1984

УДК 517.9:530.182

Ю.В. Жерновой

НЕЛИНЕЙНЫЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Учет неоднородности материала приводит к усложнению геометрически нелинейных уравнений, описывающих осесимметричные волновые движения вдоль цилиндрической оболочки. Методом теории возмущений получены асимптотические разложения первого порядка для решений, локально близких к периодическим стационарным волнам.

Исходя из геометрически нелинейных уравнений классической теории Кирхгофа-Лява, осесимметричные волновые движения вдоль цилиндрической оболочки исследованы в работах [1, 2] . Для неоднородного в продольном направлении материала оболочки соответствующие уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\gamma h}{Bg}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\nu'(x)}{R}w-$$

$$-\frac{B'(x)}{B}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\nu}{R}w+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{B}{\mathcal{D}R}\left(\frac{w}{R}-\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\gamma h}{\mathcal{D}g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\varepsilon\left\{\frac{B}{\mathcal{D}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\nu}{R}\left[w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{3}{2}\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\nu'(x)}{R}w\frac{\partial w}{\partial x}\Big\}+\frac{B'(x)}{\mathcal{D}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\right.\right. \qquad (1)$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\nu}{R}w\frac{\partial w}{\partial x}\right]\right\}-\frac{2\mathcal{D}'(x)}{\mathcal{D}}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{\mathcal{D}''(x)}{\mathcal{D}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$-\infty<x<\infty, \quad t>0.$$

Здесь $u(x,t)$, $w(x,t)$ – функции продольной координаты x и времени t , обозначающие перемещения точек срединной поверхности оболочки соответственно в продольном и радиальном направлениях; $B(x)$ – жесткость на растяжение-сжатие, $\mathcal{D}(x)$ – цилиндрическая жесткость оболочки, $\nu(x)$ – коэффициент Пуассона, $\gamma(x)$ – удельный вес материала, g – ускорение силы тяжести, h – толщина оболочки, R – радиус срединной поверхности, $\varepsilon>0$ – малый параметр, характеризующий возмущающее влияние нелинейных членов.

Предполагая, что функции $B(x)$, $\mathcal{D}(x)$, $\nu(x)$ и $\gamma(x)$ медленно зависят от x (производные i-го порядка пропорциональны ε^i, $i = 1, 2, \ldots$), рассмотрим волновые решения системы (I), локально близкие к периодическим стационарным волнам [2, 3]. Введя медленные переменные $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$, представим искомые функции u, w в виде асимптотических рядов по малому параметру ε

$$u(\theta,X,T)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n(\theta,X,T), \quad w(\theta,X,T)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n w_n(\theta,X,T), \tag{2}$$

где $\theta = \varepsilon^{-1}\Theta(X,T)$ – фазовая переменная, производные которой определяют волновое число $k(X,T) = \partial\theta/\partial x = \partial\Theta/\partial X$ и частоту $\omega(X,T) = -\partial\theta/\partial t = -\partial\Theta/\partial T$.

Подставив разложения (2) в уравнения (I), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда в первых двух порядках по ε получим

$$L_1[u_0,w_0]=\left(k^2-\frac{\gamma h}{Bg}\omega^2\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}-\frac{\nu}{R}k\frac{\partial w_0}{\partial\theta}=0,$$

$$L_2[u_0,w_0]=k^4\frac{\partial^4 w_0}{\partial\theta^4}+\frac{B}{DR}\left(\frac{w_0}{R}-\nu k\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\right)+\frac{\gamma h\omega^2}{Dg}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}=0; \tag{3}$$

$$L_1[u_1,w_1]=-k^2\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}-2k\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta\partial X}-\frac{\partial k}{\partial X}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w_0}{\partial X}-$$
$$-\frac{\gamma h}{Bg}\left(2\omega\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta\partial T}+\frac{\partial\omega}{\partial T}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\right)+\frac{\nu'}{R}w_0-\frac{B'}{B}\left(k\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-\frac{\nu}{R}w_0\right),$$

$$L_2[u_1,w_1]=\frac{Bk^2}{D}\left\{k\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)-\frac{\nu}{R}\left[w_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\}-4k^3\frac{\partial^4 w_0}{\partial\theta^3\partial X}-6k^2\frac{\partial k}{\partial X}\frac{\partial^3 w_0}{\partial\theta^3}+\frac{B\nu}{DR}\frac{\partial u_0}{\partial X}+ \tag{4}$$
$$+\frac{\gamma h}{Dg}\left(2\omega\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial T}+\frac{\partial\omega}{\partial T}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)-\frac{2D'}{D}k^3\frac{\partial^3 w_0}{\partial\theta^3}.$$

Поскольку нас интересуют волновые решения системы (I), близкие к периодическим стационарным волнам, наложим на решения (2) требование периодичности по θ.

Система (3) допускает периодические по θ решения

$$u_0 = a(X,T)\sin\theta\ , \qquad w_0 = b(X,T)\cos\theta\ , \tag{5}$$

если выполнено дисперсионное соотношение

$$\omega^4 - \frac{g}{R^2\gamma h}\left[B(1+R^2k^2)+DR^2k^4\right]\omega^2 + \frac{Bg^2k^2}{R^2\gamma^2h^2}\left[B(1-\nu^2)+DR^2k^4\right] = 0\ , \tag{6}$$

следующее из однородной алгебраической системы для медленно меняющихся амплитуд $a(X,T)$ и $b(X,T)$

$$\left(k^2 - \frac{\gamma h}{Bg}\omega^2\right)a - \frac{\nu}{R}kb = 0\ , \quad \frac{B\nu k}{DR}a + \left(\frac{\gamma h}{Dg}\omega^2 - k^4 - \frac{B}{DR^2}\right)b = 0. \tag{7}$$

Подставив (5) в уравнения (4), получим

$$\begin{aligned} L_1[u_1, w_1] &= -\frac{1}{2}k^3b^2\sin 2\theta - Q_1(X,T)\cos\theta\ , \\ L_2[u_1, w_1] &= \frac{B}{D}k^2b\left[\left(\frac{3}{4}\frac{\nu}{R}b - ka\right)\cos 2\theta + \frac{\nu}{4R}b\right] - Q_2(X,T)\sin\theta\ , \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(X,T) &= 2k\frac{\partial a}{\partial X} + \frac{\partial k}{\partial X}a - \frac{\nu}{R}\frac{\partial b}{\partial X} + \frac{\gamma h}{Bg}\left(2\omega\frac{\partial a}{\partial T} + \frac{\partial\omega}{\partial T}a\right) - \frac{\nu'}{R}b + \frac{B'}{B}\left(ka - \frac{\nu}{R}b\right), \\ Q_2(X,T) &= 2k^2\left(2k\frac{\partial b}{\partial X} + 3\frac{\partial k}{\partial X}b\right) - \frac{B\nu}{DR}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma h}{Dg}\left(2\omega\frac{\partial b}{\partial T} + \frac{\partial\omega}{\partial T}b\right) + \frac{2D'}{D}k^3b. \end{aligned} \tag{9}$$

Для того, чтобы в решениях $u_1(\theta,X,T)$, $w_1(\theta,X,T)$ системы (8) отсутствовали секулярные члены, пропорциональные θ , должны, очевидно, выполняться условия $Q_1(X,T) = 0$, $Q_2(X,T) = 0$. Упростим выражения (9), входящие в них.

Из первого уравнения алгебраической системы (7), находим

$$\begin{aligned} b = \varphi_1(k,X)a\ , \quad \varphi_1(k,X) &= \frac{R}{B(X)g\nu(X)k}\left[B(X)gk^2 - \gamma(X)h\,\omega^2(k,X)\right], \\ \varphi_2(k,X) &= \frac{B(X)gk}{\gamma(X)h}\left[k - \frac{\nu(X)}{R}\varphi_1(k,X)\right], \end{aligned} \tag{10}$$

Дифференцируя последнее равенство по k, а затем по X, получаем

$$\omega\frac{\partial\omega}{\partial k}=\alpha_1\left[2k-\beta\left(\varphi_1+k\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right)\right],\quad \alpha_1(X)=\frac{B(X)g}{2\gamma(X)h},\quad \beta(X)=\frac{\vartheta(X)}{R},\tag{II}$$

$$\omega\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial^2\omega}{\partial k\partial X}\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)^2\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial\omega}{\partial X}\frac{\partial\omega}{\partial k}=2\alpha_1\left[1-\beta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k}{2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k^2}\right)\right]\frac{\partial k}{\partial X}+\alpha_1'\left[2k-\beta\left(\varphi_1+k\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right)\right]-\alpha_1\beta'\left(\varphi_1+k\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right)-\tag{I2}$$

$$-\alpha_1\beta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+k\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k\partial X}\right).$$

Так как в силу определения волнового числа $k(X,T)$ и частоты $\omega(X,T)$ имеет место уравнение совместности

$$\frac{\partial k}{\partial T}+\frac{\partial\omega}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial\omega}{\partial X}=0,\tag{I3}$$

то $\frac{\partial\omega}{\partial T}=\frac{\partial\omega}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial T}=-\frac{\partial\omega}{\partial k}\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial\omega}{\partial X}\right)$ и равенство (I2) переписывается в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial T}+2\alpha_1\left(1-\beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right)\frac{\partial k}{\partial X}=\omega\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial^2\omega}{\partial k\partial X}\right)+\alpha_1\beta k\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}-$$

$$-\alpha_1'\left[2k-\beta\left(\varphi_1+k\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right)\right]+\alpha_1\beta'\left(\varphi_1+k\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right)+\alpha_1\beta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}+k\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k\partial X}\right).\tag{I4}$$

После исключения $b(X,T)$ с помощью (I0) и использования равенств (II) и (I4) условие $Q_1(X,T)=0$ принимает вид

$$\omega\left[2\frac{\partial a}{\partial T}+2\frac{\partial\omega}{\partial k}\frac{\partial a}{\partial X}+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial^2\omega}{\partial k\partial X}\right)a\right]+\alpha_1\beta k\left(2\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\frac{\partial a}{\partial X}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}a\right)+\left\{\alpha_1\beta\left(k\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k\partial X}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\right)-\alpha_1'\left[2k-\beta\left(\varphi_1+k\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right)\right]+\right.\tag{I5}$$

$$\left.+\alpha_1\beta'\left(k\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}-\varphi_1\right)+\frac{B'g}{\gamma h}(k-\beta\varphi_1)\right\}a=0.$$

Преобразуем условие $Q_2(X,T)=0$. Из второго уравнения системы (7) находим

$$a=\varphi_2(k,X)b, \quad \varphi_2(k,X)=\frac{B(X)q+D(X)R^2qk^4-R^2\gamma(X)h\,\omega^2(k,X)}{B(X)Rq\nu(X)k},$$

$$\omega^2(k,X)=\frac{D(X)q}{\gamma(X)h}\left[k^4-\frac{B(X)}{D(X)}\beta(X)k\varphi_2(k,X)+\frac{B(X)}{R^2D(X)}\right], \tag{16}$$

$$\omega\frac{\partial\omega}{\partial k}=4\alpha_2k^3-\alpha_1\beta\left(\varphi_2+k\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}\right), \quad \alpha_2(X)=\frac{D(X)q}{2\gamma(X)h}, \tag{17}$$

откуда после дифференцирования по X легко получаем равенство

$$\frac{\partial\omega}{\partial T}+2\left(6\alpha_2k^2-\alpha_1\beta\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}\right)\frac{\partial k}{\partial X}=\omega\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial^2\omega}{\partial k\,\partial X}\right)+\alpha_1\beta k\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}-$$
$$-4\alpha_2'k^3+(\alpha_1\beta)'\left(\varphi_2+k\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}\right)+\alpha_1\beta\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}+k\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial k\,\partial X}\right). \tag{18}$$

После исключения $a(X,T)$ с помощью (16) и использования равенств (17), (18) условие $Q_2(X,T)=0$ преобразуется к виду

$$\omega\left[2\frac{\partial b}{\partial T}+2\frac{\partial\omega}{\partial k}\frac{\partial b}{\partial X}+\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial^2\omega}{\partial k\,\partial X}\right)b\right]+\alpha_1\beta k\left(2\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}\frac{\partial b}{\partial X}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial k^2}\frac{\partial k}{\partial X}b\right)+\left[\alpha_1\beta\left(k\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial k\,\partial X}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}\right)-4\alpha_2'k^3+(\alpha_1\beta)'\left(\varphi_2+k\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}\right)+2\frac{D'q}{\gamma h}k^3\right]b=0. \tag{19}$$

Отметим, что для функций $\varphi_1(k,X)$ и $\varphi_2(k,X)$ справедливы состношения

$$\varphi_1\varphi_2=1, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\varphi_2+\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}=0, \quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k^2}\varphi_2+2\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}+\varphi_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial k^2}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\varphi_2+\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}=0, \quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k\,\partial X}\varphi_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}+\varphi_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial k\,\partial X}=0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\frac{\partial\varphi_2}{\partial k}.$$

Умножим теперь уравнение (15) на $\varphi_2(k,X)$ и сложим с (19). Тогда, —

учитывая (20), после простых преобразований получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial T}(a^2+b^2)+\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial\omega}{\partial k}(a^2+b^2)\right]=-\frac{\partial\omega}{\partial k}(a^2+b^2)\frac{\partial}{\partial X}(\ln \gamma). \quad (21)$$

Таким образом, для определения медленно меняющихся волнового числа $k(X,T)$, частоты $\omega(k(X,T),X)$ и амплитуд $a(X,T)$, $b(X,T)$ в первом приближении получены дисперсионное соотношение (6), уравнение совместности (13) и уравнение для амплитуд (21). Влияние неоднородности материала оболочки проявляется в наличии дополнительных слагаемых в уравнениях (13) и (21), которые отсутствуют в случае однородного материала [2].

Возвращаясь к системе (8), видим, что если $Q_1(X,T)=0$, $Q_2(X,T)\equiv 0$, то она допускает периодические по θ решения

$$u_1(\theta,X,T)=A_1(X,T)\sin 2\theta, \quad w_1(\theta,X,T)=B_1(X,T)\cos 2\theta+C_1(X,T) \quad (22)$$

(выражения для $A_1(X,T)$, $B_1(X,T)$ и $C_1(X,T)$ приведены в [2]). Условие (21) является необходимым для существования решений (22).

1. Жерновой Ю.В. Асимптотические разложения для упругих волн небольшой амплитуды в неограниченной цилиндрической оболочке. – В кн.: Нелинейные краевые задачи. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 124-131.
2. Жерновой Ю.В. Двухмасштабный асимптотический метод для нелинейных волн в круговой цилиндрической оболочке. – В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 107-111.
3. Гапонов А.В., Островский Л.А., Рабинович М.И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. – Изв.вузов. Радиофизика, 1970, 13, № 2, с. 163-213.