Академия наук Украинской ССР
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

Препринт 88.49

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Киев
Институт математики АН УССР
1988

УДК 517.946.9

А.А.Березовский, В.Д.Довбня,
Ю.В.Жерновой, Я.П.Романчук, Я.И.Сидельник

О ПРИБЛИЖЕННОМ РАСЧЕТЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПЛАВЛЕНИИ В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОЙ ФАЗЕ

При электронно-лучевой гарнисажной плавке /ЭЛГП/ применяется электромагнитное перемешивание расплава, которое обусловливает интенсивный конвективный теплообмен в жидкой ванне автотигля. Поэтому математическое моделирование процесса ЭЛГП включает в себя моделирование тепловых, электромагнитных и гидродинамических процессов, протекающих при плавлении металла. Необходимость учета влияния на температурное поле конвективных потоков в жидкой ванне приводит к совместному решению уравнений Максвелла, Навье-Стокса и дифференциального уравнения теплового баланса. Реализация этой сложной математической модели сталкивается с большими вычислительными трудностями[1].

Для ориентировочных расчетов и прогнозов технологических процессов плавки конвективный перенос тепла в жидкой ванне можно заменить эквивалентным процессом теплопроводности. При этом считаем, что составляющие скорости жидкого металла равны нулю, а коэффициент его теплопроводности заменяем неким коэффициентом эффективной теплопроводности $\lambda_{ж\,эф}$, учитывающим перенос тепла с движущимися частицами расплава.

Для приближенных расчетов тепловых процессов при ЭЛГП ограничимся рассмотрением одномерной нестационарной задачи Стефана для эквивалентного полого шара[2], которая после введения безразмерных переменных и параметров [3] принимает вид

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma x^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-\kappa\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\rho x^2(\tau)\dot{x}(\tau)\delta(x-x(\tau))=0,\quad x_0<x<1,\ \tau>0;$$

$$\theta(x,0)=\varphi(x),\quad \varphi(x_0)=1;\qquad \theta=1,\ x=x(\tau);$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-q_\theta(\theta),\quad x=x_0;\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}+h\theta=0,\quad x=1. \qquad /1/$$

Здесь $\theta(x,\tau)$, $x(\tau)$ - безразмерные температура и координата изотермы плавления; x , τ - безразмерные координата и время; $\gamma=\tilde{k}^{-1}$, где $\tilde{k}=\lambda_{ж\,эф}/\lambda_т$, $\lambda_т$ - теплопроводность твердого металла.

Характерной особенностью процесса ЭЛГП является стабилизация во времени температурного поля к предельному стационарному распределению $/\theta(x,\tau)\to\theta(x),\ x(\tau)\to x^*/$. Для его определения получаем стационарную задачу Стефана

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\gamma(x)x^2\frac{d\theta}{dx}\right)=0,\quad x\in(x_0,x^*),\ x\in(x^*,1);\quad \gamma(x)=\begin{cases}1, & x\in(x_0,x^*);\\ \gamma, & x\in(x^*,1);\end{cases}$$

$$\frac{d\theta(x_0)}{dx}=-q_э(\theta(x_0)),\qquad \frac{d\theta(1)}{dx}+h\theta(1)=0,$$

$$\theta(x^*)=1,\qquad \gamma\frac{d\theta}{dx}(x^*+0)-\frac{d\theta}{dx}(x^*-0)=0$$

с точным аналитическим решением

$$\theta(x)=\begin{cases}\theta_0-x_0q_э(\theta_0)(1-x_0/x), & x_0\leqslant x\leqslant x^*,\\ \dfrac{[h+(1-h)x]x^*}{[h+(1-h)x^*]x}, & x^*\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$x^*=\frac{hx_0(\theta_0+\gamma-1)}{\gamma h+x_0(h-1)(\theta_0-1)},\qquad q_э(\theta_0)=\frac{h(\theta_0+\gamma-1)}{[h+(1-h)x_0]x_0}.$$

В качестве примера рассмотрим плавление металла со следующими геометрическими и теплофизическими параметрами: a_0 =0,175 м; /радиус цилиндра /автотигля//, b =0,04 м /радиус фокального пятна/, l =0,35 м /высота цилиндра/, ε =0,4 /степень черноты/; σ = =0,567·10^{-7} Вт/м^2·К^4 /постоянная Стефана-Больцмана/, $c_ж\rho_ж$ =9,89·10^5 Дж/°К·м^3 , $c_т\rho_т$ =2,251·10^6 Дж/°К·м^3, $\rho=\Lambda\rho_ж$=0,2419·10^{10} Дж/м^3 /Λ -скрытая теплота плавления/, u_c =300°К /температура среды/, α =3300 Вт/ /м^2·°К /коэффициент теплообмена/, $\lambda_т$ =55 Вт/м·°К.

Для этих данных на рис.1 приведены кривые зависимости безразмерной температуры $\theta(x)$ от безразмерной координаты x для различных значений интенсивности электромагнитного перемешивания расплава /ЭМПР/, т. е. различных $\tilde{k}$. Из приведенных расчетов следует, что увеличение интенсивности ЭМПР /увеличение $\tilde{k}$ / приводит к понижению температуры жидкой ванны и к незначительному повышению температуры твердого металла /при $\tilde{k} \geqslant 10$ значения $\theta(x)$, $x > x^*$, очень близки для различных $\tilde{k}$ /. Кривые стационарного распределения температурного поля терпят излом в точке $x = x^*$ тем больший, чем больше интенсивность ЭМПР /большое $\tilde{k}$ /.

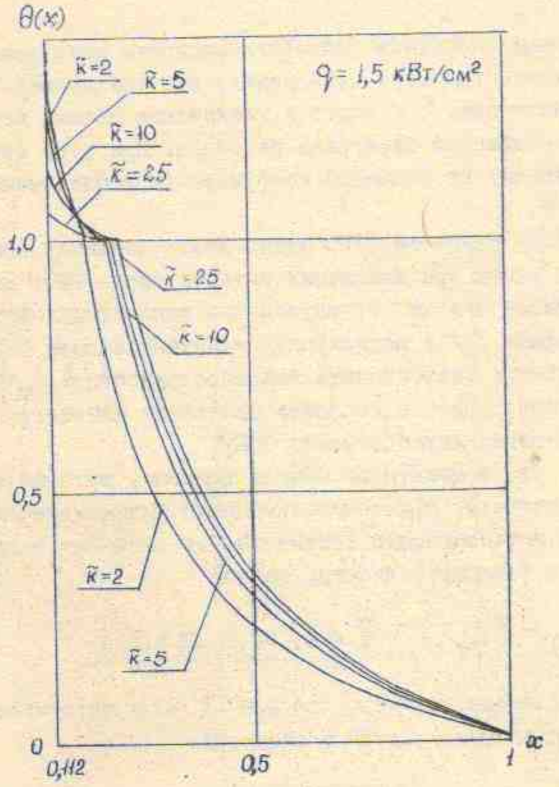


Рис. I

На рис. 2,3 соответственно представлены зависимости объема расплавленного металла V и его перегрева $\Delta u = \bar{u} - u^*$ /$\bar{u}$ - средняя температура расплава/, определяемых соотношениями

$$V = \frac{2}{3}\pi r_1^3 (x^{*3} - x_0^3), \quad r_1 = (r_0^3 + 3a_0^2 l/2)^{1/3}, \quad r_0 = b/\sqrt{2},$$

$$\Delta u = \frac{x_0^2 (x^{*2} + x_0 x^* - 2x_0^2)}{2x^*(x^{*2} + x_0 x^* + x_0^2)} q_э(\theta_0)(u^* - u_c),$$

от $\tilde{k}$ при различных значениях плотности мощности электронного луча q. Результа́ты расчетов показывают, что увеличение интенсивности ЭМПР /увеличение $\tilde{k}$ / ведет к увеличению объема ванны, но одновременно и к понижению перегрева расплава. При этом объем и перегрев слабо зависят от значений коэффициента теплообмена $\alpha = 2 \cdot 10^3 - 10^4$ Вт/м^2·К.

Для оптимизации процесса ЭЛГП важно знать динамику основных параметров жидкой ванны при изменении интенсивности ЭМПР непосредственно в процессе плавки. Использование одномерной нестационарной задачи Стефана /I/ и моделирование интенсивности ЭМПР с помощью эквивалентного коэффициента теплопроводности $\lambda_{ж.эф.} = \tilde{k}\lambda_T$ позволяет приближенно описать тепловое состояние автотигля после "мгновенного" изменения интенсивности ЭМПР.

Предположим, что в некоторый момент времени, который мы принимаем за начало отсчета, произошло изменение интенсивности ЭМПР и новому значению интенсивности соответствует значение эквивалентного коэффициента теплопроводности, равное

$$\lambda_{ж.эф.} = \tilde{k}_1 \lambda_T, \quad \tilde{k}_1 = \tilde{k}/m, \quad m > 0. \qquad /2/$$

Для определенности будем считать, что при $\tau = 0$ в автотигле установилось стационарное температурное состояние

$$\theta(x,0) = \theta^*(x), \quad x_0 \le x \le 1; \quad \theta^*(x_0) = \theta_c^*, \quad x(0) = x^*, \qquad /3/$$

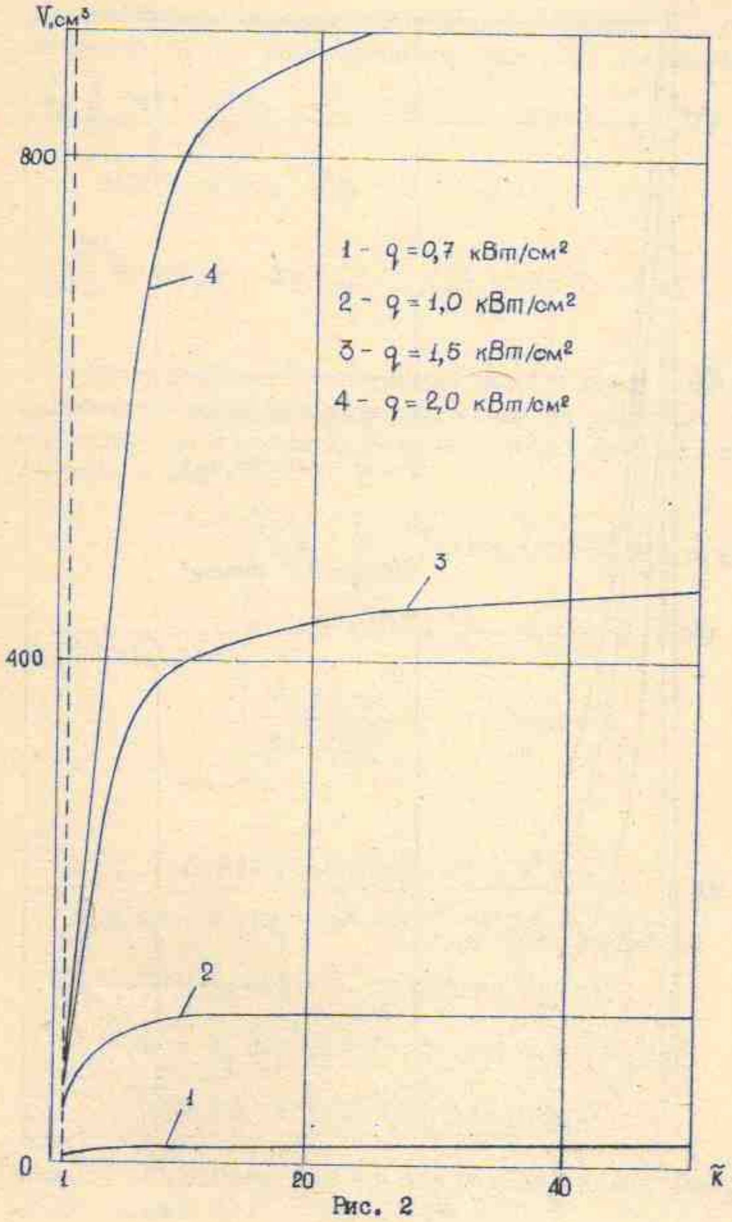

V,см³
800
400
0
1 - q = 0,7 кВт/см²
2 - q = 1,0 кВт/см²
3 - q = 1,5 кВт/см²
4 - q = 2,0 кВт/см²
4
3
2
1
1
20
40
k̃

Рис. 2

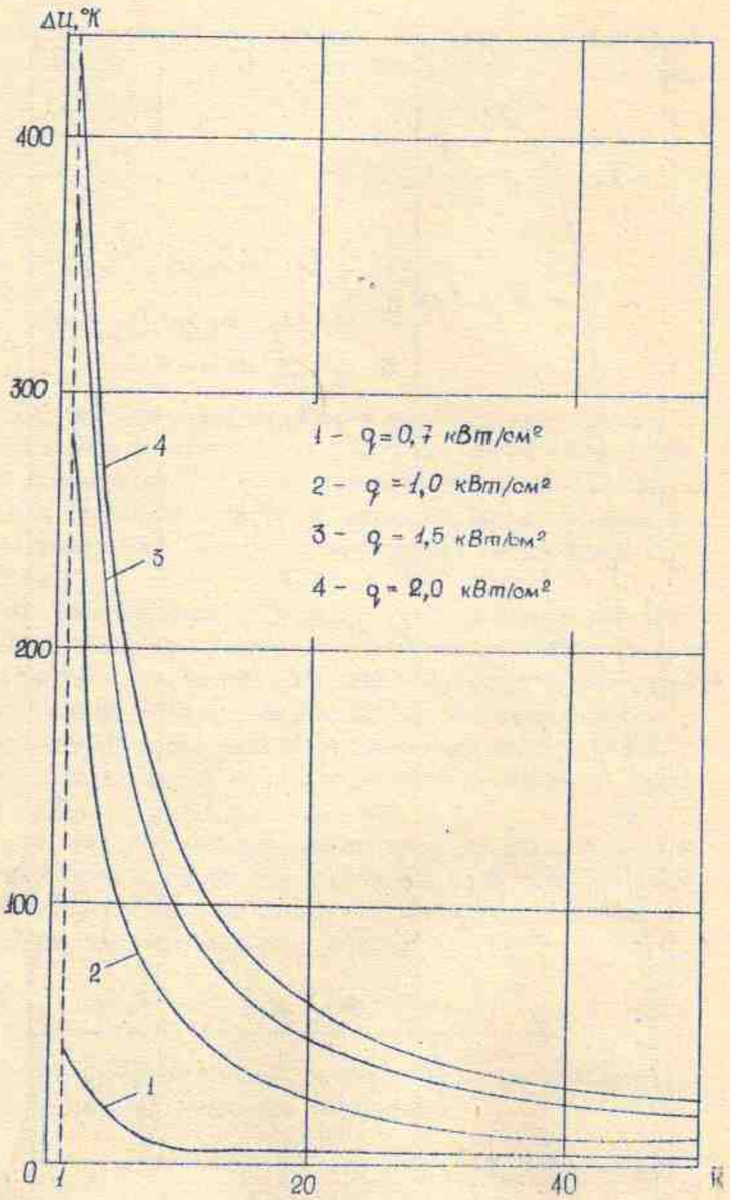

ΔЦ,°К
400
300
200
100
0
1
20
40
К
1 - q = 0,7 кВт/см²
2 - q = 1,0 кВт/см²
3 - q = 1,5 кВт/см²
4 - q = 2,0 кВт/см²
1
2
3
4

Рис. 3

соответствующее определенным значениям $q = const$, $\tilde{\kappa}$. С учетом соотношений /2/,/3/ нестационарная задача /I/ принимает вид

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(m\gamma x^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - \kappa \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - P x^2 \dot{x}\, \delta(x - x(\tau)) = 0, \quad x_0 < x < 1, \ \tau > 0;$$

$$\theta(x,0) = \theta^*(x), \quad \theta^*(x^*) = 1; \qquad \theta = 1, \ x = x(\tau);$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -m q_{\gamma э}(\theta), \ x = x_0; \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} + h\theta = 0, \ x = 1. \qquad /4/$$

Для приближенного построения $\theta(x,\tau)$ можно применить проекционно-сеточный метод [4] в простейшем его варианте, известном под названием П метода Лейбензона. Приближенное решение задачи /4/ ищем в виде

$$\theta(x,\tau) \approx \tilde{\theta}(x,\tau) = \begin{cases} \theta_0(\tau) - \dfrac{1}{\Delta(x(\tau))}\Big[a_0(x(\tau),\theta_0(\tau)) - \dfrac{1}{x} b_0(x(\tau),\theta_0(\tau)) - \\ \quad - c_0(x(\tau),\theta_0(\tau))\, x^{-n}\Big], \quad x_0 \le x \le x(\tau); \\ \dfrac{F(x)\, x(\tau)}{x F(x(\tau))}, \quad x(\tau) \le x \le 1, \end{cases} \qquad /5/$$

где

$$n \ge 2, \quad \Delta(x) = (n-1)x^n - n x_0 x^{n-1} + x_0^n,$$

$$a_0(x,\theta_0) = (n-1)(\theta_0 - 1)x^n - m x_0^2 (x^{n-1} - x_0^{n-1}) q_{\gamma э}(\theta_0),$$

$$b_0(x,\theta_0) = x_0 [n(\theta_0 - 1)x^n - m x_0 (x^n - x_0^n) q_{\gamma э}(\theta_0)],$$

$$c_0(x,\theta_0) = x_0^n x^{n-1} G(x,\theta_0), \qquad F(x) = h + (1-h)x,$$

$$G(x,\theta_0) = m x_0 (x - x_0) q_{\gamma э}(\theta_0) - x(\theta_0 - 1).$$

Решение /5/ удовлетворяет краевым условиям задачи /4/ при любом выборе функций $\theta_0(\tau)$, $x(\tau)$. Если $\theta_0(0) = \theta_0^*$, $x(0) = x^*$, то

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\theta}(x,0) = \theta^*(x)\,, \quad x_0 \le x \le x^*; \quad \tilde{\theta}(x,0) = \theta^*(x)\,, \quad x^* \le x \le 1.$$

Предельный переход $\tilde{\theta}(x,0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta^*(x)$ проиллюстрирован на рис.4, где пунктирной линией показана зависимость $\theta = \theta^*(x)$, $x_0 \le x \le x^*$, а сплошными линиями - зависимости $\theta = \tilde{\theta}(x,0)$, $x_0 \le x \le x^*$, при различных значениях m, n.

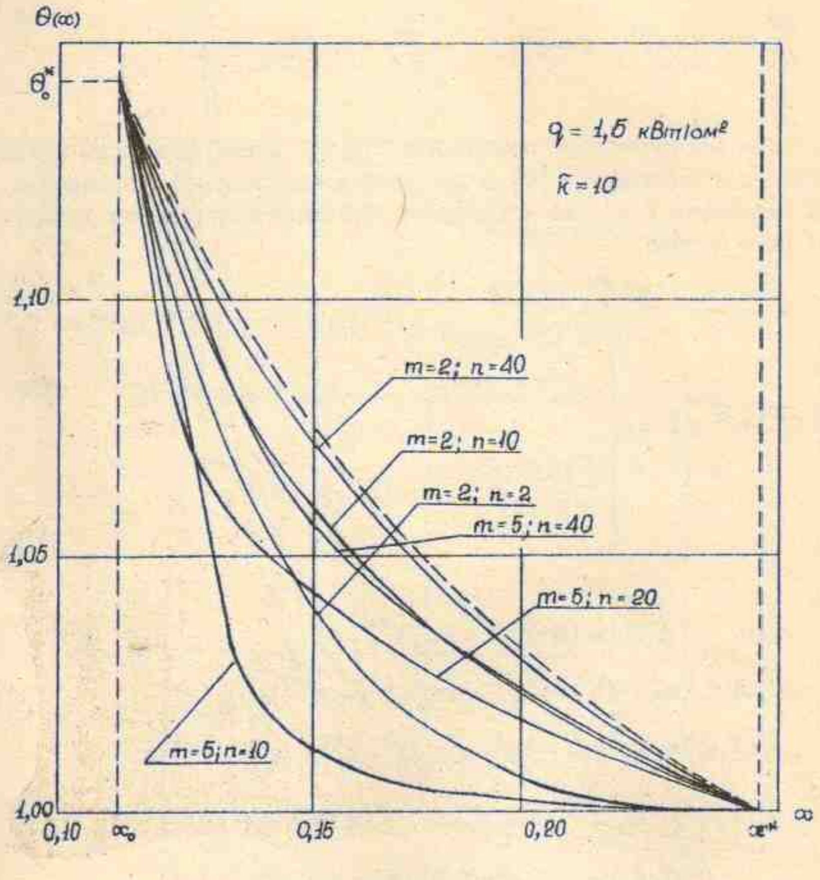


Рис. 4

Требуя, чтобы функция /5/ удовлетворяла дифференциальному уравнению задачи /4/ в интегральном смысле и интегральному условию теплового баланса в жидкой фазе, получим

$$\int_{x_0}^{1} \frac{\partial}{\partial x}\left(m\gamma(x)x^2\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}\right)dx - \int_{x_0}^{1} \kappa(x)\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tau}x^2dx - Px^2(\tau)\dot{x}(\tau)=0, \qquad /6/$$

$$\int_{x_0}^{x(\tau)-0} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}\right)dx - \int_{x_0}^{x(\tau)-0} \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tau}x^2dx = 0,$$

откуда после вычисления производных и интегралов приходим к задаче Коши для системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $x(\tau)$, $\theta_0(\tau)$:

$$\dot{x} = \frac{A(x,\theta_0)}{B(x)}, \quad \dot{\theta}_0 = \frac{C(x,\theta_0)}{\mathcal{D}(x,\theta_0)}, \quad \tau>0;$$

$$x(0)=x^*, \quad \theta_0(0)=\theta_0^*.$$

Здесь

$$A(x,\theta_0)=6F(x)\{m\Delta(x)[x_0^2q_{\gamma_3}(\theta_0)F(x)-\gamma hx]-nx_0(x^{n-1}-x_0^{n-1})F(x)G(x,\theta_0)\};$$

$$B(x)=\Delta(x)\{\kappa h(1-x)[2(1+x+x^2)+h(1+x-2x^2)]+6Px^2F^2(x)\};$$

$$C(x,\theta_0)=6n(n-3)\Delta(x)(x^{n-1}-x_0^{n-1})G(x,\theta_0)B(x)-\{6(x^n-x_0^n)+$$

$$+n(x-x_0)x^{n-3}[2(n-4)(x^2+x_0x+x_0^2)-3(n-3)x_0(x+x_0)]\}\cdot$$

$$\cdot[nx(x^{n-1}-x_0^{n-1})(\theta_0-1)-mx_0\Delta_1(x)q_{\gamma_3}(\theta_0)]\,xA(x,\theta_0);$$

$$\mathcal{D}(x,\theta_0)=\Delta(x)\{n(x-x_0)[(n-3)(x-x_0)(x+2x_0)x^{n-1}+$$

$$+2x_0^{n-1}(x^2+x_0x+x_0^2)]-6x_0^2(x^n-x_0^n)-mx_0(x-x_0)q'_э(\theta_0)\times$$

$$\times\{(n-3)[x^{n+1}-x_0^{n+1}+x_0x(x^{n-1}-x_0^{n-1})]-2nx_0^2x^2(x^{n-3}-x_0^{n-3})\}\}B(x);$$

$$\Delta_1(x)=x^n-nx_0^{n-1}x+(n-1)x_0^n.$$

Используя нестационарную задачу /I/ для описания динамики теплового состояния автотигля на этапе до изменения интенсивности ЭМПР и представляя ее приближенное решение в виде

$$\theta(x,\tau)\approx\tilde{\theta}(x,\tau)=\begin{cases}\theta_0(\tau)-x_0q_э(\theta_0(\tau))(1-x_0/x), & x_0\leqslant x\leqslant x(\tau),\\[2ex] \dfrac{F(x)x(\tau)}{F(x(\tau))x}, & x(\tau)\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\qquad /7/$$

$$x(\tau)=x(\theta_0)=\frac{x_0^2q_э(\theta_0)}{x_0q_э(\theta_0)-\theta_0+1},$$

с помощью /6/ приходим к задаче Коши для $\theta_0=\theta_0(\tau)$

$$\dot{\theta}_0=\frac{M(\theta_0)}{N(\theta_0)},\qquad \theta_0(0)=1,$$

где

$$M(\theta_0)=6F(x(\theta_0))Q^2(\theta_0)[x_0^2F(x(\theta_0))q_э(\theta_0)-\gamma hx(\theta_0)]+$$

$$+\{F^2(x(\theta_0))Q^2(\theta_0)[x(\theta_0)-x_0][2x^2(\theta_0)-x_0x(\theta_0)-x_0^2]+$$

$$+x_0(\theta_0-1)\{kh[1-x(\theta_0)][2(1+x(\theta_0)+x^2(\theta_0))+h(1+$$

$$+x(\theta_0)-2x^2(\theta_0))]+6Px^2(\theta_0)F^2(x(\theta_0))\}\}x_0\dot{q}_0(\tau);$$

$$N(\theta_0)=F'^2(x(\theta_0))Q^2(\theta_0)\{2[1-x_0q'_э(\theta_0)][x^3(\theta_0)-x_0^3]+$$

$$+3x_0^2 q_э'(\theta_0)[x^2(\theta_0)-x_0^2]\} + \kappa h x_0^2[q_э(\theta_0)-q_э'(\theta_0)(\theta_0-1)][2(1+$$
$$+x(\theta_0)+x^2(\theta_0))+h(1+x(\theta_0)-2x^2(\theta_0))](1-x(\theta_0))+$$
$$+6Px_0^2x^2(\theta_0)F^2(x(\theta_0))[q_э(\theta_0)-q_э'(\theta_0)(\theta_0-1)]; \quad Q(\theta_0)=x_0 q_э(\theta_0)-\theta_0+1 .$$

Полученные решения /5/, /7/ позволяют определить динамику объема жидкой ванны и перегрева расплава до и после изменения интенсивности ЭМПР

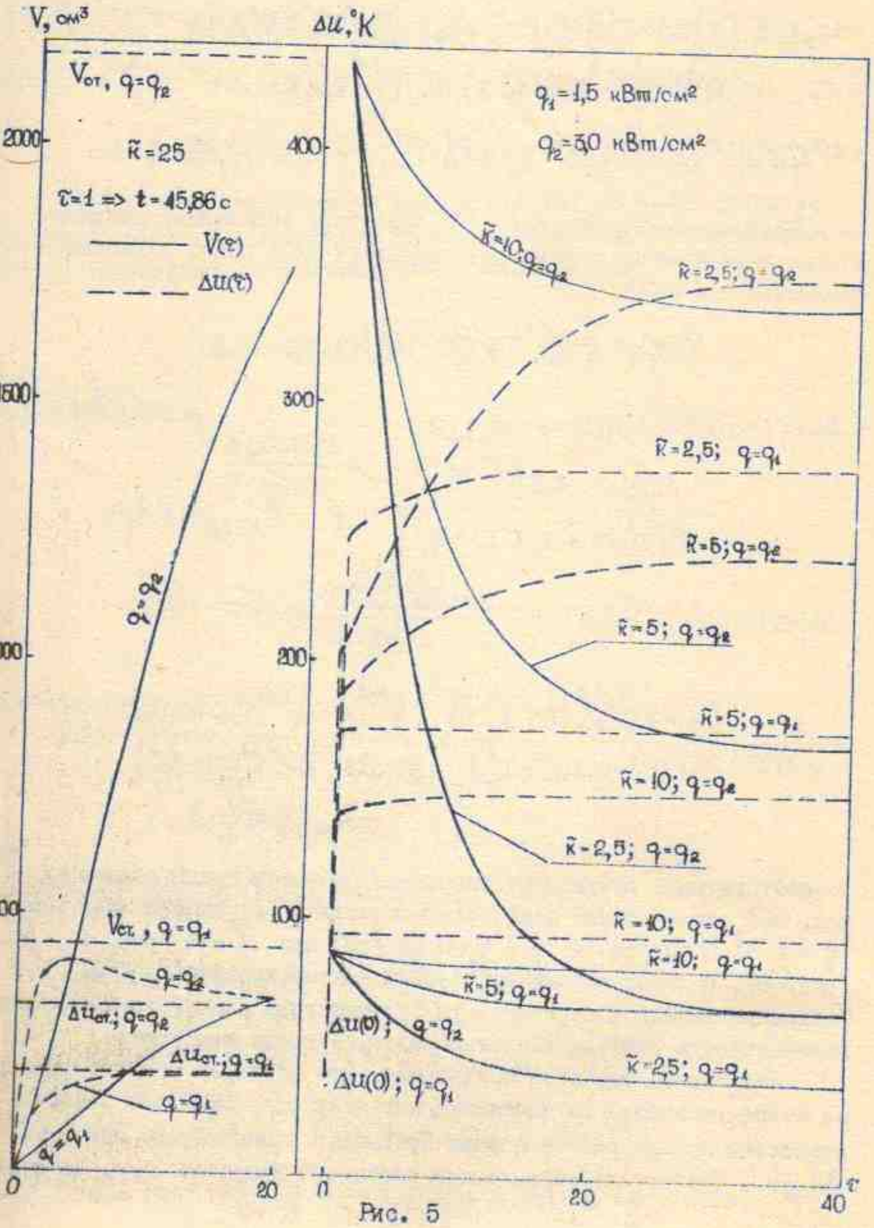
$$V(\tau)=\frac{2}{3}\pi r_1^3[x^3(\tau)-x_0^3];$$

$$\Delta u(\tau)=(u^*-u_c)\{\theta_0(\tau)-1-x_0 q_э(\theta_0)+ + \frac{3x_0^2[x_0+x(\tau)]q_э(\theta_0)}{2[x^2(\tau)+x_0x(\tau)+x_0^2]}\}, \quad \lambda_{ж.эф}=\tilde{\kappa}\lambda_т;$$

$$\Delta u(\tau)=(u^*-u_c)\{\theta_0(\tau)-1-\frac{a_0(x(\tau),\theta_0(\tau))}{\Delta(x(\tau))}+ + \frac{3}{\Delta(x(\tau))}\{\frac{[x_0+x(\tau)]b_0(x(\tau),\theta_0(\tau))}{2[x^2(\tau)+x_0x(\tau)+x_0^2]}+\frac{[x^{n-3}(\tau)-x_0^{n-3}]c_0(x(\tau),\theta_0(\tau))}{(n-3)x^{n-3}(\tau)[x^3(\tau)-x_0^3]}\}\},$$
$$\lambda_{ж.эф}=\frac{\tilde{\kappa}}{m}\lambda_т .$$

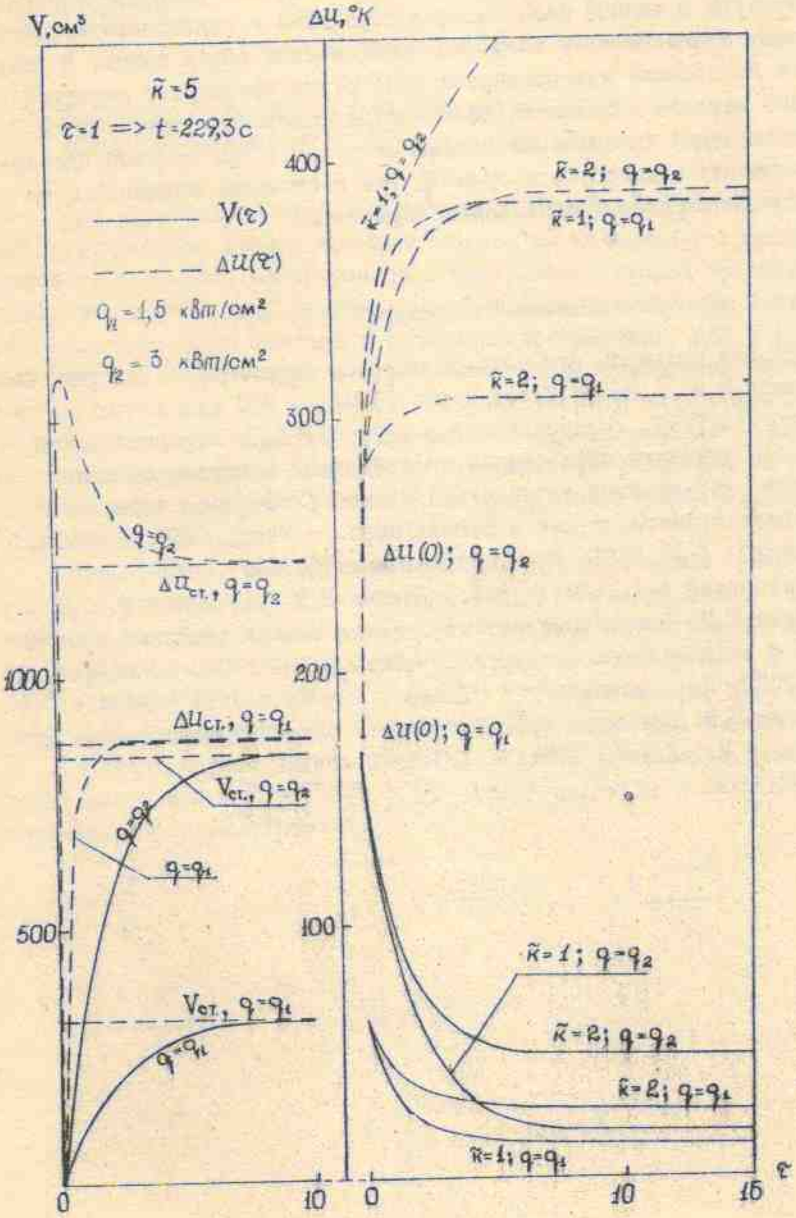
Соответствующие результаты численных расчетов представлены на рис. 5,6 для значений плотности мощности электронного луча, равных $q=q_1=1{,}5$ кВт/см^2 и $q=q_2=3$ кВт/см^2 при $\tilde{\kappa}=25$ /рис. 5/, $\tilde{\kappa}=5$ /рис. 6/. В левых частях рисунков показана динамика объема V /сплошные линии/ и перегрева Δu /пунктирные линии/ до изменения интенсивности ЭМПР, а в правых частях - после изменения.

Результаты расчетов показывают, что перегрев жидкого металла на этапе разогрева до изменения интенсивности ЭМПР при больших мощностях быстро растет и даже превышает стационарное значение $\Delta u_{ст}$, соответствующее данной плотности мощности q , со време-



V, см³
Vот, q=q₂
k̃=25
τ=1 => t=45,86 с
V(τ)
ΔU(τ)
q=q₂
Vот, q=q₁
q=q₂
ΔUот; q=q₂
ΔUот; q=q₁
q=q₁
q=q₁
Δu,°K
q₁=1,5 кВт/см²
q₂=3,0 кВт/см²
k̃=10; q=q₂
k̃=2,5; q=q₂
k̃=2,5; q=q₁
k̃=5; q=q₂
k̃=5; q=q₂
k̃=5; q=q₁
k̃=10; q=q₂
k̃=2,5; q=q₂
k̃=10; q=q₁
k̃=10; q=q₁
k̃=5; q=q₁
ΔU(0); q=q₂
k̃=2,5; q=q₁
ΔU(0); q=q₁
τ

Рис. 5



V, см³
ΔU, °K
$\tilde{K}=5$
$\tau=1 \Rightarrow t=229{,}3$ с
V(τ)
ΔU(τ)
$q_1=1{,}5$ кВт/см²
$q_2=3$ кВт/см²
$q=q_2$
$\Delta U_{ст.},\ q=q_2$
$\Delta U_{ст.},\ q=q_1$
$V_{ст.},\ q=q_2$
$q=q_2$
$q=q_1$
$V_{ст.},\ q=q_1$
$q=q_1$
1000
500
0
10
400
300
200
100
$\tilde{K}=1;\ q=q_2$
$\tilde{K}=2;\ q=q_2$
$\tilde{K}=1;\ q=q_1$
$\tilde{K}=2;\ q=q_1$
$\Delta U(0);\ q=q_2$
$\Delta U(0);\ q=q_1$
$\tilde{K}=1;\ q=q_2$
$\tilde{K}=2;\ q=q_2$
$\tilde{K}=2;\ q=q_1$
$\tilde{K}=1;\ q=q_1$
τ
0
10
15

Рис. 6

нем стремясь к ΔU_{em} . Это обусловлено тем, что распределение температуры в жидкой фазе быстрее стремится к стационарному, чем к своему стационарному значению приближается объем ванны. В результате уменьшения интенсивности ЭМПР резко возрастает перегрев жидкого металла и значительно медленнее протекает сам процесс кристаллизации /уменьшение объема расплава/. При большей плотности мощности электронного луча q на достижение максимального значения перегрева уходит больше времени.

Список литературы

I. Тепловые процессы при электрошлаковом переплаве / Под ред. Медовара Б.И. - Киев: Наук. думка, 1978. - 304 с.
2. Андреева Т.А., Березовский А.А., Довбня В.Д. Математические модели динамики образования жидкой ванны в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Задачи Стефана в спецэлектрометаллургии и физике моря. - Киев, 1986. - С. 3-21.- (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 86.19).
3. Березовский А.А., Вигак В.М., Довбня В.Д., Жерновой Ю.В., Калита Г.И. Одномерные математические модели тепловых процессов в спецэлектрометаллургии. - Киев, 1987. - 34 с. -(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 87.29).
4. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.