Академия наук Украинской ССР
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

Препринт 88.49

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Киев
Институт математики АН УССР
1988

УДК 517.946.9

Ю.В.Жерновой

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В СЛУЧАЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

При оптимизации тепловых процессов, сопровождающихся фазовыми превращениями среды, возникает проблема управления границей фазового перехода, математическая постановка которой представляет собой обратную задачу Стефана. Обзор работ, посвященных исследованию обратных задач Стефана в различных постановках, дан в [1]. В большинстве случаев авторы ограничиваются рассмотрением нестационарных одномерных или квазистационарных задач в полуограниченных областях. В [2] предложен метод аналитического решения обратной нестационарной задачи Стефана на отрезке. Настоящая работа посвящена решению двумерной обратной нестационарной задачи Стефана в ограниченной области.

Предположим, что круговой цилиндр конечной длины l и радиуса R заполнен средой, способной находиться в двух состояниях: жидком и твердом, причем поверхность раздела фаз перемещается вдоль цилиндра. Обозначим через Ω_t^- область твердой, а через Ω_t^+ - жидкой фазы в момент времени $t>0$, а знаком плюс или минус все соответствующие теплофизические параметры и величины.

Нестационарная задача Стефана в случае осесимметричного температурного поля $T^{\pm}=T^{\pm}(r,z,t)$ после перехода к безразмерным переменным и параметрам

$$x=\frac{z}{l}, \quad \rho=\frac{r}{R}, \quad \tau=a^2R^{-2}t, \quad u^{\pm}=\frac{T^{\pm}}{T_s},$$

$$a^2=\frac{\lambda^+}{c^+\rho^+}, \quad b^2=R^{-2}l^2, \quad p^{\pm}=\frac{Rq^{\pm}}{\lambda^{\pm}T_s},$$

$$\omega_1^{\pm}=\frac{l\alpha^{\pm}}{\lambda^{\pm}}, \quad \lambda=\frac{\lambda^+}{\lambda^-}, \quad \varkappa=\frac{a^2\rho^+\varkappa_0}{\lambda^-T_s},$$

$$u_0^{\pm} = T_0^{\pm} / T_s , \qquad \varphi_i = T_{ci} / T_s , \quad i = 1,2$$

записывается в виде

$$u_\tau^{\pm} - \frac{1}{\rho}(\rho u_\rho^{\pm})_\rho - b^2 u_{xx}^{\pm} = 0, \quad (\rho, x) \in \Omega_\tau^{\pm}, \quad \tau > 0; \qquad /1/$$

$$u^{\pm}(\rho, x, 0) = u_0^{\pm}(\rho, x), \quad (\rho, x) \in \Omega_0^{\pm}; \qquad /2/$$

$$u_\rho^{\pm}(0, x, \tau) = 0, \quad u_\rho^{\pm}(1, x, \tau) = p^{\pm}(x, \tau), \; 0 \leq x \leq 1, \; \tau \geq 0; \qquad /3/$$

$$u_x^-(\rho, 0, \tau) = \omega_1^-[u^-(\rho, 0, \tau) - \varphi_1(\rho, \tau)], \; 0 \leq \rho \leq 1, \; \tau \geq 0,$$

$$u_x^+(\rho, 1, \tau) = \omega_1^+[\varphi_2(\rho, \tau) - u^+(\rho, 1, \tau)], \; 0 \leq \rho \leq 1, \; \tau \geq 0; \qquad /4/$$

$$u^{\pm}(\rho(x, \tau), x, \tau) = 1, \; 0 \leq x \leq 1, \; \tau \geq 0; \qquad /5/$$

$$\lambda u_\rho^+(\rho(x,\tau), x, \tau) - u_\rho^-(\rho(x,\tau), x, \tau) = \frac{\varkappa \rho_\tau(x,\tau)}{1 + b^2 \rho_x^2(x,\tau)}, \; 0 \leq x \leq 1, \; \tau \geq 0. \qquad /6/$$

Здесь r , z , t и ρ , x , τ - размерные и безразмерные координаты и время; $u^{\pm} = u^{\pm}(\rho, x, \tau)$ - безразмерные температурные поля в твердой и жидкой фазах; $T_0^{\pm}$ - начальное распределение температуры / $T_0^- \leq T_s$, $T_0^+ \geq T_s$ /; T_{ci} , $i = 1,2$ - температуры внешних сред; T_s , $\varkappa_0$ - температура и скрытая теплота фазового перехода; $q^{\pm}(z, t)$ - плотность теплового потока, протекающего через боковую поверхность цилиндра; теплофизические параметры среды $\lambda^{\pm}$, $c^{\pm}$, $\rho^{\pm}$, $\alpha^{\pm}$ предполагаются постоянными / в каждой фазе /, причем

$$\lambda^+ c^- \rho^- = \lambda^- c^+ \rho^+ . \qquad /7/$$

Считаем также, что меридианное сечение γ_τ гладкой поверхности раздела фаз можно аналитически представить в виде $\rho = \rho(x, \tau)$, $x_0(\tau) \leq x \leq x_1(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \tau_1$ / $\rho(x_i(\tau), \tau) = i$, $i = 0;1$ /.

Прежде чем перейти к постановке обратной задачи, введем три функции:

$$v^-(x,\tau)=2\int\limits_{\rho(x,\tau)}^{1} u^-(\rho,x,\tau)\rho d\rho, \quad 0\le x\le x_1(\tau);$$

$$v^+(x,\tau)=2\int\limits_{0}^{\rho(x,\tau)} u^+(\rho,x,\tau)\rho d\rho, \quad x_0(\tau)\le x\le 1; \qquad /8/$$

$$w(x,\tau)=\lambda v^+(x,\tau)+v^-(x,\tau), \quad x_0(\tau)\le x\le x_1(\tau), \quad 0\le\tau\le\tau_1 .$$

Функция $v^-(x,\tau)$ имеет смысл средней по сечению температуры в зоне $0\le x\le x_0(\tau)$, заполненной только твердой фазой /рисунок/; функция $v^+(x,\tau)$ имеет аналогичный смысл для зоны $x_1(\tau)\le x\le 1$, заполненной только жидкой фазой. При выполнении условия /7/ $w(x,\tau)$ играет роль средней температуры в зоне $x_0(\tau)\le x\le x_1(\tau)$, заполненной частично твердой и частично жидкой фазами /назовем ее зоной фронта раздела фаз/. Условие /7/ определяет $\lambda^+=\lambda^-\rho^+c^+/\rho^-c^-$ как "эффективную" теплопроводность жидкой фазы [3].

При заданных функциях $\varphi_1(\rho,\tau)$, $\varphi_2(\rho,\tau)$ проблема управления поверхностью раздела фаз состоит в определении плотности теплового потока, проходящего через боковую поверхность цилиндра. Соответствующую обратную задачу Стефана сформулируем следующим образом: по заданной поверхности раздела фаз и закону ее перемещения

$$\rho(x,\tau)=\rho^*(x,\tau), \quad x_0^*(\tau)\le x\le x_1^*(\tau), \quad 0\le\tau\le\tau_1 \qquad /9/$$

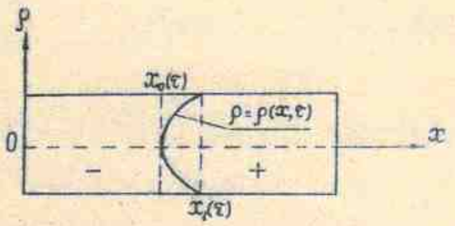
$$\left(x_0^*(\tau)<x_1^*(\tau), \quad x_0^*(0)>0, \quad x_1^*(\tau_1)<1, \quad \dot{x}_i^*(\tau)>0, \; i=0,1\right),$$

как следствию, определить причину - правую часть второго граничного условия /3/ - кусочно непрерывную по x и τ функцию $p^\pm(x,\tau)$, удовлетворяющую ограничениям

$$p_1\le p^\pm(x,\tau)\le p_2, \quad 0\le x\le 1, \quad 0\le\tau\le\tau_1 \qquad /10/$$

и обеспечивающую выполнение следующих условий при $\tau=\tau_1>0$:

$$v^-(x,\tau_1)=v^-_{\tau_1}(x), \quad 0\le x\le x_0^*(\tau_1); \qquad w(x,\tau_1)=w_{\tau_1}(x), \qquad /11/$$
$$x_0^*(\tau_1)\le x\le x_1^*(\tau_1); \qquad v^+(x,\tau_1)=v^+_{\tau_1}(x), \quad x_1^*(\tau_1)\le x\le 1 .$$



Сформулированная задача относится к классу некорректно поставленных [I,4] , поэтому все дальнейшие рассуждения имеют смысл в предположении, что ее решение существует. Покажем, что рассматриваемую двумерную обратную задачу можно свести к одномерной обратной задаче специального вида с двумя управляемыми подвижными границами.

Дифференцируя первые две функции /8/ и учитывая условия /5/ получаем

$$v^-_{xx}=2\Big[\int\limits_{\rho(x,\tau)}^{1} u^-_{xx}\rho d\rho - u^-_x(\rho(x,\tau),x,\tau)\rho(x,\tau)\rho_x(x,\tau)-(\rho(x,\tau)\rho_x(x,\tau))_x\Big];$$

$$v^+_{xx}=2\Big[\int\limits_{0}^{\rho(x,\tau)} u^+_{xx}\rho d\rho + u^+_x(\rho(x,\tau),x,\tau)\rho(x,\tau)\rho_x(x,\tau)+(\rho(x,\tau)\rho_x(x,\tau))_x\Big];$$

$$v^-_\tau=2\Big[\int\limits_{\rho(x,\tau)}^{1} u^-_\tau\rho d\rho - \rho(x,\tau)\rho_\tau(x,\tau)\Big];\qquad /12/$$

$$v^+_\tau=2\Big[\int\limits_{0}^{\rho(x,\tau)} u^+_\tau\rho d\rho + \rho(x,\tau)\rho_\tau(x,\tau)\Big]$$

Умножим теперь /1/ на $2\rho d\rho$ и проинтегрируем по ρ , тогда используя условия /3/,/6/ и равенства /12/, приходим к уравнениям

$$v^-_\tau - b^2 v^-_{xx}=2p^-(x,\tau),\quad 0<x<x_0(\tau),\quad 0<\tau<\tau_1;$$

$$v^+_\tau - b^2 v^+_{xx}=2p^+(x,\tau),\quad x_1(\tau)<x<1,\quad 0<\tau<\tau_1;\qquad /13/$$

$$w_\tau - b^2 w_{xx} - 2\left[(\varkappa-1+\lambda)\rho(x,\tau)\rho_\tau(x,\tau)+\right.$$
$$\left.+b^2(1-\lambda)(\rho(x,\tau)\rho_x(x,\tau))_x\right] = 2p^-(x,\tau), \quad x_0(\tau)<x<x_1(\tau), \; 0<\tau<\tau_1 .$$

С помощью /2/, /4/ и /8/ нетрудно также установить, что функции /8/ должны удовлетворять условиям

$$v^-(x,0)=v_0^-(x), \quad 0\le x\le x_0(0); \quad w(x,0)=w_0(x), \; x_0(0)\le x\le x_1(0);$$
$$v^+(x,0)=v_0^+(x), \quad x_1(0)\le x\le 1;$$
$$v^-(x_0(\tau),\tau)=w(x_0(\tau),\tau), \quad \lambda v^+(x_1(\tau),\tau)=w(x_1(\tau),\tau),$$
$$v_x^-(0,\tau)=\omega_1^-[v^-(0,\tau)-\psi_1(\tau)], \quad v_x^+(1,\tau)=\omega_1^+[\psi_2(\tau)-v^+(1,\tau)], \qquad /14/$$
$$w_x(x_0(\tau),\tau)=v_x^-(x_0(\tau),\tau)+2\lambda\left[\rho(x,\tau)\rho_x(x,\tau)\right]_{x=x_0(\tau)},$$
$$w_x(x_1(\tau),\tau)=\lambda v_x^+(x_1(\tau),\tau)-2\rho_x(x_1(\tau),\tau),$$

где

$$v_0^-(x)=2\int\limits_{\rho(x,0)}^{1} u_0^-(\rho,x)\rho d\rho, \quad v_0^+(x)=2\int\limits_0^{\rho(x,0)} u_0^+(\rho,x)\rho d\rho,$$
$$w_0(x)=\lambda v_0^+(x)+v_0^-(x), \quad \Psi_i(\tau)=2\int\limits_0^1 \varphi_i(\rho,\tau)\rho d\rho, \quad i=1,2.$$

Таким образом, обратная задача Стефана /I/-/6/,/9/-/II/ сведена к одномерной обратной задаче /9/-/II/,/I3/,/I4/, а проблема управления поверхностью раздела фаз - к проблеме управления двумя подвижными границами $x=x_0(\tau)$, $x=x_1(\tau)$, отделяющими с двух сторон зону фронта раздела фаз от зон, заполненных только твердой и только жидкой фазами.

Для решения обратной задачи /9/-/II/,/I3/,/I4/ можно использовать конструктивный метод решения одномерной обратной задачи

Стефана, предложенный в [2] . В данном случае идея применяемого метода заключается в определении усредненных температур /8/, удовлетворяющих условиям /14/ и согласованных с заданными перемещениями границ раздела зон $x_0(\tau)=x_0^*(\tau)$, $x_1(\tau)=x_1^*(\tau)$, с последующей подстановкой их и заданной достаточно гладкой функции /9/ в уравнения /13/ для определения $p^{\pm}(x,\tau)$

Список литературы

1. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи мат. наук. - 1985. - 40, вып.5. - С. 133-185.
2. Вигак В.М., Жерновой Ю.В. О решении одномерной обратной задачи Стефана // Укр.мат.журн. - 1989. - 41, № 2. - С.
3. Данилюк И.И., Олейник М.В. Об управлении неизвестной границей в двухфазной квазистационарной задаче Стефана// Докл. АН УССР. Сер. А. - 1983. - № 4. - С. 8-13.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1986. - 288 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е