УДК 517. 946.9

Ю.В.Жерновий

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУНКЦІЇ ГРІНА ДО СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ СТЕФАНА З КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ТЕМПЕРАТУРИ

Запропоновано метод зведення стаціонарних задач Стефана до інтегральних рівнянь з використанням допоміжної функції Гріна

В [1] при зведенні задачі Стефана до інтегральних рівнянь припускалося, що коефіцієнти рівняння сталі (хоча й можуть бути різними в областях твердої і рідкої фази). В даній роботі ця вимога знімається для випадку стаціонарної задачі Стефана.

Розглянемо стаціонарну задачу Стефана в області $\Omega\subset R^n$, $n=2,3$, обмеженій замкненою кусково-гладкою поверхнею S. Область Ω розбивається деякою гладкою поверхнею Γ, місцезнаходження якої треба знайти, на дві підобласті $\Omega_S=\{P\in\Omega\colon\ T(P)<T_*\}$ і $\Omega_L=\{P\in\Omega\colon\ T(P)>T_*\}$, зайняті відповідно твердою і рідкою фазою речовини чи середовища. В кожній із областей Ω_S, Ω_L температура в точці P $T(P)$ задовольняє рівняння стаціонарної теплопровідності

$$div(\lambda_S(T(P))gradT(P))=0,\ P\in\Omega_S,$$
$$div(\lambda_L(T(P))gradT(P))=0,\ P\in\Omega_L,$$

де $\lambda_S(T)$, $\lambda_L(T)$ – задані неперервно- диференційовні функції, що визначають залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури. На поверхні S задається нелінійна крайова умова

$$\lambda(T(P))\frac{\partial T(P)}{\partial n}=f(P,T(P)),\quad P\in S,\quad \lambda(T)=\begin{cases}\lambda_S(T),\ T<T_*,\\ \lambda_L(T),\ T>T_*,\end{cases}$$

де $\partial T/\partial n$ – похідна по зовнішній нормалі до S. На шуканій поверхні розділу фаз Γ, крім умови рівності температури $T(P)$ температурі фазового переходу T_*

$$T(P)=T_*,\quad P\in\Gamma,$$

виконується стаціонарна умова Стефана

$$\lambda_S(T(P))\frac{\partial T(P)}{\partial n}\Big|_{\substack{P\in\Omega_S\\ P\Rightarrow\Gamma}}=\lambda_L(T(P))\frac{\partial T(P)}{\partial n}\Big|_{\substack{P\in\Omega_L\\ P\Rightarrow\Gamma}}. \tag{1}$$

Застосувавши перетворення Кірхгофа

$$u(P)=u(T)=\int_{T_0}^{T(P)}\lambda(T)dT,\quad T_0\leqslant\min_{P\in\overline{\Omega}}T(P), \tag{2}$$

(накладаючи на функцію $\lambda(T)$ умову існування оберненого перетворення до (2), яка виконується, наприклад, при лінійних залежностях $\lambda_S(T)$ і $\lambda_L(T)$) і враховуючи умову спряження (1), завдяки якій функція $u(P)$ є неперервно-диференційовною навіть при переході через поверхню Γ, зведемо вихідну задачу до нелінійної крайової задачі для рівняння Лапласа

$$\Delta u(P) = 0, \quad P \in \Omega, \quad \frac{\partial u(P)}{\partial n} = F(P,u(P)), \quad P \in S, \tag{3}$$

(тут $F(P,u(P))=f(P,T(u(P)))$ і додаткової умови для знаходження поверхні Γ

$$u(P) = u_*, \quad P \in \Gamma, \quad (u_* = u(T_*)).$$

Якщо далі намагатися звести крайову задачу (3) до інтегрального рівняння методом функцій Гріна, то для знаходження функції Гріна $G(P,Q)$ одержимо крайову задачу

$$\Delta G(P,Q) = -\delta(P,Q), \quad P \in \Omega, \quad \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n} = 0, \quad P \in S,$$

(тут $\delta(P,Q)$ – δ-функція з особливістю в точці $Q \in \Omega$), яка не має розв'язку [2].

В даній ситуації, щоб забезпечити існування функції Гріна (яку ми будемо називати допоміжною), здійснимо еквівалентне перетворення крайової умови задачі (3). Нехай $S=S_1 \cup S_2$, де S_1 – гладка поверхня, а S_2– гладка або кусково-гладка поверхня (можливий випадок, коли $S=S_1$, якщо S – гладка). Перепишемо крайову умову задачі (3) у вигляді

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + hu(P) = F(P,u(P)) + hu(P), \ P \in S_1, \quad \frac{\partial u(P)}{\partial n} = F(P,u(P)), \ P \in S_2,$$

де $0<h<\infty$. Тепер можемо ввести допоміжну функцію Гріна як розв'язок наступної крайової задачі:

$$\Delta G(P,Q)=-\delta(P,Q), \ P \in \Omega, \quad \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n} +hG=0, \ P \in S_1, \quad \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n} =0, \ P \in S_2. \tag{4}$$

Така функція існує і єдина [2], а можливість її практичного знаходження залежить від форми поверхні S. Зауважимо, що крайову умову третього роду з введенням допоміжного параметра h можна розглядати на всій поверхні S, а не лише на її гладкій частині S_1.

Якщо функцію Гріна знайдено з (4), то з її допомогою, використавши другу формулу Гріна для оператора Лапласа від функцій u і G, зведемо крайову задачу (3) до інтегрального співвідношення

$$u(P) = \int_{S_1} G(P,Q)[F(Q,u(Q)) + hu(Q)]dS_Q + \int_{S_2} G(P,Q)[F(Q,u(Q))dS_Q, \quad P \in \Omega.$$

Розглядаючи його на кожній із гладких поверхонь S_1, S_{2i}, $i=\overline{1,n}$;

($\bigcup_{i=1}^{n} S_{2i}=S_2$), одержимо систему інтегральних рівнянь Гамерштейна відносно значень функції $u(P)$ на кожній з цих поверхонь. Оскільки було виконано еквівалентне перетворення крайових умов задачі (3), то її розв'язок, одержаний з інтегрального співвідношення, не буде залежати від значення параметра h.

Зауважимо, що при певних умовах крайової задачі (3) можна побудувати узагальнену функцію Гріна, але одержане з її допомогою еквівалентне інтегральне рівняння не допускає зведення до системи рівнянь мінімальної розмірності.

Розглянута постановка задачі Стефана охоплює випадки як нелінійних, так і лінійних крайових умов другого або третього роду. При заданні хоча б на частині границі крайової умови першого роду для розв'язання задачі може бути використана звичайна функція Гріна.

Розглянуто приклад застосування методу допоміжної функції Гріна до осесиметричної стаціонарної задачі Стефана – математичної моделі стаціонарного температурного режиму при електронно-променевій гарнісажній плавці, в якому ускладнено постановку задачі порівняно з [3]. У даному випадку область $\Omega=\{(r,z)\colon 0<r<a;\ 0<z<l\}$ є циліндром радіуса a і висоти l. Для твердої фази розглядалась лінійна залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, а коефіцієнти тепловіддачі на охолоджуваних поверхнях циліндра приймались залежними від відповідної просторової координати. Допоміжна функція Гріна побудована за рахунок еквівалентного перетворення крайової умови на поверхні $r=a$. Наближений розв'язок системи інтегральних рівнянь Гамерштейна знайдено за допомогою проекційно-сіткового методу із застосуванням кусково-сталої апроксимації розв'язку. Одержані результати не залежать від значень параметра h.

1. *Жерновий Ю.В.* Про наближене розв'язування задач теплопровідності з фазовим переходом//Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 97-98.
2. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
3. *Березовский А.А., Жерновый Ю.В., Сайчук М.Т.* Численное исследование стационарного теплового режима при электронно-лучевой гарнисажной плавке в случае кругового сканирования луча//Проблемы специальной электрометаллургии. – 1995. – №4. – С. 18-25.