1. *Жданов Р. З.* О применении метода Ли-Бэклунда к исследованию симметрийных свойств уравнения Дирака // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 70—73.
2. *Фущич В. И.* Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—28.
3. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений Максвелла.— Киев : Наук. думка, 1983.— 196 с.
4. *Фущич В. И., Серова М. М.* О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики // Докл. АН СССР.— 1983.— **268**, № 5.— С. 1102—1104.
5. *Фущич В. И., Тычинин В. А.* О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований.— Киев, 1982.— 49 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 82.33).
6. *Фущич В. И., Тычинин В. А., Жданов Р. З.* Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа — Ампера, Дирака.— Киев, 1985.— 27 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 85.34).
7. *Fushchich W. I., Serov N. I.* The symmetry and some exact solutions of the many-dimensional Liouville, d'Allembert and eikonal equations // J. Phys.— 1983.— **16A**, N 15.— P. 3645—3655.
8. *Fushchich W. I., Shtelen W. M.* On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation // Ibid.— N 2.— P. 271—277.
9. *Fushchich W. I., Shtelen W. M., Zhdanov R. Z.* On the new conformally invariant equations for spinor field and their exact solutions // Phys. Lett.— 1985.— **159B**, N 2—3.— P. 189—191.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 15.04.87

УДК 517.946

Ю. В. Жерновой

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В СЛУЧАЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА

Проблема оптимизации энергозатрат наиболее актуальна для высокотемпературных тепловых процессов, протекание которых сопровождается ощутимыми потерями тепла вследствие излучения [1, 2]. В предположении постоянства теплофизических характеристик такие тепловые процессы описываются линейным уравнением теплопроводности с нелинейными граничными условиями, вытекающими из закона отдачи тепла поверхностью тела.

В настоящей работе рассмотрена задача об управлении с минимальной энергией одномерными температурными полями неограниченной пластины, полых цилиндра и шара, излучающих тепло по нелинейному закону. Задача построения управления, минимизирующего энергию управляющего воздействия, трудно разрешима [4], поэтому в работе использован подход, суть которого заключается в замене минимизируемого функционала энергии другим, более удобным для исследования. В результате построено управление, близкое к оптимальному, и, следуя терминологии [4, 6], мы лишь условно называем решаемую задачу задачей об управлении с минимальной энергией.

Определение температурного поля $u(x, t)$ простых теплоизлучающих тел — неограниченной пластины, полых цилиндра и шара — сводится к решению следующей нелинейной начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered}
a^2\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad r < x < R, \quad 0 < t < T, \\
u(x, 0) = u_0(x), \quad r \leqslant x \leqslant R, \\
\frac{\partial u(r, t)}{\partial x} = h[u(r, t) - u_c(t)] + F[u(r, t)] - F[u_c(t)], \\
\frac{\partial u(R, t)}{\partial x} = p(t) - F[u(R, t)], \quad 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{x^j} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^j \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$j = 0, 1, 2$ соответственно для пластины, цилиндра и шара; $r = 0$ — для пластины и $r \in (0, R)$ — для полых цилиндра и шара; $F(u) = \varkappa u^4$; a^2, h, $\varkappa$ — постоянные теплофизические характеристики; $u_0(x)$, $u_c(t)$ — заданные функции соответственно из $L_2(r, R)$ и $L_2(0, T)$; $p(t)$ — функция управления. Предположим, что допустимые управления $p(t)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^T p^2(t)\,dt < \infty,$$

т. е. являются любыми функциями из $L_2(0, T)$.

Задача об управлении с минимальной энергией формулируется следующим образом: в выбранном классе допустимых управлений требуется найти такое управление $p(t)$, чтобы соответствующее ему решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи (1) удовлетворяло условию

$$u(x, T) = u_T(x), \quad r \leqslant x \leqslant R \tag{2}$$

($u_T(x)$ — заданная функция из $L_2(r, R)$; T — фиксированный момент времени) и при этом функционал

$$I[p] = \int_0^T p^2(t)\,dt \tag{3}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Отметим, что условие (2) удовлетворяется всегда с известной степенью приближенности [3]. Так как $u_T(x) \in L_2(r, R)$, то в самом общем случае это условие нужно понимать в том смысле, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_r^R [u(x, T - \Delta t) - u_T(x)]^2\,dx = 0.$$

Задача об управлении с минимальной энергией даже в случае линейной задачи теплопроводности не всегда имеет решение [4]. Поэтому во всех дальнейших рассуждениях будем исходить из предположения о том, что решение рассматриваемой задачи существует.

Сведем сформулированную задачу (1) — (3) к эквивалентной. Для этого воспользуемся второй формулой Грина для оператора $a^2\Delta - \partial/\partial\tau$

$$\int_0^{t+0}\int_r^R \left[v\left(a^2\Delta u - \frac{\partial u}{\partial\tau}\right) - u\left(a^2\Delta v + \frac{\partial v}{\partial \tau}\right)\right]\xi^j\,d\xi\,d\tau =$$

$$= a^2 \int_0^{t+0} \left\{ R^j \left[v(R, \tau)\frac{\partial u(R, \tau)}{\partial\xi} - u(R, \tau)\frac{\partial v(R, \tau)}{\partial \xi}\right] - \right.$$

$$\left. - r^j v(r, \tau)\left[\frac{\partial u(r, \tau)}{\partial\xi} - hu(r, \tau)\right] + r^j u(r, \tau)\left[\frac{\partial v(r, \tau)}{\partial\xi} - hv(r, \tau)\right]\right\} d\tau -$$

$$- \int_r^R [u(\xi, t+0)\,v(\xi, t+0) - u(\xi, 0)\,v(\xi, 0)]\,\xi^j d\xi, \quad j = 0, 1, 2, \tag{4}$$

и функцией Грина $G(x, \xi; t - \tau)$ —

$$a^2\Delta_\xi G + \frac{\partial G}{\partial\tau} = -\delta(x - \xi)\,\delta(t - \tau), \quad r < x, \ \xi < R, \quad 0 < t, \ \tau < T;$$

$$G(x, \xi; t - \tau) = 0, \quad \tau > t; \quad \frac{\partial G(x, R; t - \tau)}{\partial\xi} = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial G(x, r; t - \tau)}{\partial \xi} - hG(x, r; t - \tau) = 0,$$

где $\delta(x-\xi)$ и $\delta(t-\tau)$ — дельта-функции Дирака. Полагая в (4) $v(\xi, \tau) = G(x, \xi; t-\tau)$ и учитывая (1) и (5), получаем нелинейное интегральное уравнение относительно $u(x, t)$, $r \leqslant x \leqslant R$, $0 \leqslant t \leqslant T$

$$u(x, t) = u_n(x, t) - a^2 r^j \int_0^t G_r(x, t-\tau) F[u(r, \tau)] d\tau +$$

$$+ a^2 R^j \int_r^t G_R(x, t-\tau) \{p(\tau) - F[u(R, \tau)]\} d\tau, \quad j = 0, 1, 2, \tag{6}$$

где

$$u_n(x, t) = \int_0^R G(x, \xi; t) u_0(\xi) \xi^j d\xi + a^2 r^j \int_0^t G_r(x, t-\tau) \{F[u_c(\tau)] + hu_c(\tau)\} d\tau,$$

$$j = 0, 1, 2;$$

$$G_r(x, t-\tau) = G(x, r; t-\tau), \quad G_R(x, t-\tau) = G(x, R; t-\tau);$$

$$G(x, \xi; t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(\xi)\, \omega_n(x)}{\omega_n^2} e^{-a^2 \lambda_n^2 (t-\tau)}.$$

Здесь $\{\omega_n(x)/\omega_n\}$ — полная в $L_2(r, R)$ ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(x^j \frac{d\omega}{dx}\right) + \lambda^2 x^j \omega = 0, \quad r < x < R, \quad j = 0, 1, 2;$$

$$\frac{d\omega(r)}{dx} - h\omega(r) = 0, \quad \frac{d\omega(R)}{dx} = 0; \tag{7}$$

$$\omega_n^2 = \|\omega_n(x)\|^2 = \int_r^R \omega_n^2(x) x^j dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, 2,$$

решая которую получаем: для пластины ($j = 0$)

$$\omega_n(x) = \cos \lambda_n (R - x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

λ_n — положительные корни уравнения $\lambda \operatorname{tg} \lambda R = h$; в случае полого цилиндра ($j = 1$)

$$\omega_n(x) = Y_1(\lambda_n R) J_0(\lambda_n x) - J_1(\lambda_n R) Y_0(\lambda_n x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$Y_1(\lambda R)[hJ_0(\lambda r) + \lambda J_1(\lambda r)] - J_1(\lambda R)[hY_0(\lambda r) + \lambda Y_1(\lambda r)] = 0, \tag{8}$$

$J_0(\lambda x)$, $J_1(\lambda x)$, $Y_0(\lambda x)$, $Y_1(\lambda x)$ — функции Бесселя первого и второго родов нулевого и первого порядков; для полого шара ($j = 2$)

$$\omega_n(x) = \frac{1}{x}[\lambda_n R \cos \lambda_n (R - x) - \sin \lambda_n (R - x)], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$\lambda_n > 0$ — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda (R - r) = \frac{R(1 + hr) - r}{1 + hr + rR\lambda^2} \lambda. \tag{9}$$

Так как $u_0(x) \in L_2(r, R)$, $u_T(x) \in L_2(r, R)$, то $u_n(x, T) \in L_2(r, R)$, и из полноты системы собственных функций $X_n(x) = \omega_n(x)/\omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$, заключаем, что

$$u_T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{Tn} X_n(x), \quad u_n(x, T) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{nn} X_n(x),$$

$$u_{Tn} = \int_r^R u_T(x) X_n(x) x^j dx, \quad u_{nn} = \int_r^R u_n(x, T) X_n(x) x^j dx, \quad j = 0, 1, 2. \tag{10}$$

Подставив ряды (10) в (6), запишем условие (2) в виде

$$\int_0^T p(t)\, e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}\, dt = b_n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{11}$$

где

$$b_n = \frac{\omega_n}{a^2 R^j \omega_n(R)} (u_{Tn} - u_{\text{Д}n}) + \int_0^T \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^j \frac{\omega_n(r)}{\omega_n(R)} F[u(r, t)] + \right.$$

$$\left. + F[u(R, t)] \right\} e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}\, dt, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Итак, задача об управлении с минимальной энергией (1) — (3) сведена к нахождению функции $p(t) \in L_2(0, T)$, такой, чтобы она и соответствующее ей решение $u(x, t)$ удовлетворяли системе, состоящей из нелинейного интегрального уравнения (6) и бесконечной системы уравнений (11), и при этом функционал (3) принимал наименьшее возможное значение.

Отметим, что в случае линейной задачи теплопроводности правые части системы (11) известны и решение задачи об управлении с минимальной энергией сводится к решению бесконечномерной проблемы моментов [4].

Предположим, что для правых частей системы (11) выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty. \tag{12}$$

Очевидно, что последовательности собственных значений $\{\lambda_n^2\}$ краевой задачи (7), определяемых соответственно из уравнений $\lambda \operatorname{tg} \lambda R = h$, (8) и (9), удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty. \tag{13}$$

При выполнении условий (12), (13) решение бесконечномерной проблемы моментов (11), (3) представляется в виде [4]:

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)},$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом полуинтервале $[0, T - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < T$, а постоянные p_n определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{nk} p_k = b_n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$M_{nk} = \frac{1}{a^2(\lambda_n^2 + \lambda_k^2)} \left[1 - e^{-a^2(\lambda_n^2 + \lambda_k^2)T}\right], \quad n,\ k = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{14}$$

и так как $p(t) \in L_2(0, T)$, то должно выполняться условие

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} M_{nk} p_n p_k < \infty.$$

Выражения для правых частей системы алгебраических уравнений (14) содержат искомые функции $u(r, t)$ и $u(R, t)$ под знаком интеграла, и, таким образом, исходная задача (1) — (3) сводится к нахождению постоянных p_k, $k = 1, 2, \ldots$, и функции $u(x, t)$ путем совместного решения нелинейного интегрального уравнения (6) и бесконечной системы уравнений (14).

Найти точное решение системы уравнений (6), (14) невозможно. Обычно систему (14) «усекают», заменяя ее конечной системой уравнений

$$\sum_{k=1}^{K} M_{nk} p_k = b_n, \quad n = \overline{1, K}, \tag{15}$$

т. е. ищется приближенное решение $p_1^{(K)}, \ldots, p_K^{(K)}$ и с его помощью строится K-е приближение управления с минимальной энергией (K — положительное целое число)

$$p_K(t) = \sum_{n=1}^{K} p_n^{(K)} e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}. \tag{16}$$

Тогда с помощью (15) можно исключить постоянные $p_s^{(K)}$, $s = \overline{1, K}$, и задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$u(x, t) = u_л(x, t) - a^2 r^j \int_0^t G_r(x, t-\tau) F[u(r, \tau)]\, d\tau +$$

$$+ a^2 R^j \int_0^t G_R(x, t-\tau) \left\{ \sum_{n=1}^{K} \frac{\det M_n^K}{\det M^K} e^{-a^2\lambda_n^2(T-\tau)} - F[u(R, \tau)] \right\} d\tau, \tag{17}$$

$$j = 0, 1, 2,$$

и последующего определения постоянных $p_s^{(K)}$, $s = \overline{1, K}$ по формулам

$$p_s^{(K)} = \det M_s^K / \det M^K, \quad s = \overline{1, K};$$

$$M^K = (M_{nk})_{n,k=1}^{K}; \quad M_s^K = (Q_{nk}^s)_{n,k=1}^{K}, \quad Q_{nk}^s = \begin{cases} M_{nk}, & k \neq s, \\ b_n, & k = s. \end{cases} \tag{18}$$

Приведенный способ построения приближенного решения бесконечной системы уравнений (14) является, по существу, методом Ритца приближенного решения операторного уравнения с положительным (но не положительно определенным) оператором, поэтому такой способ неустойчив относительно погрешностей в промежуточных вычислениях [4]. Отмеченные недостатки вовсе не означают полную несостоятельность данного метода для решения рассматриваемой задачи, поскольку в отдельных конкретных случаях он оказывается достаточно эффективным.

В данной ситуации, однако, целесообразно искать приближенное решение задачи об управлении с минимальной энергией путем решения вспомогательной задачи, требуя чтобы искомое управление $p(t, \beta)$ и соответствующее ему решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи (1) минимизировали не функционал (3), а вспомогательный функционал

$$I_\beta[p] = \frac{1}{\beta} \int_r^R [u(x, T) - u_T(x)]^2 x^j dx + \int_0^T p^2(t)\, dt, \quad j = 0, 1, 2, \tag{19}$$

для малых положительных β. При этом, если задача об управлении с минимальной энергией имеет решение $p(t)$, то

$$\lim_{\beta \to 0} \int_0^T [p(t, \beta) - p(t)]^2\, dt = 0.$$

Решение сформулированной вспомогательной задачи представляется в виде [4]:

$$p(t, \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}, \tag{20}$$

где постоянные c_n определяются из бесконечной системы уравнений

$$c_n + \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} M_{nk} c_k = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

или в матричной форме

$$\left(E + \frac{1}{\beta} M\right) c = b,$$

где

$$E = (\delta_{nk})_{n,k=1}^{\infty}, \quad M = (M_{nk})_{n,k=1}^{\infty},$$

$$c = (c_k)_{k=1}^{\infty}, \quad b = (b_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \delta_{nk} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n. \end{cases}$$

Так как оператор $E + \frac{1}{\beta} M$ — положительно определенный, то, не опасаясь неустойчивости, можно заменять бесконечную систему (21) конечной и таким образом аппроксимировать управление $p(t, \beta)$ при любом малом положительном β:

$$p_K(t, \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{K} c_n^{(K)} e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}. \tag{22}$$

Для этого необходимо сначала решить нелинейное интегральное уравнение

$$u(x, t) = u_л(x, t) - a^2 r^j \int_0^t G_r(x, t-\tau) F[u(r, \tau)]\, d\tau +$$

$$+ a^2 R^j \int_0^t G_R(x, t-\tau) \left\{ \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{K} \frac{\det P_n^K}{\det\left(E^K + \frac{1}{\beta} M^K\right)} e^{-a^2\lambda_n^2(T-\tau)} - \right.$$

$$\left. - F[u(R, \tau)] \right\} d\tau, \quad j = 0, 1, 2, \tag{23}$$

а затем найти постоянные $c_s^{(K)}$, $s = \overline{1, K}$,

$$c_s^{(K)} = \det P_s^K / \det\left(E^K + \frac{1}{\beta} M^K\right), \quad s = \overline{1, K};$$

$$E^K = (\delta_{nk})_{n,k=1}^{K}, \qquad P_{nk}^s = \begin{cases} \delta_{nk} + \frac{1}{\beta} M_{nk}, & k \neq s, \\ b_n, & k = s. \end{cases} \tag{24}$$

$$P_s^K = (P_{nk}^s)_{n,k=1}^{K},$$

Итак, для построения приближенных решений задач (1) — (3) и (1), (19) необходимо решить нелинейные интегральные уравнения (17) и (23), т. е. уравнение вида

$$u(x, t) = u_л(x, t) - a^2 r^j \int_0^t G_r(x, t-\tau) F[u(r, \tau)]\, d\tau +$$

$$+ a^2 R^j \int_0^t G_R(x, t-\tau) \left\{ \sum_{n=1}^{K} \Phi_n e^{-a^2\lambda_n^2(T-\tau)} - F[u(R, \tau)] \right\} d\tau, \quad j = 0, 1, 2, \tag{25}$$

решение которого усложняется тем, что постоянные Φ_n представляют собой сложные выражения, содержащие функции $F[u(r, t)]$, $F[u(R, t)]$ под знаком интеграла. Полагая в (25) $x = \rho$, $u(\rho, t) = u_\rho(t)$, $u_Л(\rho, t) = u_{Л\rho}(t)$, $G_r(\rho, t-\tau) = G_{r\rho}(t-\tau)$, $G_R(\rho, t-\tau) = G_{R\rho}(t-\tau)$, $\rho = r, R$, приходим к системе двух нелинейных интегральных уравнений относительно $u_r(t)$, $u_R(t)$:

$$u_\rho(t) = u_{Л\rho}(t) - a^2 r^j \int_0^t G_{r\rho}(t-\tau) F[u_r(\tau)]\, d\tau +$$

$$+ a^2 R^j \int_0^t G_{R\rho}(t-\tau) \left\{ \sum_{n=1}^{K} \Phi_n e^{-a^2\lambda_n^2(T-\tau)} - F[u_R(\tau)] \right\} d\tau, \tag{26}$$

$$\rho = r, R; \quad j = 0, 1, 2,$$

после решения которой температурное поле $u(x, t)$ внутри области (r, R) определяется квадратурой (25).

Весьма эффективным методом получения приближенных решений системы нелинейных интегральных уравнений (26) является проекционно-сеточный метод, применяемый в настоящее время для решения самых различных задач математической физики [7]. Воспользуемся его простейшим вариантом — зональным методом, известным в теории интегральных уравнений лучистого теплообмена [5, 8, 9]. Аппроксимируем решения системы уравнений (26) кусочно-постоянными функциями

$$u_\rho(t) \approx u_{\rho M}(t) = \sum_{m=1}^{M} u_{\rho m}\varphi_m(t), \quad \rho = r,\ R, \tag{27}$$

где $\varphi_m(t) = \zeta(t - t_{m-1}) - \zeta(t - t_m)$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < \ldots < t_M = T$, $\zeta(t - t_m)$ — функция Хевисайда; $u_{\rho m}$ — средние значения $u_\rho(t)$ на интервале $t_{m-1} < t < t_m$. Подстановка (27) в (26) и применение метода Бубнова — Галеркина приводят к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений относительно средних значений $u_{\rho m}$:

$$u_{\rho m} = u_{\text{Л}\rho m} - \sum_{k=1}^{m-1} [g^r_{kj\rho m}F(u_{rk}) + g^R_{kj\rho m}F(u_{Rk})] - g^r_{j\rho m}F(u_{rm}) + g^R_{j\rho m}F(u_{Rm})] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} G_{kj\rho m}\Phi_k, \quad \rho = r,\ R; \quad m = \overline{1,\ M}; \quad j = 0,\ 1,\ 2, \tag{28}$$

где

$$u_{\text{Л}\rho m} = \frac{1}{\Delta_m}\int_{t_{m-1}}^{t_m} u_{\text{Л}\rho}(t)\,dt, \quad G_{kj\rho m} = \frac{a^2R^j}{\Delta_m}\int_{t_{m-1}}^{t_m}\int_0^t G_{R\rho}(t-\tau)\,e^{-a^2\lambda_k^2(T-\tau)}d\tau dt,$$

$$g^{\rho_1}_{kj\rho m} = \frac{a^2\rho_1^j}{\Delta_m}\int_{t_{m-1}}^{t_m}\int_{t_{k-1}}^{t_k} G_{\rho_1\rho}(t-\tau)\,d\tau dt, \quad g^{\rho_1}_{j\rho m} = \frac{a^2\rho_1^j}{\Delta_m}\int_{t_{m-1}}^{t_m}\int_{t_{m-1}}^{t} G_{\rho_1\rho}(t-\tau)\,d\tau dt,$$

$$\Delta_m = t_m - t_{m-1}, \quad \rho_1 = r,\ R,$$

$\Phi_k = p_k^{(K)}$, $c_k^{(K)}/\beta$, т. е. определяются согласно (18) и (24) через постоянные b_n, выражения для которых с учетом (27) принимают вид

$$b_n = \frac{\omega_n(u_{Tn} - u_{\text{Л}n})}{a^2R^j\omega_n(R)} + \frac{1}{\lambda_n^2a^2}\sum_{m=1}^{M}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^j\frac{\omega_n(r)}{\omega_n(R)}F(u_{rm}) + F(u_{Rm})\right] \times$$

$$\times [e^{-a^2\lambda_n^2(T-t_m)} - e^{-a^2\lambda_n^2(T-t_{m-1})}], \quad n = \overline{1,\ K}, \quad j = 0,\ 1,\ 2.$$

При вычислении $u_{\text{Л}\rho m}$, $g^{\rho_1}_{kj\rho m}$, $g^{\rho_1}_{j\rho m}$, $G_{kj\rho m}$ достаточно ограничиться конечными рядами.

Выбранная система базисных функций $\varphi_m(t)$ осуществляет кусочно-непрерывную аппроксимацию решений системы нелинейных интегральных уравнений (26). Соответствующим выбором $\varphi_m(t)$ [7] можно осуществить непрерывную аппроксимацию, однако система нелинейных алгебраических уравнений (28) при этом значительно усложняется.

Для $p(t) = p(t, \beta)$ решение нелинейного интегрального уравнения (6) при $t = T$ записывается в виде

$$u(x, T) = \sum_{n=1}^{\infty}[u_{Tn} - a^2R^jX_n(R)\,c_n]\,X_n(x), \quad j = 0,\ 1,\ 2,$$

и, следовательно, минимальное значение функционала (19) равно

$$I_{\beta\min} = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,[b_n(1 - a^4R^{2j}X_n^2(R))\,c_n].$$

Предложенный алгоритм решения нелинейного интегрального уравнения (25) позволяет аппроксимировать управление $p(t)$ либо сразу по формуле (16), либо сначала приближенно находить управление $p(t, \beta)$, а затем, уменьшая β, более точно вычислять управление с минимальной энергией. В последнем случае метод построения приближенного решения задачи устойчив относительно малых погрешностей в промежуточных вычислениях.

1. *Березовский А. А., Вигак В. М., Жерновой Ю. В.* Оптимальное управление нестационарным температурным полем пластины при электронно-лучевой гарнисажной плавке.— Киев, 1984.— 28 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.68).
2. *Березовский А. А., Довбня В. Д.* Математические модели тепловых процессов в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Нелинейные краевые задачи. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 41—57.
3. *Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н.* Оптимальное управление нагревом металла.— М. : Металлургия, 1972.— 439 с.
4. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М. : Наука, 1978.— 464 с.
5. *Зигель Р., Хауэлл Дж.* Теплообмен излучением.— М. : Мир, 1975.— 936 с.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением.— М. : Наука, 1968.— 476 с.
7. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы.— М. : Наука, 1981.— 416 с.
8. *Суринов Ю. С.* Интегральные уравнения теплового излучения и методы расчета лучистого теплообмена в системах «серых» тел, разделенных диатермической средой // Изв. АН СССР. ОТН.— 1948.— № 7.— С. 981—1002.
9. *Фаворский О. Н., Каданер Я. С.* Вопросы теплообмена в космосе.— М. : Высш. шк., 1967.— 257 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 16.04.85

УДК 539.30 : 537.24.01

Г. А. Кильчинская

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ПРОСТОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В интенсивно развивающейся нелинейной механике сплошных сред [1—5, 7, 11—13] особое внимание уделено термоупругой среде, причем главным образом рассматривается напряженно-деформированное состояние.

В данной работе внимание сосредоточено на описании теплопереноса в термоупругой среде, следуя теории простых термомеханических процессов, зависящих от скорости изменения температуры [13].

Для простых термомеханических процессов справедливы основные физические законы сохранения: массы, количества движения и его момента, энергии; неравенство Клаузиуса — Дюгема и согласующиеся с ними основные аксиомы определяющей теории. Эти простые процессы можно описать лишь двумя функционалами свободной энергии φ и теплового потока q [11]. Для термоупругой среды свободная энергия зависит от текущих деформаций ε_{ij} (компонентов деформаций Грина — Сен-Венана) и термодинамической температуры θ. Тепловой поток может зависеть от большего числа переменных, в частности от градиента температуры и ее скорости. Это не противоречит аксиоме равноприсутствия, по крайней мере при малых отклонениях от состояния термодинамического равновесия [10]:

$$\varphi = \varphi(\varepsilon_{ij}, \theta), \quad q = q(\varepsilon_{ij}, \theta, \dot\theta, \nabla\theta). \qquad (1)$$

В гиперупругой и близкой ей по свойствам термоупругой среде компоненты тензора напряжений и плотность энтропии η связаны с плотностью свободной энергии соотношениями [11]

$$\sigma^{ij} = \rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}}, \quad \eta = -\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \qquad (2)$$

Локальная форма неравенства Клаузиуса — Дюгема деформированной среды имеет вид

$$\rho\theta\dot\eta - \rho\dot\varepsilon + \sigma^{ij}\dot\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\theta}\,q\nabla\theta + \rho r \geqslant 0, \qquad (3)$$