

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР  
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А.А.Березовский, В.М.Вигак,  
В.Д.Довбня, Ю.В.Жерновой, Г.И.Калита

ОДНОМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ  
В СПЕЦЭЛЕКТРОМЕТАЛЛУРГИИ

Препринт 87.29

Киев  
Институт математики АН УССР  
1987



УДК 617.946.9

ОДНОМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ  
СПЕЦЭЛЕКТРОМЕТАЛЛУРГИИ / Березовский А.А., Вигах В.М., Довб-  
ня В.Д., Жерновой Ю.В., Калита Г.И. - Киев, 1987. - 34 с. -  
(Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 87.29).

Рассмотрены математические модели расчета тепловых полей при электронно-лучевой гарнисажной плавке, представляющие собой одномерные нестационарные и стационарные задачи Стефана. Вариационным методом, существенно использующим конструкцию точного решения соответствующей стационарной задачи Стефана, описана динамика образования жидкой ванны и рассчитано время достижения стационарного состояния с заданной точностью. Проведено исследование энергоемкости процесса плавления при непрерывных режимах подъема мощности электронного луча и получении заданного объема расплавленного металла.



Институт математики АН УССР, 1987

Рассмотрены математические модели расчета тепловых полей при вакуумной электронно-лучевой гарнисажной плавке. Решение одномерных двухфазных задач вариационным методом, существенно использующим конструкции точных решений соответствующих стационарных задач Стефана, сведено к задачам Коши, численное решение которых реализовано на ЭВМ. Получены простые аналитические решения, определяющие функциональные зависимости основных параметров от входных данных и позволяющие на инженерном уровне решать вопросы расчета, прогноза и оптимизации технологических процессов плавки. Проведено исследование энергоемкости процесса плавления при непрерывных режимах подъема мощности.

Для получения тугоплавких металлов и сплавов применяется вакуумная электронно-лучевая гарнисажная плавка [1,2], позволяющая достичь высокой чистоты расплава и концентрации энергии, недоступной другим источникам. Высокие вакуум и температура перегрева расплава не только значительно усложняют экспериментальное исследование температурного поля автотигла, но для ряда тугоплавких металлов делают его проблематичным. В связи с этим, наряду с экспериментальными, решающее значение здесь приобретают математические методы расчета и прогноза, основанные на исследовании специальных постановок задач теплопроводности при наличии фазовых переходов металл-расплав-газ, известных как задачи Стефана. Определению подлежат как температурное поле, так и его подвижные изотермические поверхности, на которых происходит поглощение теплоты плавления и испарения.

1. Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием. Характерной особенностью процесса плавления является стабилизация во времени температурного поля к предельному стационарному или квазистационарному распределению. Соответствующие задачи Стефана значительно проще и в ряде случаев допускают точные аналитические решения.

Не считая стационарных, самыми простыми являются одномерные задачи Стефана, когда температурное поле зависит от одной коор-

динаты и времени -  $u = u(x, t)$ . После перехода к безразмерным переменным и параметрам

$$x = lx, \quad t = a^{-2} l^2 \tau, \quad u = u_0 + (u^* - u_0) \theta, \quad a^{-2} = c_{ж} \rho_{ж} / \lambda_{ж1}$$

$$\lambda_{\tau} = \lambda_{ж} \gamma, \quad c_{\tau} \rho_{\tau} = c_{ж} \rho_{ж} \kappa, \quad h = \frac{\alpha l}{\lambda_{\tau}}, \quad \rho = \frac{\rho}{c_{ж} \rho_{ж} (u^* - u_0)}$$

$$q_0(\theta) = q_0 - S(\theta)[1 + L(\theta)], \quad q_0 = \frac{l q}{\lambda_{ж} (u^* - u_0)}, \quad S(\theta) = S_k (\mu + \theta)^2,$$

$$S_k = \frac{\varepsilon \sigma l (u^* - u_0)^2}{\lambda_{ж}}, \quad \mu = \frac{u_0}{u^* - u_0}, \quad L(\theta) = \frac{Q_u(u)}{\varepsilon \sigma u^4}$$

такие задачи преобразуются к виду [3-5]

$$\frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^n \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \kappa \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \rho x^{n^*} \dot{x}^* \delta(x - x^*) = 0, \quad x_0 < x < 1, \tau > 0,$$

$$\theta(x, 0) = \varphi(x), \quad x_0 < x < 1, \quad \varphi(x_0) = 1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -q_0(\theta), \quad x = x_0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} + h\theta = 0, \quad x = 1, \tau > 0; \quad \theta = 1, \quad x = x^*(\tau).$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $x, t$  и  $X, \tau$  - размерные и безразмерные координаты и время;  $u = u(x, t)$  и  $\theta = \theta(x, \tau)$  - размерное и безразмерное искомое температурное поле;  $\varphi(x)$  - начальная безразмерная температура;  $u_0$  и  $u^*$  - температуры среды и плавления; индексом "ж" и "т" у коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , теплоемкости  $c$  и плотности  $\rho$  относятся соответственно к жидкой и твердой фазам;  $\gamma(\theta) = \gamma + (1 - \gamma) \int_0^{\theta-1}$ ,  $\kappa(\theta) = \kappa + (1 - \kappa) \int_0^{\theta-1}$ , где  $\int_0^{\theta-1}$  - функция Хевисайда;  $l$  - линейный размер;  $\alpha$  - коэффициент теплообмена;  $\rho = \lambda \rho_{ж}$ ,  $\Lambda$  - скрытая теплота плавления;  $q_0$  - плотность мощности теплового потока электронного луча;  $S_k$  - коэффициент Старка;  $\varepsilon$  и  $\sigma$  - степень черноты и постоянная Стефана-Больцмана;  $Q_u(u)$  - плотность теплового потока испарения металла;  $x = x^*(\tau)$  - подлежащая определению координата изотермы плавления;  $\dot{x}^* = dx^*/d\tau$ ;  $\delta(x - x^*)$  - дельта-функ-

ция Дирака с весом  $x^n$ ;  $n = 0, 1, 2$  - соответственно при плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

Отметим, что начальное распределение  $\varphi(x)$  рассчитывается как эволюция решения обычной задачи теплопроводности (I) с  $P=0$  и  $\vartheta(x, 0)=0$  к тому моменту времени  $\tau_1$ , когда поверхность металла разогревается до температуры плавления -  $\vartheta(x, \tau_1)=1$ . Этот момент времени мы приняли за начало отсчета.

При постоянной или монотонно возрастающей до некоторого технологически возможного предельного значения мощности электронного луча ( $q(t) \rightarrow q = \text{const}$ ) с течением времени устанавливается стационарное температурное состояние ( $\vartheta(x, \tau) \rightarrow \vartheta(x)$ ). Для его определения получаем стационарные задачи Стефана с точными аналитическими решениями

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \vartheta_0 - q_3(\vartheta_0)x, & 0 \leq x \leq x^*, \\ \frac{1+h(1-x)}{1+h(1-x^*)}, & x^* \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$x^* = \frac{\vartheta_0 - 1}{q_3(\vartheta_0)}, \quad q_3(\vartheta_0) = \frac{h(\vartheta_0 + \gamma - 1)}{1+h}, \quad n=0;$$

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \vartheta_0 - q_3(\vartheta_0)x_0 \ln(x/x_0), & x_0 \leq x \leq x^*, \\ \frac{1-h \ln x}{1-h \ln x^*}, & x^* \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$x^* = x_0 \exp\left[\frac{\vartheta_0 - 1}{q_3(\vartheta_0)x_0}\right], \quad q_3(\vartheta_0) = \frac{h(\vartheta_0 + \gamma - 1)}{(1-h \ln x^*)x_0}, \quad n=1;$$

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \vartheta_0 - q_3(\vartheta_0)x_0(1 - x_0/x), & x_0 \leq x \leq x^*, \\ \frac{[h + (1-h)x]x^*}{[h + (1-h)x^*]x}, & x^* \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\alpha^* = \frac{h(\theta_0 + \gamma - 1)\alpha_0}{\gamma h + (h-1)(\theta_0-1)\alpha_0}, \quad q_0(\theta_0) = \frac{h(\theta_0 + \gamma - 1)}{[h + (1-h)\alpha_0^*] \alpha_0}, \quad n = k.$$

Во всех трех случаях  $\theta_0 = \theta(\alpha_0^*)$  определяется как единственный положительный корень одного и того же уравнения

$$q_0 = q_0(\theta_0) + S(\theta_0)[1 + L(\theta_0)], \quad (3)$$

выражающего баланс тепловых потоков с соответствующей зависимостью  $q_0 = q_0(\theta_0)$ .

В качестве примера рассмотрим плавление бесконечной пластины ( $n = 0$ ) из ниобия со следующими геометрическими и теплофизическими характеристиками:  $l = 0,1$  м;  $\lambda_{жк} = \kappa \lambda_{т}$ ,  $\kappa = 1; 5; 10; 50$ ;  $\kappa = \gamma^{-1}$ ;  $\lambda_{т} = 55$  Вт/м $\cdot$ °К;  $c_{ж} \rho_{ж} = 9,89 \cdot 10^3$  Дж/м $^3$ ·К;  $c_{т} \rho_{т} = 2,251 \cdot 10^3$  Дж/м $^3$ ·К;  $\rho = 2,419 \cdot 10^3$  Дж/м $^3$ ;  $u^* = 2750$ °К;  $u_c = 350$ °К;  $\alpha = 3300$  Дж/м $^2$ ·К;  $\delta = 0,4$ ;  $Q_u(u) = \kappa_1 (u/1000)^{\alpha_1}$ ,  $u_{i-1} \leq u \leq u_i$ ,  $l = \bar{l}, \bar{l} \in [1, 17]$ , где значения  $u_i$ ,  $\kappa_1$ ,  $\alpha_1$  приведены в таблице I.

ТАБЛИЦА I

$l$	$u_{i-1}$	$u_i$	$\kappa_1$	$\alpha_1$
1	2750	2850	$7,23876 \cdot 10^{-15}$	33,70773
2	2850	2950	$7,07806 \cdot 10^{-19}$	40,19864
3	2950	3050	$7,58391 \cdot 10^{-10}$	27,48619
4	3050	3150	$5,00105 \cdot 10^{-13}$	34,05409
5	3150	3250	$3,33913 \cdot 10^{-4}$	16,34511
6	3250	3350	$2,39366 \cdot 10^{-11}$	30,30253
7	3350	3450	$2,39340 \cdot 10^{-11}$	30,30262
8	3450	3550	$5,41121 \cdot 10^{-10}$	27,78452
9	3550	3650	$1,37478 \cdot 10^{-4}$	25,23114
10	3650	3750	$1,37477 \cdot 10^{-4}$	25,23115
11	3750	3850	$2,57881 \cdot 10^{-4}$	17,78697
12	3850	3950	$2,57804 \cdot 10^{-4}$	17,78719
13	3950	4050	$4,13191 \cdot 10^{-5}$	19,11993
14	4050	4150	$6,25607 \cdot 10^{-5}$	20,46963
15	4150	4250	$6,25487 \cdot 10^{-5}$	20,46976
16	4250	4350	$6,25608 \cdot 10^{-5}$	20,46963
17	4350	4450	$6,25529 \cdot 10^{-5}$	20,46972

Кусочно параболическая зависимость  $Q_u(u)$  рассчитана по экспериментальным данным (таблица 2).

ТАБЛИЦА 2

$u, ^\circ\text{K}$	$Q_u(u), \text{Вт/см}^2$	$u, ^\circ\text{K}$	$Q_u(u), \text{Вт/см}^2$
2750	$4,662 \cdot 10^2$	3250	$7,770 \cdot 10^2$
2850	$1,554 \cdot 10^3$	3500	$7,340 \cdot 10^2$
2950	$6,216 \cdot 10^3$	3750	$4,185 \cdot 10^2$
3050	$1,554 \cdot 10^4$	4000	$1,319 \cdot 10^2$
3150	$4,662 \cdot 10^4$	4500	$1,470 \cdot 10^2$

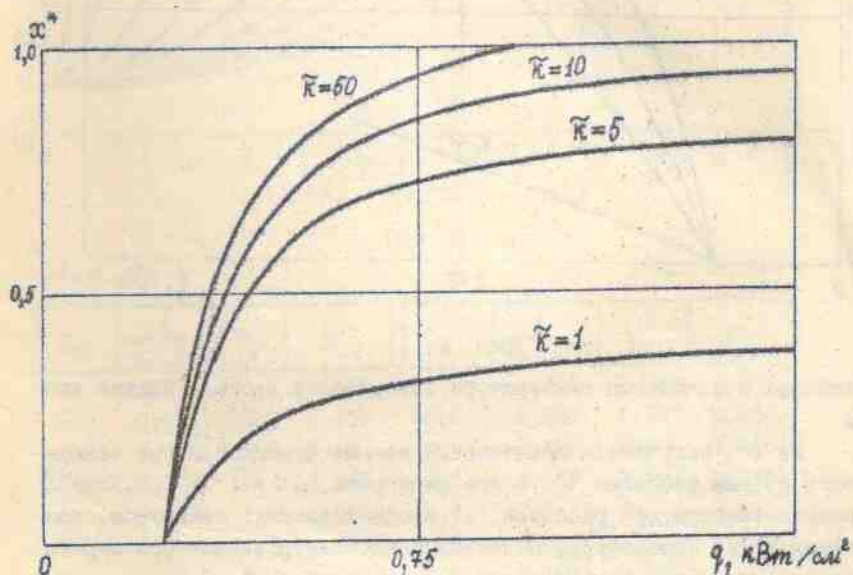


Рис. 1

Для этих данных на рис. 1,2 приведены кривые зависимости безразмерной координаты изотермы плавления  $x^*$  и температуры поверхности зеркала жидкой ванны  $u_0 = u(D)$  от плотности мощности электронного луча  $q$  для различных значений интенсивности электромагнитного перемешивания расплава, моделируемой с помощью эквивалентного коэффициента теплопроводности  $\lambda_{жк} = \tilde{\kappa} \lambda_r$ . Из приведенных расчетов следует, что увеличение интенсивности электромагнитного перемешивания (увеличение  $\tilde{\kappa}$ ) приводит к увеличению объема

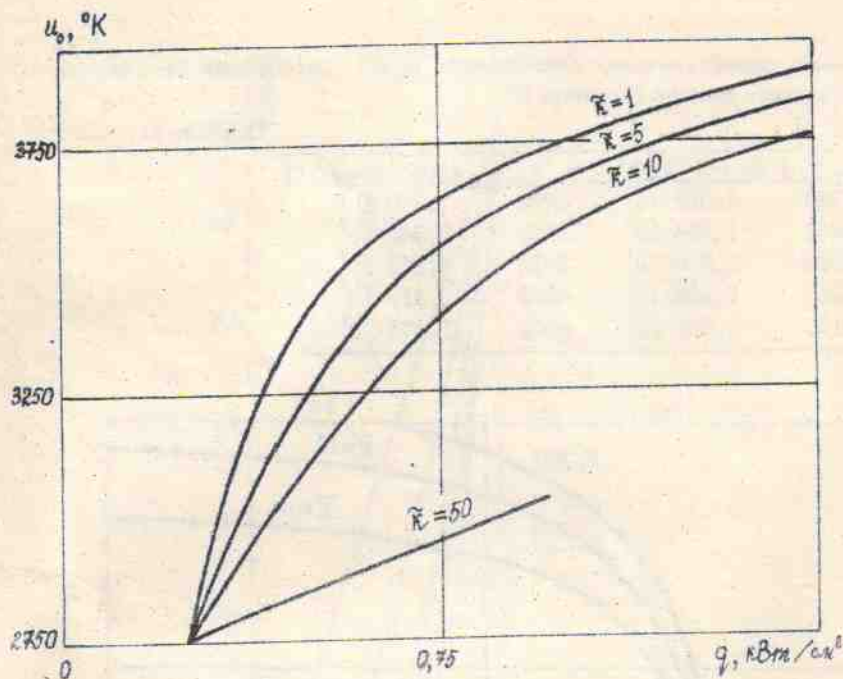


рис. 2

расплава и понижению температуры поверхности зеркала жидкой ванны.

Из (2) получаются практически важные функциональные зависимости объема расплава  $V$  и его перегрева  $\Delta u = \bar{u} - u^*$ , где  $\bar{u}$  — средняя температура расплава, от входных данных: геометрии, теплофизических параметров, интенсивности электромагнитного перемешивания, мощности электронного луча. В случае  $n = 2$

$$V = \frac{2}{3} \pi (x^{*3} - x_0^3) l^3, \quad (4)$$

$$\Delta u = \frac{x_0^2 (x^{*2} + x_0 x^* - 2x_0^2)}{2x^* (x^{*2} + x_0 x^* + x_0^2)} q_0(\theta_0) (u^* - u_0).$$

Простой анализ показывает, что с увеличением интенсивности элек-



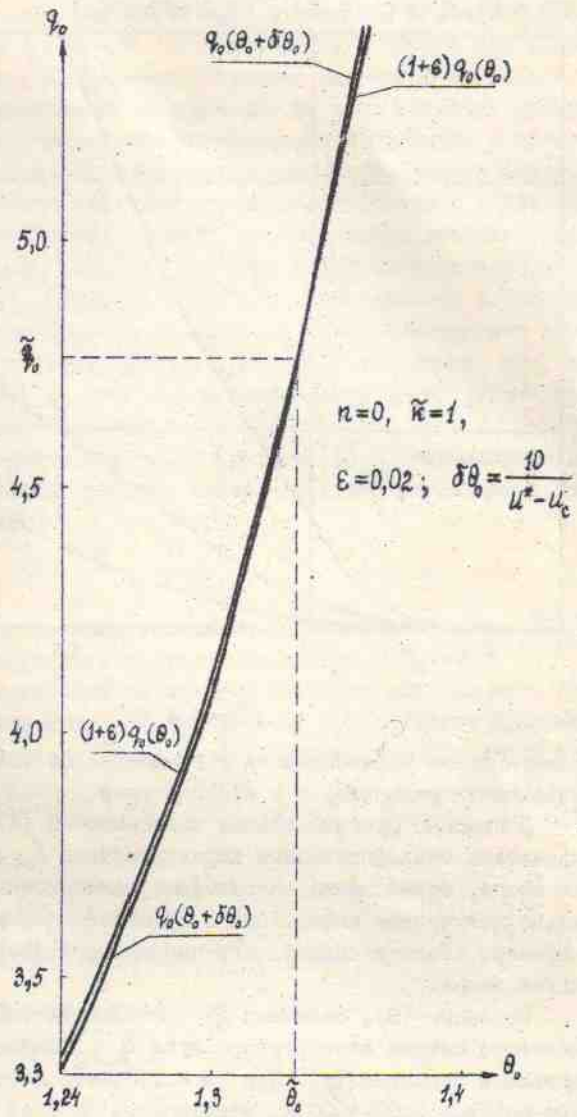


Рис. 3

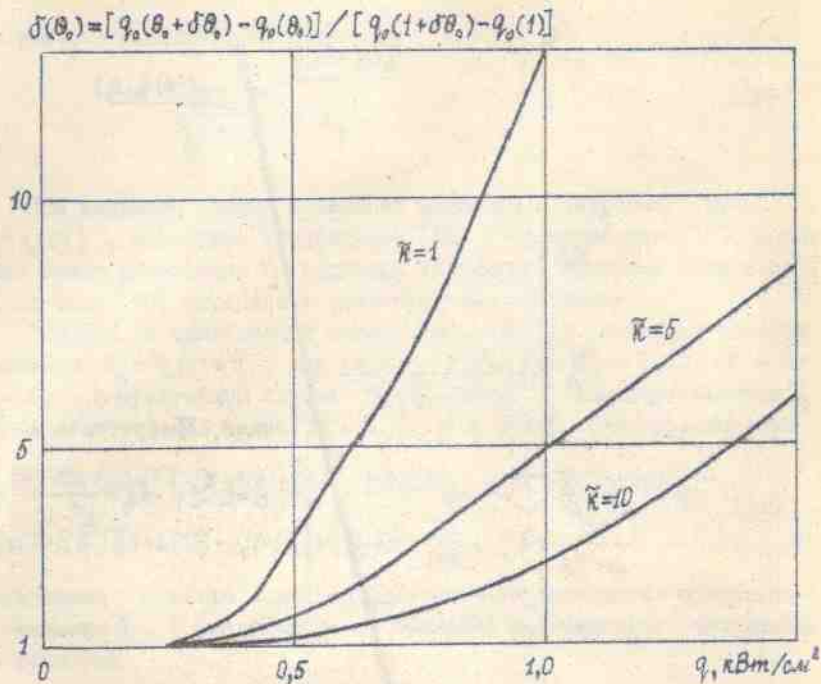


Рис. 4

тромагнитного перемешивания уменьшается не только температура поверхности расплава, а и его перегрев.

С помощью функциональных зависимостей (4) и (3) могут быть рассчитаны теплофизические характеристики  $\lambda_{\text{мс}}$ ,  $\lambda_{\text{т}}$ ,  $\alpha$ ,  $\tilde{\kappa}$ . Для этого, естественно, необходима дополнительная, экспериментально получаемая информация о процессе плавления, такая как, например, объем расплава, его перегрев, температура поверхности жидкой ванны.

Согласно (3), величина  $q_0$ , а следовательно, и плотность теплового потока электронного луча  $q$ , является монотонно возрастающей функцией  $\theta_0$ . При  $\theta_0 \geq 1,3$ , что соответствует температуре порядка 3500-4000°K, зависимость  $q_0$  от  $\theta_0$  резко возрастает за счет увеличения теплопотерь на излучение ( $S(\theta_0)$ ) и осо-

бенно испарение ( $S(\theta_0)L(\theta_0)$ ). Используя график этой зависимости легко определить то значение  $\theta_0 = \tilde{\theta}_0$ , при котором приращение температуры поверхности расплава  $\delta\theta_0$  требует неоправданно большого приращения достигнутой мощности электронного луча  $\varepsilon q_0(\theta_0)$ . Для этого достаточно найти точку пересечения кривых  $(1+\delta)q_0(\theta_0)$  и  $q_0(\theta_0 + \delta\theta_0)$ , рис. 3.

Для установления значения плотности мощности электронного луча  $q_0 = \tilde{q}_0$ , превышение которого нецелесообразно с точки зрения оптимизации энергозатрат, может служить также величина

$$\delta(\theta_0) = \frac{q_0(\theta_0 + \delta\theta_0) - q_0(\theta_0)}{q_0(1 + \delta\theta_0) - q_0(1)}$$

показывающая в сколько раз приращение плотности мощности электронного луча при температуре  $\theta_0$ , необходимое для получения приращения температуры поверхности расплава  $\delta\theta_0$ , больше соответствующего приращения при температуре плавления ( $\theta_0 = 1$ ). На рис. 4 представлена зависимость величины  $\delta\theta_0$  от плотности мощности электронного луча  $q_0$  для различных значений  $\tilde{\kappa}$ . С увеличением интенсивности электромагнитного перемешивания величина  $\tilde{q}$  возрастает. Например, для  $\delta = 3$   $\tilde{q} = 0,49$  кВт/см<sup>2</sup> при  $\tilde{\kappa} = 1$ ,  $\tilde{q} = 0,746$  кВт/см<sup>2</sup> ( $\tilde{\kappa} = 5$ ),  $\tilde{q} = 1,075$  кВт/см<sup>2</sup> ( $\tilde{\kappa} = 10$ ).

Возвращаясь к одномерным нестационарным задачам (I), отметим, что вся эволюция температурного поля  $\theta(x, \tau)$  ограничена известным нам начальным -  $\theta(x, 0) = 0$  и предельным стационарным -  $\theta(x, \infty) = \theta(x)$  распределениями. Кроме распределения температур в любой момент времени  $\tau$ , для инженера-технолога важно знать время практического достижения стационарного состояния  $\tau = \tau_c$ , когда  $\theta(x) - \theta(x, \tau_c) = \varepsilon\theta(x)$ ,  $\varepsilon \ll 1$  - малая величина, определяемая требуемым порядком точности.

Для приближенного построения  $\theta(x, \tau)$  можно применить проекционно-сеточный метод, существенно использующий конструкцию точного решения стационарной задачи Стефана. В простейшем его варианте, известном под названием второго метода Лейбенсона, используются решения (2) с подлежащими определению уже не постоянными  $\theta_0$  и  $x^*$ , а функциями  $\theta_0 = \theta_0(\tau)$ ,  $x^* = x^*(\tau)$ . Ограничимся рассмотрением случая  $n = 0$ , когда

$$\theta(x, \tau) \approx \tilde{\theta}(x, \tau) = \begin{cases} \theta_0(\tau) - q_3[\theta_0(\tau)]x, & 0 \leq x \leq x(\tau), \\ \frac{1+h(1-x)}{1+h[1-x(\tau)]}, & x(\tau) \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (5)$$

$$x(\tau) = x[\theta_0(\tau)] = \frac{\theta_0(\tau) - 1}{q_3[\theta_0(\tau)]}, \quad q_3(\theta) = q_0 - S(\theta)[1+L(\theta)].$$

Решение (5) удовлетворяет крайним условиям задачи (1) при любой функции  $\theta_0(\tau)$ . Требуя, чтобы оно удовлетворяло дифференциальному уравнению в интегральном смысле

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \right) dx - \int_0^1 \kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} dx - P \dot{x}(\tau) = 0,$$

после вычисления производных, интегралов и исключения  $x(\tau)$  приходим к задаче Коши для  $\theta_0 = \theta_0(\tau)$

$$K(\theta_0) \dot{\theta}_0 = g(\theta_0), \quad \tau > 0; \quad \theta_0(0) = 1, \quad (6)$$

где

$$K(\theta_0) = \{ 2P[1+h(1-x(\theta_0))]^2 + \kappa h[1-x(\theta_0)][2+h(1-x(\theta_0))] \} [1-x(\theta_0)q_3'(\theta_0)] + (\theta_0-1)[1+h(1-x(\theta_0))]^2 [2-x(\theta_0)q_3'(\theta_0)] > 0,$$

$$g(\theta_0) = 2(1+h)q_3(\theta_0) \{ 1+h[1-x(\theta_0)] \} \left[ q_3(\theta_0) - \frac{h(\theta_0-1)}{1+h} \right].$$

Ее решение определяется квадратурой, легко реализуемой на ЭЕМ

$$\tau = \int_1^{\theta_0^*} \frac{K(\theta) d\theta}{g(\theta)}, \quad 1 \leq \theta_0 \leq \theta_0^*, \quad (7)$$

где  $\theta_0^* = \theta_0(\infty)$  определяется по заданному тепловому потоку  $q_0$ . Для этого привлекается уравнение (3) с соответствующей линейной зависимостью  $q_3 = q_3(\theta_0^*)$

$$S(\theta_0^*)[1+L(\theta_0^*)] + \frac{h(\theta_0^* + \gamma - 1)}{1+h} = q_0.$$

По заданному  $\theta_0^*$  рассчитывается динамика температуры поверхности жидкой ванны  $1 \leq \theta_0(\tau) < \theta_0^*$  и координаты изотермы плавления  $0 \leq x(\tau) < x^*$  с помощью квадратуры (7) и формулы (5) для  $x(\tau) = x[\theta_0(\tau)]$ .

Для уточнения динамики процесса плавления применим проекционно-сеточный метод, существенно использующий конструкцию точного решения стационарной задачи Стефана на каждом отрезке  $x_i(\tau) \leq x \leq x_{i+1}(\tau)$  произвольного разбиения всего отрезка  $x_0 \leq x \leq 1$  -

$$\bar{\theta}(x, \tau) = \theta_i(\tau) + \Psi_i^*(x) \int_{x_i(\tau)}^x x^{-n} dx, \quad x_i(\tau) \leq x \leq x_{i+1}(\tau), \quad i = \overline{0, N+M-1}, \quad (8)$$

$$x_0(\tau) = x_0, \quad x_N(\tau) = x(\tau), \quad \bar{\theta}(x(\tau), \tau) = \theta_N(\tau) = 1, \quad x_{N+M}(\tau) = 1.$$

Краевые условия, условия изотермичности и непрерывности в точках разбиения  $x = x_i(\tau)$  дают систему алгебраических уравнений относительно вспомогательных функций  $\Psi_i^*(x)$  и координаты изотермы плавления  $x = x(\tau)$ , а условия метода Бубнова-Галеркина - систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым функций  $\theta_i(\tau) = \bar{\theta}(x_i(\tau), \tau)$ . В результате осуществляется редукция нестационарной задачи Стефана (1) к задаче Коши, решение которой легко реализуется на ЭВМ одним из численных методов.

В случае  $n=0$  при равномерном разбиении отрезков  $0 \leq x \leq x(\tau)$ ,  $x(\tau) \leq x \leq 1$  соответственно на  $N$  и  $M$  частей  $x_i(\tau) \leq x \leq x_{i+1}(\tau)$ , где  $x_i(\tau) = i x(\tau) / N$ ,  $i = \overline{0, N}$ ;  $x_i(\tau) = x(\tau) + (i-N) \Delta_2(\tau)$ ,  $i = \overline{N+1, N+M}$ ,  $\Delta_2(\tau) = [1 - x(\tau)] / M$ , вспомогательные функции  $\Psi_i^*(x)$  и координата изотермы плавления  $x(\tau)$  определяются в виде

$$\Psi_0^*(x) = -q_0[\theta_0(\tau)], \quad \Psi_i^*(x) = -\frac{1}{x_i(\tau)}[\theta_1(\tau) - \theta_{i+1}(\tau)], \quad i = \overline{1, N-1};$$

$$\Psi_i^*(x) = -\frac{1}{\Delta_2(\tau)}[\theta_1(\tau) - \theta_{i+1}(\tau)], \quad i = \overline{N, N+M-2}; \quad \theta_N(\tau) = 1;$$

$$\Psi_{N+M-1}(\tau) = -\frac{h\theta_{N+M-1}}{1+h\Delta_2(\tau)}, \quad x(\tau) = \frac{N[\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau)]}{q_2[\theta_2(\tau)]}$$

Записывая условия метода Бубнова-Галеркина

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} \right] dx - P \dot{x}(\tau) = 0,$$

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} \right] \varphi_i(x; x(\tau)) dx = 0, \quad i = \overline{1, N-1; N+1, N+M-1};$$

$$\varphi_i(x; x(\tau)) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}(\tau)}{x_i(\tau)}, & x_{i-1}(\tau) \leq x \leq x_i(\tau), \\ \frac{x_{i+1}(\tau) - x}{x_i(\tau)}, & x_i(\tau) \leq x \leq x_{i+1}(\tau), \quad i = \overline{1, N-1}; \end{cases}$$

$$\varphi_i(x; x(\tau)) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}(\tau)}{\Delta_2(\tau)}, & x_{i-1}(\tau) \leq x \leq x_i(\tau), \\ \frac{x_{i+1}(\tau) - x}{\Delta_2(\tau)}, & x_i(\tau) \leq x \leq x_{i+1}(\tau), \quad i = \overline{N+1, N+M-1}, \end{cases}$$

после вычисления производных, интегралов и исключения  $x(\tau)$  получаем задачу Коши для следующей системы  $(N+M-1)$ -го нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения относительно функций  $\theta_0(\tau), \theta_1(\tau), \dots, \theta_{N-1}(\tau), \theta_{N+1}(\tau), \dots, \theta_{N+M-1}(\tau)$ :

$$A_{00}(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \dot{\theta}_0 + A_{01}(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \dot{\theta}_1 + A_{02}(\theta_0, \theta_1) \dot{\theta}_2 + B_0(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = 0;$$

$$A_{10}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \dot{\theta}_0 + A_{11}(\theta_0, \dots, \theta_3) \dot{\theta}_1 + A_{12}(\theta_0, \theta_1) \dot{\theta}_2 + A_{13}(\theta_0, \theta_1) \dot{\theta}_3 + B_1(\theta_0, \dots, \theta_3) = 0;$$

$$A_{i0}(\theta_0, \theta_1, \theta_i, \theta_{i+1}, \theta_{i+2}) \dot{\theta}_0 + A_{i1}(\theta_0, \theta_1, \theta_i, \theta_{i+1}, \theta_{i+2}) \dot{\theta}_1 + A_{ii}(\theta_0, \theta_1) \dot{\theta}_i +$$

$$+ A_{i(i+1)}(\theta_0, \theta_1) \dot{\theta}_{i+1} + A_{i(i+2)}(\theta_0, \theta_1) \dot{\theta}_{i+2} + B_i(\theta_0, \theta_1, \theta_i, \theta_{i+1}, \theta_{i+2}) = 0, \quad i = \overline{2, N-3; N+1, N+M-3};$$

$$A_{N-2,0}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N-2}, \theta_{N-1})\dot{\theta}_0 + A_{N-2,1}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N-2}, \theta_{N-1})\dot{\theta}_1 + A_{N-2,N-2}(\theta_0, \theta_1)\dot{\theta}_{N-2} +$$

$$+ A_{N-2,N-1}(\theta_0, \theta_1)\dot{\theta}_{N-1} + B_{N-2}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) = 0; \quad (9)$$

$$A_{N-1,0}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \theta_{N+1}, \dots, \theta_{N+N-1})\dot{\theta}_0 + A_{N-1,1}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \theta_{N+1}, \dots, \theta_{N+N-1})\dot{\theta}_1 +$$

$$+ \sum_{j=2}^{N-1} A_{N-1,j}(\theta_0, \theta_1)\dot{\theta}_j + \sum_{j=N+1}^{N+N-1} A_{N-1,j}(\theta_0, \theta_1)\dot{\theta}_j + B_{N-1}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N+N-1}) = 0;$$

$$A_{N,0}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N+1}, \theta_{N+2})\dot{\theta}_0 + A_{N,1}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N+1}, \theta_{N+2})\dot{\theta}_1 + A_{N,N+1}(\theta_0, \theta_1)\dot{\theta}_{N+1} +$$

$$+ A_{N,N+2}(\theta_0, \theta_1)\dot{\theta}_{N+2} + B_N(\theta_0, \theta_1, \theta_{N+1}, \theta_{N+2}) = 0;$$

$$A_{N+N-2,0}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N+N-2}, \theta_{N+N-1})\dot{\theta}_0 + A_{N+N-2,1}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N+N-2}, \theta_{N+N-1})\dot{\theta}_1 +$$

$$+ A_{N+N-2,N+N-2}(\theta_0, \theta_1)\dot{\theta}_{N+N-2} + A_{N+N-2,N+N-1}(\theta_0, \theta_1)\dot{\theta}_{N+N-1} + B_{N+N-2}(\theta_0, \theta_1, \theta_{N+N-2}, \theta_{N+N-1}) = 0;$$

$$\theta_i(0) = 1, \quad i = \overline{0, N-1}; \quad \theta_i(0) = \frac{M + (M+N-i)h}{M(1+h)}, \quad i = \overline{N+1, N+N-1}.$$

Видно

$$A_{00} = x_1 \{ x_1 q_3^2(\theta_0) [3 - 2q_3'(\theta_0)x_1] + 4G(\theta_0, \theta_1)(\theta_1 - \theta_2) \}, \quad G = [1 - q_3'(\theta_0)x_1]q_3(\theta_0),$$

$$A_{01} = 2x_1 q_3(\theta_0) [x_1 q_3(\theta_0) - 2(\theta_1 - \theta_2)], \quad A_{02} = x_1^2 q_3^2(\theta_0), \quad x_1 = x_1(\theta_0, \theta_1),$$

$$B_0 = -6q_3^2(\theta_0) [x_1 q_3(\theta_0) - \theta_1 + \theta_2], \quad A_{11} = x_1 q_3(\theta_0) [x_1 q_3(\theta_0) - 5\theta_1 - 2\theta_2 + 7\theta_3],$$

$$A_{i,0} = x_1 G [(\beta i - 1)\theta_i + 2\theta_{i+1} - (3i+1)\theta_{i+2}], \quad i = \overline{1, N-2};$$

$$A_{i,1} = -x_1 q_3(\theta_0) [(3i-1)\theta_i + 2\theta_{i+1} - (3i+1)\theta_{i+2}], \quad i = \overline{2, N-2};$$

$$A_{i,i} = x_1^2 q_3^2(\theta_0), \quad i = \overline{2, N-2}; \quad A_{i,i+1} = 4x_1^2 q_3^2(\theta_0), \quad i = \overline{1, N-2};$$

$$A_{i,i+2} = x_1^2 q_3^2(\theta_0), \quad i = \overline{1, N-3}; \quad B_i = -6q_3^2(\theta_0) \times (\theta_i - 2\theta_{i+1} + \theta_{i+2}), \quad i = \overline{1, N-2};$$

$$\begin{aligned}
A_{i0} &= \kappa N \Delta_2 G \{ [3(M+N-i)+1] \theta_i - 2\theta_{i+1} - [3(M+N-i)-1] \theta_{i+2} \}, \quad i = \overline{N, N+M-3}; \\
A_{ii} &= -\kappa N \Delta_2 q_{i3}(\theta_0) \{ [3(M+N-i)+1] \theta_i - 2\theta_{i+1} - [3(M+N-i)-1] \theta_{i+2} \}, \quad i = \overline{N, N+M-3}; \\
A_{ii} &= \kappa M \Delta_2^2 q_{i3}^2(\theta_0), \quad i = \overline{N+1, N+M-3}; \quad A_{i+1} = 4\kappa M \Delta_2^2 q_{i3}^2(\theta_0), \quad i = \overline{N, N+M-3}; \\
A_{i+2} &= \kappa M \Delta_2^2 q_{i3}^2(\theta_0), \quad i = \overline{N, N+M-3}; \quad B_i = -6M \gamma q_{i3}^2(\theta_0) (\theta_i - 2\theta_{i+1} + \theta_{i+2}), \quad i = \overline{N, N+M-3}; \\
A_{N+M-2, 0} &= \kappa N \Delta_2 \theta_{N+M-2} [4H^2 \theta_{N+M-2} - (4+5h\Delta_2 + 2h^2\Delta_2^2) \theta_{N+M-1}], \quad H = 1+h\Delta_2; \\
A_{N+M-2, 1} &= -\kappa N \Delta_2 q_{i3}(\theta_0) [4H^2 \theta_{N+M-2} - (4+5h\Delta_2 + 2h^2\Delta_2^2) \theta_{N+M-1}]; \\
A_{N+M-2, N+M-2} &= \kappa M \Delta_2^2 H^2 q_{i3}^2(\theta_0); \quad A_{N+M-2, N+M-1} = \kappa M \Delta_2^2 H q_{i3}^2(\theta_0) (5+4h\Delta_2); \\
B_{N+M-2} &= -6\gamma M H q_{i3}^2(\theta_0) [H \theta_{N+M-2} - (1+2h\Delta_2) \theta_{N+M-1}]; \quad \Delta_2 = \Delta_2(\theta_0, \theta_1); \\
A_{N-1, 0} &= M \alpha_i H^2 q_{i3}^2(\theta_0) [2 - x_i q_{i3}'(\theta_0)] + G [M H^2 (3\theta_1 + 2 \sum_{i=2}^{N-1} \theta_i - 2N+1) + \\
&+ \kappa N H^2 (2M-1 - 2 \sum_{i=N+1}^{N+M-2} \theta_i) - \kappa N (3+4h\Delta_2 + 2h^2\Delta_2^2) \theta_{N+M-1} + 2M N P H^2]; \\
A_{N-1, 1} &= -q_{i3}(\theta_0) [M H^2 (3\theta_1 + 2 \sum_{i=2}^{N-1} \theta_i - 2N+1) + \kappa N H^2 (2M-1 - 2 \sum_{i=N+1}^{N+M-2} \theta_i) - \\
&- \kappa N (3+4h\Delta_2 + 2h^2\Delta_2^2) \theta_{N+M-1} + 2M N P H^2] + M H^2 \alpha_i q_{i3}^2(\theta_0); \\
A_{N-1, j} &= 2M H^2 \alpha_j q_{i3}^2(\theta_0), \quad j = \overline{2, N-1}; \quad A_{N-1, j} = 2\kappa M H^2 \Delta_2 q_{i3}^2(\theta_0), \quad j = \overline{N+1, N+M-2}; \\
A_{N-1, N+M-1} &= \kappa M H \Delta_2 q_{i3}^2(\theta_0) (3+2h\Delta_2), \quad B_{N-1} = 2M H q_{i3}^2(\theta_0) [\gamma h \theta_{N+M-1} - H q_{i3}(\theta_0)].
\end{aligned}$$

Для решения задачи Коши (9) применена неявная разностная схема с частичной линеаризацией системы алгебраических уравнений



на каждом временном слое. Она заключается в замене производных в системе (9) в узлах разбиения  $\tau_n = n\Delta\tau$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  приближенными конечно-разностными значениями

$$\dot{\theta}_i(\tau_n) = \frac{\theta_i(\tau_n) - \theta_i(\tau_{n-1})}{\Delta\tau}, \quad i = \overline{0, N-1; N+1, N+M-1}$$

и аппроксимации нелинейных выражений с помощью формулы  $f(\tau_{n-1} + \Delta\tau) = f(\tau_{n-1}) + f'(\tau_{n-1})\Delta\tau$ , что позволяет свести решение задачи Коши (9) к последовательному вычислению значений функций  $\theta_i$ :

$$\theta_i(\tau_n) = \theta_i(\tau_{n-1}) + \psi_i, \quad n=1, 2, \dots$$

Здесь постоянные  $\psi_i$ ,  $i = \overline{0, N-1; N+1, N+M-1}$  для каждого значения  $\tau = \tau_n$  определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$(\Delta\tau)^{-1} \left[ \sum_{j=0}^2 (A_{0j} + A_{0j0} \psi_0 + A_{0j1} \psi_1) \psi_j + \sum_{j=0}^1 A_{0j2} \psi_j \psi_2 \right] + \sum_{j=0}^1 B_{0j} \psi_j + B_0 = 0,$$

$$(\Delta\tau)^{-1} \left[ \sum_{j=0}^3 (A_{1j} + A_{1j0} \psi_0 + A_{1j1} \psi_1) \psi_j + \sum_{j=2}^3 (A_{10j} \psi_0 + A_{11j} \psi_1) \psi_j \right] + \sum_{j=0}^3 B_{1j} \psi_j + B_1 = 0,$$

$$(\Delta\tau)^{-1} \left[ \sum_{j=0}^1 (A_{ij} + A_{ij0} \psi_0 + A_{ij1} \psi_1 + A_{ij2} \psi_2 + A_{ij3} \psi_3 + A_{ij4} \psi_4 + A_{ij5} \psi_5) \psi_j + \sum_{j=i}^{i+2} (A_{ij} + A_{ij1} \psi_1 + A_{ij2} \psi_2) \psi_j \right] + B_{i0} \psi_0 + \sum_{j=i}^{i+2} B_{ij} \psi_j + B_i = 0, \quad i = \overline{2, N-2; N, N+M-3};$$

$$(\Delta\tau)^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} (A_{N+j} + A_{N+j0} \psi_0 + A_{N+j1} \psi_1) \psi_j + \sum_{j=N+1}^{N+M-1} [A_{N+j} + (A_{N+j0} + A_{N+j1} \psi_1) \psi_0 + (A_{N+j1} + A_{N+j2} \psi_1) \psi_j] \right\} + \sum_{j=2}^{N-1} (A_{N-10j} \psi_0 +$$

$$+ A_{N+1, j} v_j) v_j \} + \sum_{j=0}^1 B_{N+1, j} v_j + B_{N+1, N+M-1} v_{N+M-1} + B_{N+1} = 0,$$

$$(\Delta \tau)^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^1 (A_{N+M+2, j} + A_{N+M+2, j, 0} v_0 + A_{N+M+2, j, 1} v_1) v_j + \right. \\ \left. + \sum_{j=N+M-2}^{N+M-1} [A_{N+M-2, j} + (A_{N+M-2, j, 0} + A_{N+M-2, j, 1} v_0 + (A_{N+M-2, j, 1} + A_{N+M-2, j, 1}) v_1) v_j] + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^1 B_{N+M-2, j} v_j + \sum_{j=N+M-2}^{N+M-1} B_{N+M-2, j} v_j + B_{N+M-2} = 0, \right.$$

где значения коэффициентов и свободных членов вычисляются при  $\tau = \tau_{n-1}$  по формулам:

$$A_{000} = 2 \{ x_1 q_3'(\theta_0) [x_0 q_3(\theta_0) + x_1 q_3'(\theta_0)] [3 - 2x_1 q_3'(\theta_0)] + \\ + 2(x_1 G + x_1 G_0)(\theta_1 - \theta_2) - x_1^2 q_3^2(\theta_0) [x_1 q_3'(\theta_0) + x_0 q_3'(\theta_0)] \},$$

$$A_{001} = 4x_1 G + 2[x_1 x_{11} q_3^2 (3 - 2x_1 q_3') - x_1^2 x_{11} q_3^2 q_3' + \\ + 2(x_{11} G + x_1 G_1)(\theta_1 - \theta_2)], \quad A_{002} = -4x_1 G,$$

$$A_{010} = 4(x_1 q_3' + x_{10} q_3)(x_1 q_3 - \theta_1 + \theta_2), \quad A_{011} = 4q_3 [x_{11}(x_1 q_3 - \theta_1 + \theta_2) - x_1],$$

$$A_{012} = 4x_1 q_3, \quad A_{020} = 2x_1 q_3 (x_1 q_3' + x_{10} q_3), \quad A_{021} = 2x_1 x_{11} q_3^2,$$

$$B_{00} = -6q_3 \{ q_3' [3x_1 q_3 - 2(\theta_1 - \theta_2)] + x_{10} q_3^2 \},$$

$$B_{01} = -6q_3^2 (x_{11} q_3 - 1), \quad B_{02} = -6q_3^2,$$

$$A_{101} = (x_{11} G + x_1 G_1)(5\theta_1 + 2\theta_2 - 7\theta_3) + 5x_1 \theta,$$

$$A_{iio} = (x_1 q'_3 + x_m q_3)(7\theta_3 - 2\theta_2 - 5\theta_1 + 2x_1 q_3),$$

$$A_{iii} = q_3 [x_m (2x_1 q_3 - 5\theta_1 - 2\theta_2 + 7\theta_3) - 5x_1],$$

$$A_{iio} = (x_m G + x_1 G_0) [(3i-1)\theta_i + 2\theta_{i+1} - (3i+1)\theta_{i+2}], \quad i = \overline{1, N-2};$$

$$A_{iio} = (x_m G + x_1 G_1) [(3i-1)\theta_i + 2\theta_{i+1} - (3i+1)\theta_{i+2}], \quad i = \overline{2, N-2};$$

$$A_{iio} = (3i-1)x_1 G, \quad i = \overline{2, N-2};$$

$$A_{ioi} = 2x_1 G, \quad i = \overline{1, N-2}; \quad A_{ioi} = -(3i+1)x_1 G, \quad i = \overline{1, N-3};$$

$$A_{iio} = -(x_1 q'_3 + x_m q_3) [(3i-1)\theta_i + 2\theta_{i+1} - (3i+1)\theta_{i+2}], \quad i = \overline{2, N-2};$$

$$A_{iio} = -x_m q_3 [(3i-1)\theta_i + 2\theta_{i+1} - (3i+1)\theta_{i+2}], \quad A_{iio} = -(3i-1)x_1 q_3, \quad i = \overline{2, N-2};$$

$$A_{iio} = -2x_1 q_3, \quad i = \overline{1, N-2}; \quad A_{iio} = (3i+1)x_1 q_3, \quad i = \overline{1, N-3};$$

$$A_{iio} = 2x_1 q_3 (x_1 q'_3 + x_m q_3), \quad A_{iio} = 2x_1 x_m q_3^2, \quad i = \overline{2, N-2};$$

$$A_{iio} = 8x_1 q_3 (x_1 q'_3 + x_m q_3), \quad A_{iio} = 8x_1 x_m q_3^2, \quad i = \overline{1, N-2};$$

$$A_{iio} = 2x_1 q_3 (x_1 q'_3 + x_m q_3), \quad A_{iio} = 2x_1 x_m q_3^2, \quad i = \overline{1, N-3};$$

$$B_{io} = -2q_3 q'_3 (\theta_i - 2\theta_{i+1} + \theta_{i+2}), \quad B_{io} = -6q_3^2, \quad i = \overline{1, N-2};$$

$$B_{iio} = 12q_3^2, \quad i = \overline{1, N-2}; \quad B_{iio} = -6q_3^2, \quad i = \overline{1, N-3};$$

$$A_{iio} = \kappa N (\Delta_2 G + \Delta_2 G_0) \{ [3(M+N-1)+1]\theta_i - 2\theta_{i+1} - [3(M+N-i)-1]\theta_{i+2} \}, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$A_{iio} = \kappa N (\Delta_2 G + \Delta_2 G_1) \{ [3(M+N-i)+1]\theta_i - 2\theta_{i+1} -$$

$$- [3(M+N-i)-1] \theta_{i+2} \}, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$A_{i0i} = [3(M+N-i)+1] \kappa N \Delta_2 G, \quad i = \overline{N+1, N+M-3};$$

$$A_{i0i+1} = -2\kappa N \Delta_2 G, \quad A_{i0i+2} = -[3(M+N-i)-1] \kappa N \Delta_2 G, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$A_{i10} = -\kappa N (\Delta_{20} q_3 + \Delta_2 q_3') \{ [3(M+N-i)+1] \theta_i - 2\theta_{i+1} - [3(M+N-i)-1] \theta_{i+2} \}, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$A_{i11} = -\kappa N \Delta_{21} q_3 \{ [3(M+N-i)+1] \theta_i - 2\theta_{i+1} - [3(M+N-i)-1] \theta_{i+2} \}, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$A_{i1i} = -[3(M+N-i)+1] \kappa N \Delta_2 q_3, \quad i = \overline{N+1, N+M-3};$$

$$A_{i1i+1} = 2\kappa N \Delta_2 q_3, \quad A_{i1i+2} = [3(M+N-i)-1] \kappa N \Delta_2 q_3, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$A_{i10} = 2\kappa M \Delta_2 q_3 (\Delta_2 q_3' + \Delta_{20} q_3), \quad A_{i11} = 2\kappa M \Delta_2 \Delta_{21} q_3^2, \quad i = \overline{N+1, N+M-3};$$

$$A_{i1i+1} = 8\kappa M \Delta_2 q_3 (\Delta_2 q_3' + \Delta_{20} q_3), \quad A_{i1i+2} = 8\kappa M \Delta_2 \Delta_{21} q_3^2, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$A_{i1i+2} = 2\kappa M \Delta_2 q_3 (\Delta_2 q_3' + \Delta_{20} q_3), \quad A_{i1i+1} = 2\kappa M \Delta_2 \Delta_{21} q_3^2, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$B_{i0} = -12M \gamma q_3 q_3' (\theta_i - 2\theta_{i+1} + \theta_{i+2}), \quad B_{i1} = 12M \gamma q_3^2, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$B_{i1} = -6M \gamma q_3^2, \quad i = \overline{N+1, N+M-3}; \quad B_{i12} = -6M \gamma q_3^2, \quad i = \overline{N, N+M-3};$$

$$A_{N+M-20j} = \kappa N \{ (\Delta_{21} G + \Delta_2 G_j) [4H^2 \theta_{N+M-2} - (4+5h\Delta_2 + 2h^2 \Delta_2^2) \theta_{N+M-1}] + \Delta_2 G [8Hh_1 \theta_{N+M-2} - h(5\Delta_{2j} + 4h\Delta_2 \Delta_{2j}) \theta_{N+M-1}] \}, \quad j = 0, 1;$$

$$A_{N+M-20N+M-2} = 4\kappa N \Delta_2 G H^2, \quad A_{N+M-20N+M-1} = -\kappa N \Delta_2 G (4+5h\Delta_2 + 2h^2 \Delta_2^2),$$

$$A_{N+M-2, 10} = -\kappa N \{ (\Delta_{20} q_3 + \Delta_2 q_3') [4H^2 \theta_{N+M-2} - (4+5h\Delta_2 + 2h^2 \Delta_2^2) \theta_{N+M-1}] + \\ + \Delta_2 q_3 [8HH_0 \theta_{N+M-2} - h(5+4h\Delta_2) \Delta_{20} \theta_{N+M-1}] \},$$

$$A_{N+M-2, 11} = -\kappa N q_3 \{ \Delta_{21} [4H^2 \theta_{N+M-2} - (4+5h\Delta_2 + 2h^2 \Delta_2^2) \theta_{N+M-1}] + \\ + \Delta_2 [8HH_1 \theta_{N+M-2} - h(5+4h\Delta_2) \Delta_{21} \theta_{N+M-1}] \},$$

$$A_{N+M-2, 1 N+M-2} = -4\kappa N \Delta_2 H^2 q_3, \quad A_{N+M-2, 1 N+M-1} = \kappa N \Delta_2 q_3 (4+5h\Delta_2 + 2h^2 \Delta_2^2),$$

$$A_{N+M-2, N+M-2, 0} = 2\kappa M \Delta_2 H q_3 (\Delta_{20} H q_3 + \Delta_2 H q_3' + \Delta_2 H_0 q_3),$$

$$A_{N+M-2, N+M-2, 1} = 2\kappa M \Delta_2 H q_3^2 (\Delta_{21} H + \Delta_2 H_1),$$

$$A_{N+M-2, N+M-1, 0} = \kappa M \Delta_2 q_3 [(2\Delta_{20} H q_3 + 2\Delta_2 H q_3' + \Delta_2 H_0 q_3)(5+4h\Delta_2) + 4h\Delta_2 H \Delta_{20} q_3],$$

$$A_{N+M-2, N+M-1, 1} = \kappa M \Delta_2 q_3^2 [(2\Delta_{21} H + \Delta_2 H_1)(5+4h\Delta_2) + 4h\Delta_2 \Delta_{21} H],$$

$$B_{N+M-2, 0} = -6\gamma M q_3 \{ (H_0 q_3 + 2H q_3') [H \theta_{N+M-2} - (1+2h\Delta_2) \theta_{N+M-1}] + \\ + H q_3 (H_0 \theta_{N+M-2} - 2h\Delta_{20} \theta_{N+M-1}) \},$$

$$B_{N+M-2, 1} = -6\gamma M q_3^2 \{ H_1 [H \theta_{N+M-2} - (1+2h\Delta_2) \theta_{N+M-1}] + H (H_1 \theta_{N+M-2} - 2h\Delta_{21} \theta_{N+M-1}) \},$$

$$B_{N+M-2, N+M-2} = -6\gamma M H^2 q_3^2, \quad B_{N+M-2, N+M-1} = 6\gamma M H q_3^2 (1+2h\Delta_2);$$

$$A_{N-1, 00} = M H q_3 [(x_{10} H q_3 + 2x_1 H q_3' + 2x_1 H_0 q_3)(2-x_1 q_3') -$$

$$-x_1 H q_3 (x_1 q_3'' + x_{10} q_3')] + M H (G_0 H + 2G H_0) (3\theta_1 + 2 \sum_{i=2}^{N-1} \theta_i -$$

$$-2N+1) + \kappa N H (G_2 H + 2G H_1) (2M-1 - 2 \sum_{i=N+1}^{N+M-2} \theta_i - 3\theta_{N+M-1}) +$$

$$+ \kappa N h [\Delta_2 G_2 (2+h\Delta_2) + 2\Delta_2 G H] \theta_{N+M-1} + 2MNP H (G_2 H + 2G H_1),$$

$$A_{N+1,0,1} = M H q_3^2 [(x_1 H + 2x_1 H_1) (2 - x_1 q_3') - x_1 x_{11} H q_3'] +$$

$$+ M H (G_2 H + 2G H_1) (3\theta_1 + 2 \sum_{i=2}^{N-1} \theta_i - 2N+1) + 3M G H^2 +$$

$$+ \kappa N H (G_2 H + 2G H_1) (2M-1 - 2 \sum_{i=N+1}^{N+M-2} \theta_i - 3\theta_{N+M-1}) +$$

$$+ \kappa N h [\Delta_2 G_2 (2+h\Delta_2) + 2\Delta_2 G H] \theta_{N+M-1} + 2MNP H (G_2 H + 2G H_1),$$

$$A_{N+1,0,1} = 2M G H^2, \quad i = \overline{2, N-1}; \quad A_{N+1,0,1} = -2\kappa N G H^2, \quad i = \overline{N+1, N+M-2};$$

$$A_{N+1,0,N+M-1} = \kappa N G [h\Delta_2 (2+h\Delta_2) - 3H^2],$$

$$A_{N+1,1,0} = -M H (H q_3' + 2H_0 q_3) (3\theta_1 + 2 \sum_{i=2}^{N-1} \theta_i - 2N+1) - \kappa N H (H q_3' +$$

$$+ 2H_0 q_3) (2M-1 - 2 \sum_{i=N+1}^{N+M-2} \theta_i - 3\theta_{N+M-1}) - \kappa N h [\Delta_2 q_3' (2+h\Delta_2) + 2\Delta_2 H q_3] \theta_{N+M-1}$$

$$- 2MNP H (H q_3' + 2H_0 q_3) + M H q_3 (2x_1 H q_3' + 2x_1 H_0 q_3 + x_{10} H q_3),$$

$$A_{N+1,1,1} = -q_3 [2M H H_1 (3\theta_1 + 2 \sum_{i=2}^{N-1} \theta_i - 2N+1) + 3M H^2 +$$

$$+ 2\kappa N H H_1 (2M-1 - 2 \sum_{i=N+1}^{N+M-2} \theta_i - 3\theta_{N+M-1}) + 2\kappa N h \Delta_2 H \theta_{N+M-1} +$$

$$+ 4MNP H H_1] + M H q_3^2 (2x_1 H_1 + H x_{11}),$$

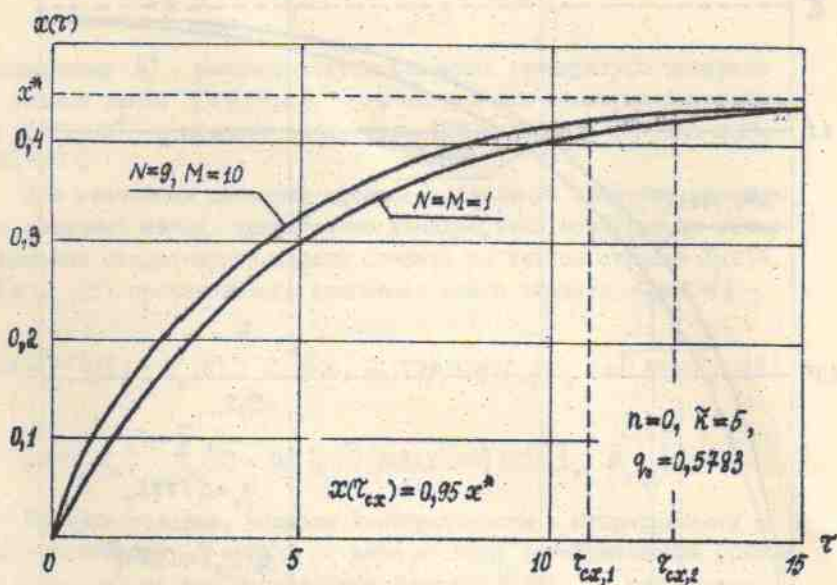


Рис. 5

$$A_{N-1,1} = -2MH^2q_0, \quad i = \overline{2, N-1}; \quad A_{N-1,1} = 2\kappa NH^2q_0, \quad i = \overline{N+1, N+M-2};$$

$$A_{N-1, N+M-1} = -\kappa Nq_0 [h\Delta_2(2+h\Delta_2) - 3H^2],$$

$$A_{N-1, j, 0} = 2MHq_0(2x_j Hq_0' + 2x_j H_0 q_0 + x_{j+1} Hq_0), \quad j = \overline{2, N-1};$$

$$A_{N-1, j, 1} = 2MHq_0^2(2x_j H_1 + x_{j+1} H), \quad j = \overline{2, N-1};$$

$$A_{N-1, j, 0} = 2\kappa MHq_0(2\Delta_2 Hq_0' + 2\Delta_2 H_0 q_0 + \Delta_{20} Hq_0), \quad j = \overline{N+1, N+M-2};$$

$$A_{N-1, j, 1} = 2\kappa MHq_0^2(2\Delta_2 H_1 + \Delta_{21} H), \quad j = \overline{N+1, N+M-2};$$

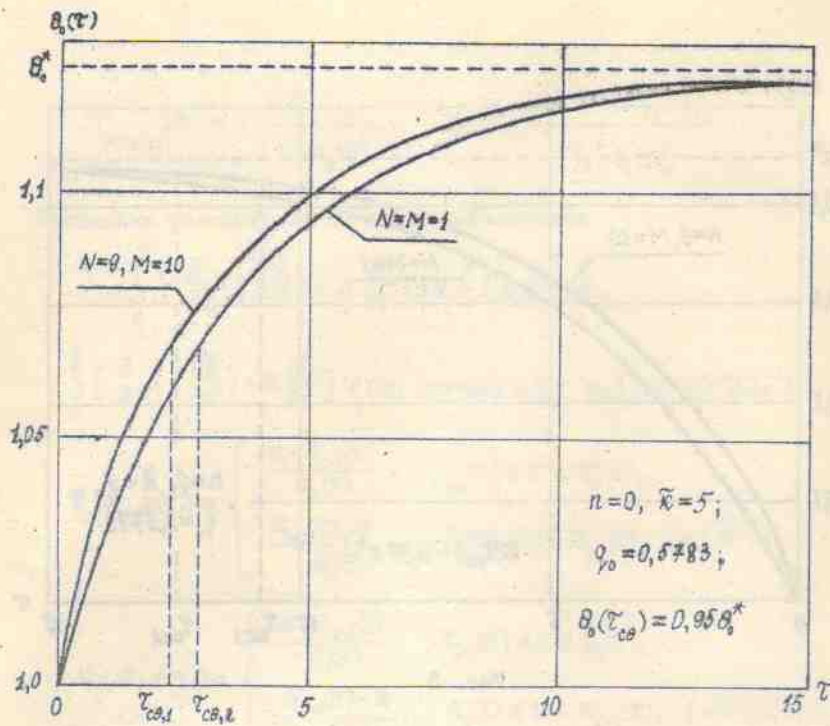


Рис. 6

$$A_{N+1, N+M-1} = \kappa M q_0 [(3 + 2h\Delta_2)(2\Delta_2 H q_0' + \Delta_2 H_0 q_0 + \Delta_{20} H q_0) + 2hH\Delta_2 \Delta_{c0} q_0],$$

$$A_{N+1, N+M-1} = \kappa M q_0^2 [(3 + 2h\Delta_2)(\Delta_2 H_1 + \Delta_{21} H) + 2h\Delta_2 \Delta_{21} H],$$

$$B_{N+1, 0} = 2M q_0 [h(2H q_0' + H_0 q_0) \theta_{N+M-1} - H q_0 (3H q_0' + 2H_0 q_0)],$$

$$B_{N+1, 1} = 2M H_1 q_0^2 (\Gamma h \theta_{N+M-1} - 2H q_0), \quad B_{N+1, N+M-1} = 2M \Gamma h H q_0^2;$$

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial \theta_j}, \quad B_{i,j} = \frac{\partial B_i}{\partial \theta_j}, \quad x_{20} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} = \frac{G}{q_0^2(\theta_0)}$$



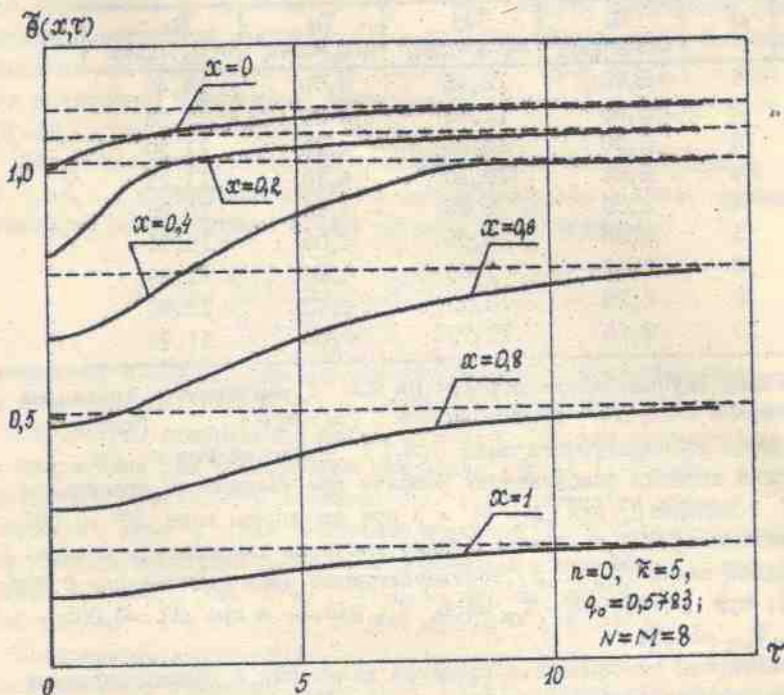


Рис. 7

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{q_1(\theta_1)}, & \Delta_{20} &= \frac{\partial \Delta_2}{\partial \theta_0} = -\frac{NG}{M q_2'(\theta_0)}, \\
 \Delta_{21} &= \frac{\partial \Delta_2}{\partial \theta_1} = -\frac{N}{M q_2(\theta_0)}, & G_0 &= \frac{\partial G}{\partial \theta_0} = -(\theta_0 - \theta_1) q_2''(\theta_0), \\
 G_1 &= \frac{\partial G}{\partial \theta_1} = q_2'(\theta_0), & H_0 &= \frac{\partial H}{\partial \theta_0} = h \Delta_{20}, & H_1 &= \frac{\partial H}{\partial \theta_1} = h \Delta_{21}.
 \end{aligned}$$

Полученная система алгебраических уравнений легко решается методом Ньютона. Численные расчеты, выполненные на ЭВМ ЕС-1060 для данных ниобия, показали, что динамика координаты изотермы плавления (рис. 5) и динамика температуры поверхности расплава (рис. 6) хорошо согласуются с динамикой, полученной на основе решения задачи Коши (6), определяемого квадратурой (7), то есть

ТАБЛИЦА 3

N	M	$\tau_{св}$	$\tau_{сх}$	$\tau_{св}$	$\tau_{сх}$
		$\theta_s(\tau_{св})=0,95\theta^*$	$\chi(\tau_{сх})=0,95\chi^*$	$\theta_s(\tau_{св})=0,99\theta^*$	$\chi(\tau_{сх})=0,99\chi^*$
1	1	2,80	12,45	4,70	14,45
1	2	2,35	11,70	4,30	13,65
3	3	2,30	10,20	4,10	11,30
3	4	2,30	10,10	4,10	11,25
4	4	2,30	9,95	4,10	10,95
4	5	2,25	9,95	4,05	10,90
5	6	2,25	9,80	4,10	11,20
8	8	2,25	10,70	4,00	11,90
9	10	2,25	10,75	4,00	11,95

в простейшем случае, когда отрезок  $0 \leq x \leq 1$  разбивается только на две части:  $0 \leq x \leq x(\tau)$  и  $x(\tau) \leq x \leq 1$  ( $N=M=1$ ). Рассчитанная динамика температурного поля  $\theta(x, \tau)$  представлена на рис. 7. Установлена хорошая стабилизация решения при увеличении временного шага  $\Delta \tau$ . Например, для  $N=M=3$  при временном шаге  $\Delta \tau = 0,001$  время достижения 98%-го стационарного значения температуры поверхности ванны  $\tau_{св} = 5,5$ , соответствующее время достижения  $0,98\chi$   $\tau_{сх} = 12,2$ ; при  $\Delta \tau = 0,002$  -  $\tau_{св} = 5,6$ ,  $\tau_{сх} = 13,2$ , а при  $\Delta \tau = 0,005$  -  $\tau_{св} = 5,6$ ,  $\tau_{сх} = 14,3$ .

Характерной особенностью процесса плавления в рассматриваемых модельных задачах является близкая к логарифмической асимптотика решения при больших значениях безразмерного времени  $\tau$ . При этом  $\tau_{св} < \tau_{сх}$ , что согласуется с теплофизическим смыслом - процесс плавления продолжается и после того, как температура  $\theta_s(\tau)$  почти достигнет предельного максимального значения  $\theta_s^*$ . Сравнение значений  $\tau_{св}$  и  $\tau_{сх}$  для расчетов, проведенных при различных значениях  $N$  и  $M$ , приведено в таблице 3. Результаты расчетов, полученные при  $N=M=3$ , с дальнейшим увеличением значений  $N, M$  практически не изменяются. В то же время использование простейших вариантов проекционно-сеточного метода ( $1 \leq N, M < 3$ ) приводит к незначительному занижению температуры и, следовательно, к завышению значений  $\tau_{св}$  и  $\tau_{сх}$ . Такое замедление динамики процесса плавления объясняется завышением количества тепла, поглощаемого за счет теплоемкости из-за принятой конструкции решения стационарной задачи.

2. Исследование энергоемкости процесса плавления при непрерывном режиме подъема мощности электронного луча. Как правило, процесс плавления металла в автоглие является дискретным во времени, то есть мощность электронного луча представляется кусочно-постоянной функцией и изменяется до некоторого технологически возможного максимального значения или значения, превышение которого нецелесообразно с точки зрения оптимизации энергозатрат. Однако, использование дискретно-временного режима подъема мощности приводит к непроизводительным потерям энергии [6, 7]. Поэтому возникает необходимость перехода к такому непрерывному режиму подъема мощности электронного луча, который привел бы к оптимизации энергозатрат за плавку, что, в свою очередь, открывает возможность автоматизации всего режима подъема мощности в процессе плавления.

Исходя из одномерных задач Стефана (I) в безразмерной постановке, энергоемкость процесса плавления будем оценивать с помощью безразмерной величины

$$E = \int_0^{\tau_g} q_0(\tau) d\tau, \quad (10)$$

где  $\tau_g$  - время достижения заданного объема жидкой ванны  $V(\tau_g) = V_g$  (или заданной координаты изотермы плавления  $x(\tau_g) = x_g$ ).

В случае переменной во времени мощности электронного луча ( $q_0 = q_0(\tau)$ ) задача Коши (6), полученная в результате применения к (I) при  $n = 0$  второго метода Лейбнсона, преобразуется к виду

$$K(\theta_0) \dot{\theta}_0 = g(\theta_0) + g_\tau(\theta_0), \quad 0 < \tau < \tau_g; \quad \theta_0(0) = 1, \quad (11)$$

где

$$g_\tau(\theta_0) = \left\{ 2P[1+h(1-x(\theta_0))]^2 + kh[1-x(\theta_0)][2+h(1-x(\theta_0))] + (\theta_0-1)[1+h(1-x(\theta_0))]^2 \right\} x(\theta_0) \dot{q}_0(\tau).$$

Ее решение определяется квадратурой

$$\tau = \int_1^{\theta_0} \frac{K(\theta) d\theta}{g(\theta) + g_\tau(\theta)}, \quad 1 \leq \theta_0 \leq \theta_0(\tau_g), \quad (12)$$

где  $\tau = \tau_g$  находится из уравнения

$$\frac{\theta_0(\tau) - 1}{q_0[\theta_0(\tau)]} = \alpha_3 \quad (13)$$

При заданном законе изменения мощности электронного луча ( $q_0 = q_0(\tau)$ ), пользуясь квадратурой (12) и соотношением (13), можно найти время достижения  $\tau_g$  заданной координаты изотермы плавления и с помощью (10) определить энергозатраты за плавку.

Расчеты по приведенной схеме выполнены для различных законов изменения  $q_0 = q_0(\tau) < \tilde{q}_0$  для данных нисобия при  $\tilde{q}_0 = 1, 13$ ;  $\tilde{K} = 5$ ;  $\alpha_3 = 0,7$ . В простейшем случае  $q_0 = \tilde{q}_0 = \text{const}$  значения величины  $\tau_g$  и  $E$  соответственно равны:  $\tau_g = 3,4$ ;  $E = 3,842$ . Для зависимостей

$$q_0(\tau) = q_0(0) + [\tilde{q}_0 - q_0(0)] \left(\frac{\tau}{\tau_{np}}\right)^2, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{np}; \quad q_0(\tau) = \tilde{q}_0, \quad \tau_{np} \leq \tau \leq \tau_g; \quad (14)$$

$$q_0(0) = 2S(1)[1+L(1)] - S(1-\delta)[1+L(1-\delta)] + \frac{\gamma h}{1+h}, \quad \delta = \frac{100}{u^* - u_c}$$

рассмотрены различные значения  $\tau_{np}$  - времени достижения предельного значения  $\tilde{q}_0$ . В зависимости от значений  $\tau_{np}$  изменяется безразмерная величина

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{\tau_{np}} \int_0^{\tau_{np}} \dot{q}_0(\tau) d\tau = \frac{\tilde{q}_0 - q_0(0)}{\tau_{np}},$$

характеризующая среднеинтегральный темп подъема мощности электронного луча на временном интервале  $0 < \tau \leq \tau_{np}$ . Для нескольких значений  $\tau_{np}$  зависимости (14) проиллюстрированы на рис. 8, где нумерация кривых соответствует определенным значениям  $\tau_{np}$ : кривая 0,5 -  $\tau_{np} = 0,5$ ; кривая I -  $\tau_{np} = 1$  и т.д. Соответствующие значения величин  $\bar{q}_0 / [\tilde{q}_0 - q_0(0)] = 1 / \tau_{np}$ ,  $\tau_g$  и  $E$  приведены в таблице 4. Из расчетов следует, что уменьшение времени  $\tau_{np}$  (повышение среднеинтегрального темпа подъема плотности мощности) ведет к уменьшению времени  $\tau_g$  и снижению энергоемкости процесса  $E$ .

Для случая  $\tau_{np} = 1$  рассмотрены степенные законы изменения  $q_0(\tau)$ :

$$q_0(\tau) = q_{0n}(\tau) = q_0(0) + [\tilde{q}_0 - q_0(0)] \tau^n, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad n = 1,5; \quad (15)$$

$$q_0(\tau) = \tilde{q}_0, \quad 1 \leq \tau \leq \tau_g; \quad q_0(0) = S(1)[1+L(1)] + \gamma h / (1+h).$$

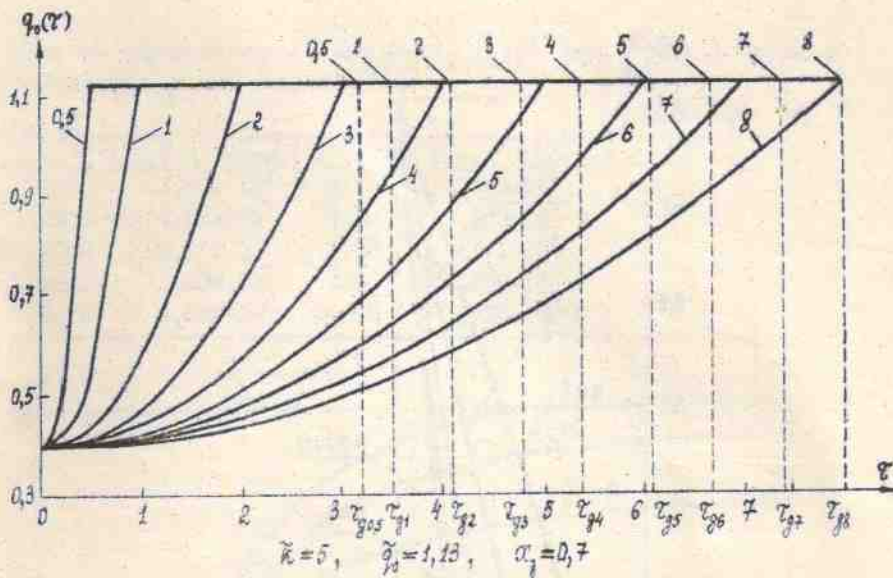


Рис. 6

ТАБЛИЦА 4

$\tau_{np}$	$\frac{q_0}{q_0 - q_0(0)}$	$\tau_0$	E	$\tau_{np}$	$\frac{q_1}{q_1 - q_1(0)}$	$\tau_0$	E
10	0,1	9,3	5,645	0,9	1,111	3,425	3,429
9	0,111	8,7	5,429	0,8	1,250	3,375	3,422
8	0,125	8,0	5,121	0,7	1,429	3,300	3,386
7	0,143	7,4	4,933	0,6	1,667	3,250	3,379
6	0,167	6,7	4,632	0,5	2,0	3,175	3,343
5	0,2	6,1	4,443	0,4	2,5	3,125	3,335
4	0,25	5,4	4,142	0,3	3,333	3,050	3,299
3	0,333	4,8	3,954	0,2	5,0	3,000	3,292
2	0,5	4,1	3,653	0,1	10,0	2,925	3,256
1	1,0	3,5	3,465	0,05	20,0	2,900	3,252

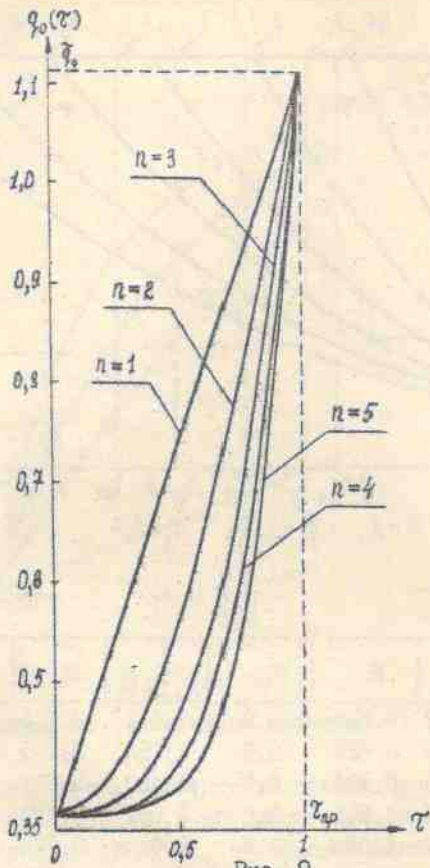


Рис. 9

ТАБЛИЦА 5

$\tau = \tau_{np} = 1$					
$n$	$\alpha(\tau)$	$\theta_0(\tau)$	$\dot{q}_0(\tau)$	$q_{np}(\theta_0)$	$E$
1	0,300	1,217	0,762	0,723	0,749
2	0,260	1,195	1,524	0,751	0,622
3	0,239	1,183	2,286	0,766	0,559
4	0,226	1,175	3,048	0,775	0,520
5	0,217	1,170	3,810	0,781	0,495

$n = 5; \quad \tilde{q}_0 = 1,13; \quad q_0(\tau) = q_0(0) + [\tilde{q}_0 - q_0(\tau)]\tau^n$

ТАБЛИЦА 6

$\alpha_j$	$\tau_g$					E				
	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
0,30	1,00	1,16	1,25	1,29	1,33	0,749	0,803	0,841	0,848	0,868
0,35	1,22	1,39	1,47	1,52	1,55	0,998	1,063	1,090	1,108	1,117
0,40	1,46	1,62	1,71	1,76	1,79	1,269	1,323	1,361	1,379	1,389
0,45	1,71	1,88	1,96	2,01	2,05	1,551	1,616	1,643	1,662	1,681
0,50	1,99	2,16	2,24	2,29	2,32	1,868	1,933	1,960	1,978	1,997
0,55	2,29	2,45	2,54	2,59	2,62	2,207	2,260	2,299	2,317	2,326
0,60	2,61	2,77	2,86	2,90	2,94	2,568	2,622	2,660	2,667	2,687
0,65	2,95	3,12	3,20	3,25	3,28	2,952	3,017	3,044	3,063	3,071
0,70	3,33	3,50	3,58	3,63	3,67	3,382	3,447	3,474	3,492	3,512

Соответствующие кривые  $q_0 = q_0(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  представлены на рис. 9. Увеличение показателя  $n$  степенной зависимости (15) равнозначно снижению темпа подъема мощности электронного луча ( $\dot{q}_0(\tau)$ ) на начальной стадии процесса ( $\dot{q}_{\text{min}}(\tau) < \dot{q}_{0,n+1}(\tau)$  при  $0 < \tau < n/(n+1)$ ), а затем резкому его повышению при  $\tau \rightarrow 1$ . В результате величина  $\bar{q}_0 = \bar{q}_0 - q_0(0)$ ,  $0 < \tau \leq 1$ , то есть не зависит от  $n$ . В таблице 6 для  $n = 1,5$  приведены расчетные значения величин  $\alpha(\tau)$ ,  $\delta(\tau)$ ,  $\dot{q}_0(\tau)$ ,  $q_{\text{эф}}(\theta_0)$  и E при  $\tau = \tau_{\text{np}} = 1$ , анализ которых показывает, что в момент времени когда  $q_0(\tau)$  достигает своего предельного максимального значения  $\bar{q}_0$ , с увеличением  $n$  достигаются более низкие значения безразмерной координаты изотермы плавления  $\alpha(\tau)$ , температуры  $\theta_0(\tau)$  и энергоемкости E при более высоких значениях  $\dot{q}_0(\tau)$  и  $q_{\text{эф}}(\theta_0)$ . Из зависимостей  $\tau_g$  и E от  $\alpha_j$  при  $n = 1,5$  (таблица 6) вытекает, что при одном и том же среднеинтегральном темпе подъема мощности при  $0 < \tau \leq \tau_{\text{np}}$  с точки зрения оптимизации энергозатрат предпочтение следует отдать постоянному темпу подъема мощности ( $n = 1$ ) или более высокому на начальной стадии процесса.

Влияние выбора начального значения  $q_0(\tau)$  на продолжительность и энергоемкость плавки исследовано с помощью зависимости

$$q_0(\tau) = q_0(0) + [\bar{q}_0 - q_0(0)]\tau^2, \quad 0 \leq \tau \leq 1; \quad q_0(\tau) = \bar{q}_0, \quad 1 \leq \tau \leq \tau_g;$$

$$q_0(0) = S(1+\delta_j)[1+L(1+\delta_j)] + \frac{h(\gamma+\delta_j)}{1+h}, \quad \delta_j = \frac{100i}{u^* - u_c}$$

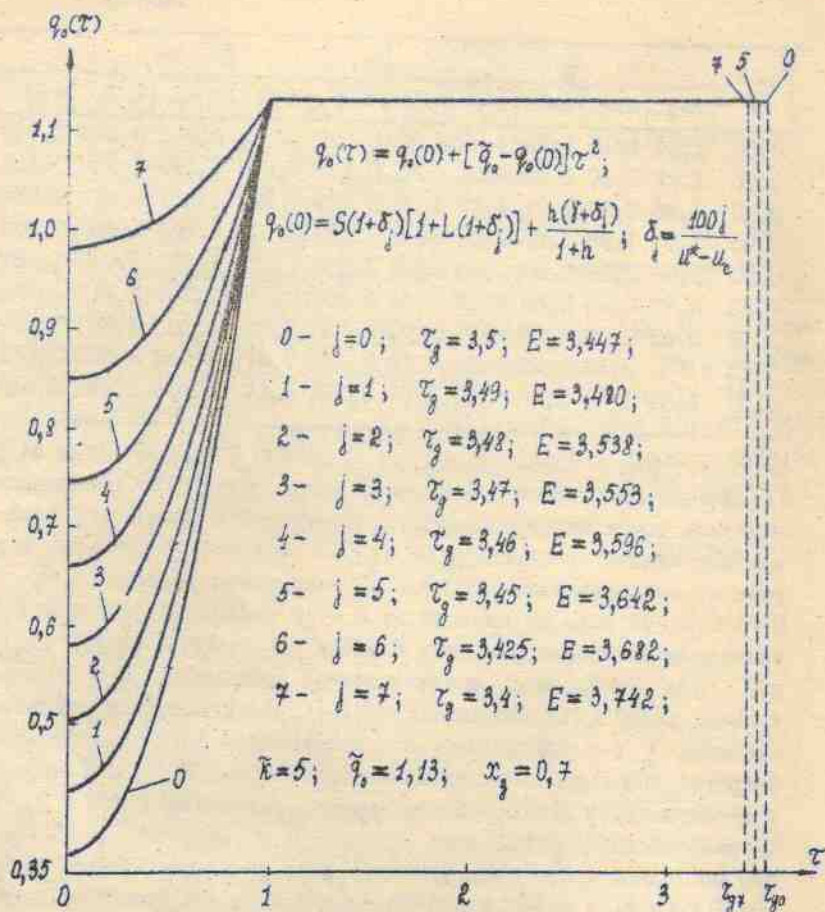


Рис. 10

Результаты расчетов для  $j = 0, 1, 2, \dots, 7$ , приведенные на рис. 10, показывают, что увеличение начального значения мощности электронного луча в данном случае приводит к незначительному уменьшению времени  $\tau_j$  и в то же время к незначительному повышению энергоемкости процесса  $E$ .



#### Список литературы

1. Довбня В.Д. Исследование электронно-лучевой гарнисажной плавки ниобия и молибдена // Литье тугоплавких металлов. - Киев: Ин-т проблем литья АН УССР, 1970. - С. 40-56.
2. Березовский А.А., Довбня В.Д. Математические модели тепловых процессов в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Нелинейные краевые задачи. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. - С. 41-57.
3. Андреева Т.А., Березовский А.А., Довбня В.Д. Математические модели динамики образования жидкой ванны в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Задачи Стефана в спецэлектротехнологии и физике моря. - Киев, 1986. - С. 3-21 (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.19).
4. Митропольский Ю.А., Березовский А.А. Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием в спецэлектротехнологии // Воздействие концентрированных потоков энергии на материалы. - М.: Наука, 1987. - С. 8-20.
5. Митропольский Ю.А., Березовский А.А. Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием в спецэлектротехнологии, криогенной и физике моря // П Всесоюзная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", Киев, 12-15 сен. 1985 г.: Тез. докл. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 164.
6. Андреева Т.А., Белаш В.И., Довбня В.Д. Математическая модель нестационарного температурного поля в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Задачи нестационарной теплопроводности. - Киев, 1983. - С. 3-5 (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.29).
7. Березовский А.А., Вигак В.М., Жерновой Ю.В. Оптимальное управление нестационарным температурным полем пластины при электронно-лучевой гарнисажной плавке. - Киев, 1984. - 28 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.68).

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием .....	3
2. Исследование энергоемкости процесса плавления при непрерывном режиме подъема мощности электронного луча .....	27
Список литературы .....	33