УДК 517.946.9

Ю.В.ЖЕРНОВЫЙ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТЕФАНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА

Предложен численно-аналитический метод решения нестационарных задач Стефана с двумя пространственными перемёнными.

Ради простоты ограничимся случаем двухфазной задачи Стефана, хотя метод пригоден для любого числа фаз. Будем рассматривать только такие граничные условия, которые требуют построения вспомогательной функции Грина [1], тем самым охватывая случаи как нелинейных граничных условий, так и линейных граничных условий второго или третьего рода. Задачи Стефана с граничными условиями первого рода (когда на части границы задан закон изменения температуры) решаются при помощи обычной функции Грина.

Предполагая, что прямые, параллельные оси Ox, пересекают границу раздела фаз только в одной точке, то есть ее уравнение $\Phi(x,y,t)=0$ представимо в виде $x=z(y,t)$, запишем общую постановку нестационарной задачи Стефана с двумя пространственными переменными для случаев прямоугольной области (k=0) и осевой симметрии температурного поля $T(x,y,t)$ (k=1, область - ограниченный цилиндр)

$$x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^k\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right]=\gamma(T)\frac{\partial T}{\partial t}-w(x,y,t,T)+$$

$$+px^k|z_t(y,t)|\delta_{(k)}(x-z(y,t)),\quad 0<x<a,\ 0<y<b,\ t>0;\quad k=0;1; \qquad (1)$$

$$T(x,y,0)=T^0(x,y);\quad T(z(y,t),y,t)=T_*;\quad z(y,0)=z_0(y),\ 0<z_0(y)<a;$$

$$\lambda(T)T_x=-\varepsilon_k q_0(y,t,T),\ x=0;\qquad \lambda(T)T_x=q_1(y,t,T),\ x=a;$$

$$\lambda(T)T_y=-p_0(x,t,T),\ y=0;\qquad \lambda(T)T_y=p_1(x,t,T),\ y=b.$$

Здесь $\varepsilon_0=1$; $\varepsilon_1=0$; $p=const$, $p>0$ - в случае плавления и $p<0$ - при кристаллизации, $T_*=const$ - температура фазового перехода, $\delta_{(k)}(x)$ - функция Дирака с весом x^k. Заданные функции $\lambda(T)$, $\gamma(T)$ и $w(x,y,t,T)$ могут иметь разрыв по T типа скачка при переходе через границу раздела фаз, подлежащую определению вместе с температурным полем.

Предполагая, что $T(x,y,t)\geq T_0=const$, после применения преобразования Кирхгофа $u(T)$ [1] для определения функции $z(y,t)$ и модифицированной температуры $u(x,y,t)$ получим задачу Стефана в виде, ~~удобном~~

удобном для дальнейшего решения.

$$\Delta_k u = \Gamma(u)u_t - W(x,y,t,u) + p|z_t(y,t)|x^k\delta_{(k)}(x-z(y,t)), \quad 0<x<a,$$
$$0<y<b, \quad t>0;$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y); \quad u(z(y,t),y,t)=u_*; \quad z(y,0)=z_0(y); \tag{2}$$
$$u_x = -\varepsilon_k Q_0(y,t,u), \quad x=0; \quad u_x = Q_1(y,t,u), \quad x=a;$$
$$u_y = -P_0(x,t,u), \quad y=0; \quad u_y = P_1(y,t,u), \quad y=b.$$

Здесь $\Gamma(u) = \gamma(T(u))dT(u)/du$; $W(x,y,t,u) = w(x,y,t,T(u))$; $Q_i(y,t,u) = q_i(y,t,T(u))$; $P_i(x,t,u)=p_i(x,t,T(u))$; $i=0;1$; $u_*=u(T_*)$. $T(u)$ - обратная функция к $u(T)$: $\Delta_k u = x^{-k}(x^k u_x)_x + u_{yy}$ - оператор Лапласа для случаев плоской (k=0) и цилиндрической (k=1) симметрии.

Для приближенного решения задачи (2) воспользуемся методом прямых [2]. Введя обозначения: $t_m = m\tau$, $u_m(x,y)=u(x,y,t_m)$, $z_m(y)=z(y,t_m)$, $W_m(x,y,u_m) = W(x,y,t_m,u_m)$, $Q_{im}(y,u_m) = Q_i(y,t_m,u_m)$, $P_{im}(x,u_m)=P_i(x,t_m,u_m)$, $i=0;1$, получим нелинейную краевую задачу для определения функции $u_m(x,y)$ на текущем временном слое $t=t_m$

$$\Delta_k u_m = \Gamma(u_m)(u_m-u_{m-1})/(\sigma\tau) - W_m(x,y,u_m) + px^k|z_m(y)-z_{m-1}(y)|\delta_{(k)}(x-$$
$$-z_m(y))/(\sigma\tau) - (1-\sigma)(\Delta_k u_{m-1} + W_{m-1}(x,y,u_{m-1}))/\sigma, \quad 0<x<a;\ 0<y<b; \tag{3}$$
$$u_{mx} = -\varepsilon_k Q_{0m}(y,u_m), \quad x=0; \quad u_{mx} = Q_{1m}(y,u_m), \quad x=a;$$
$$u_{my} = -P_{0m}(x,u_m), \quad y=0; \quad u_{my} = P_{1m}(x,u_m), \quad y=b; \quad m=1,2,\ldots$$

и дополнительное условие для нахождения $z_m(y)$

$$u_m(z_m(y),y)=u_*; \quad m=1,2,\ldots. \tag{4}$$

Поскольку функция Грина соответствующей (3) линейной краевой задачи (второй краевой задачи для оператора Лапласа) не существует, то, представив одно из граничных условий задачи (3), например, при $x=a$, в виде $u_{mx} + hu_m = Q_{1m}(y,u_m) + hu_m$, $x = a$, (h - произвольное положительное число), рассмотрим вспомогательную функцию Грина $G_k(x,y;\xi,\eta)$ как решение следующей краевой задачи

$$\Delta_k G_k(x,y;\xi,\eta) = -\delta_{(k)}(x-\xi)\delta(y-\eta), \quad 0<x<a,\ 0<y<b;$$
$$G_{kx}=0,\ x=0; \quad G_{ky}=0,\ y=0; \quad G_{kx}+hG_k=0,\ x=a; \quad G_{ky}=0,\ y=b;$$

$$G_k(x,y;\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{G_n(y,\eta)\varphi_{kn}(\xi)\varphi_{kn}(x)/\Phi_{kn}\right\}, \quad k=0;1; \tag{5}$$

Здесь $G_n(y,\eta) = exp[-\gamma_n(\eta-y)]\cdot(1+exp(-2\gamma_n(b-\eta))\cdot(1+exp(-2\gamma_n y))$;

$y \le \eta$; $G_n(\eta,y)=G_n(y,\eta)$; при k=0 (плоская задача) $\varphi_{0n}(x) = \cos(\gamma_n x)$, $\Phi_{0n} = (\gamma_n^2 a + h\cos^2(\gamma_n a))(1-\exp(-2\gamma_n b))/\gamma_n$, $\gamma_n > 0$, $ctg(\gamma_n a) = \gamma_n/h$, n=1,2,.... а при k=1 (осесимметричная задача) $\varphi_{1n}(x) = J_0(\gamma_n x)$, $\Phi_{1n} = a^2(\gamma_n^2 + h^2)(1-\exp(-2\gamma_n b))J_0^2(\gamma_n a)/\gamma_n$, $\gamma_n > 0$, $hJ_0(\gamma_n a)=\gamma_n J_1(\gamma_n a)$, n=1,2,.... В дальнейшем для упрощения записи вместо Δ_k, G_k, φ_{kn}, Φ_{kn} мы будем писать Δ, G, φ_n, Φ_n.

Воспользовавшись второй формулой Грина для оператора Δ, примененного к функциям u_m и G, получим интегральное представление для решения $u_m(x,y)$ краевой задачи (3)

$$u_m(x,y) = \int_0^a \Big[G(x,y;\xi,b)P_{1m}(\xi,u_m(\xi,b)) + G(x,y;\xi,0)P_{0m}(\xi,u_m(\xi,0))\Big]\times$$

$$\times \xi^k d\xi + \int_0^b \Big[a^k G(x,y;a,\eta)(hu_m(a,\eta) + Q_{1m}(\eta,u_m(a,\eta))) + \varepsilon_k G(x,y;0,\eta)\times$$

$$\times Q_{0m}(\eta,u_m(0,\eta))\Big]d\eta - \int_0^a\int_0^b G(x,y;\xi,\eta)F_m(\xi,\eta,u_m(\xi,\eta))\xi^k d\xi d\eta -$$

$$- p\int_{y_{0m}}^{y_{1m}} G(x,y;z_m(\eta),\eta)|z_m(\eta)-z_{m-1}(\eta)|z_m^k(\eta)d\eta/(\sigma\tau);\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b; \quad (6)$$

где

$F_m(x,y,u)=\Gamma(u)(u-u_{m-1})/(\sigma\tau)-W_m(x,y,u)-(1-\sigma)(\Delta u_{m-1} + W_{m-1}(x,y,u_{m-1}))/\sigma$; y_{0m}, y_{1m} - ординаты точек пересечения кривой $x=z_m(y)$ для $x\in[0,a]$ с осью Oy; $y_{1m}>y_{0m}$; предполагаем, что таких точек может быть не больше двух. Здесь возможны случаи: $y_{0m}=0$, $y_{1m}=b$ (вообще нет точек пересечения), $y_{0m}=0$, $y_{1m}\in(0,b]$ и $y_{0m}\in[0,b)$, $y_{1m}=b$ (существует только одна точка пересечения). Нелинейное интегральное уравнение (6) следует решать совместно с условием (4).

Решение уравнения (6) ищем в виде ряда по собственным функциям $\varphi_n(x)$ разложения (5) функции Грина $G(x,y;\xi,\eta)$

$$u_m(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{nm}(y)\varphi_n(x). \quad (7)$$

Для приближенного решения задачи ограничиваясь первыми N членами рядов (5) и (7) (N - достаточно большое), после их подстановки в уравнение (6) получим систему N нелинейных интегральных уравнений

Гаммерштейна относительно $g_{nm}(y)$, $n=\overline{1,N}$, которая, кроме того, содержит неизвестные постоянные $g_{nm}(0)$ (при $k=0$), $g_{nm}(b)$, $n=\overline{1,N}$, y_{0m}, y_{1m}, а также неизвестную функцию $z_m(y)$. Прежде всего эту систему необходимо дополнить еще $(\varepsilon_k+1)N$ уравнениями, положив в ней последовательно $y=0$ и $y=b$. Тогда получим систему $(\varepsilon_k+2)N$ уравнений относительно $g_{nm}(y)$, $g_{nm}(0)$ и $g_{nm}(b)$, $n=\overline{1,N}$. Что касается неизвестных y_{0m}, y_{1m} и $z_m(y)$, то в первом приближения их можно принять равными известным значениям, полученным на предыдущем временном слое, а затем при необходимости уточнить решение, используя метод итераций.

Численное решение полученной системы $(\varepsilon_k+2)N$ нелинейных интегральных уравнений удобно искать с помощью проекционно-сеточного зонального метода [3], что позволяет свести ее к системе $(\varepsilon_k+1+M)N$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $g_{nm}(0)$ (при $k=0$), $g_{nm}(b)$ и усредненных по интервалам (y_{l-1},y_l) разбиения отрезка $[0,b]$ значений g_{nml}, $l=\overline{1,M}$, функций $g_{nm}(y)$. После решения этой системы одним из эффективных итерационных методов, например, методом Ньютона, используя в качестве начального приближения решение системы на предыдущем временном слое, сможем определить $u_m(x,y)$ с помощью (7), а координаты точек границы раздела фаз с помощью условия (4).

Предложенная методика численного решения двумерных нестационарных задач Стефана проверена путем сравнения результатов расчета с точным решением задачи с границей раздела фаз в виде окружности, приведенной в [4] и записанной нами в виде (1) ($k=1$). Результаты расчетов показывают, что метод позволяет получать решение с достаточной точностью.

1. *Жерновий Ю.В.* Про застосування методу функцій Гріна до стаціонарних задач Стефана з коефіцієнтами теплопровідності, залежними від температури//Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996.- С.117-119.
2. *Лисковец О.А.* Метод прямых//Диф. уравнения. - 1965.- Т.1, № 12.- С.1662-1678.
3. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981.- 416 с.
4. *Самарский А.А., Моисеенко Б.Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана //Журн. вычислит. математики и мат. физики.- 1965.- Т.5, № 5.- С.816-827.