УДК 517.946.9

Ю.В.ЖЕРНОВИЙ

ПРО ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ЗАДАЧ СТЕФАНА З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ФУНКЦІЙ ГРІНА

Запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язання одновимірних нестаціонарних задач Стефана.

Обмежуючись для спрощення викладу випадком двох фаз, розглянемо одновимірні задачі Стефана з внутрішнім фазовим фронтом $x=z(t)$

$$L_kT = -w(x,t,T) + p\dot{z}(t)x^k\delta_{(k)}(x-z(t)),\quad 0<x<R,\ t>0;\quad k=0;1;2;$$
$$T(x,0) = T_0(x);\quad T_0(z_0)=T_*;\quad T(z(t),t)=T_*;\quad z(0)=z_0,\ 0\le z_0<R; \tag{1}$$
$$\lambda(T)\partial T/\partial x = -\varepsilon_k q_0(t,T),\quad x=0;\quad \lambda(T)\partial T/\partial x = q_R(t,T),\quad x=R.$$

Тут значення $k = 0;\ 1;\ 2$ відповідають випадкам плоскої, циліндричної та сферичної симетрії температурного поля $T(x,t)$; $\varepsilon_0=1$; $\varepsilon_1==\varepsilon_2=0$; $L_kT = x^{-k}\partial(\lambda(T)x^kT_x)/\partial x - \gamma(T)T_t$; $T_*=const$ – температура фазового переходу; $T_0(x)$ – заданий початковий розподіл температури; $p=L\rho_L(T_*)$, L – прихована теплота фазового переходу; ρ_L – густина для рідкої фази; $\delta_{(k)}(x)$ – функція Дірака з вагою x^k. Задані функції $\lambda(T)$, $\gamma(T)$ і $w(x,t,T)$ можуть бути розривними при переході через фазовий фронт.

Застосувавши перетворення Кірхгофа $u(T)$ до функції $T(x,t)$ і до її значень при $t=0$ і $x=z(t)$: $u(T_0(x))=u_0(x)$, $u(T_*)=u_*$, для знаходження функцій $u(x,t)$, $z(t)$ з (1) одержимо задачу Стефана у вигляді, зручному для подальшого розв'язання

$$\Delta_k u = \Gamma(u)u_t - W(x,t,u) + p\dot{z}(t)x^k\delta_{(k)}(x-z(t)),\quad 0<x<R,\ t>0;$$
$$u(x,0)=u_0(x);\quad u_0(z_0)=u_*;\quad u(z(t),t)=u_*;\quad z(0)=z_0; \tag{2}$$
$$u_x = -\varepsilon_k Q_0(t,u),\quad x=0;\quad u_x = Q_R(t,u),\quad x=R.$$

Тут $\Gamma(u) = \gamma(T(u))dT(u)/du$; $W(x,t,u) = w(x,t,T(u))$; $Q_0(t,u)==q_0(x,t,T(u))$; $Q_R(t,u)=q_R(x,t,T(u))$; $\Delta_k u = x^{-k}\partial(x^k\partial u/\partial x)/\partial x$; $T(u)$ – обернена функція до $u(T)$.

Для наближеного розв'язання задачі (2) використаємо метод прямих [1]. Ввівши позначення: $t_n=n\tau$, $u_n(x)=u(x,t_n)$, $z_n=z(t_n)$, $W_n(x,u_n)=W(x,t_n,u_n)$, $Q_{0n}(u_n)=Q_0(t_n,u_n)$, $Q_{Rn}(u_n)=Q_R(t_n,u_n)$, для знаходження функції $u_n(x)$ і сталої z_n на поточному часовому шарі $t=t_n$ одержимо нелінійну крайову задачу

$$\Delta_k u_n = \Gamma(u_n)(u_n - u_{n-1})/(\sigma\tau) - W_n(x,u_n) + px^k\delta_{(k)}(x-z_n)(z_n - z_{n-1})/(\sigma\tau) -$$
$$- (1-\sigma)(\Delta_k u_{n-1} + W_{n-1}(x,u_{n-1}))/\sigma, \quad 0<x<R; \qquad (3)$$
$$u_{nx} = -\varepsilon_k Q_{0n}(u_n), \ x=0; \quad u_{nx} = Q_{Rn}(u_n), \ x=R; \quad u_n(z_n)=u_*; \quad n=1,2,\dots,$$

яка апроксимує задачу Стефана (2) при $t=t_n$ з похибкою $O(\tau)$ для $\sigma=1$ і з похибкою $O(\tau^2)$ для $\sigma=1/2$.

Оскільки функція Гріна лінійної крайової задачі, що відповідає задачі (3), не існує, то записавши граничну умову при $x=R$ у вигляді

$$u_{nx}(R) + hu_n(R) = Q_{Rn}(u_n(R)) + hu_n(R), \qquad (0 < h < \infty),$$

введемо допоміжну функцію Гріна $G_k(x,y)$ як розв'язок крайової задачі

$$\Delta_k G_k(x,y) = -\delta_{(k)}(x-y), \ 0<x<R; \quad G_{kx}(0,y)=0, \ G_{kx}(R,y)+hG_k(R,y)=0,$$

звідки знайдемо: $G_0(x,y)=[1+h(R-y)]/h$, $G_1(x,y)=[1+hR\cdot\ln(R/y)]/(hR)$,

$$G_2(x,y)=[hR^2+(1-hR)y]/(hR^2y), \ x\le y; \quad G_k(y,x)=G_k(x,y), \quad k=0;1;2.$$

Використавши другу формулу Гріна для оператора Δ_k, застосованого до функцій u_n і G_k, для розв'язку $u_n(x)$ крайової задачі (3) одержимо інтегральне зображення

$$u_n(x) = u_n(R) + Q_{Rn}(u_n(R))/h + \varepsilon_k G_k(x,0)Q_{0n}(u_n(0)) -$$
$$-pz_n^k(z_n - z_{n-1})G_k(x,z_n)/(\sigma\tau) - \int_0^R G_k(x,y)F_{k,n}(y,u_n(y))y^k dy; \ 0\le x\le R, \qquad (4)$$

де $F_{k,n}(y,u)=\Gamma(u)(u-u_{n-1})/(\sigma\tau)-W_n(y,u)-(1-\sigma)(\Delta_k u_{n-1}+W_{n-1}(y,u_{n-1}))/\sigma$.

Співвідношення (4) - інтегральне рівняння Гаммерштейна відносно $u_n(x)$, яке містить невідомі сталі $u_n(0)$ (при k=0), $u_n(R)$ і z_n. Для їх знаходження необхідно записати ще три рівняння, поклавши в (4) послідовно $x=0$, $x=R$ і $x=z_n$. Наведемо лише рівняння, одержане при $x=R$,

$$R^k\left[\varepsilon_k Q_{0n}(u_n(0)) + Q_{Rn}(u_n(R))\right] - pz_n^k(z_n - z_{n-1})/(\sigma\tau) -$$
$$- \int_0^R F_{k,n}(y,u_n(y))y^k dy = 0.$$

Бачимо, що воно не містить допоміжного параметра h і виражає відому умову розв'язності стаціонарної задачі (3), якщо її розглядати як другу крайову задачу для одновимірного рівняння Пуассона.

Числовий розв'язок одержаної системи нелінійних інтегральних рівнянь зручно шукати за допомогою проекційно-сіткового зонального методу [2], що дозволяє звести її до системи $(N+2+\varepsilon_k)$ нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $u_n(0)$ (при k=0), $u_n(R)$, z_n і усереднених по інтервалах (x_{i-1},x_i) розбиття відрізка $[0,R]$ значень

$$u_{ni} = (k+1)\int_{x_{i-1}}^{x_i} u_n(x)x^k dx/(x_i^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}), \quad i=\overline{1,N},$$

функції $u_n(x)$. При усередненні необхідно враховувати залежність функцій $G_k(x,z_n)$ і $F_{k,n}(x,u_n(x))$ від невідомого значення z_n. ($F_{k,n}(x,u_n(x))$ терпить розрив при переході x через значення z_n). Тому, на перший погляд, виникає необхідність перебудови сітки на кожному кроці по часу, як це робиться у багатьох числових методах розв'язання задачі Стефана. Однак, цю проблему можна розв'язати за допомогою одного з ефективних ітераційних методів, наприклад, методу Ньютона, застосувавши його до одержаної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь в цілому. В результаті на кожній ітерації будемо мати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої залежать від відомого наближення розв'язку на попередній ітерації. Таким чином буде збережено стабільне розбиття відрізка $[0,R]$. За початкове наближення для методу Ньютона доцільно використовувати розв'язок системи на попередньому часовому шарі, тоді збіжність ітераційного процесу буде забезпечена за рахунок зменшення кроку τ.

Запропонована методика перевірена шляхом порівняння результатів розрахунку з числовим розв'язком, одержаним в [3] методом наскрізного рахунку, і точним розв'язком $z(t)=a(t_0-t)^{1/2}$, $0\le t<t_0$; $T(x,t)=B_L - A_L x^2/(t_0-t)$, $0\le x\le z(t)$; $T(x,t) = B_S - A_S x^2/(t_0-t)$, $z(t)\le x\le R$; $A_S = (4\lambda_L(B_L-T_*)+pa^2)/(4\lambda_S a^2)$; $A_L = (B_L-T_*)/a^2$; $B_S=T_*+a^2A_S$ задачі Стефана з циліндричною симетрією, наведеної в [3], яку ми записали у вигляді (1) (k = 1, $\dot z(t) < 0$).

Розрахунки проводились при $t_0=54$; $T_*=0$; $B_L=1$; $a=0.2$; $p=1$; $\lambda_S=0.5$; $\lambda_L=0.75$; $\gamma_S=2$; $\gamma_L=1.25$; $R=2$; $\sigma=1$, для кроку по часу $\tau=0.5$; $\tau=0.25$ і кроку по просторовій змінній $\delta=0.1$ ($N=20$) і $\delta=0.05$ ($N=40$). Результати не залежать від значення допоміжного параметра h ($h\neq 0$).

Порівняння результатів розрахунку значень $z(t)$, $T(x,t)$, одержаних після трьох ітерацій методу Ньютона, з результатами [3] і з точним розв'язком, подаємо в таблицях.

Т а б л и ц я 1.

t	$z(t)$				
	метод [3], $\tau=0.5$; $\delta=0.13$	$\tau=0.5$; $\delta=0.1$	$\tau=0.5$; $\delta=0.05$	$\tau=0.25$; $\delta=0.1$	точне значення
10	1,469	1,468	1,469	1,469	1,470
20	1,324	1,324	1,324	1,325	1,327
30	1,158	1,161	1,162	1,163	1,166
40	0,968	0,970	0,971	0,975	0,980
50	0,724	0,727	0,726	0,738	0,748

Т а б л и ц я 2.

x	$T(x,t)$ (при $\tau=0.5$; $\delta=0.1$)					
	$t=10$		$t=30$		$t=50$	
	обчисл. значення	точне значення	обчисл. значення	точне значення	обчисл. значення	точне значення
0	0,9986	1,0000	0,9917	1,0000	0,9447	1,0000
0,2	0,9801	0,9815	0,9623	0,9706	0,8732	0,9286
0,4	0,9245	0,9259	0,8740	0,8824	0,6586	0,7143
0,6	0,8319	0,8333	0,7268	0,7353	0,3009	0,3571
0,8	0,7022	0,7037	0,5208	0,5294	-0,3045	-0,2171
1,0	0,5355	0,5370	0,2559	0,2647	-1,2851	-1,1943
1,2	0,3317	0,3333	-0,1030	-0,0894	-2,4829	-2,3886
1,4	0,0909	0,0926	-0,6841	-0,6706	-3,8979	-3,8000
1,6	-0,2841	-0,2815	-1,3547	-1,3412	-5,5296	-5,4286
1,8	-0,7625	-0,7600	-2,1148	-2,1012	-7,3778	-7,2743
2,0	-1,2974	-1,2948	-2,9643	-2,9506	-9,4420	-9,3371

1. Лисковец О.А. Метод прямых//Диф. уравненция.- 1965.- Т.1, № 12.- С.1662-1678.
2. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981.- 416 с.
3. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана //Журн. вычислит. математики и мат. физики.- 1965.- Т.5, № 5.- С.816-827.