ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ
Институт математики АН УССР, Киев, 1982

УДК 517.9:530.182

Ю.В.Жерновой

ДВУХМАСШТАБНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Исходя из геометрически нелинейных уравнений задачи в перемещениях, методом теории возмущений получены асимптотические разложения первого порядка для решений, локально близких к периодическим стационарным волнам.

Упругие волновые движения (продольно-поперечные волны) в круговой цилиндрической оболочке неограниченной длины описываются решениями системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными [1]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\gamma h}{Bg}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\
&\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{B}{DR}\left(\frac{w}{R}-\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\gamma h}{Dg}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\varepsilon\frac{B}{D}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}-\right.\\
&\left.-\frac{\nu}{R}\left[w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{3}{2}\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $u(x,t)$, $w(x,t)$ – функции осевой координаты x и времени t, обозначающие перемещения точек срединной поверхности оболочки соответственно в осевом и радиальном направлениях; B – жесткость на растяжение-сжатие, D – цилиндрическая жесткость оболочки, ν – коэффициент Пуассона, g – ускорение силы тяжести, γ – удельный вес материала, h – постоянная толщина оболочки, R – радиус ее срединной поверхности, $\varepsilon>0$ – малый параметр.

Довольно широкие классы нестационарных волновых процессов, возникающих в распределенных нелинейных системах, могут быть описаны решениями, локально близкими к периодическим стационарным волнам [2]. Параметры таких квазистационарных волн существенно изменяются в пространстве и времени лишь на интервалах намного больших соответствующих периодов исходных осциллирующих волн.

Исследование медленно меняющихся волновых решений системы (1) проведем с помощью асимптотического метода многих масштабов, обычно применяемого для увеличения интервала равномерной пригодности асимптотических разложений при отыскании решений нелинейных дифференциальных уравнений [3–5]. Решения этой системы, близкие к периодическим стационарным бегущим волнам, ищем в виде асимптотических рядов по малому параметру ε

$$u(\theta,X,T)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n}u_n(\theta,X,T)\,,\quad w(\theta,X,T)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n}w_n(\theta,X,T),$$
$$\theta=\varepsilon^{-1}\Theta(X,T)\,,\qquad X=\varepsilon x\,,\qquad T=\varepsilon t\,, \tag{2}$$

что обеспечивает медленные изменения функций u и w по x, t на фоне быстрых колебаний по фазе θ. Для волнового числа k и частоты ω имеем $k(X,T)=\partial\theta/\partial x=\partial\Theta/\partial X$, $\omega(X,T)=-\partial\theta/\partial t=-\partial\Theta/\partial T$.

В новых переменных θ, X, T пространственные и временные производные принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x}=k\frac{\partial}{\partial\theta}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial X},\ \frac{\partial}{\partial t}=-\omega\frac{\partial}{\partial\theta}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=k^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+2\varepsilon k\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial X}+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial k}{\partial X}\frac{\partial}{\partial\theta}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial X^2},\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}=\omega^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-2\varepsilon\omega\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial T}-\varepsilon\frac{\partial\omega}{\partial T}\frac{\partial}{\partial\theta}+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial T^2},$$
$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}=k^4\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}+4\varepsilon k^3\frac{\partial^4}{\partial\theta^3\partial X}+6\varepsilon k^2\frac{\partial k}{\partial X}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}+\ldots\,.$$

Подставим разложения (2) в уравнения (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда в первых двух порядках по ε получим

$$L_1(u_0,w_0)=\left(k^2-\frac{\gamma h}{Bg}\omega^2\right)\frac{\partial^2u_0}{\partial\theta^2}-\frac{\nu}{R}k\frac{\partial w_0}{\partial\theta}=0,$$
$$L_2(u_0,w_0)=k^4\frac{\partial^4w_0}{\partial\theta^4}+\frac{B}{DR}\left(\frac{w_0}{R}-\nu k\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\right)+\frac{\gamma h\omega^2}{Dg}\frac{\partial^2w_0}{\partial\theta^2}=0; \tag{3}$$

$$L_1(u_1,w_1)=-k^3\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\frac{\partial^2w_0}{\partial\theta^2}-2k\frac{\partial^2u_0}{\partial\theta\,\partial X}-\frac{\partial k}{\partial X}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+$$
$$+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w_0}{\partial X}-\frac{\gamma h}{Bg}\left(2\omega\frac{\partial^2u_0}{\partial\theta\,\partial T}+\frac{\partial\omega}{\partial T}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\right), \tag{4}$$
$$L_2(u_1,w_1)=\frac{Bk^2}{D}\left\{k\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\frac{\partial^2w_0}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u_0}{\partial\theta^2}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)-\frac{\nu}{R}\left[w_0\frac{\partial^2w_0}{\partial\theta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\}-$$
$$-4k^3\frac{\partial^4w_0}{\partial\theta^3\partial X}-6k^2\frac{\partial k}{\partial X}\frac{\partial^3w_0}{\partial\theta^3}+\frac{B\nu}{DR}\frac{\partial u_0}{\partial X}+\frac{\gamma h}{Dg}\left(2\omega\frac{\partial^2w_0}{\partial\theta\,\partial T}+\frac{\partial\omega}{\partial T}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right).$$

Систему (3) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций u_0, w_0 по переменной θ. Нас интересуют периодические по θ решения

$$u_0=a(X,T)\sin\theta\,,\qquad w_0=b(X,T)\cos\theta. \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнения (3), приходим к линейной однородной алгебраической системе для медленно меняющихся амплитуд $a(X,T)$ и $b(X,T)$

$$\left(k^2-\frac{\gamma h}{Bg}\omega^2\right)a-\frac{\nu}{R}kb=0, \quad \frac{B\nu k}{DR}a+\left(\frac{\gamma h\omega^2}{Dg}-k^4-\frac{B}{DR^2}\right)b=0, \tag{6}$$

откуда следует, что функции (5) будут решениями системы (3), если выполнено дисперсионное соотношение

$$\omega^4-\frac{g}{R^2\gamma h}\left[B(1+R^2k^2)+DR^2k^4\right]\omega^2+\frac{Bg^2k^2}{R^2\gamma^2h^2}\left[B(1-\nu^2)+DR^2k^4\right]=0. \tag{7}$$

На этом этапе функции $a(X,T)$ и $b(X,T)$ остаются неопределенными.

Подставив решения (5) в уравнения (4), получим

$$L_1(u_1,w_1)=-\frac{1}{2}k^3b^2\sin 2\theta-Q_1(X,T)\cos\theta, \tag{8}$$

$$L_2(u_1,w_1)=\frac{B}{D}k^2b\left[\left(\frac{3}{4}\frac{\nu}{R}b-ka\right)\cos 2\theta+\frac{\nu}{4R}b\right]-Q_2(X,T)\sin\theta;$$

$$Q_1(X,T)=2k\frac{\partial a}{\partial X}+\frac{\partial k}{\partial X}a-\frac{\nu}{R}\frac{\partial b}{\partial X}+\frac{\gamma h}{Bg}\left(2\omega\frac{\partial a}{\partial T}+\frac{\partial\omega}{\partial T}a\right), \tag{9}$$

$$Q_2(X,T)=2k^2\left(2k\frac{\partial b}{\partial X}+3\frac{\partial k}{\partial X}b\right)-\frac{B\nu}{DR}\frac{\partial a}{\partial X}+\frac{\gamma h}{Dg}\left(2\omega\frac{\partial b}{\partial T}+\frac{\partial\omega}{\partial T}b\right).$$

Для того, чтобы в решениях u_1, w_1 системы (8) отсутствовали секулярные члены, пропорциональные θ, должны, очевидно, выполняться условия $Q_1(X,T)=0$, $Q_2(X,T)=0$. Упростим выражения (9), входящие в них.

Из первого уравнения алгебраической системы (6) находим

$$b=\varphi_1(k)a, \quad \varphi_1(k)=\frac{R}{Bg\nu k}(Bgk^2-\gamma h\omega^2), \quad \omega^2=\frac{Bgk}{\gamma h}\left[k-\frac{\nu}{R}\varphi_1(k)\right]. \tag{10}$$

Дифференцируя последнее равенство по k, получаем

$$\omega\omega'=\frac{Bg}{2\gamma h}\left[2k-\frac{\nu}{R}\varphi_1(k)-\frac{\nu}{R}k\varphi_1'(k)\right], \quad \omega'=\frac{d\omega}{dk}, \tag{11}$$

$$\omega\omega''\frac{\partial k}{\partial X}+\omega'^2\frac{\partial k}{\partial X}=\frac{Bg}{\gamma h}\left[1-\frac{\nu}{R}\varphi_1'(k)-\frac{\nu}{2R}k\varphi_1''(k)\right]\frac{\partial k}{\partial X}. \tag{12}$$

Так как $\partial k/\partial T+\omega'\partial k/\partial X=0$, то $\partial\omega/\partial T=\omega'\partial k/\partial T=-\omega'^2\partial k/\partial X$ и последнее равенство переписывается в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{Bg}{\gamma h}\left[1-\frac{\nu}{R}\varphi_1'(k)\right]\frac{\partial k}{\partial X}=\omega\omega''\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{Bg\nu}{2\gamma hR}k\varphi_1''(k)\frac{\partial k}{\partial X}. \tag{13}$$

После исключения $b(X,T)$ с помощью (10) условие $Q_1(X,T)=0$ принимает вид

$$2\omega\frac{\partial a}{\partial T}+\frac{\partial\omega}{\partial T}a+\frac{Bg}{\gamma h}\left[\left(2k-\frac{\nu}{R}\varphi_1(k)\right)\frac{\partial a}{\partial X}+\left(1-\frac{\nu}{R}\varphi_1'(k)\right)\frac{\partial k}{\partial X}a\right]=0. \tag{14}$$

Используя теперь равенства (11) и (13), перепишем (14) следующим образом:

$$\omega\left(2\frac{\partial a}{\partial T}+2\omega'\frac{\partial a}{\partial X}+\omega''\frac{\partial k}{\partial X}a\right)+\frac{Bg\nu k}{2\gamma hR}\left[2\varphi_1'(k)\frac{\partial a}{\partial X}+\varphi_1''(k)\frac{\partial k}{\partial X}a\right]=0. \tag{15}$$

Преобразуем условие $Q_2(X,T)=0$. Из второго уравнения системы (6) находим

$$a=\phi_2(k)b, \quad \phi_2(k)=\frac{Bg+DR^2gk^4-R^2\gamma h\omega^2}{BRg\vartheta k},$$

$$\omega^2=\frac{Dg}{\gamma h}\left[k^4-\frac{B\vartheta}{DR}k\phi_2(k)+\frac{B}{DR^2}\right], \quad \omega\omega'=\frac{Dg}{2\gamma h}\left[4k^3-\frac{B\vartheta}{DR}(\phi_2(k)+k\phi_2'(k))\right], \tag{16}$$

откуда после дифференцирования по X легко получаем равенство

$$\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{Dg}{\gamma h}\left[6k^2-\frac{B\vartheta}{DR}\phi_2'(k)\right]\frac{\partial k}{\partial X}=\omega\omega''\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{Bg\vartheta}{2\gamma hR}k\phi_2''(k)\frac{\partial k}{\partial X}.$$

После **исключения** $a(X,T)$ с помощью (16) условие $Q_2=0$ принимает вид

$$\omega\left(2\frac{\partial b}{\partial T}+2\omega'\frac{\partial b}{\partial X}+\omega''\frac{\partial k}{\partial X}b\right)+\frac{Bg\vartheta k}{2\gamma hR}\left[2\phi_2'(k)\frac{\partial b}{\partial X}+\phi_2''(k)\frac{\partial k}{\partial X}b\right]=0. \tag{17}$$

Отметим, что для функций $\phi_1(k)$ и $\phi_2(k)$ справедливы соотношения

$$\phi_1\phi_2=1, \quad \phi_1'\phi_2+\phi_1\phi_2'=0, \quad \phi_1''\phi_2+2\phi_1'\phi_2'+\phi_1\phi_2''=0. \tag{18}$$

Умножим теперь уравнение (15) на $\phi_2(k)$ и сложим с (17), исключив перед этим $b(X,T)$ из выражения в квадратных скобках в (17). Тогда, учитывая (18), получим уравнение

$$\phi_2(k)\left[2\frac{\partial a}{\partial T}+2\omega'\frac{\partial a}{\partial X}+\omega''\frac{\partial k}{\partial X}a\right]+2\frac{\partial b}{\partial T}+2\omega'\frac{\partial b}{\partial X}+\omega''\frac{\partial k}{\partial X}b=0,$$

которое можно преобразовать к более компактному виду

$$\frac{\partial}{\partial T}(a^2+b^2)+\frac{\partial}{\partial X}\left[\omega'(a^2+b^2)\right]=0. \tag{19}$$

Пользуясь соотношениями (10) и (16), легко показать, что из (19) следуют аналогичные уравнения для амплитуд $a(X,T)$ и $b(X,T)$

$$\frac{\partial a^2}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(\omega' a^2)=0, \quad \frac{\partial b^2}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}(\omega' b^2)=0. \tag{20}$$

Таким образом, решения (5) полностью определены, если учесть, что функции $\omega(X,T)$ и $k(X,T)$ можно найти с помощью дисперсионного соотношения (7) и уравнения совместности.

Отметим, что уравнения (20) совпадают с известными уравнениями для амплитуды, полученными вариационным методом [6]. К такому же виду приводится соответствующее уравнение, найденное в работе [1], если в нем пренебречь слагаемыми порядка $O(\varepsilon^2)$.

Возвращаясь к системе (8), можно показать, что при выполнении условий (19), (20) она допускает периодические по θ решения

$$u_1(\theta, X, T) = A_1(X,T)\sin 2\theta, \quad w_1(\theta, X, T) = B_1(X,T)\cos 2\theta + C_1(X,T),$$

$$A_1 = \frac{Bgk^3}{8K(k,\omega)(Bgk^2 - \gamma h\omega^2)}\Big\{\big[Bg\nu^2(3\gamma h\omega^2 - 4Bgk^2) + K(k,\omega)\big]b + 4Bg\nu k(Bgk^2 - \gamma h\omega^2)a\Big\}b, \quad C_1 = \frac{1}{4}R\nu k^2 b^2, \tag{21}$$

$$B_1 = \frac{BRgk^2}{4K(k,\omega)}\big[(3\gamma h\omega^2 - 4Bgk^2)\nu b - 4Rk(\gamma h\omega^2 - Bgk^2)a\big]b,$$

$$K(k,\omega) = (\gamma h\omega^2 - Bgk^2)(Bg + 16DR^2gk^4 - 4R^2\gamma h\omega^2) + (Bg\nu k)^2.$$

Таким образом, асимптотические разложения первого порядка для квазистационарных волновых решений системы (I) имеют вид

$$u(\theta, \varepsilon x, \varepsilon t) = a(\varepsilon x, \varepsilon t)\sin\theta + \varepsilon A_1(\varepsilon x, \varepsilon t)\sin 2\theta,$$

$$w(\theta, \varepsilon x, \varepsilon t) = b(\varepsilon x, \varepsilon t)\cos\theta + \varepsilon\big[B_1(\varepsilon x, \varepsilon t)\cos 2\theta + C_1(\varepsilon x, \varepsilon t)\big].$$

I. Жерновой Ю.В. Асимптотические разложения для упругих волн небольшой амплитуды в неограниченной цилиндрической оболочке. – В кн.: Нелинейные краевые задачи. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1980, с.124-131.
2. Гапонов А.В., Островский Л.А., Рабинович М.И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. – Изв. Вузов. Радиофизика, 1970, 13, № 2, с.163-213.
3. Кузмак Г.Е. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами. – Прикл.мат. и мех., 1959, 23, № 3, с.515-526.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 274 с.
5. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.