НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
Институт математики АН УССР, Киев, 1980

УДК 517.946.9:531.2:532.59

Ю.В.Жерновой

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УПРУГИХ ВОЛН НЕБОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Исходя из геометрически нелинейных уравнений задачи в перемещениях, вариационными методами получено дисперсионное соотношение и найдены разложения первого порядка для бегущих волн со слабо меняющимися амплитудами и фазами.

Рассмотрим неограниченную цилиндрическую оболочку постоянной толщины h и радиуса R срединной поверхности. Будем считать, что упругие свойства материала оболочки описываются линейным законом Гука, а для компонент деформаций срединной поверхности используем выражения, предложенные в [1] (при $k_x=0$, $k_y=\frac{1}{R}$). Предполагаем также, что оболочка не несет внешней нагрузки.

Из симметрии заключаем, что компонента v смещения в окружном направлении обращается в нуль. Тогда, используя вариационный метод, подробно изложенный в [2] , получаем уравнения движения оболочки в виде нелинейной системы двух дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций осевой координаты и времени $u(x,t)$, $w(x,t)$, представляющих компоненты вектора смещения соответственно в осевом и радиальном направлениях

$$
\begin{aligned}
&L_1(u,w)=B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\nu}{R}\,\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\gamma h}{g}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\
&L_2(u,w)=\frac{B}{R}\left(\frac{w}{R}-\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-B\left[\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{3}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\right. \qquad (1)\\
&\left.-\frac{\nu}{R}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}w+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\nu}{2R}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\gamma h}{g}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,
\end{aligned}
$$

где B – жесткость на растяжение-сжатие, D – цилиндрическая жесткость оболочки, ϑ – коэффициент Пуассона, g – ускорение силы тяжести, γ – удельный вес материала.

Целью настоящей работы является получение асимптотических разложений для периодических решений нелинейной системы (I) (соответствующих цугу волн), в которых зависимые переменные являются функциями фазы $\theta = kx - \omega t$. Причем, речь идет о медленно меняющихся решениях, т.е. о волновых пакетах, в которых амплитуда, волновое число и частота являются медленно меняющимися функциями пространственной координаты и времени.

Проверим сначала существование периодических волновых пакетов. Для этого приближенное решение системы (I) будем искать в виде бегущих волн

$$u = \tilde{u} = a\cos(\theta + \varphi), \qquad w = \tilde{w} = b\cos(\theta + \psi) + w_0$$

со сравнительно небольшими амплитудами a, b, фазой $\theta = kx - \omega t$ и постоянными сдвигами фаз φ, ψ.

Согласно методу Бубнова-Галеркина, будем требовать выполнения системы равенств

$$\int_0^{2\pi} L_i(\tilde{u}, \tilde{w})\cos\theta\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} L_i(\tilde{u}, \tilde{w})\sin\theta\, d\theta = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\int_0^{2\pi} L_2(\tilde{u}, \tilde{w})\, d\theta = 0.$$

В результате получим следующую систему ура ний:

$$\begin{aligned}
&-N(k,\omega)a\cos\varphi + \frac{B}{R}\vartheta k b\sin\psi = 0,\\
&N(k,\omega)a\sin\varphi + \frac{B}{R}\vartheta k b\cos\psi = 0,\\
&\frac{B}{R}\vartheta k a\sin\varphi + \left(M(k,\omega)b + \frac{3}{8}Bk^4 b^3\right)\cos\psi = 0,\\
&\frac{B}{R}\vartheta k a\cos\varphi - \left(M(k,\omega)b + \frac{3}{8}Bk^4 b^3\right)\sin\psi = 0, \qquad w_0 = \frac{1}{4}R\vartheta k^2 b^2,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$M(k,\omega) = \frac{B}{R^2} - \frac{\gamma h}{g}\omega^2 + Dk^4 - \frac{B}{R}\vartheta k^2 w_0, \qquad N(k,\omega) = Bk^2 - \frac{\gamma h}{g}\omega^2.$$

Исключая a из первой или из второй пары уравнений этой системы, получаем соотношение

$$\operatorname{tg}\varphi \sin\psi + \cos\psi = 0,$$

из которого находим взаимосвязь между φ и ψ

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2} . \tag{3}$$

При условиях $\sin\psi \neq 0$, $\cos\psi \neq 0$ система (2) сводится к следующей:

$$RN(k,\omega)a + B\vartheta k b = 0,$$
$$B\vartheta k a + R\left(M(k,\omega) + \frac{3}{8}Bk^4 b^2\right)b = 0,$$
$$w_0 = \frac{1}{4}R\vartheta k^2 b^2 .$$

Исключая a, получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^4 - \frac{g}{\gamma h}\left[B\left(k^2 + \frac{1}{R^2} + \frac{3}{8}k^4 b^2 - \frac{1}{4}\vartheta^2 k^4 b^2\right) + Dk^4\right]\omega^2 +$$
$$+ \frac{B^2 g^2}{R^2 \gamma^2 h^2}\left[k^2(1-\vartheta^2) + \frac{3}{8}R^2 k^6 b^2\right] + \frac{Bg^2 k^6}{\gamma^2 h^2}\left(D - \frac{1}{4}B\vartheta^2 b^2\right) = 0, \tag{4}$$

связывающее частоту ω и волновое число k. Нелинейность системы (I) приводит к зависимости дисперсионного соотношения от амплитуды b.

Таким образом, нелинейная система (I) допускает приближенное решение в виде бегущих волн

$$u = a\cos(kx - \omega t + \varphi), \quad w \simeq b\cos(kx - \omega t + \psi) + \frac{1}{4}R\vartheta k^2 b^2, \tag{5}$$

в котором сдвиги фаз φ, ψ связаны соотношением (3), а частота ω и волновое число k удовлетворяют дисперсионному соотношению (4), включающему также амплитуду b.

В дальнейшем медленно меняющееся решение системы (I) в форме ряда волн будем искать с помощью вариационного принципа Гамильтона в усредненной форме, предложенного Дж.Уиземом (см. [3, 4]).

Будем рассматривать малые решения системы (I) $u = \varepsilon u_1$, $w = \varepsilon w_1$, что позволяет ввести малый положительный параметр ε

$$B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\vartheta}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{B}{R}\left(\frac{w}{R}-\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-B\varepsilon\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{3}{2}\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}w+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\nu}{2R}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{I'}$$

Запишем лагранжиан, соответствующий системе (I′)

$$L=\frac{1}{2}B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4+\frac{w^2}{R^2}-\frac{2\nu}{R}w\frac{\partial u}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\varepsilon\frac{\nu}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 w\right]+\frac{1}{2}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\gamma h}{g}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что уравнения системы (I′) – уравнения Эйлера, соответствующие этому лагранжиану.

Учитывая соотношения (5) и (3), медленно меняющееся решение системы (I′) ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру ε

$$u=a\sin\theta+\varepsilon A_2\sin 2\theta+\varepsilon^2\sum_{n=3}^{\infty}A_n\sin n\theta+O(\varepsilon^3),$$

$$w=b\cos\theta+\varepsilon\left[B_2\cos 2\theta+w_0\right]+\varepsilon^2\sum_{n=3}^{\infty}B_n\cos n\theta+O(\varepsilon^3), \tag{7}$$

где

$$k=\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \omega=-\frac{\partial\theta}{\partial t}, \tag{8}$$

а величины a, b, ω, k, A_i и B_i – медленно меняющиеся функции от x и t. В предположении, что θ дважды непрерывно дифференцируема, из соотношений (8) можно получить условие совместности

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=0. \tag{9}$$

Найдем производные, входящие в лагранжиан (6)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\omega\cos\theta+\frac{\partial a}{\partial t}\sin\theta-2\varepsilon\omega A_2\cos 2\theta-\varepsilon^2\omega\sum_{n=3}^{\infty}nA_n\cos n\theta+O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ak\cos\theta+\frac{\partial a}{\partial x}\sin\theta+2\varepsilon kA_2\cos 2\theta+\varepsilon^2k\sum_{n=3}^{\infty}nA_n\cos\theta n+O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=b\omega\sin\theta+\frac{\partial b}{\partial t}\cos\theta+2\varepsilon\omega B_2\sin 2\theta+\varepsilon^2\omega\sum_{n=3}^{\infty}nB_n\sin n\theta+O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-bk\sin\theta+\frac{\partial b}{\partial x}\cos\theta-2\varepsilon kB_2\sin 2\theta-\varepsilon^2k\sum_{n=3}^{\infty}nB_n\sin n\theta+O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-bk^2\cos\theta-2\frac{\partial b}{\partial x}k\sin\theta+\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\cos\theta-4\varepsilon k^2B_2\cos 2\theta-$$

$$-\varepsilon^2k^2\sum_{n=3}^{\infty}n^2B_n\cos n\theta+O(\varepsilon^3).$$

При обычно принимаемых допущениях [4] усредним отдельно каждый член лагранжиана (6)

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2d\theta=\frac{1}{2}a^2k^2+2\varepsilon^2k^2A_2^2+O(\varepsilon^3),$$

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}=\frac{1}{2}a^2\omega^2+2\varepsilon^2\omega^2A_2^2+O(\varepsilon^3),\quad \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}=\frac{1}{2}b^2\omega^2+2\varepsilon^2\omega^2B_2^2+O(\varepsilon^3),$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}=-\frac{1}{2}\varepsilon k^3A_2b^2+\varepsilon k^3abB_2+O(\varepsilon^2),$$

$$\overline{w^2}=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}\varepsilon^2(B_2^2+2w_0^2)+O(\varepsilon^3),\quad \overline{\frac{\partial u}{\partial x}w}=\frac{1}{2}abk+\varepsilon^2kA_2B_2+O(\varepsilon^3),$$

$$\overline{w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}=\frac{1}{2}\varepsilon k^2b^2\left(\frac{3}{2}B_2+w_0\right)+O(\varepsilon^2),\quad \overline{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2}=\frac{1}{2}b^2k^4+8\varepsilon^2k^4B_2^2+O(\varepsilon^3),$$

$$\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4}=\frac{3}{8}b^4k^4+O(\varepsilon).$$

Усредненный лагранжиан при этом выписывается в виде

$$\mathcal{L}=\overline{L}=\frac{1}{4}B\left(a^2k^2+\frac{b^2}{R^2}-2\frac{\nu}{R}abk+\frac{3}{16}\varepsilon^2b^4k^4\right)+\frac{1}{4}Db^2k^4-\frac{1}{4}\frac{\gamma h}{g}\omega^2(a^2+b^2)+$$

$$+B\varepsilon^2\left(k^2A_2^2+\frac{1}{4}\frac{B_2^2}{R^2}-\frac{\nu}{R}kA_2B_2-\frac{1}{4}k^3b^2A_2+\frac{w_0^2}{2R^2}-\frac{\nu}{4R}k^2b^2w_0+\frac{1}{2}k^3abB_2-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{8}\frac{\nu}{R}k^2b^2B_2\right)+4D\varepsilon^2k^4B_2^2-\frac{\gamma h}{g}\varepsilon^2\omega^2(A_2^2+B_2^2)+O(\varepsilon^3).$$

Усредненный лагранжиан $\mathcal{L}$ явно зависит от a, b, A_2, B_2, w_0 и неявно – от θ через посредство ω и k. Уравнения Эйлера для $\mathcal{L}$, соответствующие переменным a, b, A_2, B_2, w_0

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a}=0\,,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b}=0\,,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_2}=0\,,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B_2}=0\,,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_0}=0,$$

после вычисления производных принимают вид

$$(Bk^2-\frac{\gamma h}{g}\omega^2)a-\frac{B}{R}\nu k b+B\varepsilon^2k^3bB_2+O(\varepsilon^3)=0\,,$$

$$-\frac{B}{R}\nu ka+\left[B\left(\frac{1}{R^2}+\frac{3}{8}\varepsilon^2k^4b^2\right)+Dk^4-\frac{\gamma h}{g}\omega^2\right]b+B\varepsilon^2(k^3B_2a-k^3A_2b-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\nu}{R}k^2B_2b-\frac{\nu}{R}k^2bw_0)+O(\varepsilon^3)=0\,,\qquad w_0=\frac{1}{4}R\nu k^2b^2; \tag{10}$$

$$2(Bk^2-\frac{\gamma h}{g}\omega^2)A_2-\frac{B}{R}\nu kB_2=\frac{1}{4}Bk^3b^2+O(\varepsilon),$$

$$-\frac{B}{R}\nu kA_2+(8Dk^4+\frac{B}{2R^2}-2\frac{\gamma h}{g}\omega^2)B_2=B\left(\frac{3}{8}\frac{\nu}{R}k^2b^2-\frac{1}{2}k^3ab\right)+O(\varepsilon)\,. \tag{11}$$

Если в уравнениях (I0) отбросить члены с A_2, B_2, то, исключив из полученной истемы, например, a, получим дисперсионное соотношение

$$\omega^4-\frac{g}{\gamma h}\left[B(k^2+\frac{1}{R^2}+\frac{3}{8}\varepsilon^2k^4b^2-\frac{1}{4}\varepsilon^2\nu^2k^4b^2)+Dk^4\right]\omega^2+$$

$$+\frac{B^2g^2}{R^2\gamma^2h^2}\left[k^2(1-\nu^2)+\frac{3}{8}\varepsilon^2R^2k^6b^2\right]+\frac{Bg^2k^6}{\gamma^2h^2}(D-\frac{\varepsilon^2}{4}B\nu^2b^2)=0, \tag{4'}$$

которое отличается от дисперсионного соотношения (4), полученного ранее, лишь наличием множителя ε^2 при членах, появление которых обусловлено нелинейностью системы (I), и соответствует только первым членам $u=a\sin\theta$, $w=b\cos\theta+\varepsilon w_0$ разложений (7).

Из уравнений (II) находим

$$A_2=\frac{Bk^3g\{[B\nu^2(3\gamma h\omega^2-4Bgk^2)+K(k,\omega)]b^2-4BR\nu k(\gamma h\omega^2-Bk^2g)ab\}}{8K(k,\omega)(Bk^2g-\gamma h\omega^2)}\,, \tag{12}$$

$$B_2=-\frac{BRk^2[(3\gamma h\omega^2-4Bgk^2)b^2\nu-4Rk(\gamma h\omega^2-Bk^2g)ab]}{4K(k,\omega)},$$

где $K(k,\omega)=(\gamma h\omega^2-Bk^2g)(16DR^2gk^4+Bg-4R^2\gamma h\omega^2)+(Bg\nu k)^2$.

Если полученные выражения $A_2(a,b,k,\omega)$, $B_2(a,b,k,\omega)$ подставить в уравнения (I0), то они образуют систему, из которой можно получить дисперсионное соотношение, соответствующее первым двум членам

$$u=a\sin\theta+\varepsilon A_2(a,b,k,\omega)\sin 2\theta\ ,\quad w=b\cos\theta+\varepsilon[B_2(a,b,k,\omega)\cos 2\theta+w_0] \qquad (I3)$$

разложений (7)

$$\begin{gathered}8K(k,\omega)[(Bgk^2-\gamma h\omega^2)(Bg+DR^2gk^4-R^2\gamma h\omega^2)-(Bg\nu k)^2]+\\+BR^2gk^4[B\nu^2(9\gamma^2h^2\omega^4-16B^2g^2k^4)+K(k,\omega)(2Bgk^2-3\gamma h\omega^2)+\\+16Bk^2(Bgk^2-\gamma h\omega^2)(Bg+DR^2gk^4-R^2\gamma h\omega^2)-2\nu^2K(k,\omega)\times\\\times(Bgk^2-\gamma h\omega^2)]\varepsilon^2b^2+O(\varepsilon^3)=0.\end{gathered} \qquad (4''),$$

Дисперсионное соотношение (4") – уравнение 8-ой степени относительно функции $\omega(k)$.

Отметим, что систему алгебраических уравнений (I0), (II) можно получить также с помощью принципа гармонического баланса, т.е. подставив (I3) в уравнения системы (I') и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках в обеих частях каждого из этих уравнений.

В силу равенств (8) уравнение Эйлера, соответствующее переменной θ, запишется в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k}\right)=0,$$

Тогда, с учетом соотношений $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega}=-\frac{1}{2}\frac{\gamma h}{g}\omega(a^2+b^2)-\frac{2\gamma h}{g}\varepsilon^2\omega(A_2^2+B_2^2)+O(\varepsilon^3)$,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k}=\frac{1}{2}B(ka^2-\frac{\nu}{R}ab+\frac{3}{8}\varepsilon^2k^3b^4)+Dk^3b^2+B\varepsilon^2(2kA_2^2-\frac{\nu}{R}A_2B_2+\frac{3}{2}k^2abB_2-\frac{5}{4}k^2b^2A_2-$$
$$-\frac{3}{4}\frac{\nu}{R}kb^2B_2-\frac{1}{2}\frac{\nu}{R}kb^2w_0)+16D\varepsilon^2k^3B_2^2+O(\varepsilon^3)$$

приходим к уравнению, выражающему закон сохранения усредненной энергии [3]

$$\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left[\omega(a^2+b^2)+4\varepsilon^2\omega(A_2^2+B_2^2)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\Big[B(ka^2-\frac{\nu}{R}ab+\frac{5}{8}\varepsilon^2k^3b^4)+$$

$$+2Dk^3b^2+B\varepsilon^2(4kA_2^2-2\frac{\nu}{R}A_2B_2+3k^2abB_2-\frac{3}{2}k^2b^2A_2-$$

$$-\frac{5}{2}\frac{\nu}{R}kb^2B_2-\frac{\nu}{R}kb^2w_0)+82D\varepsilon^2k^3B_2^2\Big]=0, \qquad (14)$$

где A_2, B_2 определяются по формулам (12).

Таким образом, нелинейная система (I′) допускает медленно меняющееся периодическое решение в виде асимптотических разложений

$$u=a\sin\theta+\varepsilon A_2(a,b,k,\omega)\sin 2\theta+\dots,$$

$$w=b\cos\theta+\varepsilon\left[B_2(a,b,k,\omega)\cos 2\theta+\frac{1}{4}R\nu k^2b^2\right]+\dots,$$

где A_2, B_2 определяются по формулам (12), а изменения в пространстве и во времени амплитуд a, b, частоты ω и волнового числа k задаются соотношениями (4″), (9) и (14).

Если пренебречь нелинейными членами в системе (I), т.е. положить $\varepsilon=0$ в системе (I′), то полученная линейная система допускает решение в виде бегущих волн

$$u=a\sin\theta, \quad w=b\cos\theta, \quad \theta=kx-\omega t,$$

в котором ω и k удовлетворяют дисперсионному соотношению (4′), если в нем положить $\varepsilon=0$, а изменения в пространстве и во времени амплитуд a, b, частоты ω и волнового числа k задаются соотношениями (9) и (14), если в последнем положить $\varepsilon=0$.

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. ч.I. – Киев: Наук.думка, 1976. – 452 с.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
4. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.