АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И УПРУГОСТИ

Препринт 82.II

Киев - 1982

УДК 517.9:530.182

Ю.В. Жерновой

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ МЯГКОМ КОЛЬЦЕ

В ряде отраслей техники находят широкое применение надувные тонкостенные конструкции, изготовленные из упруго растяжимых материалов, не сопротивляющихся изгибу. В связи с этим представляет интерес исследование составных элементов таких конструкций.

Рассмотрим тонкое упругое кольцо, не сопротивляющееся изгибу. Предположим, что кольцо удерживается в положении равновесия, совпадающим с окружностью радиуса R с центром в начале координат, при помощи равномерно распределенного (гидростатического) давления с плотностью P_0, рассчитаной на единицу длины (рис. I). Такое

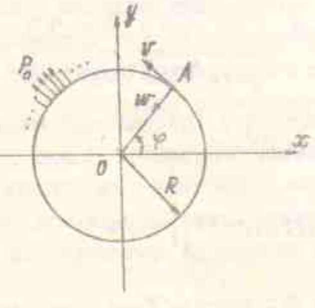

Рис.I

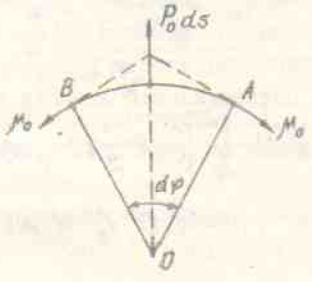

Рис.2

кольцо в дальнейшем будем называть упругим мягким кольцом.

Совокупность возможных движений ограничим движениями кольца в плоскости xoy. Под действием распределенного давления $\vec{p}(\varphi,t)$ с компонентами $p(\varphi,t)$ в радиальном и $q(\varphi,t)$ в касательном направлении произвольная точка A кольца (рис.I) получает смещение, которое мы разлагаем на две компоненты: $w(\varphi,t)$ – в радиальном направлении к центру кольца и $v(\varphi,t)$ – в касательном направлении. При этом скалярные функции угла поворота φ и времени t $w(\varphi,t)$, $v(\varphi,t)$, $p(\varphi,t)$ и $q(\varphi,t)$ должны, очевидно, удовлетворять условиям периодичности по φ

$$v(\varphi+2\pi,t)=v(\varphi,t)\ ,\qquad w(\varphi+2\pi,t)=w(\varphi,t)\ , \tag{1}$$

$$p(\varphi+2\pi,t)=p(\varphi,t)\ ,\qquad q(\varphi+2\pi,t)=q(\varphi,t). \tag{2}$$

Из условия равновесия бесконечно малого элемента кольца длины $ds=R\,d\varphi$, заключенного между радиусами OA и OB (рис.2), $P_0R\,d\varphi=2\mu_0\sin(d\varphi/2)\approx\mu_0\,d\varphi$ находим значение сил натяжения, приложенных к его концам $\mu_0=P_0R$.

При возмущении кольца элемент ds переходит в элемент ds_1 деформированного кольца. Простой подсчет показывает, что

$$ds_1=\sqrt{(R-w)^2+(w_\varphi+v)^2+v_\varphi^2+2(R-w)v_\varphi}\;d\varphi . \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем индексами φ и t , стоящими при функциях $v(\varphi,t)$ и $w(\varphi,t)$,обозначаются соответствующие производные этих функций. Деформация кольца характеризуется относительным удлинением

$$\varepsilon_\varphi=\frac{ds_1-ds}{ds}=\frac{1}{R}\sqrt{(R-w)^2+(w_\varphi+v)^2+v_\varphi^2+2(R-w)v_\varphi}-1 . \tag{4}$$

Уравнения движения упругого мягкого кольца получим с помощью вариационного принципа Гамильтона. Предполагая, что материал кольца подчиняется закону Гука, приходим к следующему выражению для полной потенциальной энергии деформированного кольца:

$$U(t)=\int_0^{2\pi}\Big\{\Big[P_0R+\frac{1}{2}ES\varepsilon_\varphi(\varphi,t)\Big]\,\varepsilon_\varphi(\varphi,t)\,-$$
$$-\Big[(p(\varphi,t)-P_0)\,w(\varphi,t)+q(\varphi,t)\,v(\varphi,t)\Big]\Big\}R\,d\varphi , \tag{5}$$

где S - площадь поперечного сечения, E - модуль Юнга материала кольца. В формуле (5) первое слагаемое выражает энергию упругой деформации, а второе - работу, выполненную внешними силами на перемещениях кольца. Кинетическая энергия кольца определяется интегралом

$$T(t)=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi}\Big[v_t^2(\varphi,t)+w_t^2(\varphi,t)\Big]R\,d\varphi , \tag{6}$$

где ρ - линейная плотность кольца, $\rho=const$.

Согласно вариационному принципу Гамильтона, действительные движения кольца минимизируют функционал

$$
\mathcal{J}(v,w)=\int_{t_0}^{t_1}\left[T(t)-U(t)\right]dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{2\pi}G(\varphi,t,v,w,v_\varphi,w_\varphi,v_t,w_t)\,d\varphi\,dt. \quad (7)
$$

Явный вид подынтегральной функции в (7) легко получить с помощью формул (4)-(6), поэтому мы его опускаем. Уравнения Эйлера для функционала (7), соответствующие вариациям δv, δw, образуют систему двух нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными относительно функций $v(\varphi,t)$ и $w(\varphi,t)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(R-w+v_\varphi)Z(v,w,v_\varphi,w_\varphi)\right]-\\
&\qquad-(w_\varphi+v)Z(v,w,v_\varphi,w_\varphi)-\rho R^2 v_{tt}=-R^2 q(\varphi,t),\\
&\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(w_\varphi+v)Z(v,w,v_\varphi,w_\varphi)\right]+ \qquad\qquad (8)\\
&\qquad+(R-w+v_\varphi)Z(v,w,v_\varphi,w_\varphi)-\rho R^2 w_{tt}=-R^2\left[p(\varphi,t)-p_0\right] ,
\end{aligned}
$$

где

$$
Z=\frac{p_0R^2+ES\left[\sqrt{(R-w)^2+(w_\varphi+v)^2+v_\varphi^2+2(R-w)v_\varphi}-R\right]}{\sqrt{(R-w)^2+(w_\varphi+v)^2+v_\varphi^2+2(R-w)v_\varphi}}.
$$

Полученная система (8) с учетом условий периодичности (I), (2) представляет собой геометрически-нелинейную математическую модель продольно-поперечных колебаний мягкого кольца.

Для достаточно малых колебаний оправдана частичная геометрическая линеаризация выражения для относительной деформации (4)

$$
\varepsilon_\varphi=\frac{1}{R}\left[v_\varphi-w+\frac{1}{2R}(w_\varphi+v)^2\right] , \qquad (9)
$$

что приводит к упрощению уравнений (8). При этом свободные колебания натянутого кольца описываются малыми решениями $v(\varphi,t)=\varepsilon v_1(\varphi,t)$, $w(\varphi,t)=\varepsilon w_1(\varphi,t)$ (ε – малый положительный параметр) нелинейной системы

$$
\begin{aligned}
&v_{\varphi\varphi}-\frac{1}{ES}\left[(p_0R+ES)w_\varphi+p_0Rv\right]+\frac{\varepsilon}{2R}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(w_\varphi+v)^2\right]-\\
&\qquad-\frac{\varepsilon^2}{2R^2}\left[(w_\varphi+v)^2+2R(v_\varphi-w)\right](w_\varphi+v)-\frac{\rho R^2}{ES}\,v_{tt}=0,
\end{aligned}
$$

$$w_{\varphi\varphi}+\frac{1}{P_0 R}\left[(P_0 R+ES)v_\varphi-ESw\right]+\varepsilon\frac{ES}{2P_0R^2}(w_\varphi+v^2)+$$

$$+\varepsilon^2\frac{ES}{2P_0R^3}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left[(w_\varphi+v)^2+2R(v_\varphi-w)\right](w_\varphi+v)\right\}-\frac{\rho R}{P_0}w_{tt}=0. \qquad (\text{I0})$$

(Индекс "I" в уравнениях (I0) для простоты опущен).

Рассмотрим волновые решения нелинейной задачи (I0),(I)

$$v(\varphi,t)=v(\theta)\ ,\qquad w(\varphi,t)=w(\theta), \qquad (\text{II})$$

периодические по фазовой переменной $\theta=k\varphi-\omega t$ с периодом 2π. В случае постоянных k (волновое число) и ω (частота) такие решения соответствуют бегущим (стационарным) периодическим волнам. Исследование бегущих волн в прямолинейных стержнях и цилиндрических оболочках [I-3] проводилось в предположении о неограниченности длины этих упругих тел. Для замкнутого кругового кольца такие геометрические ограничения отпадают сами по себе.

После перехода к новой независимой переменной θ условия периодичности (I) принимают вид $v(\theta+2\pi k)=v(\theta)$, $w(\theta+2\pi k)=w(\theta)$ и, следовательно, выполняются только для дискретных значений волнового числа

$$k=n\quad ,\ n=\text{I},2,3,\ldots\ . \qquad (\text{I2})$$

Соответствующая линейная задача ($\varepsilon=0$)

$$v_{\varphi\varphi}-\frac{1}{ES}\left[(P_0R+ES)w_\varphi+P_0Rv+\rho R^2 v_{tt}\right]=0,$$

$$w_{\varphi\varphi}+\frac{1}{P_0R}\left[(P_0R+ES)v_\varphi-ESw-\rho R^2 w_{tt}\right]=0,$$

$$v(\varphi+2\pi,t)=v(\varphi,t)\quad,\quad w(\varphi+2\pi,t)=w(\varphi,t) \qquad (\text{I3})$$

допускает решение в виде бегущих периодических волн

$$v=a\sin\theta\ ,\quad w=b\cos\theta\ ,\quad \theta=n\varphi-\omega t \qquad (\text{I4})$$

с частотой ω, удовлетворяющей соотношению

$$\left[\rho R^2\omega^2-(n^2+1)(P_0R+ES)\right]\omega^2+(n^2-1)^2\frac{P_0ES}{\rho R}=0, \qquad (\text{I5})$$

и малыми амплитудами a, b, связь между которыми выражается равенством

$$a = 2(P_0R + ES)\left[(n^2-1)(ES - P_0R) \pm \sqrt{(n^2+1)^2(P_0R+ES)^2 - 4(n^2-1)^2 P_0 RES}\,\right]^{-1} n b \qquad (16)$$

Для каждого волнового числа вида (12) соотношение (15) полностью определяет частоту колебаний через упругие и геометрические характеристики кольца.

Приближенное волновое решение нелинейной задачи (10),(1) будем искать в виде бегущих волн

$$v = a\cos(\theta+\alpha) + \varepsilon v_0 \;, \quad w = b\cos(\theta+\beta) + \varepsilon w_0 \qquad (17)$$

с небольшими амплитудами a, b, фазой $\theta = n\varphi - \omega t$, неизвестными сдвигами фаз α, β и постоянными v_0, w_0, подлежащими определению. Требование, чтобы выражения (17) удовлетворяли системе нелинейных дифференциальных уравнений (10) в смысле метода Бубнова-Галеркина [4,3], приводит к следующей системе трансцендентных уравнений:

$$R^2\left[(\rho R^2\omega^2 - P_0R - n^2ES)\,a\cos\alpha + (P_0R+ES)\,n b\sin\beta\right] -$$
$$-\varepsilon^2 M(a, b, w_0, n, \alpha, \beta) = O(\varepsilon^3),$$

$$-R^2\left[(\rho R^2\omega^2 - P_0R - n^2ES)\,a\sin\alpha - (P_0R+ES)\,n b\cos\beta\right] +$$
$$+\varepsilon^2 N(a, b, w_0, n, \alpha, \beta) = O(\varepsilon^3),$$

$$-R^2\left[(P_0R+ES)\,n a\sin\alpha - (\rho R^2\omega^2 - n^2P_0R - ES)\,b\cos\beta\right] - \qquad (18)$$
$$-\varepsilon^2 n N(a, b, w_0, n, \alpha, \beta) = O(\varepsilon^3),$$

$$R^2\left[(P_0R+ES)\,n a\cos\alpha + (\rho R^2\omega^2 - n^2P_0R - ES)\,b\sin\beta\right] +$$
$$+\varepsilon^2 n M(a, b, w_0, n, \alpha, \beta) = O(\varepsilon^3),$$

$$v_0 = O(\varepsilon)\;, \quad w_0 = \frac{1}{4R}\left[a^2 - 2na\,b\sin(\beta-\alpha) + n^2b^2\right] + O(\varepsilon),$$

где

$$M(a, b, w_0, n, \alpha, \beta) = \frac{3}{8}ES\Big\{a^3\cos\alpha - na^2b\left[2\sin\beta - \sin(2\alpha-\beta)\right] +$$
$$+n^2ab^2\left[2\cos\alpha - \cos(2\beta-\alpha)\right] - n^3b^3\sin\beta\Big\} - ESRw_0(a\cos\alpha - nb\sin\beta),$$

$$N(a,b,w_0,n,\alpha,\beta)=\frac{3}{8}ES\Big\{a^3\sin\alpha+na^2b\left[2\cos\beta-\cos(2\alpha-\beta)\right]+$$
$$+n^2ab^2\left[2\sin\alpha-\sin(2\beta-\alpha)\right]+n^3b^3\cos\beta\Big\}-ESRw_0(a\sin\alpha+nb\cos\beta).$$

После ряда преобразований первых четырех уравнений этой системы приходим к соотношениям

$$\left[R^2(P_0R+ES)+\varepsilon^2K(a,b,n,\alpha,\beta)\right]\cos(\beta-\alpha)=0,$$
$$\left[R^2(P_0R+ES)-\varepsilon^2K(a,b,n,\alpha,\beta)\right]\cos(\beta-\alpha)=0;$$
$$K(a,b,n,\alpha,\beta)=\frac{1}{8}ES\left[a^2+nab\sin(\beta-\alpha)+n^2b^2\right],$$

из которых следует взаимосвязь между α и β

$$\beta-\alpha=(2i+1)\frac{\pi}{2}\ ,\qquad i=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{I9}$$

В частности, при $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$ система (I8) сводится к следующей:

$$R^2\left[(\rho R^2\omega^2-P_0R-n^2ES)a+(P_0R+ES)nb\right]-\frac{\varepsilon^2}{8}ES(a-nb)^3=O(\varepsilon^3),$$
$$R^2\left[(P_0R+ES)na+(\rho R^2\omega^2-n^2P_0R-ES)b\right]+\frac{\varepsilon^2}{8}ESn(a-nb)^3=O(\varepsilon^3),$$
$$v_0=O(\varepsilon)\quad,\qquad w_0=\frac{1}{4R}(a-nb)^2+O(\varepsilon)\ . \tag{20}$$

Из первых двух уравнений системы (20) путем исключения амплитуды a получаем амплитудно-частотное соотношение

$$8R^3(P_0R+n^2ES-\rho R^2\omega^2)^3\Big\{\rho R\omega^2\left[\rho R^2\omega^2-(n^2+1)(P_0R+ES)\right]+$$
$$+(n^2-1)^2P_0ES\Big\}+\varepsilon^2n^4ES\left[\rho R^2\omega^2-(n^2-1)ES\right]^4b^2=O(\varepsilon^3)\ , \tag{2I}$$

при каждом значении волнового числа (I2) определяющее связь между частотой ω и амплитудой b бегущей волны. Соответствующее волновое решение задачи (I0),(I) выписывается в виде

$$v\simeq a\cos(n\varphi-\omega t+\alpha)\ ,\qquad w\simeq-b\sin(n\varphi-\omega t+\alpha)+\frac{\varepsilon}{4R}(a-nb)^2. \tag{22}$$

Полученные решения (I4) и (22) соответствуют периодическим стационарным волнам, так как параметры ω , n , a и b , определяющие их, - постоянны. Следующий шаг состоит в том, чтобы использовать такие периодические волны для получения более общих (нестационарных) решений. Имеются в виду медленно меняющиеся волновые решения. В случае нелинейной задачи (I0),(I) - это решения, соответствующие волновым пакетам с постоянным волновым числом, но с амплитудой и частотой, относительные изменения которых на одном периоде и одной длине волны малы. Учитывая вид решений (I4) и (22), указанные нестационарные волновые решения будем искать в виде асимптотических разложений по малому параметру ε

$$\begin{aligned} v(\varphi,t) &= a \sin\theta + \varepsilon(A_2 \sin 2\theta + v_0) + \varepsilon^2 \sum_{m=3}^{\infty} A_m \sin m\theta + O(\varepsilon^3), \\ w(\varphi,t) &= b \cos\theta + \varepsilon(B_2 \cos 2\theta + w_0) + \varepsilon^2 \sum_{m=3}^{\infty} B_m \cos m\theta + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{23}$$

с подлежащими определению величинами A_i, B_i ($i=2,3,\dots$), v_0 и w_0. Здесь

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = n, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = -\omega, \tag{24}$$

волновое число $k=n$ принимает только постоянные значения (I2), а величины a, b, ω, A_i, B_i, v_0 и w_0 – медленно меняющиеся функции угловой координаты φ и времени t.

В предположении, что функция $\theta(\varphi,t)$ дважды непрерывно-дифференцируема, из соотношений (24) следует уравнение совместности

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = 0, \tag{25}$$

показывающее, что частота бегущей волны в случае кольца меняется только со временем.

Для нахождения асимптотических разложений (23) воспользуемся методом, основанным на применении вариационного принципа Гамильтона в усредненной форме [5–7]. Нетрудно проверить, что уравнения системы (I0) – это уравнения Эйлера для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\rho R(v_t^2 + w_t^2) - P_0 R\left[v_\varphi + \frac{1}{2R}(w_\varphi + v)^2\right] - \frac{ES}{2R}\left[v_\varphi - w + \frac{\varepsilon}{2R}(w_\varphi + v)^2\right]^2. \tag{26}$$

Принимая во внимание (23), при обычно принимаемых допущениях [7] усредним лагранжиан (26) по фазовой переменной θ. Усредненный лагранжиан при этом выписывается в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(\theta)\,d\theta = \rho R\omega^2\left[\frac{1}{4}(a^2+b^2)+\varepsilon^2(A_2^2+B_2^2)\right] - \frac{1}{4}P_0\left[(a-nb)^2 + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^2(A_2 - 2nB_2)^2 + 2\varepsilon^2 v_0^2\right] - \frac{ES}{8R}\left\{2(na-b)^2 + \varepsilon^2\left[\frac{3}{8R^2}(a-nb)^4 + 4w_0^2 + \right.\right.$$

$$+2(2nA_2-B_2)^2\Big]+\frac{\varepsilon^2}{R}\Big\{2(n^2-1)(a-nb)bA_2+\big[(1-4n^2)a^2-$$
$$-3n^2b^2+2n(2n^2+1)ab\big]B_2-2w_0(a-nb)^2\Big\}\Big\}+O(\varepsilon^3) \qquad (27)$$

Усредненный лагранжиан $\mathcal{L}$ явно зависит от a, b, A_2, B_2, v_0, w_0 и неявно – от θ через посредство ω и n. Уравнения Эйлера для $\mathcal{L}$, соответствующие вариациям переменных a, b, A_2, B_2, v_0 и w_0

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_2}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B_2}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_0}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_0}=0$$

после вычисления производных принимают вид

$$2R^2\big[(\rho R^2\omega^2-P_0R-n^2ES)a+(P_0R+ES)nb\big]-\frac{3}{4}\varepsilon^2ES(a-nb)^3+$$

$$+\varepsilon^2ESR\big\{(1-n^2)bA_2+\big[(4n^2-1)a-(2n^2+1)nb\big]B_2+2(a-nb)w_0\big\}=O(\varepsilon^3),$$

$$2R^2\big[(P_0R+ES)na+(\rho R^2\omega^2-P_0Rn^2-ES)b\big]+\frac{3}{4}\varepsilon^2ESn(a-nb)^3+$$

$$+\varepsilon^2ESR\big\{(n^2-1)(2nb-a)A_2+\big[3nb-(2n^2+1)a\big]nB+2n(nb-a)w_0\big\}=O(\varepsilon^3); \qquad (28)$$

$$2R\big\{\big[4(\rho R^2\omega^2-n^2ES)-P_0R\big]A_2+2(P_0R+ES)nB_2\big\}+ES(n^2-1)(nb-a)b=O(\varepsilon),$$

$$4R\big\{2(P_0R+ES)nA_2+\big[4R(\rho R\omega^2-P_0n^2)-ES\big]B_2\big\}+$$
$$+ES\big[(4n^2-1)a^2-2n(2n^2+1)ab+3n^2b^2\big]=O(\varepsilon); \qquad (29)$$

$$v_0=O(\varepsilon),\qquad w_0=\frac{1}{4R}(a-nb)^2+O(\varepsilon). \qquad (30)$$

Из уравнений (29) находим

$$A_2=2\big\{\big[4(n^2-1)\rho R^2\omega^2b+P_0Rn(4n^2-1)(a-nb)\big](a-nb)+P(a,b,n)\big\}Q(n,\omega),$$

$$B_2=\big\{4\rho R^2\omega^2\big[2n(2n^2+1)ab-(4n^2-1)a^2-3n^2b^2\big]+$$
$$+P_0R(4n^2-1)(a-nb)^2+4nP(a,b,n)\big\}Q(n,\omega), \qquad (31)$$

где

$$P(a,b,n)=ES\big[n(4n^2-1)(a^2+b^2)-(4n^4+3n^2-1)ab\big],$$

$$Q(n,\omega)=\frac{ES}{4R^2}\left\{4\rho R\omega^2\left[4\rho R^2\omega^2-(4n^2+1)(P_0R+ES)\right]+(4n^2-1)^2P_0ES\right\}^{-1}.$$

Для волнового числа $n=1$ выражения (31) для A_2, B_2 значительно упрощаются:

$$A_2=\frac{3ES}{Q_1(\omega)}(P_0R+ES)(a-b)^2\ , \quad B_2=\frac{3ES}{2Q_1(\omega)}\left[P_0R+4(ES-\rho R^2\omega^2)\right](a-b)^2;$$
$$Q_1(\omega)=2R^2\left\{4\rho R\omega^2\left[4\rho R^2\omega^2-5(P_0R+ES)\right]+9P_0ES\right\}. \qquad (31_1)$$

Подставив выражения (30), (31) в уравнения (28) и исключив из полученной системы амплитуду a, приходим к амплитудно-частотному соотношению

$$2R^3\left\{\rho R\omega^2\left[\rho R^2\omega^2-(n^2+1)(P_0R+ES)\right]+(n^2-1)P_0ES\right\}T^3(n,\omega)+$$
$$+\varepsilon^2ESn\left\{\frac{1}{4}n^3\left[nR^2\omega^2-(n^2-1)ES\right]^4b^2+RT^2(n,\omega)\left\{(n^2-1)\left[P_0R+\right.\right.\right.$$
$$\left.+ES+(2\rho R^2\omega^2-P_0R-(2n^2-1)ES)T(n,\omega)\right]A_2+\left[(n^2-1)^2ES(4P_0R+ES)-\right. \qquad (32)$$
$$\left.\left.\left.-2(n^2-1)\rho R^2\omega^2(2P_0R-ES)-3\rho^2R^4\omega^4\right]nB_2\right\}\right\}=O(\varepsilon^3),$$

где для сокращения записи введено обозначение $T(n,\omega)=P_0R+n^2ES-\rho R^2\omega^2$. Для каждого волнового числа вида (12) соотношение (32) определяет связь между частотой и амплитудой колебаний, описываемых разложениями первого порядка

$$v(\varphi,t)=a\sin\theta+\varepsilon A_2\sin2\theta+O(\varepsilon^2)\ , \quad w(\varphi,t)=b\cos\theta+\varepsilon(B_2\cos\theta+w_0)+O(\varepsilon^2) \qquad (33)$$

В частности, при $n=1$ соотношение (32) принимает вид

$$2(P_0R+ES-\rho R^2\omega^2)^3\left[\rho R^2\omega^2-2(P_0R+ES)\right]\left\{4\rho R\omega^2\left[4\rho R^2\omega^2-5(P_0R+ES)\right]+\right.$$
$$\left.+9P_0ES\right\}+\varepsilon^2(\rho R\omega^2)^3ES\left\{\rho R^2\omega^2\left[4(\rho R^2\omega^2+ES)-5P_0R\right]-9E^2S^2\right\}b^2=O(\varepsilon^3) \qquad (32_1)$$

В силу равенств (24) уравнение Эйлера для $\mathcal{X}$, соответствующее вариации переменной θ, запишется в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial n}\right)=0. \qquad (34)$$

После вычисления соответствующих производных приходим к уравнению, выражающему закон сохранения усредненной энергии [5,6]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\omega\left[a^2+b^2+4\varepsilon^2(A_2^2+B_2^2)\right]\right\}-\frac{1}{\rho R}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{P_0\left[b(a-nb)+\right.\right.$$

$$\left.+2\varepsilon^2B_2(A_2-2nB_2)\right]-\frac{ES}{8R}\left\{8a(na-b)+\frac{\varepsilon^2}{R}\left[4\left[2na-(3n^2-1)b\right]bA_2+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+4\left[(6n^2+1)ab-n(4a^2+3b^2)\right]B_2+16RA_2(2nA_2-B_2)-\frac{b}{R}(a-nb)^3\right]\right\}\right\}=0, \tag{35}$$

где A_2, B_2 определяются согласно (3I). Условие периодичности (I) приводит к необходимости рассматривать уравнение (35) совместно с условиями для медленно меняющихся амплитуд $a(\varphi,t)$, $b(\varphi,t)$

$$a(\varphi+2\pi,t)=a(\varphi,t)\ ,\qquad b(\varphi+2\pi,t)=b(\varphi,t). \tag{36}$$

Таким образом, асимптотические разложения первого порядка для медленно меняющихся волновых решений нелинейной задачи (I0), (I) имеют вид (33), а изменения в пространстве и во времени амплитуд a, b и частоты ω, соответствующих постоянным волновым числам (I2), задаются соотношениями (25), (32), (35) и (36).

Медленно меняющиеся волновые решения соответствующей линейной задачи (I3) записываются в виде (I4), где частота ω определяется из соотношения (I5), не зависящего от амплитуды. Это соотношение показывает, что частота ω в линейном случае постоянна, из него же определяем групповую скорость линейной волны [5,6]

$$C(n)=\frac{d\omega(n)}{dn}=\frac{n}{R\sqrt{2\rho}}\;\frac{(P_0R+ES)\left[\mathcal{D}(n)\pm(n^2+1)(P_0R+ES)\right]-4(n^2-1)P_0RES}{\mathcal{D}(n)\sqrt{\pm\mathcal{D}(n)+(n^2+1)(P_0R+ES)}}, \tag{37}$$

где $\mathcal{D}(n)=\sqrt{(n^2+1)^2(P_0R+ES)^2-4(n^2-1)^2P_0RES}$.

Связь между амплитудами a и b продольной и поперечной волны выражается равенством (I6). Тогда после исключения a и ω уравнение (35) в линейном случае ($\varepsilon=0$) переходит в известное уравнение для амплитуды [5,6]

$$\frac{\partial b^2}{\partial t}+C(n)\frac{\partial b^2}{\partial\varphi}=0, \tag{38}$$

которое следует рассматривать совместно с условием

$$b(\varphi+2\pi,t)=b(\varphi,t)\ . \tag{39}$$

1. Березовский А.А., Жерновой Ю.В. Изгибные стационарные волны в стержнях при нелинейном законе упругости. - Укр.мат.журн.,1981, 33, № 4, с. 493-498.
2. Березовский А.А., Жерновой Ю.В. Нелинейные продольно-поперечные стационарные волны в упругих стержнях. - Мат. физика, 1981, вып. 30, с. 41-48.
3. Жерновой Ю.В. Асимптотические разложения для упругих волн небольшой амплитуды в неограниченной цилиндрической оболочке. - В кн.: Нелинейные краевые задачи. Киев, 1980, с. 124-131.
4. Березовский А.А., Курбанов И. Периодические во времени плоские электромагнитные поля в полупространстве с общими материальными уравнениями. - В кн.: Краевые задачи электродинамики проводящих сред. Киев, 1976, с. 37-57.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.- М.: Мир, 1977.- 622 с.
6. Нелинейные волны /Под ред. С.Лейбовича и А.Сибасса.- М.: Мир, 1977. - 319 с.
7. Найфэ А. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976. - 455 с.