Пользуясь условием (3), из последнего неравенства получаем следующую априорную оценку:

$$\|T(u)-T(v)\|_1 \leqslant \frac{NM}{\alpha}\|u-v\|_\alpha \left(e^{\alpha(x+y)}-e^{\alpha y}\right)+\frac{MN}{\alpha}\times$$

$$\times\|u-v\|_\alpha \left(e^{\alpha(x+y)}-e^{\alpha x}\right)+\frac{MN}{\alpha^2}\|u-v\|_\alpha \left(e^{-\alpha x}-1\right)\left(e^{\alpha y}-1\right).$$

Или $\|T(u)-T(v)\|_1-\|T(u-v)\|_1 \leqslant \frac{3MN}{\alpha}\|u-v\|_\alpha e^{\alpha(x+y)}$.

Отсюда имеем $\|T(u-v)\|_\alpha \leqslant \frac{3MN}{\alpha}\|u-v\|_\alpha$.

Следовательно, при $\alpha>3MN$ оператор T сжимающий и интегральное уравнение (8) при таких α имеет единственное непрерывное решение [2]. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976. - 195 с.
2. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1975. - 303 с.
3. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Нелокальные краевые задачи эллиптических систем // Докл. АН СССР. - 1987. - 297, № 3. - С. 547-552.
4. Белецкий А. Бюллетень польской Академии Наук. - 1956. - 4, № 7. - С. 255-258.

УДК 517.946.9

[illegible] Ч е р н о в о й

О РЕШЕНИИ ОДНОФАЗНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Однофазную задачу Стефана в случае сферической симметрии температурного поля можно записать в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad r_0<r<y(t), \quad t>0; \tag{1}$$

$$u(y(t),t)=0, \quad y(0)=r_0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=y(t)}=\alpha\dot{y}(t); \tag{2}$$

$$u(r_0,t)=f_1(t). \tag{3}$$

При $r = r_0$ вместо (3) может быть использовано граничное условие второго или третьего рода.

Рассмотрим обратную задачу: по заданному закону перемещения границы

$$r = y(t) \geq y(0) = r_0$$

(фронта кристаллизации) определить температурное поле $u(r,t) \leq 0$ и функцию $f_1(t) = u(r_0,t)$ (или правую часть граничного условия при $r = r_0$ в случае задания граничных условий второго или третьего рода).

Для решения сформулированной задачи введем вспомогательную функцию $v(r,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

сопряженному с (I). Тогда

$$\int_{t_1}^{\tau}\int_{r_1}^{y(t)}\left\{v(r,t)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}\right] - \right. \tag{5}$$

$$\left. - u(r,t)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}\right]\right\} r^2 dr dt = 0,$$

где $y(t_1) = r_1$. Интегрируя (5) по частям, получаем

$$\int_{t_1}^{\tau} y^2(t)v(y(t),t)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=y(t)}dt - r_1^2\int_{t_1}^{\tau} v(r_1,t)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_1}dt -$$

$$- \int_{t_1}^{\tau} y^2(t)u(y(t),t)\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=y(t)}dt + r_1^2\int_{t_1}^{\tau} u(r_1,t)\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=r_1}dt -$$

$$- \int_{r_1}^{y(\tau)} v(r,\tau)u(r,\tau)r^2dr + \int_{r_1}^{y(\tau)} v(r,y^{-1}(r))u(r,y^{-1}(r))r^2dr = 0. \tag{6}$$

Для исключения из (6) $u(r,\tau)$ и $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$ на $v(r,t)$ наложим следующие ограничения:

$$v(r,t)\big|_{t=\tau} = 0, \tag{7}$$

$$v(r_1,t)=0, \qquad r_1^2\,\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=r_1} = \varphi(\tau-t). \tag{8}$$

Здесь функция $\varphi(\tau-t)$ – пока произвольна.

Учитывая условия (2), (7) и (8), из (6) получаем

$$\alpha\int_{t_1}^{\tau} y^2(t)\dot{y}(t)\,v(y(t),t)\,dt + \int_{t_1}^{\tau} v(r_1,t)\,\varphi(\tau-t)\,dt = 0. \tag{9}$$

Функцию $v(r,\tau-t)$ будем искать в виде степенного ряда

$$v(r,\tau-t)=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\tau-t)\,\frac{(r-r_1)^n}{n!} \tag{10}$$

Подставляя этот ряд в (4), приходим к рекуррентному соотношению

$$b_{n+2}(\tau-t) = -\frac{db_n(\tau-t)}{dt}, \quad n=0,1,2,\ldots .$$

Из условий (8) находим $b_0(\tau-t)=0$, $b_1(\tau-t)=\varphi(\tau-t)/r_1$. Следовательно,

$$b_{2n}(\tau-t)=0, \quad b_{2n+1}(\tau-t)=\frac{(-1)^n}{r_1}\,\varphi^{(n)}(\tau-t), \quad n=0,1,2,\ldots . \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), получаем

$$v(r,\tau-t)=\frac{1}{r_1 r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varphi^{(n)}(\tau-t)\,\frac{(r-r_1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{12}$$

Для того, чтобы выражение (12) удовлетворяло уравнению (4) и условию (7), необходимо, чтобы функция $\varphi(\tau-t)$ имела бесконечное число производных, тождественно не равных нулю, и обращалась в нуль вместе со своими производными при $t=\tau$.

Подставим (12) в (9):

$$\frac{\alpha}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{t_1}^{\tau} y(t)\dot{y}(t)\,\frac{[y(t)-r_1]^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\varphi^{(n)}(\tau-t)\,dt +$$

$$+\int_{t_1}^{\tau} v(r_1,t)\,\varphi(\tau-t)\,dt = 0.$$

Интегрируя первый интеграл n раз по частям, получаем

$$\int\limits_{t_1}^{\tau} \varphi(\tau-t)\left\{\frac{\alpha}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[y(t)\dot{y}(t)(y(t)-r_1)^{2n+1}]^{(n)}}{(2n+1)!}+u(r_1,t)\right\}dt=0.$$

Так как это равенство справедливо для произвольных $\Phi(\tau-t)$ и r_1, то

$$u(r,t)=-\frac{\alpha}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}[y(t)\dot{y}(t)(y(t)-r)^{2n+1}]. \tag{13}$$

Легко проверить, что функция (13) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), если ряд (13) и его производные u_r, u_{rr} и u_t сходятся. Условия сходимости указанных рядов требуют специального рассмотрения.

Формула (13) показывает, что температурное поле $u(r,t)$ полностью определяется заданием закона перемещения фронта кристаллизации $r=y(t)$ вне зависимости от граничного условия при $r=r_0$.

Подставляя (13) в (3), находим правую часть граничного условия (3)

$$f_1(t)=-\frac{\alpha}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[y(t)\dot{y}(t)(y(t)-r_0)^{2n+1}]^{(n)}}{(2n+1)!}. \tag{14}$$

В случае граничного условия второго рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}=f_2(t)$$

аналогично получаем

$$f_2(t)=\frac{\alpha}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[y(t)\dot{y}(t)(y(t)-r_0)^{2n+1}]^{(n)}}{(2n+1)!}+\frac{\alpha}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[y(t)\dot{y}(t)(y(t)-r_0)^{2n}]^{(n)}}{(2n)!} \tag{15}$$

Если, пользуясь методом Л.С.Лейбензона, искать решение задачи Стефана (1)-(3) в виде

$$u(r,t)=\frac{r_0 f_1(t)[y(t)-r]}{[y(t)-r_0]r}, \tag{16}$$

то после подстановки (16) в условие Стефана (2) получим соотношение

$$f_1(t)=-\frac{\alpha}{r_0}\,y(t)\dot{y}(t)[y(t)-r_0],$$

совпадающее с первым членом ряда (14).

В случае, когда фронт кристаллизации перемещается с постоянной скоростью c, т.е. $y(t)=r_0+ct$, из (I3)-(I5) получаем

$$v(r,t)=-\frac{\alpha}{cr}\{2-cr+[2c(r_0+ct)-2-cr]e^{c(r_0+ct-r)}\},$$

$$f_1(t)=-\frac{\alpha}{cr_0}\{2-cr_0+[2(c^2t-1)+cr_0]e^{c^2t}\},$$

$$f_2(t)=\frac{\alpha}{cr_0^2}\{2+[2(c^2t+c^3r_0t-1)+c^2r_0^2]e^{c^2t}\}.$$

Если $y(t)=r_0+\sqrt{t}$, то

$$0>f_1(t)=-\frac{\alpha}{2r_0}\{r_0\sqrt{\pi}e^{1/4}\operatorname{erf}(\tfrac{1}{2})+\sqrt{t}[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2^n(2n)!}]\}>$$

$$>-\frac{\alpha}{2r_0}[r_0\sqrt{\pi}e^{1/4}\operatorname{erf}(\tfrac{1}{2})+\tfrac{3}{2}\sqrt{t}\,],$$

т.е. как и в случае плоской задачи Стефана [I] имеет место скачок температуры при $r=r_0$ в момент $t=0$, но здесь $f_1(t)\neq const$.

В заключение отметим, что для плоской однофазной задачи Стефана представления типа (I3)-(I5) получены в работах [2, 3].

Список литературы

I. Рубинштейн Л.И. О начальной скорости продвижения фронта кристаллизации в одномерной задаче Стефана // Докл. АН СССР. - 1948. - 62, № 6. - С. 753-756.

2. Борисов В.Т., Любов Б.Я., Темкин Д.Е. О расчете кинетики затвердивания металлического слитка при различных температурных условиях на его поверхности // Там же. - 1955. - 104, № 2. - С. 223-228.

3. Чекмарева О.М. О перемещении фронта кристаллизации в затвердевающем слитке при различных температурных условиях на его поверхности // Журн. техн. физики. - 1970. - 40, № 10. - С. 2032-2034.

УДК 517.946.9

К.О. Жураев

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ КРИОДЕСТРУКЦИИ

Для локального необратимого разрушения биологической ткани в медицинской практике применяются достаточно протяженные криозонды с плоской формой охлаждающей поверхности. Пренебрегая краевыми эффек-