ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 26–39

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 26–39

УДК 519.21

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ M/G/1/m ТА M/G/1 З ГРУПОВИМ НАДХОДЖЕННЯМ ЗАМОВЛЕНЬ І ПОРОГОВИМ БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Микола БРАТІЙЧУК[1], **Юрій ЖЕРНОВИЙ**[2]

[1]*Шльонський політехнічний університет,*
44-100, Глівіце, вул. Кашубська, 23,
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000, Львів, вул. Університетська 1,
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Досліджено систему обслуговування типу $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку. Блокування потоку замовлень здійснюється, якщо в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h. Знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості і для функції розподілу періоду зайнятості, визначена середня тривалість періоду зайнятості, отримано формули для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі. Запропоновано ефективний алгоритм обчислення ергодичного розподілу, рекурентні співвідношення якого явно не залежать від m.

Ключові слова: системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ і $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$, блокування вхідного потоку, період зайнятості, ергодичний розподіл.

1. Вступ. Розглянемо систему масового обслговування (СМО) $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, яку формально опишемо так. Нехай задано послідовності випадкових величин $\{\alpha_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$ $(n \geqslant 1)$, де α_n — час між надходженням $(n-1)$–ої і n–ої групи замовлень, $\{\theta_n\}$ – кількість замовлень в n–ій групі, а $\{\beta_n\}$ — час обслуговування n–го замовлення. Всі наведені вище величини незалежні, причому $\mathbf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$, $\mathbf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$ $(i \geqslant 1)$, і $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ $(x \geqslant 0)$, $F(0) = 0$. Якщо $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то замовлення в систему надходять по одному.

Замовлення обслуговуються по одному, обслужене замовлення покидає систему, а обслуговуючий пристрій негайно починає обслуговувати замовлення з черги за її наявності або чекає надходження чергової групи замовлень. Застосовується дисципліна обслуговування FIFO. Черга всередині одної групи замовлень може бути організована довільно.

Нехай m — максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі. Отже, якщо в систему, в якій вже є $k \in [0,\, m+1]$ замовлень, надходить група кількістю θ_n замовлень, то лише $\min\{\theta_n,\, m+1-k\}$ з них приєднуються до черги, а решта втрачаються.

Позначимо через $\xi(t)$ кількість замовлень у системі в момент часу t і введемо для нашої системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ так званий пороговий рівень h. Якщо t — момент початку обслуговування чергового замовлення і $\xi(t) > h$ ($h = \overline{1,\, m-1}$), то під час обслуговування цього замовлення здійснюється блокування вхідного потоку замовлень (вони не допускаються на вхід системи). Процес надходження замовлень відновлюється в момент t початку обслуговування чергового замовлення, для якого $\xi(t) \le h$. Описану СМО позначимо через $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$.

Мета нашої праці — вивчення за допомогою методу потенціалу В. С. Королюка [1, 2] головних функціоналів від процесу обслуговування системи $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ (періоду зайнятості, розподілу кількості замовлень в системі) і побудова ефективних обчислювальних алгоритмів для визначення стаціонарного розподілу кількості замовлень, беручи до уваги і випадок відсутності обмежень на довжину черги ($m = \infty$).

Більшість авторів розглядають системи M/G/1/m, що зумовлено специфікою методів, які вони використовують. У випадку надходження замовлень по одному вхідний потік є звичайним пуассонівським процесом, а у випадку групового надходження цей процес стає узагальненим пуассонівським, що значно ускладнює дослідження з точки зору аналітики. В 1974 р. В. С. Королюк [1] запропонував новий підхід до вивчення функціоналів, пов'язаних з флуктуаціями напівнеперервного узагальненого процесу Пуассона, який у його монографії [2] був перенесений і на випадок неперервних знизу випадкових блукань. У працях його учнів (Братійчука М. С. [3], Хусанова М. [4], Пірджанова Б. [5]) цей підхід був успішно застосований до аналізу систем типу M/G/1 як з необмеженою, так і з обмеженою чергою, а в працях [6, 7] — до дослідження систем $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$.

Системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з блокуванням вхідного потоку мало вивчені в літературі. Нам відомі лише статті А. М. Братійчука [8–10], в яких методом потенціалу досліджено системи з так званим відновлюючим рівнем вхідного потоку. Коли довжина черги в такій системі досягає рівня m, процес надходження замовлень блокується і відновлюється лише тоді, коли кількість замовлень досягне певного рівня $h \in [1,\, m]$. У випадку, коли $\theta = 1$ (замовлення надходять по одному), такі системи вперше розглянуто в працях [11, 12]. Застосування блокування вхідного потоку в системах обслуговування можна пояснити намаганням зменшити кількість втрачених замовлень, користуючись таким правилом: "краще наперед попередити про переповнення системи, ніж прийняти замовлення і втратити його".

2. Основні позначення і допоміжні результати. Позначимо через $\mathbf{M}_n$ ($\mathbf{P}_n$) умовне математичне сподівання (умовну ймовірність) за умови, що в початковий момент часу в системі перебуває $n \ge 0$ замовлень, і через $\mathbf{M}$ ($\mathbf{P}$) умовне математичне сподівання (умовну ймовірність) за умови, що система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень. Нижче будемо використовувати такі позначення: $\eta(x)$ — кількість замовлень, які надійшли в систему на проміжку часу $[0;\,x)$; β_j — час обслуговування j–го замовлення; a_i^{k*} — k–кратна згортка послідовності a_i; $a(s,\,z)=s+\lambda\big(1-\alpha(z)\big)$; $\rho_k(m)$ — ергодичний розподіл кількості замовлень у системі. Нехай

$$f(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dF(x),\qquad m_1=\int\limits_0^\infty x dF(x)<\infty,\qquad b_1=\sum_{k=1}^\infty ka_k<\infty;$$

$$\overline{F}(x)=1-F(x),\qquad \alpha(z)=\sum_{k=1}^\infty z^k a_k;\qquad \overline{a}_n=\sum_{k=n}^\infty a_k,$$

$$\overline{p}_n(s)=\sum_{k=n}^\infty p_k(s),\qquad \overline{q}_n(s)=\sum_{k=n}^\infty q_k(s),\qquad \sum_{k=1}^0 b_k=0.$$

Для Re $s\geq 0$ визначимо послідовності $p_i(s)\ \ (i=-1,0,1,\ldots)$ і $q_i(s)\ \ (i=0,1,\ldots)$ за допомогою співвідношень

$$\sum_{i=-1}^\infty z^i p_i(s)=\frac{f(a(s,z))}{zf(s)}\,,\qquad \sum_{i=0}^\infty z^i q_i(s)=\frac{1-f(a(s,z))}{a(s,z)}. \tag{1}$$

Легко показати, що

$$\begin{gathered}p_i(s)=\frac{1}{f(s)}\sum_{k=0}^{i+1}a_{i+1}^{k*}\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\,dF(x)\qquad(\,i=-1,0,1,\ldots\,)\,;\\ q_i(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,\mathbf{P}\{\eta(x)=i\,\}\,\overline{F}(x)\,dx=\sum_{k=0}^{i}a_i^{k*}\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\,\overline{F}(x)\,dx.\end{gathered} \tag{2}$$

Нижче будемо використовувати функцію $R_k(s)$, визначену за допомогою рівності

$$\sum_{k=1}^\infty z^k R_k(s)=\frac{z}{f\big(a(s,z)\big)-z},\qquad |z|<\nu_-(s), \tag{3}$$

де $\nu_-(s)$ — єдиний корінь рівняння $f\big(a(s,z)\big)=z$ на проміжку $[0;\,1]$.

Позначимо: $\rho=\lambda m_1 b_1,\ \ \nu_-=\lim\limits_{s\to+0,\ \rho>1}\nu_-(s)$;

$$p_i=\lim_{s\to+0}p_i(s),\qquad R_i=\lim_{s\to+0}R_i(s),\qquad q_i=\lim_{s\to+0}q_i(s). \tag{4}$$

Тоді з рівностей (1)–(3) маємо:

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i = \frac{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{z}\,; \quad p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x) \quad (\, i = -1, 0, 1, \dots\,)\,;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k = \frac{z}{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) - z}\,, \qquad |z| < \min\{1,\, \nu_-\}\,;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i = \frac{1 - f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{\lambda(1-\alpha(z))}\,, \quad q_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}(x)\, dx, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = m_1.$$

3. Розподіл кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості. Нехай $\tau(m) = \inf\{\, t \ge 0 :\ \xi(t) = 0\,\}$ позначає перший період зайнятості для системи $\mathrm{M}_h^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, і

$$\varphi_n(t,\, k) = \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\} \qquad (\, 1 \le n,\, k \le m+1\,),$$

$$\Phi_n(s,\, k) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi_n(t,\, k)\, dt, \qquad \mathrm{Re}\ s > 0.$$

Очевидно, що $\varphi_0(t,\, k) = 0$. Використовуючи формулу повної ймовірності, для $1 \le n \le h$ одержимо

$$\begin{aligned} \varphi_n(t,\, k) = \sum_{j=0}^{m-n} \int_0^{t} \mathbf{P}\{\eta(x) = j\,\}\, \varphi_{n+j-1}(t-x,\, k)\, dF(x) + \\ + \int_0^{t} \mathbf{P}\{\eta(x) \ge m+1-n\,\}\, \varphi_m(t-x,\, k)\, dF(x) + \\ + \big(P\{\eta(t) = k-n\,\} + I\{k = m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t) \ge m+2-n\,\}\big)\overline{F}(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Тут $I\{A\}$ дорівнює 1 або 0, залежно від того, відбулась подія A чи ні.

Для $h+1 \le n \le m+1$ формула повної ймовірності дає таке співвідношення:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t,\, k) = \int_0^{t} \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-h} \beta_i \in dx\Big\} \varphi_h(t-x,\, k) + \\ + I\{h+1 \le k \le n-1\} \int_0^{t} \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-k} \beta_i \in dx\Big\}\, \overline{F}(t-x) + I\{k = n\}\overline{F}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Перейдемо в (5) і (6) до перетворень Лапласа. Враховуючи співвідношення (2), одержимо рівняння для визначення функцій $\Phi_n(s,\, k)$

$$\begin{aligned} \Phi_n(s,\, k) = f(s) \sum_{j=0}^{m-n} p_{j-1}(s)\Phi_{n+j-1}(s,\, k) + f(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_m(s,\, k) + \\ + q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s), \qquad 1 \le n \le h, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\Phi_n(s,\,k) = f^{n-h}(s)\Phi_h(s,\,k)+ \\ + I\{h+1 \le k \le n\} f^{n-k}(s)\frac{1-f(s)}{s}, \qquad h+1 \le n \le m+1 \tag{8}$$

з граничною умовою

$$\Phi_0(s,\,k) = 0. \tag{9}$$

Виразивши з (8) $\Phi_m(s,\,k)$ і всі $\Phi_n(s,\,k)$ для $h+1 \le n \le m-1$ і підставивши їх у (7), отримаємо рівняння

$$\Phi_n(s,\,k) - f(s)\sum_{j=-1}^{h-n-1} p_j(s)\Phi_{n+j}(s,\,k) = \\ = f(s)L_n(s)\Phi_h(s,\,k) + M_n(s,\,k), \quad 1 \le n \le h. \tag{10}$$

Тут

$$L_n(s) = f^{m-h}(s)\overline{p}_{m-n}(s) + \sum_{j=h}^{m-1} p_{j-n}(s) f^{j-h}(s);$$

$$M_n(s,\,k) = q_{k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s)+ \\ + \Bigg(I\{h+1 \le k \le m\}\overline{p}_{m-n}(s) f^{m+1-k}(s)+ \\ + \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n}(s) f^{j-k+1}(s) I\{h+1 \le k \le j\}\Bigg)\frac{1-f(s)}{s}\,.$$

Для розв'язків системи рівнянь (10), використовуючи результати з [6], отримаємо зображення

$$\Phi_n(s,\,k) = \Bigg(1 + Q_{h+1-n}(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)L_{n+i}(s)\Bigg)\Phi_h(s,\,k)- \\ - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)M_{n+i}(s,\,k), \qquad 1 \le n \le h, \tag{11}$$

де $Q_n(s) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} R_j(s)d_{n-j-1}(s)$, $d_k(s) = 1 - f(s)\sum\limits_{i=-1}^{k-1} p_i(s)$.

За допомогою співвідношення (3) можна отримати рівність

$$f(s)\sum_{j=1}^{n} R_j(s)\overline{p}_{n-j}(s) = R_n(s) - \big(1-f(s)\big)\sum_{j=1}^{n} R_j(s) - 1, \qquad n \ge 1. \tag{12}$$

Це співвідношення, а також рівність $d_k(s) = 1 - f(s) + f(s)\overline{p}_k(s)$ дають:

$$1 + Q_n(s) = 1 + \big(1-f(s)\big)\sum_{j=1}^{n-1} R_j(s) + f(s)\sum_{j=1}^{n-1} R_j(s)\overline{p}_{n-j-1}(s) = R_{n-1}(s).$$

Тепер співвідношення (11) можемо переписати так

$$\Phi_n(s,\, k) = D_n(s)\Phi_h(s,\, k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s,\, k), \qquad 1 \le n \le h, \tag{13}$$

де

$$D_n(s) = R_{h-n}(s) - f(s) \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) L_{n+i}(s), \qquad n \ge 0. \tag{14}$$

Поклавши в (13) $n = 0$, з граничної умови (9) одержимо

$$\Phi_h(s,\, k) = \frac{1}{D_0(s)} \sum_{i=1}^{h} R_i(s) M_i(s,\, k). \tag{15}$$

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 1. *Для довільних* $1 \le k \le m+1$ *і* $\operatorname{Re} s > 0$ *мають місце зображення:*

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\, dt = \\ &\qquad = D_n(s)\Phi_h(s,\, k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s,\, k), \qquad 1 \le n \le h; \\ &\int_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\, dt = f^{n-h}(s)\Phi_h(s,\, k) + \\ &\qquad + I\{h+1 \le k \le n\} f^{n-k}(s) \frac{1-f(s)}{s}, \qquad h+1 \le n \le m, \end{aligned} \tag{16}$$

де функція $\Phi_h(s,\, k)$ *визначена в (15), а* $D_n(s)$ *— в (14).*

4. Період зайнятості та ергодичний розподіл. Якщо система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень, то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{P}\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\, dt &= \sum_{n=1}^{m} a_n \int_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\, dt + \\ &+ \overline{a}_{m+1} \int_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{P}_{m+1}\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\, dt = \\ &= \sum_{n=1}^{m} a_n \Phi_n(s,\, k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}(s,\, k). \end{aligned} \tag{17}$$

Вираз для $\Phi_{m+1}(s, k)$ можна отримати з рівності (8), поклавши в ній $n = m+1$. Тепер, використовуючи співвідношення (16), можемо детально розписати праву частину (17)

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt =$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{h-1} a_n D_n(s) + \sum_{n=h}^{m} a_n f^{n-h}(s) + \overline{a}_{m+1} f^{m-h+1}(s)\right)\Phi_h(s, k) -$$
$$- \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s, k) + \left(\sum_{n=h+1}^{m} a_n f^{n-k}(s) I\{h+1 \le k \le n\} + \right. \tag{18}$$
$$\left. + \overline{a}_{m+1} f^{m-k+1}(s) I\{h+1 \le k \le m+1\}\right)\frac{1-f(s)}{s}\,.$$

Для отримання зображення для $\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt$ нам необхідно перейти в рівності (18) до сумування по k від 1 до $m+1$.

Безпосереднім обчисленням можна переконатись, що

$$\sum_{k=1}^{m+1}\big(q_{k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{q}_{m-n+2}(s)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(s) = \frac{1-f(s)}{s}\,.$$

Позначимо $\sum\limits_{k=1}^{m+1} M_n(s, k)$ через $M_n(s)$. Тоді

$$M_n(s) = \frac{1-f(s)}{s} + f(s)\left(\frac{1-f^{m-h}(s)}{s}\,\overline{p}_{m-n}(s) + \sum_{j=h+1}^{m-1} p_{j-n}(s)\frac{1-f^{j-h}(s)}{s}\right);$$
$$\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_h(s, k) = \frac{1}{D_0(s)}\sum_{i=1}^{h} R_i(s) M_i(s),$$

і з (18) отримуємо

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt = \left(\sum_{n=1}^{h-1} a_n D_n(s) + \sum_{n=h}^{m} a_n f^{n-h}(s) + \overline{a}_{m+1} f^{m+1-h}(s)\right)\times$$
$$\times \frac{1}{D_0(s)}\sum_{i=1}^{h} R_i(s) M_i(s) - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s) M_{n+i}(s) + \tag{19}$$
$$+ \frac{1}{s}\sum_{n=h+1}^{m} a_n\big(1-f^{n-h}(s)\big) + \frac{\overline{a}_{m+1}}{s}\big(1-f^{m+1-h}(s)\big).$$

Виконаємо обчислення, необхідні для переходу в (19) до границі при $s \to +0$. Використовуватимемо послідовності $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ і $\{R_i\}$, визначені в (4). Для всіх $n \ge 1$

з (12) випливають рівності

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \overline{p}_{n-i} = R_n - 1,$$

тому, враховуючи, що $f(0) = 1$, для $n \geq 0$ з (14) отримуємо

$$D_n(0) = R_{h-n} - \sum_{i=1}^{h-n} R_i \left(\overline{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h}^{m-1} p_{j-n-i} \right) = R_{h-n} - (R_{h-n} - 1) = 1. \qquad (20)$$

Оскільки

$$\lim_{s \to +0} \left(\sum_{n=1}^{h-1} a_n D_n(s) + \sum_{n=h}^{m} a_n f^{n-h}(s) + \overline{a}_{m+1} f^{m+1-h}(s) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,$$

то, враховуючи (20), після переходу в рівності (19) до границі при $s \to +0$, отримаємо формулу для середньої тривалості періоду зайнятості

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,\tau(m) = m_1 \Bigg(& \sum_{i=1}^{h} R_i \left(1 + (m-h)\overline{p}_{m-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-i} \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \left(1 + (m-h)\overline{p}_{m-n-i} + \sum_{j=h+1}^{m-1} (j-h) p_{j-n-i} \right) + \\ & + \sum_{n=h+1}^{m} (n-h) a_n + (m+1-h)\overline{a}_{m+1} \Bigg). \end{aligned} \qquad (21)$$

Поклавши в рівності (18) $s = 0$, одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{P}\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t \,\}\, dt = & \sum_{i=1}^{h} R_i M_i(k) - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i M_{n+i}(k) + \\ + m_1 \Bigg(& \sum_{n=h+1}^{m} a_n I\{h+1 \leq k \leq n\} + \overline{a}_{m+1} I\{h+1 \leq k \leq m+1\} \Bigg). \end{aligned} \qquad (22)$$

Тут

$$\begin{aligned} M_i(k) = & M_i(0,\, k) = q_{k-i} + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m-i+2} + \\ & + m_1 \left(I\{h+1 \leq k \leq m-1\} \sum_{j=k}^{m-1} p_{j-i} + I\{h+1 \leq k \leq m\}\overline{p}_{m-i} \right). \end{aligned} \qquad (23)$$

Використовуючи вузлову теорему відновлення [13, с. 46], і міркуючи так, як у праці [6], обчислимо границі

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\, \xi(t) = k \,\} = \frac{\lambda}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(m) + 1} \int_0^\infty \mathbf{P}\{\, \xi(u) = k,\ \tau(m) \geq u \,\}\, du \quad (\, k = \overline{1,\, m+1}\,);$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\, \xi(t) = 0 \,\} = \frac{1}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(m) + 1}\,.$$

Звідси за допомогою (22)–(23) одержуємо таке твердження.

Теорема 2. *Для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі $M_h^\theta/G/1/m$ мають місце такі зображення:*

$$\rho_0(m) = \frac{1}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(m) + 1};$$

$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(m) + 1} \left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \right) \qquad (\, k = \overline{1,\, h}\,);$$

$$\begin{aligned} \rho_k(m) = \frac{\lambda}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(m) + 1} \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \big(q_{k-i} + m_1 \overline{p}_{k-i}\big) - \\ - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \big(q_{k-n-i} + m_1 \overline{p}_{k-n-i}\big) + m_1 \overline{a}_k \Bigg) \qquad (\, k = \overline{h+1,\, m}\,); \end{aligned} \tag{24}$$

$$\rho_{m+1}(m) = \frac{\lambda}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(m) + 1} \left(\sum_{i=1}^{h} R_i \overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i} + m_1 \overline{a}_{m+1} \right).$$

5. Випадок відсутності обмежень на довжину черги. Розглянемо систему $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1$, для якої відсутня умова обмеженості довжини черги ($m = \infty$). Обмежимось визначенням середньої тривалості періоду зайнятості та ергодичного розподілу кількості замовлень у такій системі.

Проаналізуємо поведінку при $m \to \infty$ окремих доданків у формулі (21), яка визначає середню тривалість періоду зайнятості $\mathbf{M}\,\tau(m)$. Оскільки

$$m\overline{p}_m = \sum_{i=m}^{\infty} m p_i \le \sum_{i=m}^{\infty} i p_i,$$

то $\lim\limits_{m\to\infty} m\overline{p}_m = 0$, бо

$$\lim_{m\to\infty} m\overline{p}_m \le \lim_{m\to\infty} \sum_{i=m}^{\infty} i p_i = 0.$$

Аналогічно доводиться, що $\lim\limits_{m\to\infty} m\overline{a}_m = 0$.

Тепер можна перейти до границі при $m \to \infty$ в рівності (21) і одержати формулу для середньої тривалості періоду зайнятості для системи $\mathrm{M}_h^\theta/\mathrm{G}/1$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,\tau(\infty) = m_1 \Bigg(\sum_{i=1}^{h} R_i \Bigg(1 + \sum_{j=h+1}^{\infty} (j-h) p_{j-i} \Bigg) - \\ - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \Bigg(1 + \sum_{j=h+1}^{\infty} (j-h) p_{j-n-i} \Bigg) + \sum_{n=h+1}^{\infty} (n-h) a_n \Bigg). \end{aligned} \tag{25}$$

Після переходу до границі при $m \to \infty$ у співвідношеннях (24) отримаємо таке твердження.

Теорема 3. *Для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі $M_h^\theta/G/1$*

мають місце такі зображення:

$$
\begin{aligned}
&\rho_0(\infty) = \frac{1}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)+1}\,;\\
&\rho_k(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)+1}\left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\right) \qquad (\,k=\overline{1,\,h}\,);\\
&\rho_k(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)+1}\left(\sum_{i=1}^{h} R_i\big(q_{k-i}+m_1\overline{p}_{k-i}\big) - \right.\\
&\qquad \left. - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i\big(q_{k-n-i}+m_1\overline{p}_{k-n-i}\big) + m_1\overline{a}_k\right) \qquad (\,k \ge h+1\,).
\end{aligned} \tag{26}
$$

6. Приклади обчислення ергодичного розподілу. Перш за все побудуємо алгоритми для обчислення послідовностей $R_i,\ q_i\ (i \ge 1)$. Зауважимо, що ці алгоритми не залежать від параметра m і тому для їх реалізації досить володіти інформацією про вхідний потік і розподіл часу обслуговування (функцію $F(x)$).

З означень послідовностей $R_i,\ q_i$ випливають рекурентні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&R_1 = \frac{1}{p_{-1}}\,, \qquad R_{k+1} = \frac{R_k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}}{p_{-1}} \quad (\,k \ge 1\,);\\
&q_0 = \frac{1-f(\lambda)}{\lambda}\,, \qquad q_k = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda} \quad (\,k \ge 1\,).
\end{aligned}
$$

Припустимо, що час обслуговування розподілений за законом Ерланга другого порядку $\big(F(x) = 1-(1+\mu x)e^{-\mu x},\ x \ge 0\big)$ з середнім значенням m_1, а замовлення надходять парами ($a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_i = 0,\ i > 2$).

Якщо $a_2 = 1$, то обчислення за формулами

$$
p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x) \qquad (\,i=-1,\,0,\,1,\ldots\,)
$$

дають такі результати:

$$
\begin{aligned}
&p_{2i-1} = \frac{(i+1)\mu^2\lambda^i}{(\lambda+\mu)^{i+2}}\,; \qquad p_{2i} = 0 \qquad (\,i=0,\,1,\,2,\ldots\,);\\
&\overline{p}_{2i-1} = \overline{p}_{2i-2} = \frac{\big(\lambda+(i+1)\mu\big)\lambda^i}{(\lambda+\mu)^{i+1}} \qquad (\,i=1,\,2,\,3,\ldots\,);\\
&\sum_{i=1}^{\infty}\overline{p}_i = \overline{p}_1 + \frac{2\lambda^2(2\lambda+3\mu)}{\mu(\lambda+\mu)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Нехай $h = 4,\ \lambda = 1,\ \mu = 1$, тоді $m_1 = 2$. Розглянемо випадки: $m = 8$ (приклад 1); $m = \infty$ (приклад 2).

Приклад 1. Користуючись формулою (21), обчислюємо середню тривалість періоду зайнятості системи з обмеженою чергою

$$\mathbf{M}\,\tau(8) = m_1\Bigg(\sum_{i=1}^{4} R_i\Bigg(1 + 4\overline{p}_{8-i} + \sum_{j=5}^{7}(j-4)p_{j-i}\Bigg) -$$
$$-\sum_{i=1}^{2} R_i\Bigg(1 + 4\overline{p}_{6-i} + \sum_{j=5}^{7}(j-4)p_{j-i-2}\Bigg)\Bigg) = 1658.$$

Позначимо через π_i стаціонарну ймовірність того, що довжина черги дорівнює i. Тоді $\pi_0 = \rho_0 + \rho_1$, $\pi_i = \rho_{i+1}$, $i \geq 1$. У рядку "π_i" таблиці 1 наведені ймовірності π_i, обчислені за ергодичним розподілом ρ_i, знайденим за формулами (24). У нижньому рядку цієї таблиці для порівняння записані значення відповідних імовірностей для часу $t = 150\,000$, одержані за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [14, 15].

Таблиця 1. Стаціонарний розподіл довжини черги (приклад 1)

Довжина черги (i)	0	1	2	3	4
π_i	0,0024	0,0072	0,0265	0,0989	0,2506
π_i (GPSS World)	0,0027	0,0075	0,0275	0,0992	0,2501
Довжина черги (i)	5	6	7	8	–
π_i	0,2324	0,1644	0,1450	0,0726	–
π_i (GPSS World)	0,2326	0,1639	0,1446	0,0719	–

Приклад 2. За формулою (25) знаходимо середню тривалість періоду зайнятості системи з необмеженою чергою

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = m_1\Bigg(\sum_{i=1}^{4} R_i\Bigg(1 + \sum_{j=5}^{\infty}(j-4)p_{j-i}\Bigg) - \sum_{i=1}^{2} R_i\Bigg(1 + \sum_{j=5}^{\infty}(j-4)p_{j-i-2}\Bigg)\Bigg) = 2276.$$

Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі обчислюємо за формулами (26). Результати, отримані для стаціонарного розподілу довжини черги, наведені у таблиці 2.

Таблиця 2. Стаціонарний розподіл довжини черги (приклад 2)

Довжина черги (i)	0	1	2	3	4
π_i	0,0018	0,0053	0,0193	0,0720	0,1826
π_i (GPSS World)	0,0018	0,0051	0,0194	0,0721	0,1836
Довжина черги (i)	5	6	7	8	9
π_i	0,1693	0,1198	0,1056	0,0741	0,0633
π_i (GPSS World)	0,1687	0,1192	0,1080	0,0746	0,0630
Довжина черги (i)	10	11	12	13	...
π_i	0,0442	0,0369	0,0257	0,0211	...
π_i (GPSS World)	0,0439	0,0359	0,0261	0,0210	...

7. Додаток. Програми для GPSS WORLD.

```
Lam EQU 1        ; значення λ
Myu EQU 1        ; значення μ
AH EQU 4         ; поріг блокування
Em EQU 8         ; максимальна довжина черги (для прикладу 1)
CHASM EQU 150000        ; час моделювання
QQ TABLE Q$CHER,0,1,10        ; гістограма розподілу довжини черги
GENERATE 0.5
TABULATE QQ
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))
SPLIT 2,MIT1         ; надходження замовлень парами
TRANSFER ,OUT
MIT1 TEST L Q$CHER,Em,OUT   ; обмеження на довжину черги (для прикладу 1)
GATE LS KLU,OUT
QUEUE CHER
SEIZE SYS
DEPART CHER
TEST L Q$CHER,AH,MMU2
MMU1  SPLIT 1,MITS
ADVANCE (Exponential(5,0,(1/Myu))+Exponential(5,0,(1/Myu)))   ; час обслугов.
TRANSFER ,MIT2
MMU2  SPLIT 1,MITR
ADVANCE (Exponential(5,0,(1/Myu))+Exponential(5,0,(1/Myu)))   ; час обслугов.
MIT2 RELEASE SYS
TERMINATE
MITS LOGIC S KLU
TERMINATE
MITR LOGIC R KLU
OUT TERMINATE
GENERATE ,,,1
LOGIC S KLU
TERMINATE
GENERATE CHASM
TERMINATE 1
START 1
```

---

1. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – Т. 19, № 1. – С. 3-14.
2. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев, 1975.
3. *Bratiichuk M. S.* Semi-Markov walks in queueing theory // Proceedings of the 2^{nd} International Symposium on Semi-Markov Models: Theory and Application. Compiegne (France): Universite de Technologie. – 1998. – P. 6.
4. *Хусанов М.* Анализ распределения максимальной длины очереди в системе массового обслуживания методом потенциала // Изв. АН УзССР, сер.физ.-мат. наук. – 1977. – № 4. – С. 29-33.
5. *Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. — Ашхабад, 1987.

6. *Братійчук А. М.* Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою. Кандидатська дисертація. – Київ, 2008.
7. *Братійчук А. М.* Швидкість збіжності до ергодичного розподілу довжини черги в системах типу $M^\theta/G/1/b$ // Укр. матем. журнал. – 2007. – Т. 59, № 9. – С. 1169-1178.
8. *Братійчук А. М.* Система $M^\theta/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 1. – С. 114-121.
9. *Братійчук А. М.* Граничні теореми для систем типу $M^\theta/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку // Укр. матем. журнал. – 2007. – Т. 59, № 7. – С. 884-890.
10. *Братійчук А. М.* Точні зображення для характеристик системи $M^\theta/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 114-120.
11. *Takagi H.* Analysis of finite-capacity $M/G/1$ queue with a resume level // Performance Evaluation. – 1985 . – Vol. 5, no. 3. – P. 197-203.
12. *Takagi H.* Queueing Analysis. Vol. 2. – The Netherlands: Elsevier Science Publishers B.V., 1993.
13. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. – М., 1982.
14. *Боев В. Д.* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World. – Санкт-Петербург, 2004.
15. *Жерновий Ю. В.* Імітаційне моделювання систем масового обслуговування. – Львів, 2007.

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ M/G/1/m ТА M/G/1 З ГРУПОВИМ НАДХОДЖЕННЯМ ЗАМОВЛЕНЬ І ПОРОГОВИМ БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Микола БРАТІЙЧУК[1], Юрій ЖЕРНОВИЙ[2]

[1]*Шльонський політехнічний університет,*
44-100, Глівіце, вул. Кашубська, 23,
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000, Львів, вул. Університетська 1,
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Досліджено систему обслуговування типу $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку. Блокування потоку замовлень здійснюється, якщо в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі перевищує заданий пороговий рівень h. Знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості і для функції розподілу періоду зайнятості, визначена середня тривалість періоду зайнятості, отримано формули для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі. Запропоновано ефективний алгоритм обчислення ергодичного розподілу, рекурентні співвідношення якого явно не залежать від m.

Ключові слова: системи $M^\theta/G/1/m$ і $M^\theta/G/1$, блокування вхідного потоку, період зайнятості, ергодичний розподіл.

RESEARCH OF M/G/1/m AND M/G/1 QUEUES WITH GROUP ARRIVALS AND THRESHOLD BLOCKING OF AN INPUT FLOW

Mykola BRATIICHUK[1], Yuriy ZHERNOVYI[2]

[1]*Silesian University of Technology,*
44-100, Gliwice, Kashubska str., 23,
[2]*Ivan Franko National University of L'viv,*
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

The $M^\theta/G/1/m$ queue with group arrivals and threshold blocking strategy of an input flow is investigated. If at the moment of beginning the service of the next customer the number of customers in the system exceeds some level h, the input flow is blocked while service process goes its own way. The arrivals of the new customers resume when the number of customers in the system decreases to the level h. Laplace transforms for distributions of the number of customers in the system on the busy period and for the busy time distribution function are found. Average duration of the busy time, and formulas for the ergodic distribution of number of customers in the system are obtained. The effective calculative algorithm for the ergodic distribution, based on recurrent relations which do not depend explicitly on m, is proposed.

Key words: the $M^\theta/G/1/m$ and $M^\theta/G/1$ queueing systems, blocking of an input flow, busy time, ergodic distribution.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ M/G/1/m И M/G/1 С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ЗАЯВОК И ПОРОГОВОЙ БЛОКИРОВКОЙ ВХОДНОГО ПОТОКА

Николай БРАТИЙЧУК[1], Юрий ЖЕРНОВЫЙ[2]

[1]*Шлёнский политехнический университет,*
44-100, Гливице, ул. Кашубская, 23,
[2]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Исследована система обслуживания типа $M^\theta/G/1/m$ с групповым поступлением заявок и пороговой блокировкой входного потока. Блокировка потока заявок осуществляется, если в момент начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе превышает заданный пороговый уровень h. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для эргодического распределения числа заявок в системе. Предложен эффективный алгоритм вычисления эргодического распределения, рекуррентные соотношения которого явно не зависят от m.

Ключевые слова: системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ и $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, блокировка входного потока, период занятости, эргодическое распределение.