АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Киев — 1991

$$u_{txxx}+(au_t)_x+bu_{xxx}+b_1u_{xx}+b_2u_x+b_3u=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i f[u(x,0),\ u_x(x,0)\,u_{xx}(x,0)], \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^2 u(x,t)=0, \tag{15}$$

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\ \ u_x(0,t)=\varphi_2(t),\ \ u_{xx}(0,t)=\varphi_3(t), \tag{16}$$

$$u\big|_{AC}=\psi_1(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{AC}=\psi_2(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{BC}=\psi_3(x). \tag{17}$$

Отметим, что задача (14)-(17) эквивалентно редуцируется к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго порядка

$$\tau(x)=\int_0^x \mathcal{K}(x,\xi)\, f[\tau(\xi),\tau'(\xi),\tau''(\xi)]\,d\xi+F(x),$$

относительно следа $u(x,0)=\tau(x)$, однозначная разрешимость которого устанавливается с помощью принципа сжатых отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах//Дифференц.уравнения.-1982.-18, № 4.-С.689-699.

УДК 517.946.9

Ю.В. ЖЕРНОВЫЙ

О НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Предложен метод решения обратной задачи Стефана в полупространстве по заданному закону движения границы раздела фаз.

Задачу Стефана для полупространства можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial u_1}{\partial t}=0, \qquad 0<x<y(t), \quad t>0; \tag{1}$$

$$u_1(0,t)=f_1(t)<0; \tag{2}$$

$$u_1(y(t),t)=0; \tag{3}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad y(t) < x < \infty, \ t > 0; \tag{4}$$

$$u_2(x, 0) = f(x) > 0; \tag{5}$$

$$u_2(y(t), t) = 0; \tag{6}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=y(t)} - \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=y(t)} = p\dot{y}(t). \tag{7}$$

Рассмотрим обратную задачу: по заданному закону движения границы $x = y(t) > y(0) = 0$ и начальному распределению температуры $f(x)$ определить температурное поле в полупространстве $0 < x < \infty$ (функции $u_k(x, t)$, $k = 1,2$) и температуру на поверхности $x = 0$ (функция $f_1(t)$). В такой постановке обратная задача Стефана имеет единственное решение и может быть сведена к системе 3 интегральных уравнений [1].

Ниже предлагается более простое решение обратной задачи.

Введем обозначения $\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=y(t)} = Q(t)$. Используя результаты работы [2] , решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условию (3), представим в виде

$$u_1(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[(y(t) - x)^{2k+1} Q(t) \right].$$

Функция

$$u_2(x,t) = f(x) + \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)d\tau$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) и начальному условию (5) при любом выборе $\mu(\tau)$ [3] . Из (2), (6) и (7) следует

$$f_1(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left[y^{2k+1}(t)\, Q(t) \right]^{(k)}; \tag{8}$$

$$\mu(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{y(t) - y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)d\tau = -2a^2 f(y(t)); \tag{9}$$

$$Q(t) = \frac{p}{\lambda_1} \dot{y}(t) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left\{ f'(x)\Big|_{x=y(t)} - \frac{\mu(0)}{2a^3\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{y^2(t)}{4a^2 t}} - \right.$$

$$\frac{\mu(t)\dot{y}(t)}{2a^4} - \frac{1}{2a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{\mu}(t)}{(t-\tau)^{1/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau -$$

$$- \frac{1}{4a^5\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{y(t)-y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \dot{y}(\tau)\mu(t)d\tau \}. \qquad (10)$$

Таким образом, обратная задача Стефана сведена к одному инте-ральному уравнению Вольтерра II рода (9) относительно функции $\mu(t)$, поскольку $Q(t)$ и $f_1(t)$ определяются непосредственно из (10) и (...).

В качестве примера рассмотрим решение обратной задачи Стефана при $y(t) = \alpha\sqrt{t}$, $f_1(t) = c_1 < 0$, $f(x) = c > 0$. Решением интегрального уравнения (9) в этом случае является постоянная

$$\mu = -4a^3c / [1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2a}\right)][2a + \alpha\sqrt{\pi} e^{\alpha^2/4a^2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2a}\right)\right)].$$

Проведя все вычисления, получим

$$Q(t) = \frac{p\alpha a\sqrt{\pi}[1 - \mathrm{erf}(\frac{\alpha}{2a})] + 2\lambda_2 c e^{-\alpha^2/4a^2}}{2\lambda_1 a[1 - \mathrm{erf}(\frac{\alpha}{2a})]\sqrt{\pi t}};$$

$$c_1 = -\frac{\mathrm{erf}(\frac{\alpha}{2})\{p\alpha a\sqrt{\pi}[1 - \mathrm{erf}(\frac{\alpha}{2a})] + 2\lambda_2 c e^{-\alpha^2/4a^2}\}}{2\lambda_1 a[1 - \mathrm{erf}(\frac{\alpha}{2a})]e^{-\alpha^2/4}};$$

$$u_1(x,t) = c_1[\mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)] / \mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$u_2(x,t) = c[\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2a}\right)] / [1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2a}\right)].$$

Найденное решение обратной задачи совпадает с известным решением Стефана [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынов Г.А. О распространении тепла в двухфазной среде при заданном законе движения границы фаз//Журн.техн.физики.-1955.-25, вып.10.-С.1754-1767.
2. Борисов В.Т., Любов Б.Я., Темкин Д.Е. О расчете кинетики затвердевания металлического слитка при различных температурных условиях на его поверхности//Докл.АН СССР.-1955.-104, № 2.-С.223-228.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.-М.:Наука,1977.-736 с.

УДК 517.947.43...

М.А. ЖУРАВКОВ, ...

МЕТОД КВАЗИФУН... НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДА... ВЯЗКОУПРУГОСТИ ...

Обсуждается ... в нелинейных ...

Рассматри... излучающего те... тепла не завис... место теплооб... Больцмана [1,...] или происходит ... то в краевых ... на вогнутой ... ния лучистого ...

Одним из ... ного типа, ... уравнению [3] ... валентному ... ные способы ... способа пере... к эквивалент... функций Грин... математическ... такие, как ... мации о гео... с помощью ... выборе стру... ния получае... сываются с... ловий относ...

Во вто... для физичес... вожилова). ... методом ква... линейно-упр...