1. *Базалий Б. В., Шелепов В. Ю.* О стабилизации решения задачи Стефана для одного квазилинейного уравнения.— В кн.: Краевые задачи математической физики. Киев : Наук. думка, 1979, с. 24—39.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1965.— 703 с.
3. *Мейрманов А. М.* Многофазная задача Стефана для квазилинейных параболических уравнений.— Динамика сплошной среды, 1973, 12, с. 74—86.
4. *Олейник О. А., Вентцель Т. Д.* Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа.— Мат. сб., 1957, 41, № 1, с. 105—128.
5. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана.— Рига : Звайгзне, 1967.— 457 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
7. *Хуснутдинова Н. В.* О поведении решений задачи Коши и краевых задач для некоторых квазилинейных уравнений при неограниченном возрастании времени.— В кн.: Материалы I конф. молодых работников Казани. Секция физ.-мат. Казань, 1959, с. 165—170.
8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М. : Мир, 1968.— 424 с.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.06.80

УДК 517.9:530.182

А. А. БЕРЕЗОВСКИЙ, Ю. В. ЖЕРНОВОЙ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Как известно, продольно-поперечные колебания упругих гибких стержней (с учетом геометрической нелинейности) описываются решениями системы нелинейных дифференциальных уравнений Кирхгофа [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{S}{I}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \qquad (1)$$

Здесь $u(x, t)$, $w(x, t)$ — искомые функции продольного и поперечного смещения произвольной точки x оси стержня, а c_1, c_2, S, I — некоторые постоянные, содержащие геометрические и упругие характеристики стержня. Считая, что стержень неограничен, рассмотрим стационарные волновые решения системы (1). Стационарные волны — это волны, распространяющиеся без искажения формы с постоянной скоростью. В данном случае

$$u(x, t) = u(kx - \omega t), \quad w(x, t) = w(kx - \omega t), \qquad (2)$$

где k и ω — волновое число и частота. Переходя в системе (1) от независимых переменных x и t к фазовой переменной $\theta = kx - \omega t$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно формы искомых стационарных волн [3]:

$$u'' = -\frac{c_1^2 k^3}{c_1^2 k^2 - \omega^2} w' w'',$$

$$w^{(IV)} + \frac{\omega^2}{c_2^2 k^4} w'' = \frac{S}{Ik}\left(u' w'' + u'' w' + \frac{3}{2} k (w')^2 w''\right), \qquad (3)$$

(штрих обозначает дифференцирование по θ).

Рассмотрим периодические по θ с периодом 2π решения системы (3), чего всегда можно достичь соответствующей нормировкой. Это означает, что искомые функции $u(x, t) = u(\theta)$, $w(x, t) = w(\theta)$ должны удовлетворять условиям периодичности

$$\begin{gathered} u'(-\pi) = u'(\pi), \\ w(-\pi) = w(\pi), \qquad w'(-\pi) = w'(\pi), \\ w''(-\pi) = w''(\pi), \qquad w'''(-\pi) = w'''(\pi). \end{gathered} \qquad (4)$$

Полагая $u' = y$, $w' = z$, приходим к задаче отыскания периодических решений для системы более низкого порядка

$$y' + \frac{c_1^2 k^3}{c_1^2 k^2 - \omega^2} zz' = 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

$$z''' + \frac{\omega^2}{c_2^2 k^4} z' = \frac{S}{Ik}\left(yz' + y'z + \frac{3}{2} kz^2 z'\right); \tag{3'}$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad z(-\pi) = z(\pi),$$
$$z'(-\pi) = z'(\pi), \quad z''(-\pi) = z''(\pi). \tag{4'}$$

Первое уравнение позволяет выразить $y(\theta)$ через $z(\theta)$:

$$y(\theta) = y(-\pi) + \frac{c_1^2 k^3}{2(c_1^2 k^2 - \omega^2)} [z^2(-\pi) - z^2(\theta)]. \tag{5}$$

После исключения $y(\theta)$ и однократного интегрирования по θ приходим к отысканию периодического решения одного уравнения второго порядка с кубической нелинейностью

$$z'' + \bar{a}^2 z + cz^3 + \bar{b} = 0,$$
$$z(-\pi) = z(\pi), \quad z'(-\pi) = z'(\pi), \tag{6}$$

где

$$\bar{a}^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2 k^4} - \frac{S}{Ik}\left[y(-\pi) + \frac{c_1^2 k^3}{2(c_1^2 k^2 - \omega^2)} z^2(-\pi)\right];$$

$$c = \frac{S\omega^2}{2I(c_1^2 k^2 - \omega^2)}; \tag{7}$$

$$\bar{b} = \left[\frac{S}{Ik}\left(y(-\pi) + \frac{k}{2} z^2(-\pi)\right) - \frac{\omega^2}{c_2^2 k^4}\right] z(-\pi) - z''(-\pi).$$

Умножая нелинейное дифференциальное уравнение (6) на z' и интегрируя его, получаем

$$(z')^2 = A - \frac{c}{2} z^4 - a^2 z^2 - 2\bar{b}z, \quad z(-\pi) = z(\pi). \tag{8}$$

Здесь A — произвольная постоянная интегрирования. Действительные периодические решения задачи (8) существуют только для таких z, для которых

$$P(z) = A - \frac{c}{2} z^4 - \bar{a}^2 z^2 - 2\bar{b}z \geqslant 0. \tag{9}$$

В общем случае полином $P(z)$ может иметь два или четыре действительных корня. Если $P(z)$ имеет четыре действительных корня $z_1 \leqslant z_2 \leqslant z_3 \leqslant z_4$, то его можно записать в виде $P(z) = -\frac{c}{2}(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$. График зависимости $P(z)$ при $c > 0$ построен на рис. 1. Штриховой линией на этом же рисунке построен график $P(z)$ в случае двух действительных корней, т. е. $P(z) = \frac{c}{2}(z_1^2 - z^2)(z^2 + z_1^2)$. В обоих случаях решение задачи (8) может существовать только для тех участков кривых, где $P(z)$ неотрицательно. На фазовой плоскости z, z' этим участкам соответствуют замкнутые траектории, которым отвечают устойчивые периодические решения задачи (8), осциллирующие между значениями соответствующих корней полинома (первым и вторым, третьим и четвертым). Если $c < 0$ и полином $P(z)$ имеет только два действительных корня, то никаких ограниченных решений задачи не существует, а в случае четырех действительных корней решение осциллирует между значениями $z = z_2$ и $z = z_3$.

Осциллирующие решения $z(\theta)$ можно найти в явном виде через эллиптические функции Якоби. Действительно, разделяя переменные в задаче (8) и интегрируя, приходим к квадратуре, определяющей зависимость фазовой переменной θ от z:

$$\theta(z) = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{P(z)}}, \tag{10}$$

где знак перед квадратным корнем необходимо выбирать в соответствии с возрастанием или убыванием $z(\theta)$ при циклическом изменении. Так как $P(z)$ — полином четвертой степени, то интеграл в правой части (10) сводится к эллиптическим интегралам, обращение которых и приводит к эллиптическим функциям Якоби.

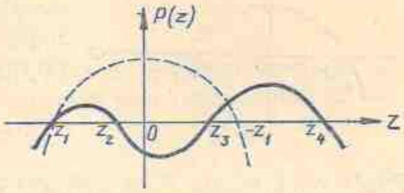

Рис. 1

Из зависимости (10), в частности, вытекает дисперсионное соотношение, устанавливающее связь между амплитудой колебаний $(|z_i| + |z_{i+1}|)/2$, $i = 1, 2, 3$ и величинами k, ω, определяющими число осцилляций на интервале 2π по координате и времени:

$$2\pi = \oint \frac{dz}{\pm\sqrt{P(z)}}. \tag{11}$$

Здесь $\oint$ означает интегрирование по полной осцилляции переменной $z(\theta)$ при ее циклическом изменении [5].

В линейном случае, когда $c = 0$, $P(z) = A - a^2z^2 - 2bz$, квадратура (10) упрощается к виду

$$\theta(z) = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{A - a^2z^2 - 2bz}}, \tag{12}$$

где

$$a^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2k^4}; \; b = -\frac{\omega^2}{c_2^2k^4} z(-\pi) - z''(-\pi). \tag{13}$$

Если $b^2 + a^2A > 0$, то квадратный многочлен $P(z)$ имеет два действительных корня, т. е. $P(z) = -a^2(z - z_1)(z - z_2)$, и существует периодическое решение, осциллирующее между этими корнями. После вычисления квадратуры (12) и последующего ее обращения получаем

$$z(\theta) = \bar{z} + \frac{|z_1| + |z_2|}{2} \sin(a\theta + \varphi), \tag{14}$$

где $\bar{z}$, φ — среднее значение и фаза периодических колебаний, явные выражения для которых опускаем. Отметим только, что $\bar{z}$ пропорционально параметру b. Поскольку ищем периодические решения

$$\dot{w}(\theta) = w(-\pi) + \int_{-\pi}^{\theta} z(\psi)\,d\psi, \quad w(-\pi) = w(\pi), \tag{15}$$

то $\bar{z}$, очевидно, должно равняться нулю. Это достигается при

$$b = -\frac{\omega^2}{c_2^2k^4} z(-\pi) - z''(-\pi) = 0, \tag{16}$$

в частности при $z(-\pi) = z''(-\pi) = 0$. Для существования периодических решений $z(\theta)$ в равенстве (14) необходимо принять $a = 1$, что дает линейное дисперсионное соотношение, не содержащее амплитуды:

$$\omega^2 - c_2^2k^4 = 0. \tag{17}$$

Требование $z(-\pi) = 0$ приводит к равенству $\varphi = 0$ в выражении (14). К соотношению (17) приводит также равенство (11).

Итак, в линейном случае $w(\theta) = w_0 \cos\theta$, а волновое число k и частота ω связаны дисперсионным соотношением (17). Если геометрические и упругие характеристики стержня таковы, что наряду с дисперсионным соотношением (17) одновременно выполняется соотношение $\omega^2 = c_1^2 k^2$, то существует также продольная стационарная волна произвольной формы $u = u(\theta)$.

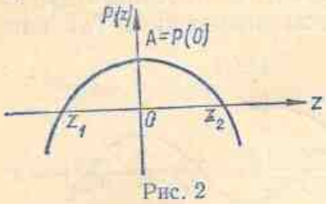

Рис. 2

Возвращаясь к нелинейной задаче, рассмотрим случай $c > 0$, $y(-\pi) = z(-\pi) = z''(-\pi) = 0$, когда полином четвертой степени $P(z)$ имеет только два действительных корня, равные по абсолютной величине:

$$-z_1 = z_2 = \sqrt{\frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 2cA}}{c}}. \tag{18}$$

График полинома $P(z)$ в этом случае построен на рис. 2. Требование $\bar{z} = 0$ и предположение $z(-\pi) = z(\pi) = 0$ приводят к необходимости рассмотрения нечетных решений $z(-\theta) = -z(\theta)$, и поэтому $z = z(\theta)$ достаточно определить только на полупериоде $0 < \theta < \pi$. Очевидно, что $z(0) = 0$. Обозначим через θ_1 то значение θ, при котором $z(\theta_1) = z_2$. Тогда квадратура (10) преобразуется к виду

$$\theta(z) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{2}(z_2^2 - x^2)\left(x^2 + z_2^2 + \frac{2a^2}{c}\right)}}, \quad 0 < z < z_2, \quad \frac{dz}{d\theta} > 0,$$
$$\theta(z) = \theta_1 + \int_z^{z_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{2}(z_2^2 - x^2)\left(x^2 + z_2^2 + \frac{2a^2}{c}\right)}}, \quad 0 < z < z_2, \quad \frac{dz}{d\theta} < 0. \tag{19}$$

Полагая в первой из этих квадратур $z = z_2$, а во второй $z = 0$, получаем

$$\theta_1 = \int_0^{z_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{2}(z_2^2 - x^2)\left(x^2 + z_2^2 + \frac{2a^2}{c}\right)}}, \tag{20}$$

$$\pi = \theta_1 + \int_0^{z_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{2}(z_2^2 - x^2)\left(x^2 + z_2^2 + \frac{2a^2}{c}\right)}}, \tag{21}$$

откуда следует, что $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. Исключая θ_1 из выражения (20), приходим к дисперсионному соотношению, определяющему связь между ω, k и амплитудой колебаний A:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{z_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{c}{2}(z_2^2 - x^2)\left(x^2 + z_2^2 + \frac{2a^2}{c}\right)}}. \tag{22}$$

Входящий в него интеграл является табличным и выражается через полный эллиптический интеграл $K(m)$ и эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi, m)$ [1]:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} [K(m) - F(\varphi, m)], \tag{23}$$
$$\varphi = \arccos\frac{x}{\beta}, \quad m = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad 0 < x < \beta,$$

где

$$K(m) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2}\Big(1 + \frac{1}{2^2} m^2 + \frac{3^2}{2^2 \cdot 4^2} m^4 + $$
$$+ \frac{3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} m^6 + \ \ldots\Big); \tag{24}$$
$$F(\varphi,\ m) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}.$$

В нашем случае $x = \beta = z_2$, и поэтому амплитуда φ, а следовательно, и $F(0, m)$ равны нулю. Для модуля m после исключения параметров $\alpha^2 = z_2^2 + \frac{2a^2}{c}$ и $\beta = z_2$ получаем выражение

$$m = \frac{z_2}{\sqrt{2(z_2^2 + a^2/c)}} = \sqrt{\frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 2cA}}{2\sqrt{a^4 + 2cA}}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\sqrt{I\omega^2(c_1^2k^2 - \omega^2) + ASc_2^4k^8} - \omega\sqrt{I(c_1^2k^2 - \omega^2)}}{2\sqrt{I(c_1^2k^2 - \omega^2)\,\omega^2 + ASc_2^4k^8}}}. \tag{25}$$

В силу (23) дисперсионное соотношение (22) принимает вид

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{a^2 + cz_2^2}} K(m), \tag{26}$$

или после исключения $a^2 = \omega^2/c_2^2k^4$, $c = S\omega^2/2I(c_1^2k^2 - \omega^2)$, $cz_2^2 = -a^2 + \sqrt{a^4 + 2cA}$ и $m = m(k, \omega, A)$

$$\frac{\pi}{c_2k^2}\sqrt[4]{\frac{I\omega^4(c_1^2k^2 - \omega^2) + ASc_2^4k^8\omega^2}{I(c_1^2k^2 - \omega^2)}} = 2K(m(k,\ \omega,\ A)). \tag{27}$$

Отметим, что в линейном случае ($c = 0$) $m = 0$, $K(0) = \frac{\pi}{2}$ и дисперсионное соотношение (26) — $a^2 = 1$ переходит в соотношение (17).

Если амплитуда колебаний A мала, то согласно выражению (25)

$$m^2 \simeq \frac{cA}{2a^4} = \frac{Sc_2^4k^8A}{4I\omega^2(c_1^2k^2 - \omega^2)}. \tag{28}$$

Дисперсионное соотношение (26) при этом хорошо аппроксимируется несколькими членами его разложения в ряд Тейлора. С точностью до A^2 оно записывается в виде

$$\omega = c_2k^2\left[1 - \frac{3}{16}\frac{Sc_2^4k^8A}{I\omega^2(c_1^2k^2 - \omega^2)} - \frac{7}{4 \cdot 16^2}\left(\frac{Sc_2^4k^8A}{I\omega^2(c_1^2k^2 - \omega^2)}\right)^2\right]. \tag{29}$$

Возвращаясь к квадратурам (19) и воспользовавшись выражениями для полного эллиптического интеграла первого рода (24), перепишем их в виде

$$\begin{gathered} \theta(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + cz_2^2}}[K(m) - F(\varphi(z),\ m)], \quad 0 < z < z_2, \quad \frac{dz}{\partial\theta} > 0, \\ \theta(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + cz_2^2}}[K(m) + F(\varphi(z),\ m)], \quad 0 < z < z_2, \quad \frac{dz}{d\theta} < 0, \end{gathered} \tag{30}$$

где m определяется согласно формуле (25), а

$$\varphi(z) = \arccos\frac{z}{z_2}. \tag{31}$$

Обращая эллиптический интеграл первого рода, получаем

$$z(\theta) = z_2 \operatorname{cn}[K(m) - \theta\sqrt{a^2 + cz_2^2}], \quad 0 < z < z_2, \quad \frac{dz}{d\theta} > 0,$$
$$z(\theta) = z_2 \operatorname{cn}[\theta\sqrt{a^2 + cz_2^2} - K(m)], \quad 0 < z < z_2, \quad \frac{dz}{d\theta} < 0. \tag{32}$$

Воспользовавшись далее формулой для эллиптического косинуса от разности двух аргументов

$$\operatorname{cn}(u - v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \tag{33}$$

а также значениями эллиптических функций от полного эллиптического интеграла $K(m)$ [4]:

$$\operatorname{sn} K(m) = 1, \quad \operatorname{cn} K(m) = 0, \quad \operatorname{dn} K(m) = \sqrt{1 - m^2}, \tag{34}$$

получим, что как при $\frac{dz}{d\theta} > 0$, так и при $\frac{dz}{d\theta} < 0$, $z(\theta)$ выражается через эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{dn} x$:

$$z(\theta) = z_2\sqrt{1 - m^2}\,\frac{\operatorname{sn}(\sqrt{a^2 + cz_2^2}\,\theta)}{\operatorname{dn}(\sqrt{a^2 + cz_2^2}\,\theta)} =$$
$$= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{a^4 + 2cA}}\,\frac{\operatorname{sn}(\sqrt[4]{a^4 + 2cA}\,\theta)}{\operatorname{dn}(\sqrt[4]{a^4 + 2cA}\,\theta)}, \quad 0 < \theta < \pi. \tag{35}$$

Полученное решение является нечетной функцией θ и, следовательно, представляет искомое решение на всем периоде $-\pi < \theta < \pi$. Так как периоды эллиптических функций Якоби $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{dn} x$ равны соответственно $4K(m)$ и $2K(m)$, то, если частота ω и волновое число k удовлетворяют дисперсионному соотношению (26), период осцилляции полученного решения (35) равен 2π. В линейном случае ($c = 0$) $m = 0$, $\operatorname{sn} a\theta = \sin a\theta$, $\operatorname{dn} a\theta = 1$ и решение (35) преобразуется к виду

$$z(\theta) = \frac{\sqrt{A}}{a}\sin a\theta = \frac{c_2k^2\sqrt{A}}{\omega}\sin\left[\left(\frac{c_2k^2}{\omega}\right)^{-1}\theta\right] \tag{36}$$

и в силу дисперсионного соотношения (17)

$$z(\theta) = \sqrt{A}\sin\theta. \tag{37}$$

Если амплитуда стационарной волны γ мала, то для $z(\theta)$, амплитудного параметра A и дисперсионного соотношения можно получить разложения Стокса

$$z(\theta) = \gamma\sin\theta - \frac{1}{32}c\gamma^3\sin 3\theta - \ldots,$$
$$A = \gamma^2\left(1 - \frac{3}{16}c\gamma^2 - \ldots\right), \quad \omega^2 = c_2^2k^4 - \frac{3}{4}c_2^2k^4c\gamma^2 - \ldots \tag{38}$$

либо прямой подстановкой в уравнения задачи

$$z'' + a^2z + cz^3 = 0, \quad (z')^2 = A - \frac{c}{2}z^4 - a^2z^2, \tag{39}$$

либо разложением соответствующих квадратур (19), (22). Подставляя полученное точное решение для $z(\theta)$ (35)в выражения (5), (15) и используя табличные интегралы от эллиптических функций [1]

$$\int\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}dx = \frac{1}{m\sqrt{1 - m^2}}\operatorname{arcctg}\frac{m\operatorname{cn} x}{\sqrt{1 - m^2}}, \quad \int\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn}^2 x}dx = -\frac{1}{1 - m^2}\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$$
$$\int\frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}dx = \int\operatorname{sn} x\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn}^2 x}dx = -\frac{1}{1 - m^2}\frac{\operatorname{sn} x\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + \frac{1}{1 - m^2}\int\operatorname{cn}^2 x\,dx, \tag{40}$$
$$\int\operatorname{cn}^2 x\,dx = \frac{1}{m^2}[E(\operatorname{am} x, m) - (1 - m^2)x],$$

где $E(\varphi, m)$ — эллиптический интеграл второго рода вида

$$E(\varphi, m)=\int_0^{\varphi} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \quad \varphi=\operatorname{am} x, \tag{41}$$

получаем для $w(\theta)$ и $u(\theta)$ следующие выражения:

$$w(\theta)=\frac{1}{\sqrt{c(a^4+2cA)}} \operatorname{arcctg}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+2cA}-a^2}{\sqrt{a^4+2cA}+a^2}} \operatorname{cn}\left(\sqrt[4]{a^4+2cA}\,\theta\right)\right], \tag{42}$$

$$\begin{aligned} u(\theta)=\frac{c_1^2 k^3}{2(c_1^2 k^2-\omega^2)} \frac{A}{\sqrt[4]{a^4+2cA}} & \left\{\frac{1}{cA\sqrt{a^4+2cA}}\left[\frac{a^2+\sqrt{a^4+2cA}}{2\sqrt[4]{a^4+2cA}}\,\theta-\right.\right. \\ & \left.-E\left(\operatorname{am}\left(\sqrt[4]{a^4+2cA}\,\theta\right), m\right)\right]+\frac{2}{a^2+\sqrt{a^4+2cA}} \times \\ & \left.\times \frac{\operatorname{sn}\left(\sqrt[4]{a^4+2cA}\,\theta\right)}{\operatorname{dn}\left(\sqrt[4]{a^4+2cA}\,\theta\right)} \operatorname{cn}\left(\sqrt[4]{a^4+2cA}\,\theta\right)\right\}, \end{aligned} \tag{43}$$

$$w(-\pi)=w(\pi)=\frac{1}{\sqrt{c(a^4+2cA)}} \operatorname{arcctg}\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+2cA}-a^2}{\sqrt{a^4+2cA}+a^2}}\right],$$

$$u(-\pi)=-\frac{c_1^2 k^3}{2(c_1^2 k^2-\omega^2)} \frac{\pi\left(a^2+\sqrt{a^4+2cA}\right)}{c(a^4+2cA)}. \tag{44}$$

Отметим, что решение (42) является периодическим с периодом 2π, что легко устанавливается по периоду эллиптического косинуса и дисперсионному соотношению (26). Решение для $u(\theta)$ не является периодическим, хотя $y(\theta)=u'(\theta)$ — периодическая функция с отличным от нуля средним значением.

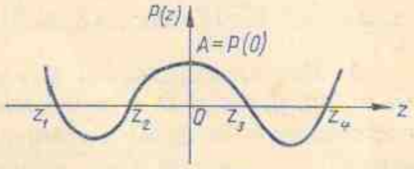

Рис. 3

Параметр нелинейности $c=S\omega^2/2I \times (c_1^2 k^2-\omega^2)$ в зависимости от соотношения между c_1, k и ω может принимать положительные и отрицательные значения. Приведем ниже решения задачи в случае $c<0$. Из вида графика полинома $P(z)=A+\frac{|c|}{2} z^4-a^2 z^2$ (рис. 3) следует, что ограниченные периодические решения задачи в этом случае существуют только для участка кривой между корнями полинома z_2 и z_3:

$$-z_2=z_3=\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^4-2|c|A}}{|c|}}. \tag{45}$$

Дисперсионное соотношение при произвольном A записывается в виде

$$\pi=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2-|c|z_3^2}} K(m), \tag{46}$$

где

$$m=\sqrt{\frac{\omega\sqrt{I(\omega^2-c_1^2k^2)}-\sqrt{I\omega^2(\omega^2-c_1^2k^2)-ASc_2^4k^8}}{\omega\sqrt{I(\omega^2-c_1^2k^2)}+\sqrt{I\omega^2(\omega^2-c_1^2k^2)-ASc_2^4k^8}}}, \tag{47}$$

а для малого амплитудного параметра A

$$\omega=c_2k^2\left[1+\frac{3}{16}\frac{Sc_2^4k^8A}{I\omega^2(\omega^2-c_1^2k^2)}+\frac{17}{4\cdot 16^2}\left(\frac{Sc_2^4k^8A}{I\omega^2(\omega^2-c_1^2k^2)}\right)^2\right]. \tag{48}$$

Для $z(\theta)$ при этом получаем выражение

$$z(\theta)=\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^4-2|c|A}}{|c|}} \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4-2|c|A}}{2}}\,\theta\right), \tag{49}$$

которое при $c \to 0$ переходит в решение линейной задачи (36), (37).

Отметим, что стационарные волновые решения нелинейной системы (1) существуют в том случае, когда соответствующий полином $P(z)$ имеет не менее двух действительных корней при $c > 0$ и четыре действительных корня при $c < 0$. Напряженное и деформированное состояние неограниченного стержня описывается периодическими стационарными волнами, причем, как следует из уравнения (5), растягивающее напряжение имеет постоянную составляющую, что приводит к непериодичности решения для смещения $u(x, t)$ (43). Найденные точные решения выражаются через эллиптические функции Якоби (35), (42), (49).

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Наука, 1971.— 1108 с.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 777 с.
3. *Нелинейные* волны / Под ред. С. Лейбовича, А. Сибасса.— М. : Мир, 1977.— 319 с.
4. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовича, И. Стиган — М. : Наука, 1979.— 832 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М. : Мир, 1977.— 622 с.

Институт математики АН УССР

Поступила в редколлегию
06.06.80

УДК 517.946 : 536.421