

УДК 536.25:517.95

А. А. Березовский, Ю. В. Жерновский, М. Т. Сайчук

**РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА
ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ГАРНИСАЖНОЙ ПЛАВКЕ
В СЛУЧАЕ КРУГОВОГО СКАНИРОВАНИЯ ЛУЧА**

Предложена математическая модель стационарного теплового режима при электронно-лучевой гарнисажной плавке. Проведено численное исследование зависимости тепловых параметров плавки от радиуса кругового сканирования луча, радиуса фокального пятна, средней скорости перемешивания расплава. Приводятся сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными.

Сущность процесса электронно-лучевой гарнисажной плавки (ЭЛГП) заключается в выплавке сплава из кусковой или сыпучей шихты, загружаемой в плавильную емкость (автотигель), и в дальнейшем получении из расплава литых изделий. В связи с наблюдаемой в последнее время тенденцией увеличения доли литых изделий взамен получаемых деформацией или механической обработкой ЭЛГП занимает все более видное место в производстве литья не только из тугоплавких и химически активных металлов, но и из сплавов на основе никеля, железа, кобальта.

В технологических исследованиях электронно-лучевой плавки и ЭЛГП обычно пользуются некоторой усредненной (интегральной) температурой, получаемой расчетом по средней скорости испарения металла [1] либо измеряемой экспериментально в фиксированных точках на обогреваемой поверхности, например в центре ванны [2] или на середине ее радиуса в плавильной емкости [3]. Однако такой подход приемлем только в случаях, когда обеспечивается равномерное распределение мощности электронно-лучевого нагрева, и является слишком грубым приближением для реальных условий ЭЛГП, обычно осуществляемой сфокусированным электронным лучом, сканирующим по обогреваемой поверхности. Некоторые особенности нестационарного способа электронно-лучевого нагрева учтены в монографии [4] при построении физических моделей ЭЛГП, с помощью которых получены аналитические зависимости для температуры нагрева металлов в фокальном пятне. Однако только применение математических моделей открывает возможность комплексного учета большинства факторов, влияющих на протекание процесса плавления, и позволяет определять не только температуру металла в любой точке автотигля, но и объем гарнисажной ванны и перегрев расплава в ванне [5-7].

Особенностью процесса ЭЛГП в режиме выдержки на заданной постоянной мощности нагрева является достижение стационарного распределения температуры металла в автотигле и стабилизация объема жидкой ванны, когда поступающая энергия электронно-лучевого нагрева полностью отводится системой охлаждения и за счет теплопотерь излучением и испарением с нагреваемой поверхности.

Ниже предложена математическая модель стационарного теплового режима в автотигле, построенная с использованием подхода [5-7], основанного на теории теплопроводности с введением для жидкой фазы коэффициента эффективной теплопроводности, имитирующего вынужденный конвективный перенос тепла в расплаве. В отличие от работ [5-7] учитывается сканирование электронного луча по обогреваемой поверхности, зависимость коэффициента эффективной теплопроводности от диаметра жидкой ванны при заданной средней по ванне скорости движения расплава, а также зависимость коэффициента теплопроводности твердого металла от температуры.

Опишем рассматриваемый процесс и особенности построения математической модели. Автотигель имеет цилиндрическую форму, его боковая ($r = a$) и донная ($z = 0$) поверхности охлаждаются водой (днище может быть выполнено неводоохлаждаемым), а нагрев осуществляется сфокусированным электронным лучом, непрерывно сканирующим по поверхности металла ($z = l$ по заданной программе (окружность, спираль, пересекающиеся строки и др.)). Характер теплоисточника при моделировании электронно-лучевого нагрева определяется величиной ускоряющего напряжения электронной пушки, влияющего на глубину пробега электронов в металле [8]. В большинстве случаев ЭЛГП проводится с использованием электронных пушек аксиального типа с ускоряющими напряжениями, достигающими 40–50 кВ [4]. Расчеты по формуле Шонланда [8] показывают, что для металлов при таких ускоряющих напряжениях глубина пробега электронов не превышает 10^{-5} м, поэтому относительная погрешность, допускаемая при вычислениях температуры металла с помощью математической модели с поверхностным источником электронно-лучевого нагрева, рассмотрением которой мы ограничиваемся в настоящей работе, не превышает 0,01 % по сравнению со случаем учета объемного поглощения тепла.

Важным фактором, существенно влияющим на температурное поле и позволяющим увеличивать слив жидкого металла, одновременно уменьшая его перегрев, является воздействие системы электромагнитного перемешивания расплава, обуславливающее интенсивный теплообмен по всему объему ванны. Используем получившую широкое распространение [4–9] гипотезу о том, что вынужденный конвективный перенос тепла в расплаве может быть имитирован с помощью коэффициента эффективной теплопроводности λ_e , превышающего коэффициент молекулярной теплопроводности λ_L в \tilde{k} раз. Для нахождения значения \tilde{k} воспользуемся формулой, полученной в результате экспериментальных исследований турбулентного переноса тепла для случая вынужденной конвекции [10]:

$$\tilde{k} = \begin{cases} 0,45 (\text{Pr Re})^{0,438} & \text{при } \text{Pr Re} \leq 8600, \\ 1,35 \cdot 10^{-6} (\text{Pr Re})^{1,84} & \text{при } \text{Pr Re} > 8600. \end{cases} \quad (1)$$

Учитывая, что $\text{PrRe} = 2\nu_* C_{VL} / \lambda_L$, видим, что величина \tilde{k} зависит от теплоемкости единицы объема жидкого металла C_{VL} , средней по ванне скорости движения расплава ν и среднего радиуса ванны r . Отметим, что в работе [4] для случая достаточно интенсивного перемешивания металла при расчетах использовалось значение $\tilde{k} = 10$.

В случае сканирования электронного луча по окружности с центром, находящимся на оси тигля $r = 0$, или просто осесимметричного нагрева неподвижным лучом в предположении, что коэффициент эффективной теплопроводности $\lambda_e = \text{const}$ во всей области жидкой фазы, определение установившегося температурного поля металла $T(r, z)$ и изотермы плавления (поверхности раздела фаз) $r = R(z)$ приводит к необходимости решения следующей осесимметричной стационарной задачи типа Стефана [5, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= 0, \quad (r, z) \in \Omega_s; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in \Omega_L; \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= 0, \quad r = 0; \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_1 T = \alpha_1 T_w, \quad r = a; \\ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} - \alpha_2 T &= -\alpha_2 T_w, \quad z = 0; \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} = q(r) - f(T), \quad z = l; \\ T &= T_m, \quad r = R(z); \quad \lambda_e \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r=R(z)-0} = \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r=R(z)+0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\Omega_s \cup \Omega_L = \{(r, z): 0 < r < a; 0 < z < l\}$; $\Omega_s = \{(r, z): T(r, z) < T_m\}$; $\Omega_L = \{(r, z): T(r, z) > T_m\}$ — области твердой и жидкой фаз соответственно; линейные граничные условия при $r = a$ и $z = 0$ описывают конвективный теплоотвод с охлаждаемых поверхностей тигля с коэффициентами теплоотдачи α_1, α_2 , а нелинейное граничное условие при $z = l$ — поглощение энергии электронного луча плотности $q(r)$ и тепловые потери за счет излучения и испарения с нагреваемой поверхности, где $f(T) = \varepsilon \sigma T^4 + \eta(T - T_m) Q_{ev}(T)$. Последние условия в (2) выражают равенство температуры на границе раздела фаз $r = R(z)$ температуре плавления T_m и равенство тепловых потоков со стороны жидкой и твердой фаз в стационарном состоянии системы.

Функцию $Q_{ev}(T)$, обозначающую плотность теплового потока испарения, представим в виде $Q_{ev}(T) = c_1 \exp(-c_2/T)$, где постоянные c_1, c_2 могут быть найдены как по данным экспериментальных исследований, так и с помощью закона Клапейрона-Клаузиуса, записанного для тонкого газового слоя, прилегающего к поверхности испарения [11, 12].

Приближенное решение задачи (2) методом конечных разностей осложняется, поскольку неизвестны положение границы раздела фаз и значение коэффициента λ_e . Применение же метода установления [13] требует решения соответствующей нестационарной задачи Стефана, что слишком трудоемко. Поэтому сведем задачу (2) к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению Гаммерштейна [5, 6]. Для этого применим преобразование Кирхгоффа

$$\psi = \int_0^{T-T_w} \lambda(s) ds$$

и аппроксимируем зависимость коэффициента теплопроводности от температуры кусочно-постоянной функцией

$$\lambda(T) = \lambda_i, \quad T_{i-1} \leq T < T_i, \quad i = \overline{1, K} \quad (T_K = T_m, T_0 = T_w);$$

$$\lambda(T) = \tilde{k} \lambda_L, \quad T > T_m.$$

Исключая $T(r, z)$, из (2) получим более простую краевую задачу для новой искомой функции $\psi(r, z)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 < z < l; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} + h_1 \psi = 0, \quad r = a; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad r = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} - h_2 \psi = 0, \quad z = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = q(r) - f(T(\psi)), \quad z = l$$

и условие для определения поверхности раздела фаз $r = R(z)$

$$\psi(R(z), z) = \lambda_1 (T_1 - T_w) + \sum_{i=2}^{K-1} \lambda_i (T_i - T_{i-1}) + \lambda_K (T_m - T_{K-1}). \quad (4)$$

С помощью соответствующей функции Грина $G(\rho, \zeta; r, z)$ решение краевой задачи (3) сводится к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна относительно функции $\phi(r) = \psi(r, l)$ [5]. Для нахождения его приближенного решения аппроксимируем $\phi(r)$ кусочно-постоянной функцией, обозначив через ϕ_i среднеинтегральное значение $\phi(r)$ на интервале (r_{i-1}, r_i) , где $r_i = ia/M$ — точки разбиения отрезка $[0, a]$ на M частей. После применения зонального метода (простейшего из проекционных методов [14]) для определения $\phi_j, j = \overline{1, M}$, получим систему нелинейных уравнений

$$\phi_j = \phi_{0j} - \sum_{i=1}^M G_{ij} f(T(\phi_i)), \quad j = \overline{1, M}, \quad (5)$$

где постоянные ϕ_{0j}, G_{ij} находятся интегрированием известных функций.

После определения φ_j , $j = \overline{1, M}$, сможем представить распределение модифицированной температуры в виде ряда

$$\psi(r, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) J_0(\gamma_n r), \quad (6)$$

где

$$A_n(z) = \left[\gamma_n \int_0^a r q(r) J_0(\gamma_n r) dr / P_n - \sum_{i=1}^M f(T(\varphi_i)) A_{ni} \right] g_n(z);$$

$$A_{ni} = [r_i J_1(\gamma_n r_i) - r_{i-1} J_1(\gamma_n r_{i-1})] / P_n;$$

$$P_n = (\gamma_n^2 + h_1^2) [\gamma_n + h_2 - (\gamma_n - h_2) \exp(-2\gamma_n l)] J_0^2(\gamma_n a);$$

$$g_n(z) = (\gamma_n + h_2) \exp(-\gamma_n(l-z)) + (\gamma_n - h_2) \exp(-\gamma_n(l+z));$$

$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$ - корни уравнения $h_1 J_0(\gamma a) - \gamma J_1(\gamma a) = 0$.

Однако решение системы (5) невозможно без нахождения постоянной \tilde{k} , которая использовалась при определении связи между функциями T и ψ . Возвращаясь к формуле (1) для \tilde{k} , видим, что при заданной величине средней скорости движения расплава v определение \tilde{k} сводится к нахождению среднеинтегрального значения радиуса ванны

$$r_s = \int_{z_0}^l R(z) dz / (l - z_0) \quad (7)$$

по ее глубине $H = l - z_0$, также подлежащей определению. Этим уравнением необходимо дополнить систему (5) основных уравнений задачи.

После решения системы (5), (7) с помощью (6) можно определить искомое стационарное температурное поле $T(r, z)$, а из условия (4) - расположение границы раздела фаз $r = R(z)$. Объем жидкой ванны, среднеинтегральный перегрев расплава по всему объему ванны и перегрев расплава на ее поверхности вычислим по формулам:

$$W = \pi \int_{z_0}^l R^2(z) dz, \quad \Delta T = \frac{2\pi}{W} \int_{z_0}^l \int_0^{R(z)} T(r, z) r dr dz - T_m,$$

$$\Delta T_l = \frac{2}{R^2(l)} \int_0^{R(l)} T(r, l) r dr - T_m.$$

Определим $q(r)$ - стационарное распределение плотности мощности на поверхности нагрева в случае сканирования электронного луча по окружности радиуса $0 < R < a$. Пусть O_1 - точка фокусировки луча, расположенная в плоскости $z = l$ на расстоянии $|OO_1| = R$ от точки O , лежащей в той же плоскости на оси тигля. Рассмотрим точку $M(\beta)$, расположенную на расстоянии r от точки O и на расстоянии $y(\beta)$ от точки O_1 , где $\beta = \angle O_1OM(\beta)$. Значение плотности мощности в точке $M(\beta)$ равно $q_0 \exp[-k_1 y^2(\beta)]$, где $y^2(\beta) = R^2 + r^2 - 2rR \cos \beta$, $0 \leq \beta \leq \pi$ (из теоремы косинусов). Плотность энергии, поглощаемой в каждой точке, находящейся на расстоянии r от точки O , за время прохождения электронным лучом одной полной окружности радиуса R (за период вращения $T_{sc} = 2\pi R / v_{sc}$) определяется интегралом

$$E(r) = 2q_0 \int_0^{T_{sc}/2} \exp\{-k_1 [r^2 + R^2 - 2Rr \cos(v_{sc}t/R)]\} dt =$$

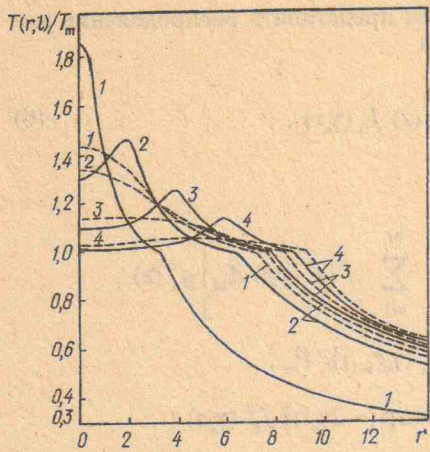


Рис. 1. Распределение безразмерной температуры ниобия по нагреваемой поверхности при $P = 133$ кВт; $v = 0,3$ м/с; $b = 0,01$ м (сплошные кривые) и $b = 0,04$ м (штриховые) для различных значений радиуса кругового сканирования луча R , м: 1 - $R = 0$; 2 - 0,02; 3 - 0,04; 4 - 0,06. r , см

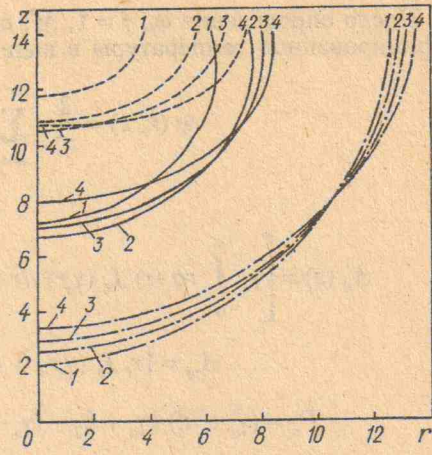


Рис. 2. Сечения поверхностей раздела жидкой и твердой фаз $r=R(z)$, полученные для ниобия для случаев $v = 0,3$ м/с (сплошные кривые), $v = 0,005$ м/с (штриховые) и без учета потерь излучением и испарением с нагреваемой поверхности (штрих-пунктирные кривые) при $P = 133$ кВт; $b = 0,03$ м и различных значениях радиуса сканирования R , м: 1 - $R = 0$; 2 - 0,03; 3 - 0,04; 4 - 0,05. r , z , см

$$= \frac{2Rq_0}{v_{sc}} \exp[-k_r(r^2 + R^2)] \int_0^\pi \exp(2k_r r R \cos \beta) d\beta.$$

В качестве $q(r)$ естественно принять среднее значение плотности поглощаемой энергии за единицу времени

$$q(r) = \frac{E(r)}{T_{sc}} = \frac{q_0}{\pi} \exp[-k_r(r^2 + R^2)] \int_0^\pi \exp(2k_r r R \cos \beta) d\beta. \quad (8)$$

С помощью разработанной математической модели были проведены расчеты стационарных тепловых режимов при ЭЛПП ниобия в автотигле диаметром 280 мм ($a = 0,14$ м) при уровне металла в тигле $l = 0,14$ м и мощности электронного луча $P_0 = 190$ кВт. КПД электронно-лучевого нагрева, согласно [4], составляет $\eta = 0,7$, поэтому значение мощности, поглощаемой металлом, принято равным $P = \eta P_0 = 133$ кВт.

При расчетах принималось [4, 15]: $T_m = 2740$ К; $C_{VL} = 0,2772 \cdot 10^7$ Дж/(м³·К); $T_w = 300$ К; $\lambda_L = 56,2716$ Вт/(м·К); $\alpha_1 = \alpha_2 = 400$ Вт/(м²·К); $\epsilon = 0,4$; $c_1 = 0,31102 \cdot 10^{18}$; $c_2 = 93868,526$ (значения c_1 и c_2 получены на основе экспериментальных данных, приведенных в [5]). Кусочно-постоянная зависимость коэффициента теплопроводности ниобия. Рассматривались случаи плавки с использованием системы электромагнитного перемешивания (ЭМП), когда, согласно [4], $v = 0,3$ м/с, и без принудительного перемешивания расплава ($v = 0,005$ м/с). Соответствующие значения k определялись в процессе решения задачи и составляли: а) при $v = 0,3$ м/с для значений радиуса сканирования в пределах 0–6 см – от 8,34 до 13,11 при $b = 0,01$ м и от 11,79 до 12,88 для $b = 0,04$ м, т. е. были близкими к величине $k = 10$ [4]; б) при $v = 0,005$ м/с, $b = 0,03$ м для значений радиуса сканирования 0–5 см – от 1,44 до 2,00.

Для определения погрешности, допускаемой при решении нелинейной краевой задачи (4) приближенным методом, вычислялось значение суммарных потерь энергии с поверхностей $z = l$, $z = 0$ и $r = a$, которое для точного решения рассматриваемой стационарной задачи должно совпадать с величиной мощности P , поглощаемой металлом. Результаты расчетов с исполь-

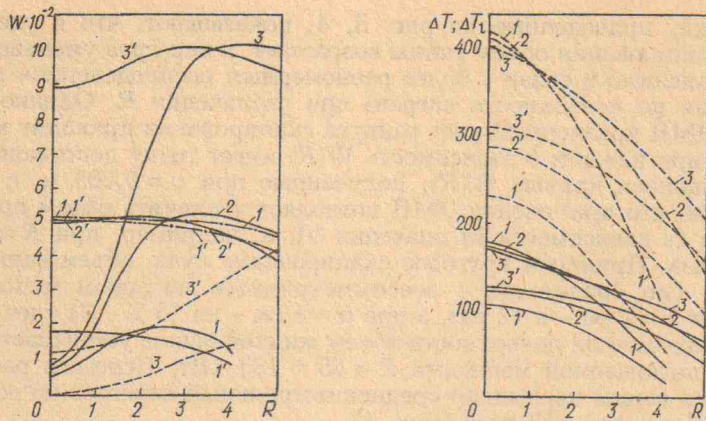


Рис. 3. Зависимости объема жидкой ванны ниобия $W \cdot 10^{-2}$, см^3 , от радиуса кругового сканирования R , см, полученные для случаев $v = 0,3$ м/с (сплошные кривые), $v = 0,005$ м/с (штриховые) и без учета потерь излучением и испарением с нагреваемой поверхности (штрих-пунктирные кривые) при $b = 0,01$ м (1-3), $b = 0,04$ м (1'-3') и различных значениях поглощаемой мощности P , кВт: 1, 1' - $P = 65$; 2, 2' - 100; 3, 3' - 133

Рис. 4. Зависимости среднеинтегрального перегрева расплава ниобия по всему объему ванны ΔT , К (сплошные кривые) и на ее поверхности ΔT_1 , К (штриховые) от радиуса сканирования R , см, для случаев $b = 0,01$ м (1-3) и $b = 0,04$ м (1'-3') при различных значениях поглощаемой мощности P , кВт: 1, 1' - $P = 65$; 2, 2' - 100; 3, 3' - 133

званием данных ниобия и приведенных выше значений параметров автогигля для $b = 0,03$ м показывают, что погрешность при определении температуры на поверхностях $z = l$, $z = 0$ и $r = a$, вычисляемая по отношению к значению поглощаемой мощности, составляет от 1,36 % при $R = 0$ до 0,165 % при $R = 0,03$ м.

Ход температурных кривых $T(r, l)$ при различных значениях R (рис. 1) воспроизводит поведение соответствующих зависимостей $q(r)$, определяемых в виде (8). Увеличение радиуса сканирования и радиуса фокального пятна приводит к более равномерному распределению плотности поглощаемой энергии по поверхности нагрева и, следовательно, к уменьшению градиента температуры, а также, естественно, к увеличению радиуса ванны на ее поверхности $z = l$. Точки достижения максимальной температуры удаляются от центра $r = 0$ поверхности ванны с увеличением R , при этом температура $T(0, l)$ убывает, приближаясь к значению температуры плавления T_m , поэтому при чрезмерном увеличении радиуса сканирования ($R > 0,06$ м) в центральной части поверхности ванны возможно образование нерасплавленной зоны. Кривые температуры имеют точку излома при переходе через значение, равное температуре плавления, что обусловлено различием коэффициентов теплопроводности расплава и твердого металла.

Глубина ванны растет с повышением R (рис. 2), достигая максимума при определенном значении радиуса сканирования, а при дальнейшем увеличении R - снижается. За счет тепловых потерь с нагреваемой поверхности глубина и радиус ванны уменьшаются приблизительно в 2 раза. В случае плавки с использованием ЭМП ванна имеет наибольший диаметр не на поверхности $z = l$, а несколько ниже. Таким образом, поверхность раздела фаз имеет небольшой изгиб в сторону оси $r = 0$, что придает ванне эллипсоидальную форму, наблюдаемую на практике. Наличие такого изгиба объясняется превышением тепловых потерь над значениями плотности энергии, поглощаемой в точках пересечения поверхности изотермы плавления с поверхностью $z = l$, в результате чего производная от температуры по осевой координате z вблизи поверхности $z = l$ отрицательна. В двух других случаях она соответственно положительна ($v = 0,005$ м/с) и равна нулю ($f = 0$). Отметим, что в случае линейной задачи ($f = 0$) граница раздела фаз $r = R(z)$ не зависит от коэффициента эффективной теплопроводности.

Графики, приведенные на рис. 3, 4, показывают, что с увеличением радиуса сканирования объем ванны возрастает, а перегрев уменьшается, что вполне объяснимо в связи с более равномерным распределением поглощаемой энергии по поверхности нагрева при увеличении R . Однако в случае плавки с ЭМП чрезмерный рост радиуса сканирования приводит к падению объема и при каждом b зависимость $W(R)$ имеет точку достижения максимума. Сравнивая кривые $W(R)$, полученные при $v = 0,005$ м/с и $v = 0,3$ м/с, видим, что применение ЭМП позволяет увеличить объем при $R = 0$ в 7,5–20 раз (в зависимости от значения b), а, например, при $R = 5$ см – в 2,8–3,5 раза. Применяя круговое сканирование луча, объем ванны можно увеличить (по сравнению с осесимметричным нагревом неподвижным лучом) при $b = 1$ см – в 12 раз, а при $b = 4$ см – на 15%. За счет тепловых потерь с нагреваемой поверхности объем жидкой ванны уменьшается в 2,5–4 раза при поглощаемой мощности $P = 65 \div 133$ кВт. Перегрев расплава на поверхности ванны превышает среднеинтегральный перегрев по всему объему ванны более чем в 2 раза (рис. 4).

Для проверки соответствия разработанной математической модели реальным тепловым режимам ЭЛПП проведено сравнение результатов расчетов с известными экспериментальными данными [4]. При экспериментальной плавке ниобия в гарнисажном тигле диаметром 280 мм с использованием ЭМП при максимальной мощности электронного луча $P_0 = 190$ кВт масса сливаемого жидкого металла колебалась от 8,4 до 8,7 кг, что в пересчете на объем составляет от 976,7 до 1011,6 см³. Эту полосу значений пересекают кривые $W(R)$, соответствующие значению $P = 133$ кВт (рис. 3), при значениях радиуса сканирования от 3 до 5 см.

По данным [4] при ЭЛПП без принудительного перемешивания глубина ванны циркония в тигле диаметром 250 мм составляет 24–28 мм. Согласно нашим расчетам, проведенным для циркония при $a = 0,125$ м; $l = 0,1$ м; $\alpha_1 = 400$ Вт/(м²·К); $\alpha_2 = 50$ Вт/(м²·К); $v = 0,005$ м/с; $b = 0,03$ м; $R = 0,35$ м и значениях λ и C_{VL} из [4], глубина ванны колеблется от 20 до 27,2 мм при изменении поглощаемой мощности P от 52,5 до 105 кВт.

Таким образом, полученные расчетным путем результаты находят вполне удовлетворительное экспериментальное подтверждение, поэтому разработанная математическая модель может использоваться в технологических исследованиях ЭЛПП.

Обозначения

r, z – радиальная и осевая координаты; a, b – радиус тигля и фокального пятна; l – высота металла в тигле; R – радиус сканирования; z_0 – точка пересечения поверхности раздела фаз с осью Oz ; $T(r, z)$ – температурное поле металла; T_m – температура плавления; T_w – температура воды в системе охлаждения; $r = R(z)$ – уравнение поверхности раздела жидкой и твердой фаз; λ_L – коэффициент молекулярной теплопроводности жидкого металла; λ_e – коэффициент эффективной теплопроводности; C_{VL} – теплоемкость единицы объема жидкого металла; v – средняя по ванне скорость движения расплава; r_s – среднеинтегральный радиус ванны; P_0 – мощность электронно-лучевого нагрева; P – мощность, поглощаемая металлом; $q(r)$ – поверхностное распределение плотности мощности P ; q_0 – значение плотности мощности в точке фокусировки луча; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи с боковой и донной поверхности тигля; ϵ – степень черноты нагреваемой поверхности металла; σ – постоянная Стефана–Больцмана; $\eta(T - T_m)$ – единичная функция Хевисайда; $h_i = \alpha_i / \lambda_{si}$; λ_{si} – средние значения коэффициента теплопроводности на охлаждаемых поверхностях, $i = 1; 2$; $k_r = 2b^{-2}$ – коэффициент сосредоточенности источника тепла в радиальном направлении; v_{sc} – скорость сканирования луча; W – объем жидкой ванны; $\Delta T, \Delta T_1$ – среднеинтегральный перегрев расплава по всему объему ванны и на ее поверхности; J_0, J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка.

Литература

1. Калугин А. С. Электронно-лучевая плавка металлов. М., 1980.
2. Курапов Ю. А. Процессы вакуумного рафинирования металлов при электронно-лучевой плавке. Киев, 1984.

3. Щербина В. А., Довбня В. Д. // Прогрессивные способы плавки для фасонного литья. Киев, 1978. С. 100-107.
4. Ладохин С. В., Корнюшин Ю. В. Электронно-лучевая гарнисажная плавка металлов и сплавов. Киев, 1988.
5. Березовский А. А., Довбня В. Д. // Нелинейные краевые задачи. Киев, 1980. С. 41-57.
6. Андреева Т. А., Березовский А. А., Довбня В. Д. // Математические модели энергетики. Киев, 1988. С. 106-122.
7. Berезovsky A. A., Dovbnya V. D., Zhernovyi Yu. V. // Condensed Matter: Science and Industry. Abstracts, information and participants. Ukrainian-french symposium. Lviv, 1993. P. 133.
8. Рыкалин Н. Н., Зуев И. В., Углов А. А. Основы электронно-лучевой обработки материалов. М., 1978.
9. Тепловые процессы при электрошлаковом переплаве / Под ред. Б. И. Медовара. Киев, 1978.
10. Волхонский Л. А. Вакуумные дуговые печи. М., 1985.
11. Углов А. А., Смуров И. Ю., Лапин А. М. // ТВТ. 1989. Т. 27, № 1. С. 87-93.
12. Чернига Р. М., Однороженко И. Г. // Промышленная теплотехника. 1991. Т. 13, № 4. С. 51-59.
13. Беляев Н. М., Рядно А. А. Математические методы теплопроводности. Киев, 1993.
14. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
15. Зеликман А. Н., Коршунов Б. Г., Елютин А. В., Захаров А. М. Ниобий и тантал. М., 1990.

*Институт математики НАН Украины,
г. Киев,
Львовский государственный университет
им. И. Франко*

Поступила 17.03.95.