Академия наук Украинской ССР
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

Препринт 90.27

ЗАДАЧИ СТЕФАНА СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Киев
Институт математики АН УССР
1990

УДК 517.946.9

В.Л.ДОВБНЯ, Н.М.ГОЛИН, Ю.В.ЖЕРНОВОЙ

О РАСЧЕТЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ГАРНИСАЖНОЙ ПЛАВКИ НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТЕФАНА

Для приближенного расчета технологических процессов электронно-лучевой гарнисажной плавки /ЭЛГП/, как и в работе [1], используем одномерную нестационарную задачу Стефана для эквивалентного полого шара [2], которая после введения безразмерных переменных и параметров [3] принимает вид

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma x^2 \frac{\partial\theta}{\partial x}\right) - \kappa\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - P x^2(\tau)\dot{x}(\tau)\delta(x-x(\tau))=0,\ x_0<x<1,\ \tau>0;$$

$$\theta(x,0)=\varphi(x),\ \ \varphi(x_0)=1;\ \ \theta=1,\ x=x(\tau); \qquad /1/$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-q_э(\theta),\ x=x_0;\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}+h\theta=0,\ x=1.$$

Здесь $\theta(x,\tau)$, $x(\tau)$ - безразмерные температура и координата изотермы плавления; x, τ - безразмерные координата и время; $\gamma=\tilde{\kappa}^{-1}$, $\tilde{\kappa}=\lambda_ж/\lambda_т$, $\lambda_ж=\lambda_{ж\,эф}$, $\lambda_{ж\,эф}$ - коэффициент эффективной теплопроводности, учитывающий перенос тепла с движущимися частицами расплава, $\lambda_т$ - теплопроводность твердого металла; $q_э(\theta)=q_0-q(\theta)$, где q_0 - безразмерная плотность теплового потока электронно-лучевого нагрева, а с помощью зависимости $q(\theta)$ учитывается излучение с обогреваемой поверхности автотигля и испарение металла.

Решение соответствующей стационарной задачи Стефана /$q_0=const$, $\tau\to\infty$, $\theta(x,\tau)\to\theta(x)$, $x(\tau)\to x^*$ / записывается в виде

$$\theta(x)=\begin{cases}\theta_0-x_0 q_э(\theta_0)(1-x_0/x), & x_0\leqslant x\leqslant x^*,\\ \dfrac{[h+(1-h)x]x^*}{[h+(1-h)x^*]x}, & x^*\leqslant x\leqslant 1;\end{cases} \qquad /2/$$

$$x^* = \frac{h x_0(\theta_0+\gamma-1)}{\gamma h + x_0(h-1)(\theta_0-1)}, \quad q_э(\theta_0) = \frac{h(\theta_0+\gamma-1)}{x_0[h+(1-h)x_0]} . \qquad /3/$$

С помощью полученного решения максимальный объем жидкой ванны V и перегрев расплавленного металла $\Delta u = \bar{u} - u^*$, где $\bar{u}$ - средняя температура расплава, определяется по формулам

$$V = 2\pi z_1^3(x^{*3} - x_0^3)/3 , \qquad /4/$$

$$\Delta u = \frac{x_0^2(x^{*2} + x_0 x^* - 2x_0^2)}{2x^*(x^{*2} + x_0 x^* + x_0^2)} q_э(\theta_0)(u^* - u_c) . \qquad /5/$$

Одна из основных задач электронно-лучевой литейной технологии, решаемых при выплавке металлов и сплавов, - получение заданной массы /объема/ расплава с заданным перегревом. Исходя из решения /2/, /3/ стационарной задачи Стефана,можно определить основные технологические параметры плавки /плотность мощности электронно-лучевого нагрева, интенсивность электромагнитного перемешивания расплава /ЭМПР//, которые при достижении установившегося распределения температуры в автотигле обеспечат получение заданных V и Δu . При этом должен применяться режим ЭЛГП с выходом на постоянную мощность электронно-лучевого нагрева и интенсивность ЭМПР.

Действительно, из первого соотношения /3/ находим

$$\theta_0 = \frac{\gamma h x^* - x_0[\gamma h - F(x^*)]}{x_0 F(x^*)}, \qquad /6/$$

$$F(x^*) = h + (1-h)x^* .$$

Исключая θ_0 с помощью /6/ из правой части второго соотношения /3/, получим

$$q_э(\theta_0) = \gamma h x^* / [x_0^2 F(x^*)] . \qquad /7/$$

Подставляя /7/ в /5/, находим

$$\Delta u = \frac{h(x^{*2} + x_0 x^* - 2x_0^2)(u^* - u_c)}{2\tilde{k}(x^{*2} + x_0 x^* + x_0^2)F(x^*)} , \qquad /8/$$

откуда

$$\tilde{\varkappa} = \frac{h(x^{*2} + x_0 x^* - 2x_0^2)(u^* - u_c)}{2\Delta u \cdot (x^{*2} + x_0 x^* + x_0^2) F(x^*)} . \qquad /9/$$

Учитывая, что $q_э(\theta_0) = q_0 - q(\theta_0)$, из /3/ и /7/ имеем

$$q_0 = q(\theta_0) + \frac{h(\theta_0 + \gamma - 1)}{x_0 F(x_0)} = q(\theta_0) + \frac{h x^*}{\tilde{\varkappa} x_0^2 F(x^*)} . \qquad /10/$$

Таким образом, определение основных параметров плавки при заданном объеме жидкой ванны V и перегреве расплава Δu можно проводить по следующей схеме. По известной величине V из /4/ находим

$$x^* = (3V + 2\pi x_0^3 r_1^3)^{1/3} (2\pi)^{-1/3} / r_1 ,$$

затем с помощью /9/ определяем $\tilde{\varkappa} = \lambda_ж / \lambda_т$ /Δu - известно/, далее из /6/ получаем значение θ_0 , а из /10/ - величину q_0 , по которой определяется необходимая плотность мощности электронного луча

$$q = \tilde{\varkappa} \lambda_т (u^* - u_c) q_0 / r_1 . \qquad /11/$$

Однако при прогнозировании технологических режимов ЭЛГП необходимо учитывать, что плотност. мощности в фокальном пятне не должна достигать значений, при которых возникает опасность взрывного испарения металла. Поэтому существуют значения V и Δu , получение которых невозможно в условиях электронно-лучевого нагрева с постоянными мощностью и интенсивностью ЭМПР.

В качестве примера рассмотрим плавление металла при следующих значениях геометрических и теплофизических параметров: a_0 =0,175 м; /радиус цилиндра /автотигля//; b =0,04 м /радиус фокального пятна/; l =0,35 м /высота цилиндра/; ε =0,4 /степень черноты/; σ =0,567·10^{-7} Вт/(м^2·К^4); u^*=2750°К /температура плавления/; u_c =300°К /температура среды/; $\lambda_т$ =55 Вт/(м·К); α =3200 Вт/(м^2·К) /коэффициент теплообмена на охлаждаемой поверхности автотигля/; зависимость плотности теплового потока испарения металла от температуры аппроксимировалась в виде $Q_{исп}(u) = c_1 exp(-c_2/u)$, где c_1=0,308227557·10^{18}, c_2=0,9384375·10^5 . Предположим, что достигае-

...и в фокальном пятне плотность мощности электронного луча не превышает значения q_{max} =5 кВт/см^2. Тогда мы не сможем получить жидкую ванну объемом V =4165,66 см^3 / x^* =0,5/ с перегревом ΔU = =150°К, так как согласно /9/-/II/ $\tilde{\kappa}$ =I3,5; q =5,8 кВт/см$^2 > q_{max}$; при $q = q_{max}$ =5 кВт/см^2; $\tilde{\kappa}$ =I5,4 можно получить указанный объем расплава, но с меньшим перегревом - ΔU =I3I,7°К /алгоритм вычислений приведен ниже/.

Расчеты показывают, что при наличии ограничения на достигаемую плотность мощности электронно-лучевого нагрева, возможности увеличения перегрева расплава заданной массы открываются при изменении интенсивности ЭМПР /изменении $\tilde{\kappa}$ / непосредственно в процессе плавки. Нестационарное температурное поле автотигля после "мгновенного" уменьшения интенсивности ЭМПР в m раз описывается решением задачи Стефана [I]

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(m\gamma x^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) - \kappa\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \rho x^2\dot{x}\,\delta(x-x(\tau))=0,\quad x_0<x<1,\ \tau>0;$$

$$\theta(x,0)=\theta^*(x);\qquad \theta=1,\ x=x(\tau); \qquad /12/$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-m\,q_э(\theta),\ x=x_0;\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}+h\theta=0,\ x=1.$$

Приближенное решение этой задачи сведено в [I] к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\frac{A(x,\theta_0)}{B(x)},\qquad \dot{\theta}_0=\frac{C(x,\theta_0)}{D(x,\theta_0)},\quad \tau>0 \qquad /13/$$

с соответствующими начальными условиями.

Предлагаемый алгоритм расчета технологических режимов ЭЛП сводится к следующему.

<u>А/ Определение $\tilde{\kappa}_0$, q по заданным x^*, ΔU.</u> Итак, величины x^*, ΔU и q_{max} - заданы. С помощью /9/ определяем $\tilde{\kappa}=\tilde{\kappa}_0$, из /6/ находим соответствующее значение θ_0, а из /10/ - величину q_0, по которой согласно /II/ определяем необходимую для достижения цели плотность мощности q. Если $q \le q_{max}$, то задача получения заданной массы расплава с заданным перегревом решена /можно применять режим электронно-лучевого нагрева с постоянной мощностью

q при $\tilde{k} = \tilde{k}_o$ /; в противном случае /$q > q_{max}$/ для определения технологического режима плавки проводим вычисления согласно пп. Б, В, Г, Д.

Б/ Определение x_i^*, Δu_j, $\tilde{k}_{ij} = \tilde{k}_{min}$, для которых $q_{ij} \leq q_{max}$. Здесь, уменьшая объем ванны и увеличивая перегрев, находим одну из ближайших к заданным x^*, Δu пару значений x_i^*, Δu_j, для которой $q_{ij} \leq q_{max}$. Для этого полагаем

$$x_i^* = x^* - i \cdot \Delta x^*, \quad \Delta u_j = \Delta u + j \cdot \delta \Delta u, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

где приращения Δx^*, $\delta \Delta u$ могут быть выбраны, например, в виде $\Delta x^* = 0{,}001$; $\delta \Delta u = 0{,}5$, и для каждой пары i, j вычисления по схеме п. А проводим до тех пор, пока не добьемся выполнения неравенства $q_{ij} \leq q_{max}$. Соответствующее значение $\tilde{k}_{ij}$ при минимальных i, j обозначим через $\tilde{k}_{min}$.

В/ Определение $\tilde{k}_n = \tilde{k}_{max\,min}$, для которого $q_n \leq q_{max}$ при заданном x^*, и перегрева $\Delta u(\tilde{k}_{max\,min})$. Найдем значение $\tilde{k} = \tilde{k}_{max\,min}$, для которого достигается заданное значение x^* при $q = q_{max}$. Очевидно, что $\tilde{k}_{max\,min} > \tilde{k}_o$, поэтому аналитически величину $\tilde{k}_{max\,min}$ с погрешностью $\Delta \tilde{k}$ найдем, полагая

$$\tilde{k}_n = \tilde{k}_o + n \cdot \Delta \tilde{k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

и для каждого $\tilde{k}_n$ вычисляя по формулам /6/, /10/, /11/ соответствующие значения θ_{on}, q_{on}, q_n. Величину $\tilde{k}_n$, для которой $q_n \leq q_{max}$ при минимальном n, обозначим через $\tilde{k}_{max\,min}$. Перегрев, достигаемый при $q = q_{max}$, $\tilde{k} = \tilde{k}_{max\,min}$ и заданном значении x^* находим по формуле

$$\Delta u(\tilde{k}_{max\,min}) = \frac{x_o^2 (x^{*2} + x_o x^* - 2x_o^2)}{2x^* (x^{*2} + x_o x^* + x_o^2)} [q_{on} - q(\theta_{on})](u^* - u_c),$$

где n такое, что $\tilde{k}_n = \tilde{k}_{max\,min}$, или с помощью /8/ при $\tilde{k} = \tilde{k}_{max\,min}$. Очевидно, что $\Delta u(\tilde{k}_{max\,min}) < \Delta u$ /заданного значения/.

Г/ Определение $\theta_{ok} = \theta_o(\tilde{k}_{max})$, $x_k^* = x^*(\tilde{k}_{max})$, для которых $q_{max} - q_k < \varepsilon_1$ при $\tilde{k} = \tilde{k}_{max}$. Введем обозначение

$$\tilde{k}_{max} = \tilde{k}_{max\,min} + \Delta_1 \tilde{k},$$

где $\Delta_1 \tilde{k}$ - некоторое положительное число, подбираемое из технологических соображений. Далее будем искать те значения $\theta_0 = \theta_0(\tilde{\kappa}_{max})$, $x^* = x^*(\tilde{\kappa}_{max})$, $\Delta U = \Delta U(\tilde{\kappa}_{max})$, которые достигаются при $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_{max}$, $q_{max} - q < \varepsilon_1$ / ε_1 - заданное положительное число/. Для этого, полагая

$$\theta_{0\kappa} = 1 + d(\kappa - 1), \quad d > 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots,$$

при $\gamma = 1/\tilde{\kappa}_{max}$ для каждого κ найдем /см. /10/, /11/, /3/, /8//

$$q_{0\kappa} = q(\theta_{0\kappa}) + \frac{h(\theta_{0\kappa} + \gamma - 1)}{x_0 F(x_0)}; \quad q_\kappa = \tilde{\kappa}_{max} \lambda_T (U^* - U_c) q_{0\kappa} / z_1;$$

$$x^*_\kappa = \frac{h x_0 (\theta_{0\kappa} + \gamma - 1)}{\gamma h + x_0 (h-1)(\theta_{0\kappa} - 1)}; \quad \Delta U_\kappa = \frac{h({x^*_\kappa}^2 + x_0 x^*_\kappa - 2x_0^2)(U^* - U_c)}{2\tilde{\kappa}_{max}({x^*_\kappa}^2 + x_0 x^*_\kappa + x_0^2) F(x^*_\kappa)}.$$

При минимальном κ, для которого $q_{max} - q_\kappa < \varepsilon_1$, введем обозначения

$$\theta_{0\kappa} = \theta_0(\tilde{\kappa}_{max}), \ x^*_\kappa = x^*(\tilde{\kappa}_{max}), \ \Delta U_\kappa = \Delta U(\tilde{\kappa}_{max}), \ q_\kappa = q(\tilde{\kappa}_{max}).$$

<u>II/ Определение времени достижения заданного значения x^+ и перегрева $\Delta U(m, x^*) > \Delta U(\tilde{\kappa}_{max\,min})$. после уменьшения интенсивности ЭМПР / $m = \tilde{\kappa}_{max}/\tilde{\kappa}_{min}$ /.</u> За начало отсчета принимаем момент времени $\tau = 0$, при котором в автотигле установилось стационарное распределение температуры, соответствующее значениям

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_{max}, \quad q_0 = z_1 q(\tilde{\kappa}_{max}) / [\tilde{\kappa}_{max} \lambda_T (U^* - U_c)],$$

причем

$$\theta_0(0) = \theta_0(\tilde{\kappa}_{max}), \quad x(0) = x^*(\tilde{\kappa}_{max}). \qquad /14/$$

Отметим, что при надлежащем выборе ε_1 с незначительной погрешностью можно считать, что $q(\tilde{\kappa}_{max}) = q_{max}$. При $\tau = 0$ уменьшим интенсивность ЭМПР так, что новому значению интенсивности отвечает значение коэффициента эффективной теплопроводности, равное $\lambda_ж = \tilde{\kappa}_{min} \lambda_T$. Нестационарное температурное поле автотигля после "мгновенного" уменьшения интенсивности ЭМПР описывается решением нестационарной задачи Стефана /12/ при $m = \tilde{\kappa}_{max}/\tilde{\kappa}_{min}$. Приближенное решение этой задачи найдем, решая систему дифференциальных уравнений /13/ с начальными условиями /14/. Время $\tau = \tau_q$ достижения заданного значения x^* с требуемой точностью $\varepsilon_2 > 0$ определим из условия

$$|x(\tau) - x^*| < \varepsilon_2 ,$$

а соответствующее значение перегрева расплава $\Delta U(\tau_g) = \Delta U(m, x^*)$ - по формуле, приведенной в [I] с $m = \tilde{k}_{max}/\tilde{k}_{min}$.

Отметим, что справедливы неравенства

$$\tilde{k}_{min} < \tilde{k}_0 < \tilde{k}_{max\,min} < \tilde{k}_{max} .$$

Обозначим решение /3/ стационарной задачи Стефана и стационарное значение перегрева /5/, полученные при $q = q_{max}$ и некотором значении $\tilde{k}$, через $x^*(\tilde{k})$ и $\Delta U(\tilde{k})$. Тогда очевидны соотношения

$$x^*(\tilde{k}_{min}) < x^* = x^*(\tilde{k}_{max\,min}) < x^*(\tilde{k}_{max}) ;$$

$$\Delta U(\tilde{k}_{max}) < \Delta U(\tilde{k}_{max\,min}) < \Delta U < \Delta U(\tilde{k}_{min}) ;$$

$$\Delta U(\tilde{k}_{max}) < \Delta U(m, x^*) < \Delta U(\tilde{k}_{min}) .$$

Как указывалось в [I], в результате уменьшения интенсивности ЭМПР резко повышается перегрев жидкого металла и значительно медленнее протекает процесс кристаллизации /уменьшение объема расплава/. Поэтому путем надлежащего подбора параметров $\Delta_1 \tilde{k}$, Δx^* и $\delta \Delta U$ может быть найдено такое соотношение между величинами $\tilde{k}_{min}$ и $\tilde{k}_{max}$, при котором

$$\Delta U(\tilde{k}_{max}) < \Delta U(\tilde{k}_{max\,min}) < \Delta U(m, x^*) < \Delta U(\tilde{k}_{min}) ,$$

и значение перегрева $\Delta U(m, x^*)$ максимально приближается к заданному ΔU.

Согласно изложенному алгоритму составлен пакет программ, реализованный на ЭВМ ЕС-1045 при $c_ж \rho_ж = 9{,}89 \cdot 10^5$ Дж/(К·м^3); $c_т \rho_т = 2{,}251 \cdot 10^6$ Дж/(К·м^3); $\rho = 0{,}2419 \cdot 10^{10}$ Дж/м^3; $q_{max} = 5$ кВт/см^2. В **табл.** I приведены результаты расчетов для $x^* = 0{,}5$; $\Delta U = 150°$К при следующих значениях параметров: $\Delta x^* = 0{,}001$; $\delta \Delta U = 0{,}5$; $\Delta \tilde{k} = 0{,}1$; $\varepsilon_1 = 10^{5}$; $\varepsilon_2 = 0{,}005$ и $\Delta_1 \tilde{k} = 1$; 3; 5; 10, а в таблице 2 - результаты расчетов при $\Delta x^* = 0{,}001$; $\delta \Delta U = 0{,}5$; $\Delta \tilde{k} = 0{,}1$; $\varepsilon_1 = 10^{5}$, $\varepsilon_2 = 0{,}001$; $\Delta_1 \tilde{k} = 1$ и различных x^*, ΔU.

В каждом из рассмотренных случаев удается повысить перегрев расплава по сравнению с $\Delta U(\tilde{k}_{max\,min})$: $\Delta U(m, x^*) > \Delta U(\tilde{k}_{max\,min})$. Время выдержки расплава после изменения интенсивности ЭМПР до достижения x^* с заданной точностью уменьшается с уменьшением приращения $\Delta_1 \tilde{k}$, а величина достигаемого при этом перегрева почти не зависит от $\Delta_1\widetilde{K}$.

Таблица I

$x^*=0{,}5;\ \Delta U=150\ ^\circ K$	$\Delta_1\widetilde{K}$ = I	$\Delta_1\widetilde{K}$ = 3	$\Delta_1\widetilde{K}$ = 5	$\Delta_1\widetilde{K}$ = I0
$\widetilde{K}_{min}$	I2,6838	I2,6838	I2,6838	I2,6838
$\widetilde{K}_{max}$	I6,4II6	I8,4II6	20,4II6	25,4II6
m	I,2939	I,45I6	I,6093	2,0035
$x^*(\widetilde{K}_{min})$	0,4730	0,4730	0,4730	0,4730
$x^*(\widetilde{K}_{max})$	0,5082	0,5I97	0,5273	0,5377
$\theta_0(\widetilde{K}_{min})$	I,4552	I,4552	I,4552	I,4552
$\theta_0(\widetilde{K}_{max})$	I,4I02	I,384I	I,3580	I,3004
$\Delta U(\widetilde{K}_{min})$, °K	I50,5	I50,5	I50,5	I50,5
$\Delta U(\widetilde{K}_{max})$, °K	I25,758	II5,003	I05,533	86,764
t, с	29,0	II8,5	I66,5	22I,0
$\Delta U(m, x^*)$, °K	I4I,545	I4I,558	I4I,502	I4I,500
$\Delta U(\widetilde{K}_{max\,min})$, °K	I3I,696	I3I,696	I3I,696	I3I,696

Таблица 2

$\Delta_1\widetilde{K}=1$	$x^*=0{,}52$ $\Delta U=125$	$x^*=0{,}5$ $\Delta U=150$	$x^*=0{,}5$ $\Delta U=145$	$x^*=0{,}5$ $\Delta U=140$	$x^*=0{,}45$ $\Delta U=175$
$\widetilde{K}_0$	I6,9522	I3,5II6	I3,9775	I4,4767	I0,363
$q(\widetilde{K}_0)$, кВт/см²	5,80I2	5,8307	5,5306	5,2869	5,6504
$\widetilde{K}_{min}$	I6,4390	I2,6838	I3,3547	I4,0463	9,9449
$x^*(\widetilde{K}_{min})$	0,5080	0,4730	0,48I0	0,4880	0,4330
$\theta_0(\widetilde{K}_{min})$	I,4092	I,4552	I,4479	I,439I	I,4838
$\Delta U(\widetilde{K}_{min})$, °K	I25,5	I50,5	I45,5	I40,5	I75,5
$\widetilde{K}_{max\,min}$	I8,4522	I5,4II6	I5,3775	I5,3767	II,063
$\Delta U(\widetilde{K}_{max\,min})$	II4,76	I3I,70	I3I,90	I3I,9I	I64,29
$\widetilde{K}_{max}$	I9,4522	I6,4II6	I6,3775	I6,3767	I2,063
$x^*(\widetilde{K}_{max})$	0,5239	0,5082	0,5079	0,5079	0,465I
$\theta_0(\widetilde{K}_{max})$	I,3702	I,4I02	I,4I06	I,4I06	I,4620
$\Delta U(\widetilde{K}_{max})$, °K	I09,90	I25,76	I25,95	I25,95	I55,50
m	I,I833	I,2939	I,2263	I,I659	I,21299
t, с	54,0	7I,0	89,5	I26,5	I84,0
$x(t)$	0,52098	0,50099	0,500979	0,500987	0,45098
$\Delta U(m, x^*)$, °K	I22,725	I42,64	I40,05	I37,29	I68,72

Список литературы

1. Березовский А.А., Довбня В.Д., Жерновой Ю.В., Романчук Я.П., Сидельник Я.И. О приближенном расчете тепловых процессов при плавлении в условиях вынужденной конвекции в жидкой фазе // Нестационарные задачи Стефана. - Киев, 1988. - С. 21-34. - (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 88.49).
2. Андреева Т.А., Березовский А.А., Довбня В.Д. Математические модели динамики образования жидкой ванны в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Задачи Стефана в спецэлектрометаллургии и физике моря. - Киев, 1986. - С. 3-21. -(Препр./АН УССР. Ин-т математики; 86.19).
3. Андреева Т.А., Березовский А.А., Довбня В.Д. Динамика развития жидкой ванны в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Математические проблемы энергетики. - Киев: Наук.думка, 1988. - С. 106-121.