,2144 | 1,5161 | 1,2484 |
| 6 | 6 | 3,8897 | 0,2045 | 1,1932 | 1,6649 | 1,3953 |

**Таблица 4.** Решения задачи оптимального выбора порогов $h_1$ и $h_2$ для различных значений $\widetilde{\rho}_0$, $S_0$ и $w_0$

| $\widetilde{\rho}_0$ | $S_0$ | $w_0$ | $h_{1\,\mathrm{opt}}$ | $h_{2\,\mathrm{opt}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,22 | 1,22 | 1,16 | 4 | 5 |
| 0,23 | 1,23 | 0,98 | 3 | 4 |
| 0,25 | 1,23 | 0,89 | 3 | 3 |
| 0,26 | 1,23 | 0,79 | 2 | 3 |
| 0,29 | 1,24 | 0,69 | 2 | 2 |
| 0,32 | 1,24 | 0,60 | 1 | 2 |
| 0,36 | 1,24 | 0,47 | 1 | 1 |

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные, приведённые в таблицах 3 и 4, показывают, что применение двухпороговой гистерезисной стратегии открывает больше возможностей для повышения эффективности функционирования рассматриваемой системы обслуживания по сравнению со стратегией с одним порогом переключения интенсивности обслуживания.

## 9. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММА ДЛЯ GPSS WORLD

```
Lam EQU 1      ; значение λ
Myu EQU 6      ; значение μ
AH1 EQU 3      ; порог h1
AH2 EQU 5      ; порог h2
Em EQU 6      ; объём накопителя
VREM EQU 1000000      ; время моделирования
Ver VARIABLE N$MET2/N$MET1      ; вероятность обслуживания
QOCHE TABLE Q$OCHER,0,1,70      ; гистограмма распределения длины очереди
GENERATE 1
TABULATE QOCHE
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))      ; входной поток
TRANSFER 750,,MET1      ; значение a1
SPLIT 2,MET1      ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
MET1 TEST L Q$OCHER,Em,OUT ; ограничение на длину очереди
QUEUE OCHER
ASSIGN 1,Q$OCHER
TEST E P1,Em,MET_SE
LOGIC R KLU      ; выключить ключ
MET_SE SEIZE SYS
DEPART OCHER
TEST L Q$OCHER,AH2,MET_R      ; длина очереди меньше h2?
TEST E Q$OCHER,(AH1-1),METL      ; длина очереди равна h1 − 1?
LOGIC S KLU      ; включить ключ
TRANSFER ,MET_ADV
METL GATE LS KLU,METMU      ; включён ли ключ?
TRANSFER ,MET_ADV
MET_R LOGIC R KLU      ; выключить ключ
METMU ADVANCE((Exponential(5,0,(1/Myu)))+(Exponential(5,0,(1/Myu))))  ; обслуж. (режим 2)
TRANSFER ,MET2
MET_ADV ADVANCE (Uniform(105,1/3,1))   ; обслуживание (основной режим)
MET2 RELEASE SYS
TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE ,,,1
LOGIC S KLU      ; включить ключ
TERMINATE
GENERATE VREM
SAVEVALUE Ver,V$Ver
TERMINATE 1
START 1
```

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Choi B. D., Choi D. I. Queueing system with queue length dependent service time and its application to cell discarding scheme in ATM networks. *IEEE Proc.–Commun.*, 1996, vol. 143, № 1, pp. 5–11.
2. Choi D., Knessl C., Tier C. A queueing system with queue length dependent service times with applications to cell discarding in ATM networks. *J. of Appl. Math. and Stoch. Anal.*, 1999, vol. 12, № 1, pp. 35–62.
3. Choi B. D., Kim Y. Ch., Shin Y., Pearce Ch. E. M. The $M^X/G/1$ queue with length dependent service times. *J. of Appl. Math. and Stoch. Anal.*, 2001, vol. 14, № 4, pp. 399–419.
4. Li S. Q. Overload control in a finite message storage buffer. *IEEE Trans. Commun.*, 1989, vol. 37, № 12, pp. 1330–1338.
5. Sriram K., Lucantoni D. M. Traffic smoothing effects of bit dropping in a packet voice multiplexer. *IEEE Trans. Commun.*, 1989, vol. 37, № 7, pp. 703–712.
6. Sriram K., McKinney R. S., Sherif M. H. Voice packetization and compression in broadband ATM networks. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 1991, vol. 9, № 3, pp. 294–304.
7. Sriram K. Methodologies for bandwidth allocation, transmission scheduling and congestion avoidance in broadband ATM networks. *Computer Networks and ISDN Systems*, 1993, vol. 26, № 1, pp. 43–69.
8. Nishimura S., Jiang Y. An M/G/1 vacation model with two service modes. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1995, vol. 9, № 3, pp. 355–374.
9. Dudin A. Optimal control for an $M^x/G/1$ queue with two operation modes. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1997, vol. 11, № 2, pp. 255–265.
10. Nobel R. D., Tijms H. C. Optimal control for an $M^X/G/1$ queue with two service modes. *European Journal of Operational Research*, 1999, vol. 113, № 3, pp. 610–619.
11. Королюк В. С. *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.* Киев: Наукова думка, 1975.
12. Жерновый К. Ю. Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 2, стр. 159–180.
13. Жерновый К. Ю. Стационарные характеристики системы $M^\theta/G/1/m$ с пороговой стратегией функционирования. *Информационные процессы*, 2011, т. 11, № 2, стр. 179–195.
14. Жерновый К. Ю. Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и восстанавливающей блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2011, т. 11, № 2, стр. 203–224.
15. Bratiychuk M., Borowska B. Explicit formulae and convergence rate for the system $M^\alpha/G/1/N$ as $N \to \infty$. *Stochastic Models*, 2002, vol. 18, № 1, pp. 71–84.
16. Братійчук А. М. *Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою.* Кандидатська дисертація, Київ: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2008.
17. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.
18. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.