

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И УПРУГОСТИ

Препринт 85.35

Киев - 1985

К РАСЧЕТУ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЛАСТИНЫ
ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ГАРНИСАЖНОЙ ПЛАВКЕ

Нестационарное температурное поле пластины описывается решением одномерной задачи Стефана с нелинейными граничными условиями. Для решения последней использованы как приближенные аналитические методы, так и упрощения математической модели, позволяющие свести задачу к решению задачи Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение задачи Коши реализовано на ЭВМ. Приведены графики численных расчетов.

1⁰. Постановка задачи. Модель плавления "смена стационарных состояний" позволяет исследовать стационарное температурное поле автотигля при электронно-лучевой гарнисажной плавке [1]. С помощью этой модели, однако, невозможно определить время выдержки расплава на каждой ступени мощности. Необоснованный подъем мощности электронного луча или увеличение времени выдержки расплава на данной мощности сверх времени приводит к непроизводительным потерям энергии излучением и испарением [2]. Поэтому снижение энергозатрат в процессе плавления требует изучения нестационарного температурного поля автотигля. В настоящей работе задача определения нестационарного температурного поля решена в упрощенной одномерной постановке.

Определение температурного поля пластины в процессе плавления сводится к решению задачи Стефана [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -Q \frac{dx_0}{dt} \delta(x-x_0(t)), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(l) = u_n, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \varepsilon \sigma u^4(0, t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u(\ell, t)}{\partial x} = q(t) - \varepsilon \sigma u^4(\ell, t) - \mu Q_{исп}(u(\ell, t)), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$u(x_0(t), t) = u_n = \text{const}, \quad x_0(0) = \ell, \quad (5)$$

$$\lambda(x), c(x), \rho(x) = \begin{cases} \lambda_1, c_1, \rho_1, & x > x_0(t), \\ \lambda_2, c_2, \rho_2, & x < x_0(t). \end{cases}$$

Здесь $u(x, t)$ - температура; ℓ - толщина пластины; λ_i, c_i, ρ_i - соответственно коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность жидкой ($i = 1$) и твердой ($i = 2$) фазы расплавляемого металла; $x = x_0(t)$ - граница раздела фаз (фронт плавления); ε - степень черноты, σ - постоянная Стефана-Больцмана; $u_n(x), u_n$ - начальное распределение температуры и температура плавления; $q(t)$ - плотность мощности электронного луча; $Q_{исп}(u)$ - плотность теплового потока испарения [1], $\mu = 1$; $\mu = 0$ - если испарение не учитывается; $\delta(x - x_0)$ - дельта-функция Дирака.

Получение точного аналитического решения задачи Стефана (1)-(5) не представляется возможным, поэтому построим различные приближенные решения, связанные как с упрощением математической модели, так и с применением приближенных методов.

2°. Второй метод Лейбензона. Представим решение задачи Стефана (1)-(5) в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} u_n + u_1(t)[x - x_0(t)], & x \geq x_0(t), \\ u_n - u_2(t)[x_0(t) - x], & x \leq x_0(t), \end{cases} \quad (6)$$

так что условие (5) удовлетворяется сразу, а неизвестные $u_1(t), u_2(t), x_0(t)$ найдем, требуя чтобы функция (6) удовлетворяла граничным условиям (3), (4) и уравнению (1), усредненному по координате

$$\int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - c \rho \frac{\partial u}{\partial t} + Q \frac{d x_0}{dt} \delta(x - x_0(t)) \right] dx = 0,$$

которое для функции (6) упрощается к виду

$$\left[\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=x_0(t)} - \int_0^l c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + Q \frac{d x_0}{dt} = 0, \quad (7)$$

где $[f(x, t)]_{x=x_0(t)}$ обозначает скачок функции $f(x, t)$ в точке $x = x_0(t)$.

Подставляя (6) в граничные условия (3), (4), получаем соотношения

$$u_1(t) = q^*(t) - \alpha_1 [u_n + (l - x_0(t)) u_1(t)]^4 - \mu Q_{исл}^* (u_n + (l - x_0(t)) u_1(t)), \quad q^* = q/\lambda_1, \quad \alpha_1 = \epsilon \sigma / \lambda_1, \quad Q_{исл}^* = Q_{исл} / \lambda_1; \quad (8)$$

$$u_2(t) = \alpha_2 [u_n - u_2(t) x_0(t)]^4, \quad \alpha_2 = \epsilon \sigma / \lambda_2. \quad (9)$$

Дифференцируя (8), (9), находим

$$\frac{d u_1}{dt} = \frac{\dot{q}^* + g(x_0, u_1) u_1 \dot{x}_0}{1 + (l - x_0) g(x_0, u_1)}, \quad g = 4 \alpha_1 [u_n + (l - x_0) u_1]^3 + \mu \dot{Q}_{исл}^* (u_n + (l - x_0) u_1), \quad (10)$$

$$\frac{d u_2}{dt} = - \frac{4 \alpha_2 u_2 (u_n - u_2 x_0)^3 \dot{x}_0}{1 + 4 \alpha_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3},$$

где \dot{x}_0 , \dot{q}^* , $\dot{Q}_{исл}^*$ обозначают производные по t . После подстановки (6) в (7) и исключения $\dot{u}_1(t)$, $\dot{u}_2(t)$ с помощью (10) приходим к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $x_0(t)$, $u_1(t)$ и $u_2(t)$

$$\dot{x}_0 = f_0(t, x_0, u_1, u_2), \quad x_0(0) = l,$$

$$\dot{u}_1 = f_1(t, x_0, u_1, u_2), \quad u_1(0) = q^*(0) - \alpha_1 u_n^* - \mu Q_{\text{всн}}^*(u_n), \quad (II)$$

$$\dot{u}_2 = f_2(t, x_0, u_1, u_2), \quad u_2(0) = (u_n - \xi_0) / l.$$

Здесь

$$f_0(t, x_0, u_1, u_2) = \frac{g_1(t, x_0, u_1, u_2)}{g_2(x_0, u_1, u_2)},$$

$$g_1 = [1 + 4\alpha_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3] \{c_1 \beta_1 (l - x_0)^2 \dot{q}^* + 2(\lambda_2 u_2 - \lambda_1 u_1) [1 + (l - x_0)g]\},$$

$$g_2 = \{2c_1 \beta_1 u_1 (l - x_0) + c_2 \beta_2 u_2 x_0 + 2Q + 8\alpha_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3 [c_1 \beta_1 u_1 (l - x_0) + Q]\} [1 + (l - x_0)g] - c_1 \beta_1 u_1 g (l - x_0)^2 [1 + 4\alpha_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3],$$

$$f_1 = \frac{\dot{q}^* + u_1 g(x_0, u_1) f_0(t, x_0, u_1, u_2)}{1 + (l - x_0)g(x_0, u_1)},$$

$$f_2 = - \frac{4\alpha_2 u_2 (u_n - u_2 x_0)^3 f_0(t, x_0, u_1, u_2)}{1 + 4\alpha_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3},$$

$\xi = \xi_0$ - положительный корень алгебраического уравнения

$$l\alpha_2 \xi^4 + \xi - u_n = 0,$$

которое получено из соотношения (9) при $t = 0$.

Решение задачи Коши (II) для нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка может быть получено одним из численных методов с помощью ЭВМ.

3°. Метод осреднения функциональных поправок. Перепишем задачу Стефана (I)-(5) в виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad x_0(t) < x < l, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < x_0(t), \quad t > 0, \quad (12)$$

$$u_2(x, 0) = u_0(x), \quad u_2(l) = u_n, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = \alpha_2 u_2'(0, t), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_1(l, t)}{\partial x} = q^*(t) - \alpha_1 u_1'(l, t) - \mu (\alpha_{\text{учк}}^* (u_1(l, t))), \quad t \geq 0, \quad (15)$$

$$u_1(x_0(t), t) = u_2(x_0(t), t) = u_n,$$

$$\lambda_2 \frac{\partial u_2(x_0(t), t)}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial u_1(x_0(t), t)}{\partial x} = Q \frac{dx_0}{dt}, \quad (16)$$

где $\alpha_i^2 = \lambda_i / (c_i \rho_i)$, $i = 1, 2$. Согласно методу осреднения функциональных поправок [3, 4] приближенное решение задачи (12)-(16) ищем как решение последовательности задач Стефана для уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_{i,n}}{\partial x^2} = \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial u_{i,n-1}}{\partial t} + f_{i,n}(t), \quad x_{n,i}(t) < x < l, \quad t > 0, \quad i=1,$$

$$0 < x < x_{0,n}(t), \quad t > 0, \quad i=2, \quad (17)$$

где

$$f_{i,n}(t) = \frac{1}{a_i^2 [l - x_{0,n}(t)]} \int_{x_{n,i}(t)}^l \frac{\partial}{\partial t} (u_{i,n} - u_{i,n-1}) dx,$$

$$f_{2,n}(t) = \frac{1}{a_2^2 x_{0,n}(t)} \int_0^{x_{0,n}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (u_{2,n} - u_{2,n-1}) dx, \quad n=1,2,\dots$$

В первом приближении ($n = 1$) уравнения (17) принимают

вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f_1(t), \quad x_0(t) < x < l, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f_2(t), \quad 0 < x < x_0(t), \quad t > 0,$$

где

$$f_1(t) = \frac{1}{a_1^2 [l - x_0(t)]} \int_{x_0(t)}^l \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} dx, \quad (19)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{a_2^2 x_0(t)} \int_0^{x_0(t)} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} dx. \quad (20)$$

Интегрируя дважды уравнения (18), находим

$$u_1(x,t) = C_1(t)x + C_2(t) + x^2 f_1(t)/2, \quad x_0(t) \leq x \leq l, \quad (21)$$

$$u_2(x,t) = C_3(t)x + C_4(t) + x^2 f_2(t)/2, \quad 0 \leq x \leq x_0(t).$$

Подставив решения (21) в граничные условия (14), (15), условия сопряжения (16) и равенства (19), (20), получаем соотношения

$$C_2(t) = \frac{1}{2} \{ 2[u_n - x_n(t)C_1(t)] - x_0^2(t)f_1(t) \}, \quad C_3(t) = x_2 C_4'(t) \quad (22)$$

и систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $x_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $C_1(t)$, $C_4(t)$

$$\dot{x}_0 = y(t, x_0, f_1, f_2, C_1, C_4), \quad \dot{f}_1 = \varphi_1(t, x_0, f_1, f_2, C_1, C_4),$$

$$\dot{f}_2 = \varphi_2(t, x_0, f_1, f_2, C_1, C_2),$$

$$\dot{C}_1 = \frac{4\dot{\varphi}^* + 2(C_1 + \alpha_0 f_1)h y - [4l + (l^2 - x_0^2)h]\varphi_1}{2[2 + (l - x_0)h]}, \quad (23)$$

$$\dot{C}_2 = -\frac{2(\alpha_2 C_2^4 + \alpha_0 f_2) y + \alpha_0^2 \varphi_2}{2(1 + 4\alpha_2 \alpha_0 C_2^3)}$$

Здесь введены обозначения:

$$y = [\lambda_2(\alpha_2 C_2^4 + \alpha_0 f_2) - \lambda_1(C_1 + \alpha_0 f_1)] / Q,$$

$$\varphi_1 = \frac{6\{2(l - x_0)\dot{\varphi}^* - [4 + (l - x_0)h](C_1 + \alpha_0 f_1)y - 2\alpha_1^2 f_1[2 + (l - x_0)h]\}}{(l - x_0)^2[8 + (l - x_0)h]},$$

$$\varphi_2 = -\frac{3[\alpha_0^2 f_2(1 + 4\alpha_2 \alpha_0 C_2^3) + (1 + 2\alpha_2 \alpha_0 C_2^3)(\alpha_2 C_2^4 + \alpha_0 f_2)y]}{\alpha_0^2(1 + \alpha_2 \alpha_0 C_2^3)},$$

$$h = h(x_0, f_1, C_1) = 2\mu Q_{u_{ca}}^* ([(l^2 - x_0^2)f_1 + 2(u_n + (l - x_0)C_1)] + \alpha_1 [(l^2 - x_0^2)f_1 + 2(u_n + (l - x_0)C_1)]^2).$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (23) следуют из начального условия (13), граничного условия (15) и равенства (19) при $t = 0$:

$$x_0(0) = l, \quad \frac{f_2(0)}{2} x^2 + C_2(0)[1 + \alpha_2 C_2^3(0)x] = u_0(x),$$

$$f_1(0) = -\frac{1}{\alpha_1^2 Q} [\dot{\varphi}^*(0) - \alpha_2 u_n^4 - \mu Q_{u_{ca}}^*(u_n)] \quad (24)$$

$$\cdot \{ \lambda_2 [l f_0(0) + x_0 C_1^*(0)] - \lambda_1 [\varphi^*(0) - x_1 u_n^* - \int^0 Q_{\text{исх}}^*(u_n)] \},$$

$$C_1(0) = \varphi^*(0) - x_1 u_n^* - \int^0 Q_{\text{исх}}^*(u_n) - l f_1(0).$$

Рассмотрение последующих приближений методом осреднения функциональных поправок требует громоздких вычислений и приводит к усложнению получаемых систем дифференциальных уравнений.

4°. Проекционно-сеточный (зональный) метод. С помощью преобразования Кирхгофа [5] введем новую функцию

$$v(x, t) = \int_0^{u(x, t)} \lambda(\xi) d\xi, \quad (25)$$

где $u(x, t)$ — решение задачи Стефана (1)–(5). Тогда для функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ справедливы соотношения:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = \begin{cases} \lambda_2 u, & u \leq u_n, \\ \lambda_2 u_n + \lambda_1 (u - u_n), & u \geq u_n; \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \begin{cases} v, & v \leq v_n = \lambda_2 u_n, \\ v_n + \lambda_2 (v - v_n) / \lambda_1, & v \geq v_n; \end{cases}$$

$$u'(v) = \begin{cases} 1/\lambda_2, & v < v_n, \quad x < x_0(t), \\ 1/\lambda_1, & v > v_n, \quad x > x_0(t), \end{cases}$$

с учетом которых задача Стефана (1)–(5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \text{ср} u'(v) \frac{\partial v}{\partial t} = -Q \frac{dx_0}{dt} \delta(x - x_0(t)), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (26)$$

$$v(x, 0) = \lambda_2 u_0(x) = v_0(x), \quad v_0(l) = v_n, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (27)$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda_2^2} v^4(0,t), \quad t \geq 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = & q(t) - \frac{\varepsilon \sigma}{(\lambda_1 \lambda_2)^2} [\lambda_1 v_n + \lambda_2 (v(l,t) - v_n)]^4 - \\ & - \mu Q_{\text{вск}} ([\lambda_1 v_n + \lambda_2 (v(l,t) - v_n)] / (\lambda_1 \lambda_2)), \quad t \geq 0, \\ v(x_0(t), t) = & v_n, \quad x_0(0) = l. \end{aligned} \quad (29)$$

При дальнейшем исследовании задачи (26)-(29) целесообразно перейти к рассмотрению эквивалентного интегро-дифференциального уравнения. Для этого воспользуемся второй формулой Грина

$$\int_0^l (v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) dx = (v \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial v}{\partial x}) \Big|_{x=0}^{x=l} \quad (30)$$

и обобщенной функцией Грина

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{x^2 + \xi^2}{2l} + \xi - \frac{l}{3}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\frac{x^2 + \xi^2}{2l} + x - \frac{l}{3}, & \xi \leq x \leq l, \end{cases} \quad (31)$$

являющейся решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = & \delta(x - \xi) - \frac{1}{l}, \quad 0 < x, \xi < l, \\ \frac{\partial G(0, \xi)}{\partial x} = & \frac{\partial G(l, \xi)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\int_0^l G(x, \xi) dx = \int_0^l G(x, \xi) d\xi = 0.$$

Пологая в (30) $w = G$ и учитывая (26), (28) и (32), приходим к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}
 v(x, t) = & \frac{1}{l} \int_0^l v(\xi, t) d\xi + \frac{\varepsilon \sigma}{\lambda_1^2} G(x, 0) v^4(0, t) - \\
 & - G(x, l) \left\{ q(t) - \frac{\varepsilon \sigma}{(\lambda_1 \lambda_2)^2} [\lambda_1 v_n + \lambda_2 (v(l, t) - v_n)]^4 - \right. \\
 & - \mu Q_{\text{исн}} ([\lambda_1 v_n + \lambda_2 (v(l, t) - v_n)] / (\lambda_1 \lambda_2)) \left. \right\} + \\
 & + \int_0^l c p u'(v) G(x, \xi) \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi - Q G(x, x_0(t)) \frac{dx_0}{dt},
 \end{aligned} \tag{33}$$

которое следует рассматривать вместе с начальным условием (27) и условием (29) на подлежащей определению границе раздела фаз $x = x_0(t)$.

Для построения приближенного решения полученного нелинейного интегро-дифференциального уравнения весьма эффективным является проекционно-сеточный метод [6], позволяющий осуществить редукцию задачи (33), (27), (29) к задаче Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Это достигается кусочно-постоянной по координате аппроксимацией

$$v(x, t) \approx v_{N+M}(x, t) = \sum_{l=1}^{N+M} v_l(t) \varphi_l(x, x_0(t)), \tag{34}$$

где

$$\varphi_l(x, x_0(t)) = \chi(x - x_{l-1}(t)) - \chi(x - x_l(t)), \quad l = \overline{1, N+M},$$

$$x_l(t) = \begin{cases} l x_0(t) / N, & l = \overline{1, N}; \\ x_0(t) + (l - N)[l - x_0(t)] / M, & l = \overline{N+1, N+M}; \end{cases}$$

$\vartheta(x-x_j)$ - функция Хевисайда, и использованием метода Бубнова-Галеркина при определении средних на соответствующих интервалах разбиения значений искомой функции $v_l(t)$. Узловые точки $x_j(t)$ такой сетки являются функциями времени.

При $v(x,t) = v_{N+M}(x,t)$ после умножения уравнения (33) и начального условия (27) на $\varphi_l(x, x_0(t))$, $l = \overline{1, N+M}$, и интегрирования по \mathbb{E} в пределах от 0 до l , а также использования условия (29) приходим к задаче Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $w(t) = (v_l(t), \dots, v_{N+M}(t), x_0(t))$

$$\mathcal{A}(w) \dot{w} = B(t, w), \quad w(0) = C. \quad (35)$$

Здесь

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{i,j=1}^{N+M+1}, \quad B = (B_i)_{i=1}^{N+M+1}, \quad C = (C_i)_{i=1}^{N+M+1},$$

$$\mathcal{A}_{ij}(x_0(t)) = \int_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} \Phi_j(x, x_0(t)) dx, \quad i, j = \overline{1, N+M}, \quad x_{i-1}(t) = 0,$$

$$\mathcal{A}_{N+M+1, j}(x_0(t)) = \Phi_j(x_0(t), x_0(t)), \quad j = \overline{1, N+M},$$

$$\mathcal{A}_{i, N+M+1}(w(t)) = \sum_{j=1}^{N+M} F_{ij}(x_0(t)) v_j(t) - Q G_i(x_0(t)), \quad i = \overline{1, N+M},$$

$$F_{ij}(x_0(t)) = \int_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} F_j(x, x_0(t)) dx, \quad G_i(s) = \int_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} G(x, s) dx,$$

$$\mathcal{A}_{N+M+1, N+M+1}(w(t)) = \sum_{i=1}^{N+M} F_i(x_0(t), x_0(t)) v_i(t) - Q G(x_0(t), x_0(t)),$$

$$B_i(t, w(t)) = [x_i(t) - x_{i-1}(t)] \left\{ v_i(t) - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{N+M} [x_j(t) - x_{j-1}(t)] v_j(t) \right\} + G_i(l) \left\{ q(t) - \varepsilon \delta [\lambda_1 v_n + \lambda_2 (v_{N+M}^*(t) - v_n^*)]^4 / (\lambda_1 \lambda_2)^4 \right\}$$

$$- \mu Q_{\text{учн}}([\lambda_1 v_n + \lambda_2 (v_{N+M}(t) - v_n)] / (\lambda_1 \lambda_2)) - \varepsilon \sigma G_i(0) v_i^4(t) / \lambda_2^4, \quad i = \overline{1, N+M},$$

$$B_{N+M+1}(t, w(t)) = v_n - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{N+M} [x_i(t) - x_{i-1}(t)] v_i(t) +$$

$$+ G(x_0(t), l) \{ q(t) - \varepsilon \sigma [\lambda_1 v_n + \lambda_2 (v_{N+M}(t) - v_n)]^4 / (\lambda_1 \lambda_2)^4 -$$

$$- \mu Q_{\text{учн}}([\lambda_1 v_n + \lambda_2 (v_{N+M}(t) - v_n)] / (\lambda_1 \lambda_2)) - \varepsilon \sigma G(x_0(t), 0) v_1^4(t) / \lambda_2^4 \};$$

$$C_i = \frac{N}{l} \int_{x_{i-1}(0)}^{x_i(0)} v_0(x) dx, \quad i = \overline{1, N}; \quad C_i = v_n, \quad i = \overline{N+1, N+M}; \quad C_{N+M+1} = l; \quad (36)$$

$$F_i(x, x_0(t)) = \begin{cases} \frac{1}{a_i^2 N} [(i-1)G(x, x_{i-1}(t)) - iG(x, x_i(t))], & i = \overline{1, N}, \\ \frac{1}{a_i^2 M} [(N+M+1-i)G(x, x_{i-1}(t)) - (N+M-i)G(x, x_i(t))], & i = \overline{N+1, N+M}; \end{cases}$$

$$\Phi_i(x, x_0(t)) = \frac{1}{a_j^2} \int_{x_{j-1}(t)}^{x_i(t)} G(x, \xi) d\xi, \quad \begin{matrix} i = \overline{1, N}, & j = 2, \\ i = \overline{N+1, N+M}, & j = 1. \end{matrix}$$

Систему (35) можно записать в разрешенном относительно производных виде

$$\dot{w} = \mathcal{D}(t, w), \quad w(0) = C, \quad (37)$$

где

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D}_i)_{i=1}^{N+M+1}, \quad \mathcal{D}_i = \det R_i / \det \mathcal{A},$$

$$R_\kappa = (R_{\kappa, ij})_{i, j=1}^{N+M+1}, \quad \kappa = \overline{1, N+M+1}, \quad R_{\kappa, ij} = \begin{cases} \mathcal{A}_{ij}, & j \neq \kappa, \\ B_i, & j = \kappa, \end{cases}$$

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad i, j = \overline{1, N+M},$$

$$A_{ij} = \frac{1}{6a_i^2 l} (x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) [3l(x_j + x_{j-1}) - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - x_j^2 - x_{j-1}^2 - x_j x_{j-1} - 2l^2], \quad j = \overline{1, N}, \quad i \leq j-1,$$

$$A_{ij} = \frac{1}{6a_i^2 l} (x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) [3l(x_j + x_{j-1}) - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - x_j^2 - x_{j-1}^2 - x_j x_{j-1} - 2l^2], \quad j = \overline{N+1, N+M}, \quad i \leq j-1,$$

$$A_{ii} = \frac{1}{3a_i^2 l} (x_i - x_{i-1}) [l(2x_i^2 - x_{i-1}^2) - lx_i x_{i-1} - (x_i - x_{i-1})(x_i^2 + x_{i-1}^2 + x_i x_{i-1} + l^2)], \quad i = \overline{1, N},$$

$$A_{ii} = \frac{1}{3a_i^2 l} (x_i - x_{i-1}) [l(2x_i^2 - x_{i-1}^2) - lx_i x_{i-1} - (x_i - x_{i-1})(x_i^2 + x_{i-1}^2 + x_i x_{i-1} + l^2)], \quad i = \overline{N+1, N+M},$$

$$A_{N+M+1, j} = \frac{x_j - x_{j-1}}{6a_j^2 l} (6lx_j - 3x_j^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_j x_{j-1} - 2l^2), \quad j = \overline{1, N},$$

$$A_{N+M+1, j} = \frac{x_j - x_{j-1}}{6a_j^2 l} [3l(x_j + x_{j-1}) - 3x_j^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_j x_{j-1} - 2l^2], \quad j = \overline{N+1, N+M},$$

$$A_{i, N+M+1} = \sum_{j=1}^{N+M} F_{ij} x_j - QG_i(x_0), \quad i = \overline{1, N+M},$$

$$F_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{6a_i^2 N l} [(j-1)(6lx_{j-1} - 3x_{j-1}^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2) - j(6lx_j - 3x_j^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{j-1} - 2l^2)], \quad j = \overline{1, N}, \quad i \leq j-1,$$

$$F_{ii} = \frac{x_i - x_{i-1}}{6a_i^2 N l} \{ (i-1) [3l(x_i + x_{i-1}) - x_i^2 - 4x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2] - \\ - l(6lx_i - 4x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2) \}, \quad l = \overline{1, N},$$

$$F_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{6a_i^2 N l} \{ (j-1) [3l(x_i + x_{i-1}) - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 3x_{i-1}^2 - 2l^2] - \\ - j [3l(x_i + x_{i-1}) - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 3x_j^2 - 2l^2] \}, \quad j = \overline{1, N}, \quad i > j,$$

$$F_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{6a_i^2 M l} [(M+N+1-j)(6lx_{i-1} - 3x_{i-1}^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2) - \\ - (M+N-j)(6lx_j - 3x_j^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2)], \quad j = \overline{N+1, N+M}, \quad i = j-1,$$

$$F_{ii} = \frac{x_i - x_{i-1}}{6a_i^2 M l} \{ (M+N+1-l) [3l(x_i + x_{i-1}) - x_i^2 - 4x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2] - \\ - (M+N-l)(6lx_i - 4x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2) \}, \quad l = \overline{N+1, N+M},$$

$$F_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{6a_i^2 M l} \{ (M+N-j) [3l(x_i + x_{i-1}) - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 3x_{i-1}^2 - 2l^2] - \\ - (M+N-j) [3l(x_i + x_{i-1}) - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 3x_j^2 - 2l^2] \}, \quad j = \overline{N+1, N+M}, \quad i > j,$$

$$G_i(x_0) = \frac{x_i - x_{i-1}}{6l} (6lx_0 - 3x_0^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2), \quad l = \overline{1, N},$$

$$G_i(x_0) = \frac{x_i - x_{i-1}}{6l} [3l(x_i + x_{i-1}) - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 3x_0^2 - 2l^2], \quad l = \overline{N+1, N+M};$$

$$\mathcal{A}_{N+M+1, N+M+1} = \sum_{l=1}^{N+M} F_l(x_0, x_0) \vartheta_l - Q G(x_0, x_0),$$

$$F_i(x_0, x_0) = \frac{1}{6\alpha_0^2 N l} [(i-1)(6lx_0 - 3x_0^2 - 3x_{i-1}^2 - 2l^2) - i(6lx_0 - 3x_0^2 - 3x_i^2 - 2l^2)], \quad i = \overline{1, N},$$

$$F_i(x_0, x_0) = \frac{1}{6\alpha_0^2 M l} [(M+N+1-i)(6lx_{i-1} - 3x_{i-1}^2 - 3x_0^2 - 2l^2) - (M+N-i)(6lx_i - 3x_i^2 - 3x_0^2 - 2l^2)], \quad i = \overline{N+1, N+M},$$

$$G(x_0, x_0) = [2x_0(l-x_0) - l^2] / (3l).$$

Элементы B_i , $i = \overline{1, N+M+1}$ определяются согласно (36), где

$$G_i(l) = \frac{x_i - x_{i-1}}{6l} (l^2 - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1}), \quad i = \overline{1, N+M},$$

$$G_i(0) = \frac{x_i - x_{i-1}}{6l} [3l(x_i + x_{i-1}) - x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 2l^2], \quad i = \overline{1, N+M},$$

$$G(x_0, l) = \frac{1}{6l} (l^2 - 3x_0^2), \quad G(x_0, 0) = \frac{1}{6l} (6lx_0 - 3x_0^2 - 2l^2).$$

5°. Численный расчет температурного поля пластины. Итак, определение нестационарного температурного поля пластины сведено к решению задач Коши (II); (23), (24) или (37) соответственно для систем трех, пяти и $(N+M+1)$ -го нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных с помощью метода Лейбенса (метод I), метода осреднения функциональных поправок (метод II) и проекционно-сеточного метода (метод III).

Численное решение задач Коши реализовано на ЭВМ ЕС-1060 при следующих геометрических и теплофизических параметрах: $l = 0,1$ м; $q(t) = q_0 = 43 \cdot 10^5$ ккал/(час·м²) = 0,5 ват/см²; $\lambda_1 = 100$ ккал/(м·час·°К); $\lambda_2 = 115$ ккал/(м·час·°К); $u_p = 2900$ °К; $\varepsilon = 0,4$; $\sigma = 4,9 \cdot 10^{-8}$ ккал/(м²·час·°К⁴); $Q = 5,1 \cdot 10^5$ ккал/м³; $\alpha_0^2 =$

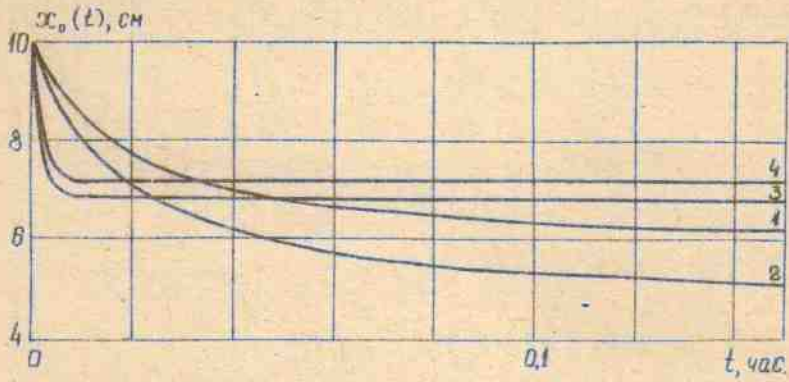


Рис. 1

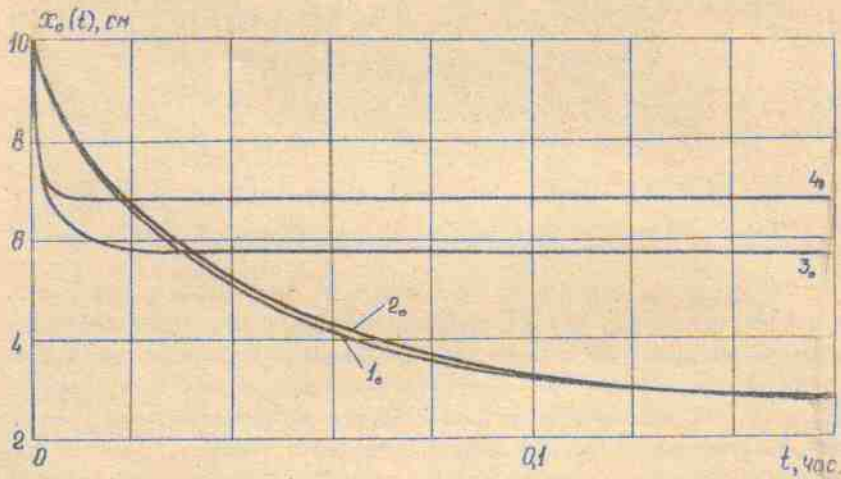


Рис. 2

$\alpha = 0,15 \text{ м}^2/\text{час}$; $\alpha_2^2 = 0,17 \text{ м}^2/\text{час}$; $\chi_1 = 1,96 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1} \cdot \text{°К}^{-3}$; $\chi_2 =$
 $= 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1} \cdot \text{°К}^{-3}$; $Q_{\text{исх}}(u) = \lambda_1(\alpha u - \beta)$, $2900^\circ\text{К} \leq u \leq 4000^\circ\text{К}$,
 $\alpha = 57,33328 \text{ м}^{-1}$, $\beta = 166266,4^\circ\text{К}/\text{м}$. Начальное распределение
 температуры принималось в виде $u_0(x) = z_0(\chi_2 z_0^2 x + 1)$.

На рис. 1, 2 представлены кривые $x_0 = x_0(t)$, полученные с

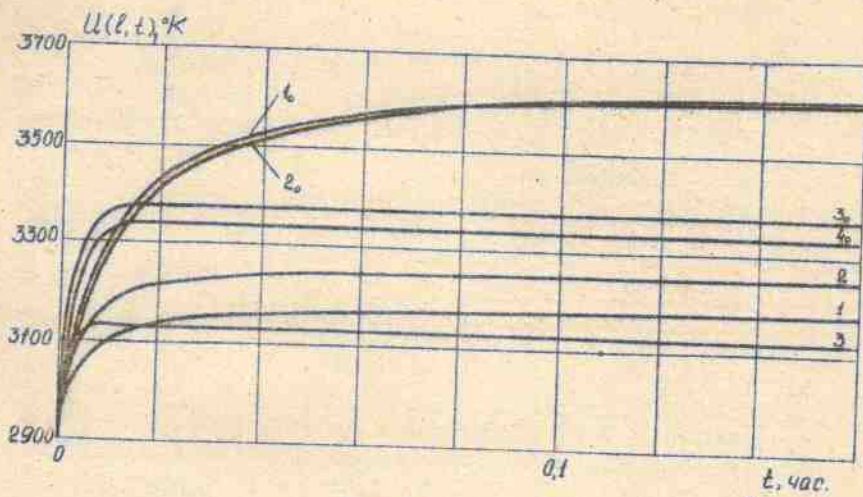


Рис. 3

ТАБЛИЦА I

t , час.	$u_z(t), N=M=2,$ °К	$u_z(t), N=M=4,$ °К
0	2900	2900
0,001	2998	3015
0,002	3052	3060
0,003	3086	3087
0,004	3106	3104
0,005	3117	3114
0,006	3123	3120
0,007	3127	3124
0,008	3129	3127
0,009	3130,4	3128,3
0,010	3131,2	3129,1
0,0105	3131,4	3129,6
0,011	3131,5	3129,6

ТАБЛИЦА 2

	метод II	метод I	метод III, $N = M = 2$	метод III, $N = M = 4$
$\mu = 1$				
t_0 , час.	0,081	0,180	0,0110	0,0105
$u(l, t_0)$, °К	3253	3180	3131,5	3129,6
$X_0(t_0)$, см	5,46	6,21	6,85	7,21
$\mu = 0$				
t_0 , час.	0,314	0,190	0,015	0,012
$u(l, t_0)$, °К	3626	3614	3378	3333
$X_0(t_0)$, см	2,63	2,72	5,92	6,87

помощью метода I (кривые 1, I_0), метода II (кривые 2, 2_0) и метода III при $N = M = 2$ (кривые 3, 3_0) и при $N = M = 4$ (кривые 4, 4_0), причем кривые, приведенные на рис. 2, получены без учета потерь испарением ($\mu = 0$). Кривые, показывающие изменение температуры на граничной поверхности $x = l$ с учетом ($\mu = 1$) и без учета испарения ($\mu = 0$), представлены на рис. 3. При $\mu = 1$ результаты расчетов при $N = M = 2$ и $N = M = 4$ здесь практически совпадают (табл. I).

Сравнение численных результатов, полученных с помощью использованных методов, приведено в табл. 2, где t_0 — время достижения максимальной температуры $u(l, t_0)$ на граничной поверхности $x = l$.

Температура на граничной поверхности $x = 0$ изменяется от значения $u(0, 0) = X_0 = 2367^\circ\text{К}$ до $u(0, t_0) = 2503^\circ\text{К}$ ($\mu = 1$).

$u(0, t_0) = 2672^\circ\text{K}$ ($\mu = 0$) (метод I) и $u(0, t_0) =$
 $= 2447^\circ\text{K}$ ($\mu = 1$), $u(0, t_0) = 2663^\circ\text{K}$ ($\mu = 0$) (метод II),
 а температура на срединной поверхности $X = l/2$ от значения
 $u(l/2, 0) = 2633^\circ\text{K}$ - до $u(l/2, t_0) = 2833^\circ\text{K}$ ($\mu = 1$),
 $u(l/2, t_0) = 3124^\circ\text{K}$ ($\mu = 0$) (метод I) и $u(l/2, t_0) =$
 $= 2755^\circ\text{K}$ ($\mu = 1$), $u(l/2, t_0) = 3134^\circ\text{K}$ ($\mu = 0$) (метод II).

Л и т е р а т у р а

1. Березовский А.А., Довбня В.Д. Математические модели тепловых процессов в автотигле при электронно-лучевой гарнисанной плавке. - В кн.: Нелинейные краевые задачи. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 41-57.
2. Андреева Т.А., Березовский А.А., Довбня В.Д. К расчету температурного поля автотигля. - В кн.: Нелинейные краевые задачи теплопроводности. Киев, 1982, с.3-8. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 82.3).
3. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. - Киев: Наук.думка, 1967. - 336 с.
4. Постольник Ю.С. Одномерный конвективный нагрев при зависящем от времени коэффициента теплообмена. - Инж.физ.журн., 1970, IV, № 2, с. 316-322.
5. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч.П. - Киев: Наук.думка, 1976. - 292 с.
6. Марчук Г.И., Агашков Б.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.