АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А.А.Березовский, В.М.Вигак, Ю.В.Жерновой

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ГАРНИСАЖНОЙ ПЛАВКЕ

Препринт 84.68

Киев - 1984

УДК 536.12:539.377

Оптимальное управление нестационарным температурным полем пластины при электронно-лучевой гарнисажной плавке:Препринт 84.68/ /Березовский А.А., Вигак В.М., Жерновой Ю.В.- К.: Ин-т математики АН УССР, 1984.- 29 с.

Исследована задача оптимального управления нестационарным температурным полем пластины в процессе плавления. Построено двухступенчатое управление, обеспечивающее заданный тепловой поток на граничной поверхности пластины. Решение задачи управления сводится к решению нестационарной задачи Стефана с нелинейными граничными условиями. Для ее решения использованы как приближенные аналитические методы, так и упрощенные математические модели, дающие возможность свести задачу к решению задачи Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение задачи Коши получено с помощью ЭВМ. Приведены графики численных расчетов.

Исследование стационарного температурного поля автотигля при электронно-лучевой гарнисажной плавке показало [I, 2], что необоснованный подъем мощности электронного луча приводит к непроизводительным потерям энергии излучением и испарением. Снижение энергозатрат за плавку требует знания оптимального режима подъема мощности в процессе плавки. В настоящей работе построено оптимальное управление температурным режимом для упрощенной одномерной модельной задачи.

I. Постановка задачи.

Определение температурного поля пластины в процессе плавления сводится к решению задачи Стефана [I] :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)-c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-Q\frac{dx_0}{dt}\delta(x-x_0(t)),\quad 0<x<\ell,\ t>0, \tag{I}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_0(\ell)=u_n,\quad 0\leqslant x\leqslant \ell, \tag{2}$$

$$\lambda_2\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\varepsilon\sigma u^4(0,t),\quad t\geqslant 0, \tag{3}$$

$$\lambda_1\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}=q(t)-\varepsilon\sigma u^4(\ell,t)-\mu Q_{исп}(u(\ell,t)),\quad t\geqslant 0, \tag{4}$$

$$u(x_0(t),t)=u_n=const,\qquad x_0(0)=\ell; \tag{5}$$

$$\lambda(x),\ c(x),\ \rho(x)=\begin{cases}\lambda_1,\ c_1,\ \rho_1, & x>x_0(t),\\ \lambda_2,\ c_2,\ \rho_2, & x<x_0(t).\end{cases}$$

Здесь $u(x,t)$ - температура ; ℓ - толщина пластины ; λ_i , c_i , ρ_i - соответственно коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность жидкой (i = I, $x>x_0(t)$) и твердой (i = 2, $x<x_0(t)$) фазы расплавляемого металла ; $x=x_0(t)$ - граница раздела фаз (фронт плавления) ; ε - степень черноты, σ - постоянная Стефана-Больцмана ; $u_0(x)$, u_n - начальная температура

и температура плавления ; Q - скрытая теплота плавления ; $q(t)$ - плотность мощности электронного луча ; $Q_{исп}(u)$ - плотность теплового потока испарения [I] , μ = I - если учитываются потери тепла испарением, μ = 0 - если испарение не учитывается. Теплофизические характеристики λ , c и плотность ρ предполагаются постоянными для каждой фазы металла.

Управление процессом плавления осуществляется путем изменения мощности электронного луча [I] . Поэтому в качестве функции управления выберем функцию $q(t)$. Как правило, процесс плавления металла в автотигле является дискретным во времени, т.е. мощность электронного луча представляется кусочно-постоянной функцией и изменяется до заданного максимального значения ($q(t) \leq q_з(t)$). Время выдержки расплава на каждой ступени мощности неопределено и назначается полуэмпирически, что приводит к непроизводительным потерям энергии. Поэтому возникает необходимость перехода от дискретно-временного режима подъема мощности к такому непрерывному, который привел бы к оптимизации энергозатрат за плавку, что, в свою очередь, открывает возможность автоматизации всего режима подъема мощности в процессе плавки.

При задании $q(t)$ в виде кусочно-постоянной функции тепловой поток на граничной поверхности $x=l$ на каждой ступени мощности $q(t)=q_i$, $i=\overline{1,n}$, в момент $t=t_i$ после очередного переключения управления равен

$$\lambda_1 \frac{\partial u(l,t_i)}{\partial x} = q_i - \varepsilon\sigma u^4(l,t_i) - \mu Q_{исп}(u(l,t_i)) = P_i$$

и на протяжении каждого этапа управления он уменьшается в связи с возрастанием температуры $u(l,t)$. В то же время известно [3] , что процесс плавления будет наискорейшим тогда, когда в каждый момент времени на границе пластины обеспечивается максимально возможный тепловой поток. Последнее условие мы и положим в основу при построении оптимального управления нестационарным температурным полем пластины.

Предположим, что начальное значение функции $q(t)$ известно: $q(0)=q_0$. Тогда тепловой поток на граничной поверхности $x=l$ пластины при t = 0 равен

$$\lambda_1 \frac{\partial u(l,0)}{\partial x} = q_0 - \varepsilon\sigma u_н^4 - \mu Q_{исп}(u_н) = P_0$$

При $t>0$ функцию управления $q(t)$ определим из условия, чтобы тепловой поток на поверхности $x=\ell$ по крайней мере не уменьшался, т.е. представлялся монотонно неубывающей функцией времени $P(t)\geq P_0$

$$\lambda_1 \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = P(t), \qquad P(0)=P_0. \tag{6}$$

Итак, задачу оптимального управления, осуществляемого с помощью теплообмена по закону (4) на граничной поверхности $x=\ell$, сформулируем следующим образом: найти такую функцию управления $q(t)$, ограниченную сверху

$$q(t) \leq q_1(t), \tag{7}$$

чтобы при известном начальном значении $q(t)$: $q(0)=q_0$ и заданном тепловом потоке (6) на граничной поверхности $x=\ell$ перевести пластину из начального состояния (2) в конечное, при котором температура в заданной точке $0<x^*<\ell$ достигала бы заданного значения (температуры плавления)

$$u(x^*,t_0)=u_n. \tag{8}$$

При этом температурное поле удовлетворяет уравнению (I), неуправляемому условию теплообмена (3) на граничной поверхности $x=0$ и условию (5) на границе раздела фаз.

Таким образом, на граничной поверхности $x=\ell$ должно выполняться условие

$$\lambda_1 \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = q(t) - \varepsilon\sigma u^4(\ell,t) - \mu Q_{исп}(u(\ell,t)) = P(t),$$

откуда находим искомое значение $q(t)$

$$q(t) = P(t) + \varepsilon\sigma u^4(\ell,t) + \mu Q_{исп}(u(\ell,t)). \tag{9}$$

Оптимальное управление на первом этапе нагрева будет полностью определено, если мы найдем температурное поле $u(x,t)$, решив задачу Стефана (I)-(3), (5), (6).

На втором этапе нагрева управление определяется тривиально – $q(t)=q_1(t)$, а время переключения управления $t=t_1$ находим из условия

$$P(t) + \varepsilon\sigma u^4(\ell,t) + \mu Q_{исп}(u(\ell,t)) = q_1(t). \tag{10}$$

Температурное поле на втором этапе управления находим, решив задачу Стефана (I), (3), (5) при начальном условии

$$u(x,0)=u(x,t_1) \tag{11}$$

и граничном условии

$$u(l,t)=u_l(t), \qquad (12)$$

где $u(x,t_1)$ - значение решения задачи Стефана (1)-(3), (5), (6) в момент переключения управления, а

$$u_l(t)=F^{-1}[q_1(t)-P(t)], \qquad (F(u)=\varepsilon\sigma u^4+\mu Q_{исп}(u))$$

есть решение уравнения

$$q_1(t)-\varepsilon\sigma u_l^4(t)-\mu Q_{исп}(u_l(t))=P(t).$$

Время отключения управления $t=t_0$ находим из условия (8).

Получение точных аналитических решений приведенных задач Стефана не представляется возможным, поэтому построим приближенные решения, связанные как с упрощением математической модели, так и с применением приближенных методов.

2. Приближенные решения задачи Стефана (1)-(3), (5), (6).

1°. Второй метод Лейбензона. Следуя идее этого метода, представим решение задачи Стефана в виде

$$u(x,t)=\begin{cases} u_n+u_1(t)[x-x_0(t)], & x\geq x_0(t), \\ u_n-u_2(t)[x_0(t)-x], & x\leq x_0(t), \end{cases} \qquad (13)$$

и неизвестные $u_1(t)$, $u_2(t)$, $x_0(t)$ найдем, требуя, чтобы функция (13) удовлетворяла граничным условиям (3), (6) и уравнению (1), усредненному по координате

$$\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)-c\rho\frac{\partial u}{\partial t}+Q\frac{dx_0}{dt}\delta(x-x_0(t))\right]dx=0,$$

которое для функции (13) упрощается к виду

$$\left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=x_0(t)}-\int_0^l c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx+Q\frac{dx_0}{dt}=0, \qquad (14)$$

где $[f(x,t)]_{x=x_0(t)}$ обозначает скачок функции $f(x,t)$ в точке $x=x_0(t)$.

Подставляя (13) в граничные условия (3), (6), получаем соотношения

$$u_1(t)=P^*(t), \qquad P^*(t)=P(t)/\lambda_1, \qquad (15)$$

$$u_2(t)=\varkappa_2[u_n-u_2(t)x_0(t)]^4, \qquad \varkappa_2=\varepsilon\sigma/\lambda_2. \qquad (16)$$

Дифференцируя (I6), находим

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{4\varkappa_2 u_2 (u_n - u_2 x_0)^3 \dot{x}_0}{1 + 4\varkappa_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3}, \tag{I7}$$

где $\dot{x}_0$ обозначает производную по t. После подстановки (I3) в (I4) и исключения $\dot{u}_2(t)$ с помощью (I7) приходим к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $x_0(t)$ и $u_2(t)$

$$\begin{gathered} \dot{x}_0 = f_1(t, x_0, u_2), \quad \dot{u}_2 = f_2(t, x_0, u_2), \\ x_0(0) = \ell, \qquad u_2(0) = (u_n - z_0)/\ell . \end{gathered} \tag{I8}$$

Здесь

$$f_1 = \frac{[1 + 4\varkappa_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3][c_1 \rho_1 \dot{P}^*(\ell - x_0)^2 + 2(\lambda_2 u_2 - P)]}{2c_1\rho_1 P^*(\ell - x_0) + c_2 \rho_2 u_2 x_0 + 2Q + 8\varkappa_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3 [c_1 \rho_1 P^*(\ell - x_0) + Q]},$$

$$f_2 = -\frac{4\varkappa_2 u_2 (u_n - u_2 x_0)^3 f_1(t, x_0, u_2)}{1 + 4\varkappa_2 x_0 (u_n - u_2 x_0)^3},$$

$z = z_0$ - положительный корень алгебраического уравнения

$$\ell \varkappa_2 z^4 + z - u_n = 0,$$

которое получено из соотношения (I6) при $t = 0$.

Решение задачи Коши (I8) для нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка может быть получено одним из численных методов с помощью ЭВМ.

Используя приближенное решение (I3), по формуле (9) находим управление на первом этапе нагрева

$$q(t) = P(t) + \varepsilon\sigma[u_n + P^*(t)(\ell - x_0(t))]^4 + \mu Q_{иск}[u_n + P^*(t)(\ell - x_0(t))]. \tag{I9}$$

2°. Метод осреднения функциональных поправок. Перепишем задачу Стефана (I)-(3), (5), (6) в виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad x_0(t) < x < \ell, \quad t > 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < x_0(t), \quad t > 0, \tag{21}$$

$$u_2(x,0) = u_0(x), \quad u_0(\ell) = u_n, \quad 0 \le x \le \ell, \tag{22}$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = \varkappa_2 u_2^4(0,t), \qquad \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} = P^*(t), \quad t \geq 0, \tag{23}$$

$$u_1(x_0(t),t) = u_2(x_0(t),t) = u_n,$$

$$\lambda_2 \frac{\partial u_2(x_0(t),t)}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial u_1(x_0(t),t)}{\partial x} = Q\,\frac{dx_0}{dt}, \tag{24}$$

где $a_i^2 = \lambda_i/(c_i\rho_i)$, $i = 1, 2$. Согласно методу осреднения функциональных поправок [4, 5] приближенное решение задачи (20)-(24) ищем как решение последовательности задач Стефана для уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_{i,n}}{\partial x^2} = \frac{1}{a_i^2}\,\frac{\partial u_{i,n-1}}{\partial t} + f_{i,n}(t), \qquad \begin{array}{l} i=1, \;\; x_{0,n}(t)<x<l, \;\; t>0, \\ i=2, \;\; 0<x<x_{0,n}(t), \; t>0, \end{array}$$

где

$$f_{1,n}(t) = \frac{1}{a_1^2[l - x_{0,n}(t)]}\int\limits_{x_{0,n}(t)}^{l} \frac{\partial}{\partial t}(u_{1,n} - u_{1,n-1})\,dx,$$

$$f_{2,n}(t) = \frac{1}{a_2^2 x_{0,n}(t)}\int\limits_{0}^{x_{0,n}(t)} \frac{\partial}{\partial t}(u_{2,n} - u_{2,n-1})\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В первом приближении (n = I) вместо уравнений (20), (2I) рассмотрим следующие:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f_1(t), \quad x_0(t) < x < l, \;\; t>0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f_2(t), \quad 0 < x < x_0(t), \;\; t>0, \tag{26}$$

где

$$f_1(t) = \frac{1}{a_1^2[l - x_0(t)]}\int\limits_{x_0(t)}^{l} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}\,dx,$$

$$f_2(t) = \frac{1}{a_2^2\, x_0(t)}\int\limits_{0}^{x_0(t)} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\,dx. \tag{27}$$

Интегрируя дважды уравнения (25), (26), получаем

$$u_1(x,t) = C_1(t)x + C_2(t) + x^2 f_1(t)/2, \quad x_0(t) \le x \le \ell, \tag{28}$$

$$u_2(x,t) = C_3(t)x + C_4(t) + x^2 f_2(t)/2, \quad 0 \le x \le x_0(t). \tag{29}$$

Подставляя (28) и (29) в граничные условия (23), условия сопряжения (24) и равенства (27), находим

$$\begin{gathered} C_1(t) = P^*(t) - \ell f_1(t), \\ C_2(t) = \{2[u_n - x_0(t)C_1(t)] - x_0^2(t) f_1(t)\}/2, \qquad C_3(t) = \varkappa_2 C_4^4(t), \end{gathered} \tag{30}$$

а для определения $x_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $C_4(t)$ получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{x}_0 = y(t, x_0, f_1, f_2, C_4), \qquad \dot{f}_1 = \varphi_1(t, x_0, f_1, f_2, C_4), \\ \dot{f}_2 = \varphi_2(t, x_0, f_1, f_2, C_4), \\ \dot{C}_4 = -\frac{2(\varkappa_2 C_4^4 + x_0 f_2)y + x_0^2 \varphi_2}{2(1 + 4\varkappa_2 x_0 C_4^3)}, \end{gathered} \tag{31}$$

где введены обозначения:

$$y = \{\lambda_2(x_0 f_2 + \varkappa_2 C_4^4) - \lambda_1[P^* - (\ell - x_0) f_1]\}/Q,$$

$$\varphi_1 = \frac{3\{(\ell - x_0)\dot{P}^* - 2a_1^2 f_1 - 2[P^* - (\ell - x_0) f_1]y\}}{2(\ell - x_0)^2},$$

$$\varphi_2 = -\frac{3[a_2^2 f_2(1 + 4\varkappa_2 x_0 C_4^3) + (1 + 2\varkappa_2 x_0 C_4^3)(\varkappa_2 C_4^4 + x_0 f_2)y]}{x_0^2(1 + \varkappa_2 x_0 C_4^3)}.$$

Систему дифференциальных уравнений (31) следует интегрировать при начальных условиях

$$x_0(0) = \ell, \qquad f_1(0) = -\frac{P^*(0)}{a_1^2 Q}\{\lambda_2[\ell f_2(0) + \varkappa_2 C_4^4(0)] - P(0)\}, \tag{32}$$

где значения $f_2(0)$ и $C_4(0)$ найдем из начального условия (22):

$$\frac{f_2(0)}{2}x^2 + C_4(0)\left[1+\varkappa_2 C_4^3(0)x\right] = u_0(x) . \tag{33}$$

С помощью приближенного решения (28) определяем управление на первом этапе нагрева

$$\begin{aligned} q(t) = P(t) + \varepsilon\sigma\left[C_1(t)\ell + C_2(t) + \ell^2 f_1(t)/2\right]^4 + \\ + \mu Q_{исп}\left[C_1(t)\ell + C_2(t) + \ell^2 f_1(t)/2\right] . \end{aligned} \tag{34}$$

3°. Проекционно-сеточный метод. Чтобы упростить уравнение (I), применим к нему преобразование Кирхгофа [6], введя новую функцию

$$v(x,t) = \int_0^{u(x,t)} \lambda(\xi)\,d\xi . \tag{35}$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}$$

и для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ справедливы соотношения:

$$v = \begin{cases} \lambda_2 u, & u \le u_n , \\ \lambda_2 u_n + \lambda_1 (u - u_n), & u \ge u_n ; \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \begin{cases} v, & v \le v_n = \lambda_2 u_n , \\ v_n + \lambda_2 (v - v_n)/\lambda_1 , & v \ge v_n ; \end{cases}$$

$$u'(v) = \begin{cases} 1/\lambda_2 , & v < v_n ,\ x < x_0(t), \\ 1/\lambda_1 , & v > v_n ,\ x > x_0(t), \end{cases}$$

с учетом которых задача Стефана (I)-(3), (5), (6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c\rho u'(v)\frac{\partial v}{\partial t} = -Q\frac{dx_0}{dt}\delta(x - x_0(t)), \quad 0<x<\ell,\ t>0, \tag{36}$$

$$v(x,0) = \lambda_2 u_0(x) = v_0(x), \qquad v_0(\ell) = v_n , \quad 0 \le x \le \ell, \tag{37}$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_2^4} v^4(0,t), \qquad \frac{\partial v(\ell,t)}{\partial x} = P(t), \qquad t \geq 0\,, \tag{38}$$

$$v(x_0(t),t) = v_n\,, \qquad x_0(0) = \ell\,. \tag{39}$$

При дальнейшем исследовании задачи (36)-(39) целесообразно перейти к рассмотрению эквивалентного интегро-дифференциального уравнения. Для этого воспользуемся второй формулой Грина

$$\int_0^\ell \left(v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx = \left(v\frac{\partial w}{\partial x} - w\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\ell} \tag{40}$$

и обобщенной функцией Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{x^2+\xi^2}{2\ell} + \xi - \dfrac{\ell}{3}\,, & 0 \leq x \leq \xi\,, \\ -\dfrac{x^2+\xi^2}{2\ell} + x - \dfrac{\ell}{3}\,, & \xi \leq x \leq \ell\,, \end{cases} \tag{41}$$

являющейся решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-\xi) - \frac{1}{\ell}\,, \qquad 0 < x,\ \xi < \ell\,, \\ &\frac{\partial G(0,\xi)}{\partial x} = \frac{\partial G(\ell,\xi)}{\partial x} = 0\,, \\ &\int_0^\ell G(x,\xi)\,dx = \int_0^\ell G(x,\xi)\,d\xi = 0\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Полагая в (40) $w = G$ и учитывая (36), (38) и (42), получаем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} v(x,t) = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell v(\xi,t)\,d\xi + \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_2^4} G(x,0)\,v^4(0,t) - G(x,\ell)P(t) + \\ + \int_0^\ell c\rho\,\mu'(v)\,G(x,\xi)\frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}\,d\xi - Q\,G(x,x_0(t))\,\dot{x}_0\,, \end{aligned} \tag{43}$$

которое следует рассматривать вместе с начальным условием (37) и условием (39) на подлежащей определению границе раздела фаз $x = x_0(t)$

Для построения приближенного решения полученного нелинейного интегро-дифференциального уравнения весьма эффективным является проекционно-сеточный метод [7] , позволяющий осуществить редукцию задачи (43), (37), (39) к задаче Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Это достигается кусочно-постоянной по координате аппроксимацией

$$v(x,t) \approx v_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N+M} v_i(t)\varphi_i(x, x_0(t)), \tag{44}$$

где

$$\varphi_i(x, x_0(t)) = \zeta(x - x_{i-1}(t)) - \zeta(x - x_i(t)), \qquad i = \overline{1, N+M},$$

$$x_i(t) = \begin{cases} i\, x_0(t)/N, & i = \overline{1, N}; \\ x_0(t) + (i-N)[\ell - x_0(t)]/M, & i = \overline{N+1, N+M}, \end{cases}$$

$\zeta(x - x_j)$ – функция Хевисайда, и использованием метода Бубнова-Галеркина при определении средних на соответствующих интервалах разбиения значений искомой функции $v_i(t)$. Узловые точки $x_i(t)$ такой сетки являются функциями времени, а производная координатных функций $\varphi_i(x, x_0(t))$ по t определяется с помощью дельта-функции Дирака

$$\dot{\varphi}_i(x, x_0(t)) = \dot{x}_{i-1}(t)\delta(x - x_{i-1}(t)) - \dot{x}_i(t)\delta(x - x_i(t)),$$

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} i\, \dot{x}_0(t)/N, & i = \overline{1, N}; \\ (M+N-i)\dot{x}_0(t)/M, & i = \overline{N+1, N+M}. \end{cases}$$

При $v(x,t) = v_h(x,t)$ после умножения уравнения (43) и начального условия (37) на $\varphi_i(x, x_0(t))$, $i = \overline{1, N+M}$, и интегрирования по x в пределах от 0 до ℓ , а также использования условия (39) приходим к задаче Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $w(t) = (v_1(t), \ldots, v_{N+M}(t), x_0(t))$

$$A(w)\dot{w} = B(t, w), \qquad w(0) = C. \tag{45}$$

Здесь

$$A = (A_{ij})_{i,j=1}^{N+M+1}, \qquad B = (B_i)_{i=1}^{N+M+1}, \qquad C = (C_i)_{i=1}^{N+M+1},$$

$$\mathcal{A}_{ij}(x_0(t)) = \int\limits_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} \Phi_j(x, x_0(t))dx, \quad i,j=\overline{1,N+M}, \quad x_{j-1}(t)=0,$$

$$\mathcal{A}_{N+M+i,j}(x_0(t)) = \Phi_j(x_i(t), x_0(t)), \quad j=\overline{1,N+M},$$

$$\mathcal{A}_{i,N+M+1}(w(t)) = \sum_{j=1}^{N+M} F_{ij}(x_0(t))v_j(t) - QG_i(x_0(t)), \quad i=\overline{1,N+M},$$

$$F_{ij}(x_0(t)) = \int\limits_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} F_j(x, x_0(t))dx, \qquad G_i(s) = \int\limits_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} G(x,s)dx,$$

$$\mathcal{A}_{N+M+1,N+M+1}(w(t)) = \sum_{i=1}^{N+M} F_i(x_0(t), x_0(t))v_i(t) - QG(x_0(t), x_0(t));$$

$$B_i(t, w(t)) = [x_i(t) - x_{i-1}(t)]\Big\{v_i(t) - \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{N+M}[x_j(t)-x_{j-1}(t)]v_j(t)\Big\} +$$
$$+ G_i(l)P(t) - \varepsilon\sigma G_i(0)v_1^4(t)/\lambda_2^4, \quad i=\overline{1,N+M},$$

$$B_{N+M+1}(t, w(t)) = v_n - \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{N+M}[x_i(t)-x_{i-1}(t)]v_i(t) + \qquad (46)$$
$$+ G(x_0(t), l)P(t) - \varepsilon\sigma G(x_0(t), 0)v_1^4(t)/\lambda_2^4;$$

$$C_i = \frac{N}{l}\int\limits_{x_{i-1}(0)}^{x_i(0)} v_0(x)dx, \; i=\overline{1,N}; \quad C_i = v_n, \; i=\overline{N+1,N+M}; \quad C_{N+M+1} = l;$$

$$F_i(x, x_0(t)) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_i^2 N}[(i-1)G(x, x_{i-1}(t)) - iG(x, x_i(t))], \quad i=\overline{1,N}, \\ \dfrac{1}{a_i^2 M}[(N+M+1-i)G(x, x_{i-1}(t)) - (N+M-i)G(x, x_i(t))], \\ \qquad\qquad i=\overline{N+1,N+M}, \end{cases}$$

$$\Phi_i(x,x_1(t))=\frac{1}{a_2^2}\int\limits_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} G(x,\xi)d\xi\,,\quad i=\overline{1,N},$$

$$\Phi_i(x,x_0(t))=\frac{1}{a_1^2}\int\limits_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} G(x,\xi)d\xi\,,\quad i=\overline{N+1,N+M}.$$

Систему (45) можно записать в разрешенном относительно производных виде

$$\dot{w}=\mathcal{D}(t,w),\qquad w(0)=C, \tag{47}$$

где

$$\mathcal{D}=(\mathcal{D}_i)_{i=1}^{N+M+1},\qquad \mathcal{D}_i=\det R_i\,/\det \mathcal{A},$$

$$R_k=(R_{k,ij})_{i,j=1}^{N+M+1},\qquad k=\overline{1,N+M+1},$$

$$R_{k,ij}=\begin{cases}\mathcal{A}_{ij}\,, & j\neq k,\\ B_i\,, & j=k,\end{cases}\qquad \mathcal{A}_{ij}=\mathcal{A}_{ji}\,,\quad i,j=\overline{1,N+M},$$

$$\mathcal{A}_{ij}=\frac{1}{6a_2^2 l}(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1})[3l(x_j+x_{j-1})-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-$$
$$-x_j^2-x_{j-1}^2-x_jx_{j-1}-2l^2],\quad j=\overline{1,N},\quad i\leq j-1,$$

$$\mathcal{A}_{ij}=\frac{1}{6a_1^2 l}(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1})[3l(x_j+x_{j-1})-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-$$
$$-x_j^2-x_{j-1}^2-x_jx_{j-1}-2l^2],\quad j=\overline{N+1,N+M},\quad i\leq j-1,$$

$$\mathcal{A}_{ii}=\frac{x_i-x_{i-1}}{3a_2^2 l}[l(2x_i^2-x_{i-1}^2)-lx_ix_{i-1}-(x_i-x_{i-1})(x_i^2+$$
$$+x_{i-1}^2+x_ix_{i-1}+l^2)],\qquad i=\overline{1,N}.$$

$$\mathcal{A}_{ii}=\frac{1}{3a_1^2\ell}(x_i-x_{i-1})[\ell(2x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1})-(x_i-x_{i-1})(x_i^2+$$
$$+x_{i-1}^2+x_ix_{i-1}+\ell^2)], \qquad i=\overline{N+1,N+M},$$

$$\mathcal{A}_{N+M+1,j}=\frac{x_j-x_{j-1}}{6a_2^2\ell}(6\ell x_0-3x_0^2-x_j^2-x_{j-1}^2-x_jx_{j-1}-2\ell^2), \quad j=\overline{1,N},$$

$$\mathcal{A}_{N+M+1,j}=\frac{x_j-x_{j-1}}{6a_1^2\ell}[3\ell(x_j+x_{j-1})-3x_0^2-x_j^2-x_{j-1}^2-x_jx_{j-1}-2\ell^2], \quad j=\overline{N+1,N+M},$$

$$\mathcal{A}_{i,N+M+1}=\sum_{j=1}^{N+M}F_{ij}v_j-QG_i(x_0), \quad i=\overline{1,N+M},$$

$$F_{ij}=\frac{x_i-x_{i-1}}{6a_2^2N\ell}[(j-1)(6\ell x_{j-1}-3x_{j-1}^2-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-2\ell^2)-$$
$$-j(6\ell x_j-3x_j^2-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-2\ell^2)], \quad j=\overline{1,N}, \quad i\le j-1,$$

$$F_{ii}=\frac{x_i-x_{i-1}}{6a_2^2N\ell}\{(i-1)[3\ell(x_i+x_{i-1})-x_i^2-4x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-2\ell^2]-$$
$$-i(6\ell x_i-4x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-2\ell^2)\}, \quad i=\overline{1,N},$$

$$F_{ij}=\frac{x_i-x_{i-1}}{6a_2^2N\ell}\{(j-1)[3\ell(x_i+x_{i-1})-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-3x_{j-1}^2-2\ell^2]-$$
$$-j[3\ell(x_i+x_{i-1})-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-3x_j^2-2\ell^2]\}, \quad j=\overline{1,N}, \quad i>j, \tag{48}$$

$$F_{ij}=\frac{x_i-x_{i-1}}{6a_1^2M\ell}[(M+N+1-j)(6\ell x_{j-1}-3x_{j-1}^2-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-2\ell^2)-$$
$$-(M+N-j)(6\ell x_j-3x_j^2-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-2\ell^2)],$$
$$j=\overline{N+1,N+M}, \quad i\le j-1,$$

$$F_{ii}=\frac{x_i-x_{i-1}}{6a_i^2 M\ell}\{(M+N+1-i)[3\ell(x_i+x_{i-1})-x_i^2-4x_{i-1}^2-x_i x_{i-1}-2\ell^2]-$$

$$-(M+N-i)(6\ell x_i-4x_i^2-x_{i-1}^2-x_i x_{i-1}-2\ell^2)\},\quad i=\overline{N+1,N+M},$$

$$F_{ij}=\frac{x_i-x_{i-1}}{6a_i^2 M\ell}\{(M+N+1-j)[3\ell(x_i+x_{i-1})-x_i^2-x_{i-1}^2-x_i x_{i-1}-3x_{j-1}^2-2\ell^2]-$$

$$-(M+N-j)[3\ell(x_i+x_{i-1})-x_i^2-x_{i-1}^2-x_i x_{i-1}-3x_j^2-2\ell^2]\},$$

$$j=\overline{N+1,N+M},\quad i>j;$$

$$G_i(x_0)=\frac{x_i-x_{i-1}}{6\ell}(6\ell x_0-3x_0^2-x_i^2-x_{i-1}^2-x_i x_{i-1}-2\ell^2),\quad i=\overline{1,N},$$

$$G_i(x_0)=\frac{x_i-x_{i-1}}{6\ell}[3\ell(x_i+x_{i-1})-x_i^2-x_{i-1}^2-x_i x_{i-1}-3x_0^2-2\ell^2],\quad i=\overline{N+1,N+M};$$

$$A_{N+M+1,N+M+1}=\sum_{i=1}^{N+M}F_i(x_0,x_0)\vartheta_i-QG(x_0,x_0),$$

$$F_i(x_0,x_0)=\frac{1}{6a_i^2 N\ell}[(i-1)(6\ell x_0-3x_0^2-3x_{i-1}^2-2\ell^2)-$$

$$-i(6\ell x_0-3x_0^2-3x_i^2-2\ell^2)],\quad i=\overline{1,N},$$

$$F_i(x_0,x_0)=\frac{1}{6a_i^2 M\ell}[(M+N+1-i)(6\ell x_{i-1}-3x_{i-1}^2-3x_0^2-2\ell^2)-$$

$$-(M+N-i)(6\ell x_i-3x_i^2-3x_0^2-2\ell^2)],\quad i=\overline{N+1,N+M},$$

$$G(x_0,x_0)=[2x_0(\ell-x_0)-\ell^2]/(3\ell).$$

Элементы B_i, $i=\overline{1,N+M+1}$, определяются согласно (46), где

$$G_i(\ell)=\frac{x_i-x_{i-1}}{6\ell}(\ell^2-x_i^2-x_{i-1}^2-x_i x_{i-1}),\quad i=\overline{1,N+M},$$

$$G_i(0)=\frac{x_i-x_{i-1}}{6l}[3l(x_i+x_{i-1})-x_i^2-x_{i-1}^2-x_ix_{i-1}-2l^2], \quad i=\overline{1,N+M},$$
$$G(x_0,l)=\frac{1}{6l}(l^2-3x_0^2), \quad G(x_0,0)=\frac{1}{6l}(6lx_0-3x_0^2-2l^2). \tag{49}$$

Управление на первом этапе нагрева, найденное с помощью приближенного решения (44), определяется в виде

$$q(t)=P(t)+\varepsilon\sigma\{\lambda_1 v_n+\lambda_2[v_{N+M}(t)-v_n]\}^4/(\lambda_1\lambda_2)^4+$$
$$+\mu Q_{ucn}(\{\lambda_1 v_n+\lambda_2[v_{N+M}(t)-v_n]\}/\lambda_2). \tag{50}$$

3. Приближенные решения задачи Стефана (I), (3), (5), (II), (I2).

I°. Второй метод Лейбензона. Приближенное решение задачи ищем в виде (I3). После подстановки (I3) в граничные условия (3), (I2) получаем

$$u_1(t)=\frac{u_l(t)-u_n}{l-x_0(t)}, \qquad u_2(t)=x_2[u_n-u_2(t)x_0(t)]^4. \tag{51}$$

Дифференцируя эти равенства, находим

$$\dot u_1=\frac{(l-x_0)\dot u_l+(u_l-u_n)\dot x_0}{(l-x_0)^2}, \quad \dot u_2=-\frac{4x_2u_2(u_n-u_2x_0)^3\dot x_0}{1+4x_2x_0(u_n-u_2x_0)^3}. \tag{52}$$

Подставляя (I3) в (I4) и исключая $\dot u_1$ и $\dot u_2$ с помощью (52), приходим к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $x_0(t)$ и $u_2(t)$

$$\dot x_0=g_1(t,x_0,u_2), \quad \dot u_2=g_2(t,x_0,u_2),$$
$$x_0(0)=x_{01}, \quad u_2(0)=u_{21}. \tag{53}$$

Здесь

$$g_1=\{[1+4\varkappa_2 x_0(u_n-u_2 x_0)^3][c_1\rho_1(l-x_0)\dot{u}_l+2(\lambda_2 u_2-\lambda_1 u_1)]\}/$$
$$/\{2c_1\rho_1 u_1(l-x_0)+c_2\rho_2 u_2 x_0+2Q+8\varkappa_2 x_0(u_n-u_2 x_0)^3\times$$
$$\times[c_1\rho_1 u_1(l-x_0)+Q]-c_1\rho_1(u_l-u_n)[1+4\varkappa_2 x_0(u_n-u_2 x_0)^3]\},$$

$$g_2=-\frac{4\varkappa_2 u_2(u_n-u_2 x_0)^3 g_1(t,x_0,u_2)}{1+4\varkappa_2 x_0(u_n-u_2 x_0)^3},$$

x_{01} , u_{21} - значения решений задачи Коши (I8) в момент переключения управления $t=t_1$, определяемый из условия

$$P(t)+\varepsilon\sigma[u_n+P^*(t)(l-x_0(t))]^4+\mu Q_{uen}[u_n+P^*(t)(l-x_0(t))]=q_1(t). \quad (54)$$

2°. Метод осреднения функциональных поправок. Перепишем задачу Стефана (I), (3), (5), (II), (I2) в виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial t}=0, \qquad x_0(t)<x<l, \quad t>0,$$
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial t}=0, \qquad 0<x<x_0(t), \quad t>0, \quad (55)$$

$$u_2(x,0)=u_{21}(x), \qquad 0\le x\le l, \quad (56)$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}=\varkappa_2 u_2^4(0,t), \qquad u_1(l,t)=u_l(t), \quad t\ge 0, \quad (57)$$

$$u_1(x_0(t),t)=u_2(x_0(t),t)=u_n,$$
$$\lambda_2\frac{\partial u_2(x_0(t),t)}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial u_1(x_0(t),t)}{\partial x}=Q\frac{dx_0}{dt},$$

где $u_{21}(x)$ - значение решения задачи Стефана (20)-(24) в момент переключения управления. Следуя идее метода осреднения функциональных поправок, в первом приближении заменяем уравнения (55) на приближенные

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = g_1(t), \quad x_0(t) < x < l, \ t > 0, \tag{58}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = g_2(t), \quad 0 < x < x_0(t), \ t > 0,$$

где

$$g_1(t) = \frac{1}{a_1^2[l - x_0(t)]} \int\limits_{x_0(t)}^{l} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}\, dx,$$

$$g_2(t) = \frac{1}{a_2^2 x_0(t)} \int\limits_{0}^{x_0(t)} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\, dx,$$

после интегрирования которых находим

$$u_1(x,t) = \mathcal{D}_1(t)x + \mathcal{D}_2(t) + x^2 g_1(t)/2, \quad x_0(t) \le x \le l, \tag{59}$$

$$u_2(x,t) = \mathcal{D}_3(t)x + \mathcal{D}_4(t) + x^2 g_2(t)/2, \quad 0 \le x \le x_0(t). \tag{60}$$

Здесь

$$\mathcal{D}_1(t) = \frac{2[u_l(t) - u_n] - [l^2 - x_0^2(t)]g_1(t)}{2[l - x_0(t)]}$$

$$\mathcal{D}_2(t) = \{2[u_n - \mathcal{D}_1(t)x_0(t)] - x_0^2(t)g_1(t)\}/2, \quad \mathcal{D}_3(t) = x_2\mathcal{D}_4^4(t), \tag{61}$$

а функции $x_0(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\mathcal{D}_4(t)$ определяются из системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_0 = z(t, x_0, g_1, g_2, \mathcal{D}_4), \quad \dot{g}_1 = \Psi_1(t, x_0, g_1, g_2, \mathcal{D}_4),$$

$$\dot{g}_2 = \Psi_2(t, x_0, g_1, g_2, \mathcal{D}_4), \tag{62}$$

$$\dot{\mathcal{D}}_4 = -\frac{2(x_2\mathcal{D}_4^4 + x_0 g_2)z + x_0^2\Psi_2}{2(1 + 4x_2 x_0 \mathcal{D}_4^3)},$$

где

$$z = [\lambda_2(x_0 g_2 + x_2\mathcal{D}_4^4) - \lambda_1(x_0 g_1 + \mathcal{D}_1)]/Q,$$

$$\psi_1 = \frac{6(\ell - x_0)(\dot{u}_\ell - 2a_1^2 g_1) - 3z[2(u_\ell - u_n) - (\ell - x_0)^2 g_1]}{(\ell - x_0)^3},$$

$$\psi_2 = -\frac{3[a_2^2 g_2 (1 + 4\varkappa_2 x_0 \mathcal{D}_4^3) + (1 + 2\varkappa_2 x_0 \mathcal{D}_4^3)(\varkappa_2 \mathcal{D}_4^4 + x_0 g_2) z]}{x_0^2 (1 + \varkappa_2 x_0 \mathcal{D}_4^3)}.$$

Начальные условия для системы (62) следуют из условия (56) и с учетом вида решений (28), (29) и (59), (60) принимают вид

$$x_0(0) = x_{01}, \quad g_1(0) = f_1(t_1), \quad g_2(0) = f_2(t_1), \quad \mathcal{D}_4(0) = C_4(t_1), \tag{63}$$

где $x_{01} = x_0(t_1)$ – значение решения $x_0(t)$ системы (31) в момент переключения управления $t = t_1$, определяемый из условия

$$\begin{gathered} P(t) + \varepsilon\sigma[C_1(t)\ell + C_2(t) + \ell^2 f_1(t)/2]^4 + \\ + \mu Q_{исп.}[C_1(t)\ell + C_2(t) + \ell^2 f_1(t)/2] = q_1(t). \end{gathered} \tag{64}$$

3°. Проекционно-сеточный метод. После применения преобразования Кирхгофа задача Стефана (I), (3), (5), (II), (I2) приводится к виду

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c\rho u'(v)\frac{\partial v}{\partial t} = -Q\frac{dx_0}{dt}\delta(x - x_0(t)), \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \le x \le \ell, \\ \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_2^4} v^4(0, t), \qquad v(\ell, t) = v_\ell(t), \quad t \ge 0, \\ v(x_0(t), t) = v_n, \quad x_0(0) = x_{01}, \end{gathered} \tag{65}$$

где

$$\dot{v}_\ell(t) = \lambda_2 u_n + \lambda_1[u_\ell(t) - u_n], \quad v_0(x) = v(x, t_1),$$

$x_{01} = x_0(t_1)$, $v(x, t_1)$ – значение решения задачи Стефана (36)-(39) в момент переключения управления. Задача Стефана (65) сводится к эквивалентной:

$$v(x,t)=\frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_2^4}K(x,0)v^4(0,t)+\frac{\partial K(x,l)}{\partial\xi}v_l(t)+$$
$$+\int_0^l c\rho u'(v)K(x,\xi)\frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}d\xi-QK(x,x_0(t))\frac{dx_0}{dt}, \qquad (66)$$
$$v(x,0)=v_0(x), \quad v(x_0(t),t)=v_n,$$

где $K(x,\xi)$ - функция Грина, определяемая из условий

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}=\delta(x-\xi), \qquad 0<x,\xi<l,$$
$$\frac{\partial K(0,\xi)}{\partial x}=0, \qquad K(l,\xi)=0; \qquad (67)$$
$$K(x,\xi)=\begin{cases}\xi-l, & 0\le x\le\xi,\\ x-l, & \xi\le x\le l.\end{cases}$$

Применяя проекционно-сеточный метод, приближенное решение задачи (66) ищем в виде (44). В результате приходим к следующей задаче Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $w(t)=(v_1(t),\dots,v_{N+M}(t),\ x_0(t))$:

$$\dot{w}=\mathcal{D}(t,w), \qquad w(0)=w_I(t_1), \qquad (68)$$

где $w_I(t_1)$ - значение решения системы (47) в момент переключения управления,

$$\mathcal{D}=(\mathcal{D}_i)_{i=1}^{N+M+1}, \qquad \mathcal{D}_i=\frac{\det R_i}{\det\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A}=(\mathcal{A}_{ij})_{i,j=1}^{N+M+1},$$
$$R_k=(R_{k,ij})_{i,j=1}^{N+M+1}, \qquad k=\overline{1,N+M+1},$$

$$R_{k,ij}=\begin{cases}\mathcal{A}_{ij}, & j\ne k,\\ B_i, & j=k,\end{cases} \qquad \mathcal{A}_{ij}=\mathcal{A}_{ji}, \quad i,j=\overline{1,N+M},$$

$$\mathcal{A}_{ij}=\frac{1}{2a_2^2}(x_i-x_{i-1})(x_j-x_{j-1})(x_j+x_{j-1}-2l), \quad j=\overline{1,N}, \quad i\le j-1,$$

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{1}{2a_i^2}(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1})(x_j + x_{j-1} - 2\ell), \quad j = \overline{N+1, N+M}, \quad i \leq j-1,$$

$$\mathcal{A}_{ii} = \frac{x_i - x_{i-1}}{3a_2^2}\left[2x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 3\ell(x_i - x_{i-1})\right], \quad i = \overline{1, N},$$

$$\mathcal{A}_{ii} = -\frac{x - x_{i-1}}{3a_i^2}\left[2x_i^2 - x_{i-1}^2 - x_i x_{i-1} - 3\ell(x_i - x_{i-1})\right], \quad i = \overline{N+1, N+M},$$

$$\mathcal{A}_{N+M+1, j} = -(x_j - x_{j-1})(\ell - x_0)/a_2^2, \quad j = \overline{1, N}, \quad ,$$

$$\mathcal{A}_{N+M+1, j} = \frac{x_j - x_{j-1}}{2a_i^2}(x_j + x_{j-1} - 2\ell), \quad j = \overline{N+1, N+M},$$

$$\mathcal{A}_{i, N+M+1} = \sum_{j=1}^{N+M} F_{ij}\vartheta_j - QK_i(x_0), \quad i = \overline{1, N+M},$$

$$F_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{a_2^2 N}\left[j(\ell - x_j) - (j-1)(\ell - x_{j-1})\right], \quad j = \overline{1, N}, \quad i \leq j-1,$$

$$F_{ii} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2a_2^2 N}\left[2i(\ell - x_i) - (i-1)(2\ell - x_i - x_{i-1})\right], \quad i = \overline{1, N},$$

$$F_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2a_2^2 N}(2\ell - x_i - x_{i-1}), \quad j = \overline{1, N}, \quad i > j,$$

$$F_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i^2 M}\left[(M+N-j)(\ell - x_j) - (M+N+1-j)(\ell - x_{j-1})\right], \quad j = \overline{N+1, N+M}, \quad i \leq j-1,$$

$$F_{ii} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2a_i^2 M}\left[2(M+N-i)(\ell - x_i) - (M+N+1-i)(2\ell - x_i - x_{i-1})\right], \quad i = \overline{N+1, N+M},$$

$$F_{ij} = -\frac{x_i - x_{i-1}}{2a_i^2 M}(2\ell - x_i - x_{i-1}), \quad j = \overline{N+1, N+M}, \quad i > j,$$

$$K_i(x_0) = -(x_i - x_{i-1})(\ell - x_0), \quad i = \overline{1,N},$$

$$K_i(x_0) = -(x_i - x_{i-1})(2\ell - x_i - x_{i-1})/2, \quad i = \overline{N+1, N+M};$$

$$\mathfrak{A}_{N+M+1,\,N+M+1} = \sum_{i=1}^{N+M} F_i(x_0, x_0)\vartheta_i - QK(x_0, x_0),$$

$$K(x_0, x_0) = -(\ell - x_0), \qquad F_i(x_0, x_0) = \frac{\ell - x_0}{a_i^2 N}, \quad i = \overline{1,N},$$

$$F_i(x_0, x_0) = \frac{1}{a_i^2 M}\left[(M+N-i)(\ell - x_i) - (M+N+1-i)(\ell - x_{i-1})\right], \quad i = \overline{N+1, N+M};$$

$$B_i = (x_i - x_{i-1})(\vartheta_i + \ell\vartheta_\ell(t)) - \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_2^4} K_i(0)\vartheta_1^4, \qquad i = \overline{1, N+M},$$

$$B_{N+M+1} = \vartheta_n + \ell\vartheta_\ell(t) - \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_2^4} K(x_0, 0)\vartheta_1^4, \qquad K(x_0, 0) = -(\ell - x_0),$$

$$2K_i(0) = -(x_i - x_{i-1})(2\ell - x_i - x_{i-1}), \quad i = \overline{1, N+M}.$$

4. Численный расчет оптимального управления процессом плавления пластины.

Итак, задача оптимального управления нестационарным температурным полем пластины на каждом этапе сведена к решению задачи Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение задач Коши (I8) и (53), полученных с помощью метода Лейбензона (метод I), и задач Коши (3I),(32) и (62), (63), выведенных с использованием метода осреднения функциональных поправок (метод П), реализовано на ЭВМ ЕС-I060.

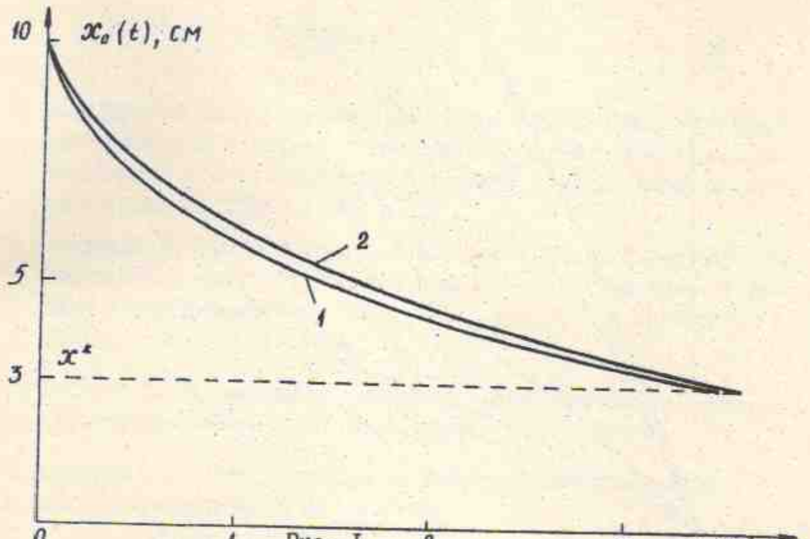
Расчеты проводились при следующих геометрических и теплофизических параметрах: $\ell = 0{,}\mathrm{I}$ м; $P(t) = P_0 = q_0 - \varepsilon\sigma u_n^4 - Q_{исп}(u_n)$; $q_0 = 86 \cdot \mathrm{I}0^5$ ккал/(час.$\cdot$м^2) = I квт/см^2; $\lambda_1 =$ I00 ккал/(м$\cdot$час$\cdot{}^0$К); $\lambda_2 =$ II5 ккал/(м$\cdot$час$\cdot{}^0$К); $u_n = 2900{}^0$К; $\varepsilon = 0{,}4$; $\sigma = 4{,}9 \cdot \mathrm{I}0^{-8}$ ккал/

/(м^2·час·^{0}К^4) ; Q = 5,I·I0^5 ккал/м^3 ; a_1^2 = 0,I5 м^2/час ; a_2^2 = = 0,I7 м^2/час ; $\varkappa_1$ = I,96·I0^{-10} м$^{-1}$ ·^{0}К$^{-3}$; $\varkappa_2$ = I,7·I0^{-10} м$^{-1}$ ·^{0}К$^{-3}$; $Q_{исп.}(u) = \lambda_1(\alpha u - \beta)$, 2900^{0}К $\leq u \leq$ 4000^{0}К, α = 57,33328 ; β = I66266,4 ; x^* = 0,03 м. Начальное распределение температуры принималось в виде $u_0(x) = z_0(\varkappa_2 z_0^3 x + 1)$.

На рис. I представлены кривые зависимости $x_0(t)$, полученные с помощью метода I (кривая I) и метода П (кривая 2), а в таблице приведены соответствующие числовые значения $x_0(t)$ на первом этапе управления, когда они практически совпадают.

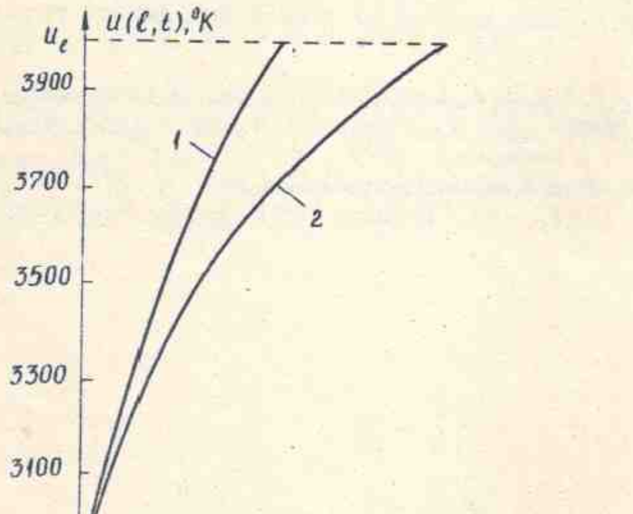
t , час	x_0 , см (метод I)	x_0 , см (метод П)
0	I0	I0
I0^{-4}	9,892II2	9,899592
2·I0^{-4}	9,764260	9,786I7I
3·I0^{-4}	9,628367	9,68II29
4·I0^{-4}	9,542638	9,583I69
5·I0^{-4}	9,458679	9,49II04
7·I0^{-4}	9,309292	9,32I5II
I0^{-3}	9,088260	9,095657
I,3·I0^{-3}	8,890092	8,896I36
I,5·I0^{-3}	8,77506I	8,775728
I,7·I0^{-3}	8,664089	8,664I33
2·I0^{-3}	8,498347	8,503270
2,5·I0^{-3}		8,267492
3·I0^{-3}		8,058447
3,5·I0^{-3}		7,870424
3,7·I0^{-3}		7,800072

На рис. 2 показаны графики изменения температуры на поверхности $x=\ell$, а на рис. 3 – оптимальное управление на первом этапе нагрева, где кривые I,I$_0$ получены методом I, кривые 2, 2$_0$ – методом П. Кривые I$_0$, 2$_0$ представляют оптимальное управление, найденное без учета потерь испарением (μ = 0). Время переключения управления и соответствующее значение $x_0(t_1)$ равно: t_1 = = 2·I0^{-3}, x_{01} = 8,498347 см (метод I), t_1 = 3,7·I0^{-3}, x_{01} = = 7,800072 см (метод П), а время отключения управления соответ-



10
$x_0(t)$, см
2
5
1
x^*
3
0
1
2
3
$t\cdot 10^{-2}$, час

Рис. I



u_ℓ
$u(\ell,t)$, °K
3900
1
3700
2
3500
3300
3100
2900
0
1
3
4
$t\cdot 10^{-3}$, час

Рис. 2

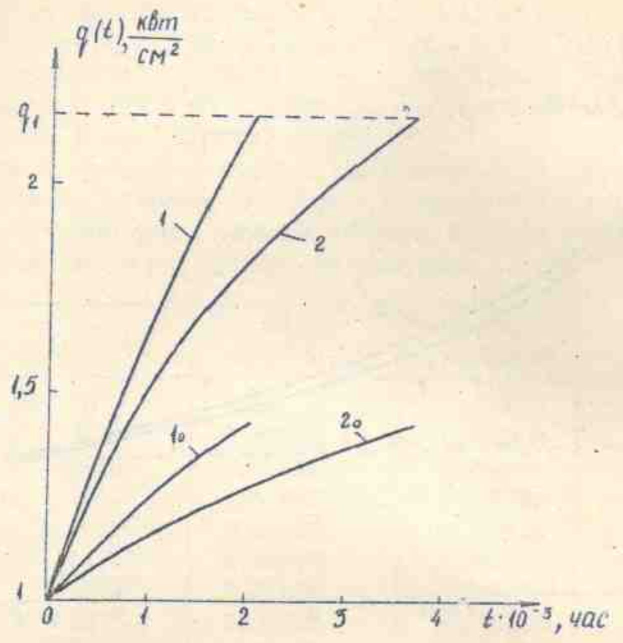


Рис. 3

ственно – $t_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ и $t_0 = 3{,}6 \cdot 10^{-2}$. Управление на втором этапе принято равным $q_1 = 2{,}15$ квт/см^2 ($\mu = 1$) и $q_1 = 1{,}43$ квт/ /см^2 ($\mu = 0$), а температура $u(l,t) = u_l = 4000^0$К. Температура на поверхности $x = 0$ изменяется от значения $u(0,0) = z_0 =$ $= 2367^0$К до $u(0,t_0) = 2658^0$К (метод I) и $u(0,t_0) = 2629^0$К (метод II).

Литература

1. Березовский А.А., Довбня В.Д. Математические модели тепловых процессов в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке.- В кн.:Нелинейные краевые задачи. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, с.41-57.

2. Андреева Т.А., Березовский А.А., Довбня В.Д. К расчету температурного поля автотигля.- В кн.: Нелинейные краевые задачи теплопроводности. Киев, 1982, с.3-8.- (Препринт/ АН УССР, Ин-т математики; 82,3).

3. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами.-Киев: Наук.думка, 1979.- 359 с.

4. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок . - Киев: Наук.думка, 1967. - 336 с.

5. Постольник Ю.С. Одномерный конвективный нагрев при зависящем от времени коэффициенте теплообмена.-Инж.физ.журн., 1970, 18, №2, с. 316-322.

6. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч.П.- Киев: Наук.думка, 1976.-292 с.

7. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Арнольд Анатольевич БЕРЕЗОВСКИЙ
Василий Михайлович ВИГАК
Юрий Васильевич ЖЕРНОВОЙ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ
ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ ПЛАСТИНЫ ПРИ
ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ГАРНИСАЖНОЙ ПЛАВКЕ

Препринт

Редактор Н.И.Коваленко

Подп. в печ. I8.I2.84 БФ 4I030 . Формат 60х84/I6.Бумага тип.
Офс. печать. Усл.печ.л. I.63. Уч.-изд.л. I.4 . Тираж 200 экз.
Заказ 19 Цена I5 коп.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН УССР
25260I , Киев, ГСП, ул. Репина , 3.