

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧИ СТЕФАНА В СПЕЦЭЛЕКТРОМЕТАЛЛУРГИИ
И ФИЗИКЕ МОРЕЯ

Препринт 86.19

Киев
Институт математики АН УССР
1986

В.Д.Довбня, Ю.В.Жерновой, Г.И.Калита

УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ПРОЦЕССАМИ
НАГРЕВА И ПЛАВЛЕНИЯ ТЕПЛОИЗЛУЧАЮЩЕГО ТЕЛА В
СЛУЧАЕ ОДНОМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Методом нелинейных интегральных уравнений задача управления сведена к совместному решению бесконечной системы алгебраических уравнений и системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Предложен алгоритм приближенного решения задачи, устойчивый относительно погрешностей в промежуточных вычислениях, позволяющий свести ее к решению системы трех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Зональным методом осуществлена редукция последней к системе нелинейных алгебраических уравнений, численное решение которой реализовано на ЭВМ. Приведены графики результатов численных расчетов.

Протекание высокотемпературных процессов нагрева и плавления сопровождается опутимыми потерями тепла излучением и испарением [1, 2]. Поэтому проблема оптимизации энергозатрат для таких процессов представляется весьма актуальной.

На практике чаще всего встречаются задачи нагрева деталей, рассчитываемых по схеме неограниченной пластины, полых цилиндра и шара. В настоящей работе рассмотрена задача об управлении с минимальной энергией одномерными температурными полями указанных трех геометрически простых тел на этапе нагрева до достижения температуры плавления и в процессе плавления.

Задача построения управления, минимизирующего энергию управляющего воздействия, является трудно разрешимой [3], поэтому в работе использован подход, суть которого заключается в замене минимизируемого функционала энергии другим, более удобным для исследования. В результате построено управление, близкое к оптимальному и, следуя терминологии работ [3, 4], мы лишь условно называем решаемую задачу задачей об управлении с минимальной энергией.

Будем исходить из предположения, что коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость C и плотность ρ являются постоянными и одинаковыми для твердой и жидкой фазы расплавляемого вещества. Такое предположение, очевидно, сужает область применимости рассматриваемой математической модели, но решение

задачи об управлении с минимальной энергией при этом значительно упрощается. Указанное предположение позволяет свести определение температурного поля $u(x, t)$ неограниченной пластины, полых цилиндра и шара в процессе плавления к решению следующей нелинейной начально-краевой задачи:

$$\alpha^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = -\mu Q \frac{dx_0(t)}{dt} x^j \delta(x - x_0(t)), \quad z < x < R, \quad 0 < t < T, \\ j = 0, 1, 2;$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad z \leq x \leq R, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial x} = h[u(z, t) - u_0(t)] + F_1[u(z, t)] - F_1[u_0(t)],$$

$$\frac{\partial u(R, t)}{\partial x} = p(t) - F_2[u(R, t)], \quad 0 < t < T;$$

$$u(x_0(t), t) = u^*, \quad x_0(0) = R. \quad (2)$$

Здесь

$$\Delta = \frac{1}{x^j} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^j \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$j = 0, 1, 2$ соответственно для пластины, цилиндра и шара; $z=0$ - для пластины и $z \in (0, R)$ - для полых цилиндра и шара; $F_1(u) = \mu u^4$, $F_2(u) = \mu u^4 + \mu Q_{исп}(u)/\lambda$, $\mu = 1$; $\alpha^2 = \lambda/c\rho$; $h = \alpha/\lambda$; $\varepsilon = \varepsilon\sigma/\lambda$; $Q = Q_0/c\rho$; α - коэффициент теплообмена на граничной поверхности $x=z$; ε - степень черноты; σ - постоянная Стефана-Больцмана; Q_0 - скрытая теплота плавления; $Q_{исп}(u)$ - плотность теплового потока испарения; u^* - температура плавления; $u_0(x)$, $u_0(t)$ - начальная температура и температура среды; $\delta(x - x_0(t))$ - функция Дирака; $x_0(t)$ - подвижная определяющая координата изотермы плавления; $p(t) = q(t)/\lambda$ - искомая функция управления, где $q(t)$ - плотность теплового потока, действующего на внешней поверхности тела $x=R$.

Если принять $\mu = 0$, то начально-краевая задача (1) описывает процесс нагрева до достижения температуры плавления.

Предположим, что допустимые управления $p(t)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^T p^2(t) dt < \infty,$$

то есть являются любыми функциями из $L_2(0, T)$, а $u_0(x)$, $u_c(t)$ - заданные функции соответственно из $L_2(\tau, R)$ и $L_2(0, T)$.

Задача об управлении с минимальной энергией формулируется следующим образом: в выбранном классе допустимых управлений требуется найти управление $p(t)$ такое, чтобы соответствующее ему решение $u(x, T)$ начально-краевой задачи (1), (2) удовлетворяло условию

$$u(x, T) = u_T(x), \quad \tau \leq x \leq R, \quad (3)$$

($u_T(x)$ - заданная функция из $L_2(\tau, R)$, T - фиксированный момент времени), и при этом функционал

$$I[p] = \int_0^T p^2(t) dt \quad (4)$$

принимал наименьшее возможное значение.

Отметим, что условие (3) удовлетворяется всегда с известной степенью приближенности [5]. Так как $u_T(x) \in L_2(\tau, R)$, то в самом общем случае это условие нужно понимать в том смысле, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau}^R [u(x, T-\varepsilon) - u_T(x)]^2 dx = 0, \quad j = 0, 1, 2.$$

Задача об управлении с минимальной энергией даже в случае линейной задачи теплопроводности не всегда имеет решение [3]. Поэтому во всех дальнейших рассуждениях будем исходить из предположения о том, что решение рассматриваемой задачи существует.

Сведем сформулированную задачу (1)-(4) к эквивалентной. Для этого воспользуемся второй формулой Грина для оператора $\alpha^2 \Delta - \partial/\partial \tau$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t+0} \int_z^R \left[v(a^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial \tau}) - u(a^2 \Delta v + \frac{\partial v}{\partial \tau}) \right] z^j dz d\tau = \\
& = a^2 \int_0^{t+0} \left\{ R^j \left[v(R, \tau) \frac{\partial u(R, \tau)}{\partial z} - u(R, \tau) \frac{\partial v(R, \tau)}{\partial z} \right] - \right. \\
& \quad \left. - z^j v(z, \tau) \left[\frac{\partial u(z, \tau)}{\partial z} - hu(z, \tau) \right] + z^j u(z, \tau) \left[\frac{\partial v(z, \tau)}{\partial z} - hv(z, \tau) \right] \right\} dz - \\
& \quad - \int_z^R [u(z, t+0)v(z, t+0) - u(z, 0)v(z, 0)] z^j dz, \quad j=0, 1, 2
\end{aligned} \tag{5}$$

и функцией Грина $G(x, z; t-\tau)$ -

$$a^2 \Delta_z G + \frac{\partial G}{\partial \tau} = -\delta(x-z)\delta(t-\tau), \quad z < x, z < R, 0 < t, \tau < T; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
G(x, z; t-\tau) &= 0, \quad \tau > t; \quad \frac{\partial G(x, R; t-\tau)}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial G(x, z; t-\tau)}{\partial z} - hG(x, z; t-\tau) &= 0,
\end{aligned}$$

где $\delta(x-z)$ и $\delta(t-\tau)$ - функции Дирака. Полагая в (5) $v(z, \tau) = G(x, z; t-\tau)$ и учитывая (1), (2), (6), приходим к системе двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для определения $u(x, t)$ и $x_0(t)$, $z \leq x \leq R$, $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u_\lambda(x, t) - a^2 z^j \int_0^t G_z(x, t-\tau) F_1[u(z, \tau)] d\tau + \\
& + a^2 R^j \int_0^t G_R(x, t-\tau) \{ p(\tau) - F_2[u(R, \tau)] \} d\tau +
\end{aligned} \tag{7}$$

$$+ \mu Q \int_0^t G(x, x_0(\tau); t-\tau) x_0^j(\tau) \frac{dx_0(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

$$u(x_0(t), t) = u^*, \quad x_0(0) = R, \quad j = 0, 1, 2,$$

где

$$u_\lambda(x, t) = \int_z^R G(x, \xi, t) u_0(\xi) \xi^j d\xi + \alpha^2 \tau^j \int_0^t G_\tau(x, t-\tau) \times \\ \times \{F_j[u_0(\tau)] + h u_0(\tau)\} d\tau, \quad j = 0, 1, 2;$$

$$G_\tau(x, t-\tau) = G(x, z; t-\tau), \quad G_R(x, t-\tau) = G(x, R; t-\tau);$$

$$G(x, \xi; t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(\xi) \omega_n(x)}{\omega_n^2} e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 (t-\tau)}$$

Здесь $\{\omega_n(x)/\omega_n\}$ - полная в $L_2(z, R)$ ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$\frac{d}{dx} \left(x^j \frac{d\omega}{dx} \right) + \lambda^2 x^j \omega = 0, \quad z < x < R, \quad j = 0, 1, 2, \quad (8)$$

$$\frac{d\omega(z)}{dx} - h\omega(z) = 0, \quad \frac{d\omega(R)}{dx} = 0;$$

$$\omega_n^2 = \|\omega_n(x)\|^2 = \int_z^R \omega_n^2(x) x^j dx, \quad n = 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, 2,$$

решая которую получаем: для пластины ($j = 0$)

$$\omega_n(x) = \cos \lambda_n (R-x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

λ_n - положительные корни уравнения $\lambda \operatorname{tg} \lambda R = h$; в случае полого цилиндра ($j = 1$)

$$\omega_n(x) = Y_1(\lambda_n R) J_0(\lambda_n x) - J_1(\lambda_n R) Y_0(\lambda_n x), \quad n=1, 2, \dots,$$

λ_n - положительные корни уравнения

$$Y_1(\lambda R)[h J_0(\lambda z) + \lambda J_1(\lambda z)] - J_1(\lambda R)[h Y_0(\lambda z) + \lambda Y_1(\lambda z)] = 0, \quad (9_1)$$

$J_0(\lambda x)$, $J_1(\lambda x)$, $Y_0(\lambda x)$, $Y_1(\lambda x)$ - функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядка; для полого шара ($j = 2$)

$$\omega_n(x) = [\lambda_n R \cos \lambda_n(R-x) - \sin \lambda_n(R-x)] / x, \quad n=1, 2, \dots,$$

$\lambda_n > 0$ - корни уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda(R-z) = \frac{R(1+hz) - z}{1+hz + zR\lambda^2} \lambda. \quad (9_2)$$

Так как $u_0(x) \in L_2(z, R)$, $u_T(x) \in L_2(z, R)$, то $u_\lambda(x, T) \in L_2(z, R)$ и из полноты системы собственных функций $X_n(x) = \omega_n(x) / \omega_n$, $n=1, 2, \dots$ заключаем, что

$$u_T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{Tn} X_n(x), \quad u_\lambda(x, T) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\lambda n} X_n(x), \quad (10)$$

$$u_{Tn} = \int_z^R u_T(x) X_n(x) x^j dx, \quad u_{\lambda n} = \int_z^R u_\lambda(x, T) X_n(x) x^j dx, \quad j=0, 1, 2.$$

Подставив ряды (10) в (7), запишем условие (3) в виде

$$\int_0^T p(t) e^{-a^2 \lambda_n^2 (T-t)} dt = b_n, \quad n=1, 2, \dots, \quad (11)$$

где

$$b_n = \frac{\omega_n}{a^2 R^j \omega_n(R)} (u_{Tn} - u_{\lambda n}) + \int_0^T \left\{ \left(\frac{z}{R} \right)^j \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(R)} F_1[u(z, t)] + F_2[u(R, t)] - \mu \frac{Q \omega_n(x_0(t))}{a^2 R^j \omega_n(R)} x_0^j(t) \frac{dx_0^j(t)}{dt} \right\} e^{-a^2 \lambda_n^2 (T-t)} dt,$$

$n=1, 2, \dots; \quad j=0, 1, 2.$

Итак, задача об управлении с минимальной энергией (I)-(4) сведена к нахождению функции $p(t) \in L_2(0, T)$ такой, чтобы она и соответствующие ей решения $u(x, t)$, $x_0(t)$ удовлетворяли системе, состоящей из двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (7) и бесконечной системы уравнений (II), и при этом функционал (4) принимал наименьшее возможное значение. При $\mu = 0$ (нагрев без плавления) система (7) вырождается в одно нелинейное интегральное уравнение относительно $u(x, t)$.

Отметим, что в случае линейной задачи теплопроводности правые части системы (II) известны, и решение задачи об управлении с минимальной энергией сводится к решению бесконечномерной проблемы моментов [3].

Предположим, что для правых частей системы (II) выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty. \quad (12)$$

Последовательности собственных значений $\{\lambda_n^2\}$ краевой задачи (8), определяемых соответственно из уравнений $\lambda \operatorname{tg} \lambda R = h$, (9₁) и (9₂), удовлетворяют условию [6]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty. \quad (13)$$

При выполнении условия (12), (13) решение бесконечномерной проблемы моментов (II), (4) представляется в виде [3]

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 (T-t)}, \quad (14)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом полуинтервале $[0, T-\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < T$, а постоянные p_n определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений, следующей из (II),

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{nk} p_k = b_n, \quad n=1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$M_{nk} = \frac{1}{\alpha^2 (\lambda_n^2 + \lambda_k^2)} [1 - e^{-\alpha^2 (\lambda_n^2 + \lambda_k^2) T}], \quad n, k=1, 2, \dots$$

Выражения для правых частей β_n системы алгебраических уравнений (15) содержат искомые функции $u(r, t)$, $u(R, t)$ и $x_0(t)$, и, таким образом, исходная задача (1)-(4) сводится к нахождению постоянных p_k , $k = 1, 2, \dots$, и функций $u(x, t)$, $x_0(t)$ путем совместного решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (7) и бесконечной системы уравнений (15).

Найти точное решение системы уравнений (7), (15) невозможно. Обычно систему (15) "усекают", заменяя ее конечной системой уравнений

$$\sum_{s=1}^K M_{ns} p_s = \beta_n, \quad n = \overline{1, K}, \quad (16)$$

то есть ищется приближенное решение $p_1^{(K)}, \dots, p_K^{(K)}$ и с его помощью строится K -е приближение управления с минимальной энергией (K - положительное целое число)

$$p_K(t) = \sum_{n=1}^K p_n^{(K)} e^{-a^2 \lambda_n^2 (T-t)} \quad (17)$$

Тогда после исключения $p_s^{(K)}$, $s = \overline{1, K}$, с помощью (16) и подстановки (17) в (7) задача сводится к решению системы двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно $u(x, t)$, $x_0(t)$ и последующего определения постоянных $p_s^{(K)}$, $s = \overline{1, K}$, по формулам

$$p_s^{(K)} = \det M_s^K / \det M^K, \quad s = \overline{1, K}; \quad (18)$$

$$M^K = (M_{nk})_{n,k=1}^K; \quad M_s^K = (Q_{nk}^s)_{n,k=1}^K, \quad Q_{nk}^s = \begin{cases} M_{nk}, & k \neq s, \\ \beta_n, & k = s. \end{cases}$$

Приведенный способ построения приближенного решения бесконечной системы уравнений (15) является, по существу, методом Рунца приближенного решения операторного уравнения с положительным (но не положительно определенным) оператором, поэтому такой способ неустойчив относительно погрешностей в промежуточных вычислениях [3]. Отмеченные недостатки вовсе не означают полную несостоятельность данного метода для решения рассматриваемой задачи, поскольку в отдельных конкретных случаях он оказывается достаточно эффективным.

В данной ситуации, однако, целесообразно искать приближенное решение задачи об управлении с минимальной энергией путем решения вспомогательной задачи, требуя, чтобы искомое управление $p(t, \beta)$ и соответствующее ему решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи (1), (2) минимизировали не функционал (4), а вспомогательный функционал

$$I_{\beta}[p] = \frac{1}{\beta} \int_{\tau}^R [u(x, T) - u_{\tau}(x)]^2 x^j dx + \int_0^T p^2(t) dt, \quad j=0, 1, 2. \quad (4_{\beta})$$

для малых положительных β . При этом, если задача об управлении с минимальной энергией имеет решение $p(t)$, то

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^T [p(t, \beta) - p(t)]^2 dt = 0.$$

Решение сформулированной вспомогательной задачи представляется в виде [3]

$$p(t, \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 (T-t)}, \quad (14_{\beta})$$

где постоянные c_n определяются из бесконечной системы уравнений

$$c_n + \frac{g^2}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} M_{nk} c_k = g^2 b_n, \quad n=1, 2, \dots, \quad (15_{\beta})$$

или в матричной форме

$$(E + \frac{1}{\beta} g^2 M) c = g^2 b,$$

где

$$E = (\delta_{nk})_{n,k=1}^{\infty}, \quad M = (M_{nk})_{n,k=1}^{\infty}, \quad c = (c_k)_{k=1}^{\infty}, \quad b = (b_n)_{n=1}^{\infty}, \\ g^2 = (g_n^2)_{n=1}^{\infty}, \quad g_n^2 = a^2 R^2 |X_n(R)|^2, \quad \delta_{nk} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n. \end{cases}$$

Так как оператор $E + g^2 M / \beta$ положительно определенный, то, не опасаясь неустойчивости, можно заменять бесконечную систему (15_β) конечной и, таким образом, аппроксимировать управление $p(t, \beta)$ при любом малом положительном β

$$P_K(t, \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^K c_n^{(K)} e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 (T-t)} \quad (17_\beta)$$

Для этого необходимо, исключив $c_s^{(K)}$, $s = \overline{1, K}$, подставить (17 $_\beta$) в (7), решить полученную систему двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, а затем найти постоянные $c_s^{(K)}$, $s = \overline{1, K}$:

$$c_s^{(K)} = \det P_s^K / \det (E^K + g_K^2 M^K / \beta), \quad s = \overline{1, K}, \quad (18_\beta)$$

$$E^K = (\delta_{\kappa\kappa})_{n,\kappa=1}^K, \quad P_s^K = (P_{n\kappa}^s)_{n,\kappa=1}^K, \quad g_K^2 = (g_n^2)_{n=1}^K,$$

$$P_{n\kappa}^s = \begin{cases} \delta_{n\kappa} + g_n^2 M_{n\kappa} / \beta, & \kappa \neq s, \\ g_n^2 b_n, & \kappa = s. \end{cases}$$

Итак, для построения приближенных решений задач (1)-(4) и (1), (2), (4 $_\beta$) необходимо решить систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$u(x, t) = u_\lambda(x, t) - \alpha^2 \tau^j \int_0^t G_\tau(x, t-\tau) F_1[u(\tau, \tau)] d\tau +$$

$$+ \alpha^2 R^j \int_0^t G_R(x, t-\tau) \left\{ \sum_{n=1}^K \Phi_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 (T-\tau)} - F_2[u(R, \tau)] \right\} d\tau + \quad (19)$$

$$+ \mu Q \int_0^t G(x, x_0(\tau); t-\tau) x_0^j(\tau) \frac{dx_0(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

$$u(x_0(t), t) = u^*, \quad x_0(0) = R, \quad j = 0, 1, 2, \quad (20)$$

где $\Phi_n = p_n^{(K)}$, $c_n^{(K)} / \beta$, то есть определяются согласно (18) и (18 $_\beta$) через постоянные b_n , $n = \overline{1, K}$, в свою очередь зависящие от искомых функций $u(\tau, t)$, $u(R, t)$, $x_0(t)$. В случае $\mu = 0$ система (19), (20) преобразуется в одно нелинейное интегральное уравнение (19) относительно $u(x, t)$, в котором постоянные b_n зависят только от $u(\tau, t)$ и $u(R, t)$.

Полагая в (19) $x = \rho$, $u(\rho, t) = u_\rho(t)$, $u_\lambda(\rho, t) = u_{\lambda\rho}(t)$, $G_\tau(\rho, t-\tau) =$

$=G_{\tau\rho}(t-\tau)$, $G_R(\rho, t-\tau) = G_{R\rho}(t-\tau)$, $G(\rho, x_0(\tau); t-\tau) = G_\rho(x_0(\tau), t-\tau)$, $\rho = \tau, R$
 приходим к системе трех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно $u_\tau(t)$, $u_R(t)$ и $x_0(t)$

$$\begin{aligned}
 u_\rho(t) = & u_{\lambda\rho}(t) - \alpha^2 \tau^j \int_0^t G_{\tau\rho}(t-\tau) F_1[u_\tau(\tau)] d\tau + \\
 & + \alpha^2 R^j \int_0^t G_{R\rho}(t-\tau) \left\{ \sum_{n=1}^K \Phi_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 (T-\tau)} - F_2[u_R(\tau)] \right\} d\tau + \\
 & + \mu Q \int_0^t G_\rho(x_0(\tau), t-\tau) \alpha_0^j(\tau) \frac{dx_0(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad \rho = \tau, R, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_\lambda(x_0(t), t) = & \alpha^2 \tau^j \int_0^t G_\tau(x_0(t), t-\tau) F_1[u_\tau(\tau)] d\tau + \\
 & + \alpha^2 R^j \int_0^t G_R(x_0(t), t-\tau) \left\{ \sum_{n=1}^K \Phi_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 (T-\tau)} - F_2[u_R(\tau)] \right\} d\tau + \\
 & + \mu Q \int_0^t G(x_0(t), x_0(\tau); t-\tau) \alpha_0^j(\tau) \frac{dx_0(\tau)}{d\tau} d\tau = u^*, \quad x_0(0) = R, \quad j = 0, 1, 2,
 \end{aligned}$$

после решения которой температурное поле $u(x, t)$ внутри области (τ, R) определяется квадратурой (19).

Весьма эффективным методом получения приближенных решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (21) является проекционно-сеточный метод, применяемый в настоящее время для решения самых различных задач математической физики [7]. Воспользуемся его простейшим вариантом - зональным методом, известным в теории интегральных уравнений лучистого теплообмена [8-10]. Аппроксимируем решения системы уравнений (21) кусочно постоянными функциями

$$u_p(t) \approx \sum_{m=1}^M u_{pm} \varphi_m(t), \quad p=z, R; \quad x_o(t) \approx \sum_{m=1}^M x_{om} \varphi_m(t), \quad (22)$$

где $\varphi_m(t) = \mathcal{Z}(t-t_{m-1}) - \mathcal{Z}(t-t_m)$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots < t_M = T$, $\mathcal{Z}(t-t_m)$ - функция Хевисайда; u_{pm} , x_{om} - средние значения $u_p(t)$ и $x_o(t)$ на интервале $t_{m-1} < t < t_m$. Подстановка (22) в (21) и применение метода Бубнова-Галеркина приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений относительно средних значений u_{pm} , x_{om} :

$$\begin{aligned} u_{pm} = & u_{\lambda pm} - \sum_{\kappa=1}^{m-1} [g_{\kappa j pm}^z F_1(u_{z\kappa}) + g_{\kappa j pm}^R F_2(u_{R\kappa})] - \\ & - [g_{j pm}^z F_1(u_{zm}) + g_{j pm}^R F_2(u_{Rm})] + \sum_{\kappa=1}^K G_{\kappa j pm} \Phi_{\kappa} + \\ & + \mu [\sum_{\kappa=1}^{m-1} g_{\kappa j pm} (x_{o\kappa-1}, x_{o\kappa}, x_{o\kappa+1}) + g_{j pm} (x_{om-1}, x_{om})], \quad p=z, R; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u_{\lambda m}(x_{om}) = & \sum_{\kappa=1}^{m-1} [g_{\kappa j m}^z(x_{om}) F_1(u_{z\kappa}) + g_{\kappa j m}^R(x_{om}) F_2(u_{R\kappa})] - \\ & - [g_{j m}^z(x_{om}) F_1(u_{zm}) + g_{j m}^R(x_{om}) F_2(u_{Rm})] + \sum_{\kappa=1}^K G_{\kappa j m}(x_{om}) \Phi_{\kappa} + \\ & + \mu [\sum_{\kappa=1}^{m-1} g_{\kappa j m}(x_{om}, x_{o\kappa-1}, x_{o\kappa}, x_{o\kappa+1}) + g_{j m}(x_{om-1}, x_{om})] = u^*, \quad m=\overline{1, M}; \quad j=0, 1, 2, \end{aligned}$$

где $u_{\lambda pm}$ и $u_{\lambda m}(x_{om})$ - средние значения $u_{\lambda p}(t)$ и $u_{\lambda}(x_o(t), t)$ на интервале $t_{m-1} < t < t_m$,

$$g_{\kappa j pm}^{\rho} = \frac{\alpha_{\rho}^j}{\Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{t_{\kappa-1}}^{t_{\kappa}} G_{\rho, \rho}(t-\tau) d\tau dt, \quad \Delta_m = t_m - t_{m-1},$$

$$g_{j\beta m}^{\rho_i} = \frac{a^2 \rho_i^j}{\Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{t_{m-1}}^t G_{\rho_i \rho} (t-\tau) d\tau dt, \quad \rho_i = z, R;$$

$$G_{k\beta m} = \frac{a^2 R^j}{\Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_0^t G_{R\rho} (t-\tau) e^{-a^2 \lambda_k^2 (T-\tau)} d\tau dt;$$

$$g_{kjm}^{\rho_i} = \frac{a^2 \rho_i^j}{\Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} G_{\rho_i} (x_{0m}, t-\tau) d\tau dt,$$

$$g_{jm}^{\rho_i} = \frac{a^2 \rho_i^j}{\Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{t_{m-1}}^t G_{\rho_i} (x_{0m}, t-\tau) d\tau dt, \quad \rho_i = z, R;$$

$$G_{kjm} = \frac{a^2 R^j}{\Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_0^t G_R (x_{0m}, t-\tau) e^{-a^2 \lambda_k^2 (T-\tau)} d\tau dt; \quad (24)$$

$$g_{k\beta m} = \frac{Q x_{0k}}{2 \Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} [(x_{0k} - x_{0k-1}) G_p (x_{0k}, t-t_{k-1}) + \\ + (x_{0k+1} - x_{0k}) G_p (x_{0k}, t-t_k)] dt;$$

$$g_{j\beta m} = \frac{Q x_{0m}}{2 \Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} [(x_{0m} - x_{0m-1}) G_p (x_{0m}, t-t_{m-1}) - x_{0m} G_p (x_{0m}, t-t_m)] dt;$$

$$g_{kjm} = \frac{Q x_{0k}}{2 \Delta_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} [(x_{0k} - x_{0k-1}) G (x_{0m}, x_{0k}; t-t_{k-1}) +$$

$$+ (x_{\sigma_{k+1}} - x_{\sigma_k}) G(x_{\sigma_m}, x_{\sigma_k}; t - t_k) dt ;$$

$$g_{jm} = \frac{Q x_{\sigma_m}^j}{2 \Delta_m t_{m-1}} \int_{t_{m-1}}^{t_m} [(x_{\sigma_m} - x_{\sigma_{m-1}}) G(x_{\sigma_m}, x_{\sigma_{m-1}}; t - t_{m-1}) - x_{\sigma_m} G(x_{\sigma_m}, x_{\sigma_m}; t - t_m)] dt.$$

Выражения для ϑ_n с учетом (22) принимают вид

$$\begin{aligned} \vartheta_n = & \frac{\omega_n(u_{Tn} - u_{\Lambda n})}{a^2 R^j \omega_n(R)} + \frac{1}{\lambda_n^2 a^2} \sum_{k=1}^M \left[\left(\frac{r}{R} \right)^j \frac{\omega_n(r)}{\omega_n(R)} F_1(u_{rk}) + \right. \\ & \left. + F_2(u_{rk}) \right] \left[e^{-a^2 \lambda_n^2 (T - t_k)} - e^{-a^2 \lambda_n^2 (T - t_{k-1})} \right] - \\ & - \mu \frac{Q}{2 a^2 R^j \omega_n(R)} \sum_{k=1}^M x_{\sigma_k}^j \omega_n(x_{\sigma_k}) [(x_{\sigma_k} - x_{\sigma_{k-1}}) e^{-a^2 \lambda_n^2 (T - t_{k-1})} + \\ & + (x_{\sigma_{k+1}} - x_{\sigma_k}) e^{-a^2 \lambda_n^2 (T - t_k)}], \quad n = \overline{1, K}; \quad j = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

При вычислении $u_{\Lambda n}$, u_{Tn} и постоянных (24) достаточно ограничиться конечными рядами.

Выбранная система базисных функций $\varphi_m(t)$ осуществляет кусочно непрерывную аппроксимацию решений системы нелинейных интегродифференциальных уравнений (21). Соответствующим выбором $\varphi_m(t)$ [7] можно осуществить непрерывную аппроксимацию, однако система нелинейных алгебраических уравнений (23) при этом значительно усложняется.

Для $p(t) = p(t, \beta)$ из первого уравнения системы (7) при $t = T$ находим

$$u(x, T) = \sum_{n=1}^{\infty} [u_{Tn} - a^2 R^j X_n^{-1}(R) c_n] X_n(x), \quad j = 0, 1, 2, \quad (25)$$

и, следовательно, минимальное значение функционала (4 β) равно

$$I_{\beta \min} = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta_n \quad (26)$$

Предложенный алгоритм решения системы нелинейных интегродифференциальных уравнений (21) позволяет аппроксимировать управление $p(t)$ либо сразу по формуле (17), либо сначала приближенно находить управление $p(t, \beta)$, а затем, уменьшая β , все более точно вычислять управление с минимальной энергией. В последнем случае метод построения приближенного решения задачи устойчив относительно малых погрешностей в промежуточных вычислениях.

Численное решение системы нелинейных алгебраических уравнений (23) в случае $j = 0$, $\mu = 0$ (нагрев пластины) реализовано на ЭВМ ЕС-1060. Расчеты проводились при следующих входных данных: $R = 0,1 \text{ м}$; $T = 500 \text{ сек.}; 1000 \text{ сек.}$; $\lambda = 55 \text{ Вт/м} \cdot \text{°К}$; $\alpha^2 = 2 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек}$; $\alpha = 4,12 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1} \cdot \text{°К}^{-3}$; $h = 60 \text{ м}^{-1}$; $u^* = 2750 \text{ °К}$; $u_0(x) = u_c(t) \equiv 0$; $u_T(x) = z_0 + (u^* - z_0)x/R$, где $z_0 = 392,7$.

Приближенное определение управления с минимальной энергией осуществлено с помощью формулы (17_β) при $\beta \rightarrow 0$. Результаты расчетов при $M = 4$, $K = 10$ и различных значениях β для $T = 500 \text{ сек.}$; $T = 1000 \text{ сек.}$ представлены соответственно на рисунках 1 и 2 кривыми зависимости плотности мощности теплового потока $q(t) = \lambda p(t)$ от времени. Из графиков следует, что результаты вычислений с помощью формулы (17), показанные здесь кривыми 1 ($K = 8$), практически совпадают с результатами, полученными из (17_β) при $\beta \leq 10^{-10}$. Вычисление минимального значения функционала (4_β) согласно (26) показывает (таблица 1), что при решении системы (23) достаточно ограничиться значениями $10 \leq K \leq 20$. В то же время ряд

$$I_{\min} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \beta_n,$$

задающий минимальное значение функционала (4), расходится. Сравнение значений заданного распределения температуры $u_T(x)$ и значений $u(x, T)$, получаемых с помощью ряда (25), при $K = 10$ и различных β приведено в табл. 2. Достаточно высокая точность совпадения результатов достигается при $\beta \leq 10^{-9}$. При $T = 500 \text{ с.}$

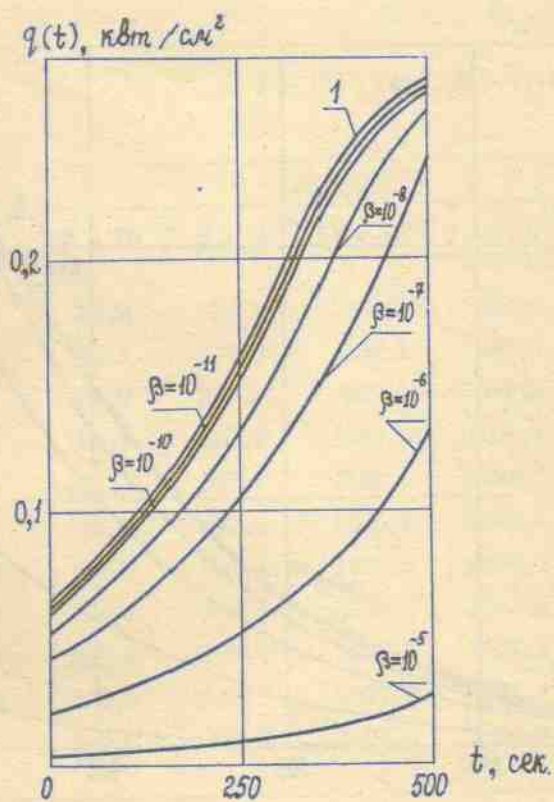


Рис. I

плотность мощности теплового потока $q(t)$ изменяется в пределах $0,06 \text{ кВт}/\text{см}^2 \leq q(t) \leq 0,26 \text{ кВт}/\text{см}^2$, при $T = 1000 \text{ сек.}$ - $0,01 \text{ кВт}/\text{см}^2 \leq q(t) \leq 0,26 \text{ кВт}/\text{см}^2$, а из сравнения минимальных значений функционала (4 β) для этих двух значений T вытекает, что с точки зрения оптимизации энергозатрат предпочтение следует отдать случаю $T = 1000 \text{ сек.}$

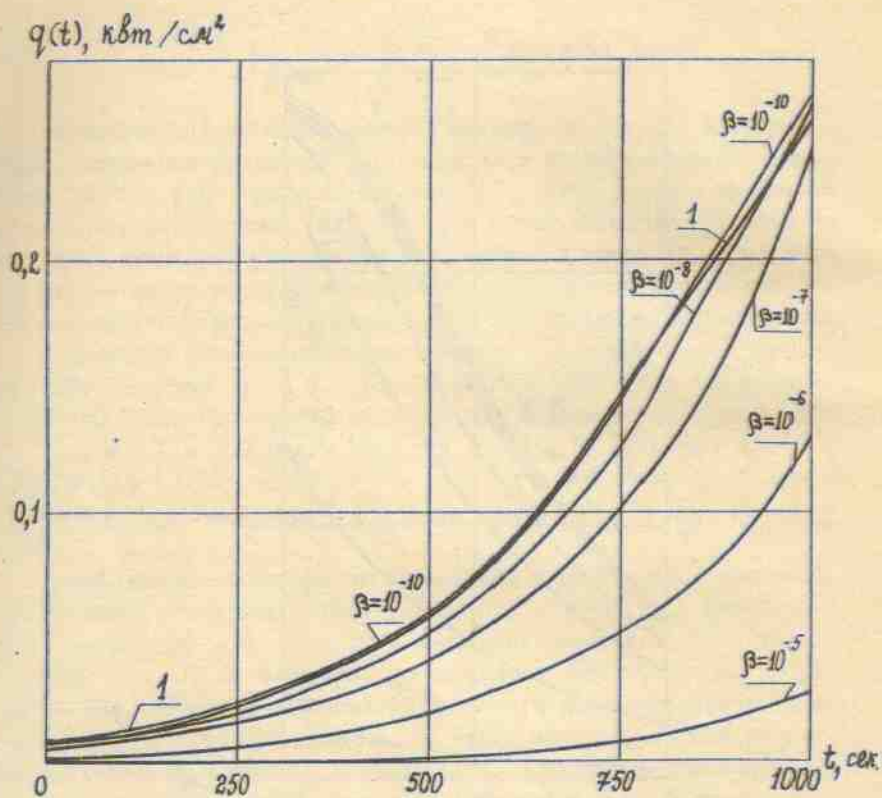


Рис. 2

K	$I_{\text{вк}}$	K	$I_{\text{вк}}$
2	291 823 550 464	11	292 201 103 360
3	292 169 842 688	12	292 201 037 824
4	292 197 302 272	13	292 201 037 824
5	292 200 382 464	14	292 200 906 752
6	292 201 234 432	15	292 200 841 216
7	292 201 168 896	16	292 200 775 680
8	292 200 906 752	17	292 200 775 680
9	292 201 168 896	18	292 200 775 680
10	292 201 103 360	19	292 200 775 680

ТАБЛИЦА I

$T = 500 \text{ сек.};$
 $M = 4, \beta = 10^{-7}$

ТАБЛИЦА 2

T = 1000 сек., M = 4, K = 10

x, см	$u_T(x), ^\circ\text{K}$	$u(x, T), ^\circ\text{K}$				
		$\beta = 10^{-5}$	$\beta = 10^{-6}$	$\beta = 10^{-8}$	$\beta = 10^{-10}$	$\beta = 10^{-11}$
0	392,7	27,2	157,1	368,0	368,0	369,6
1	628,4	45,1	247,5	585,2	628,0	630,2
2	864,2	61,9	351,2	817,3	859,3	861,4
3	1099,9	81,9	452,6	1047,0	1101,7	1102,5
4	1335,6	101,4	571,1	1293,4	1334,0	1333,6
5	1571,4	125,0	691,6	1536,7	1575,4	1574,1
6	1607,1	149,0	833,4	1791,6	1804,7	1804,1
7	2042,8	178,4	983,3	2035,8	2045,1	2045,9
8	2278,5	209,0	1157,5	2277,0	2274,3	2274,5
9	2514,3	248,5	1354,2	2507,2	2521,9	2522,0
10	2750	280,6	1526,7	2691,8	2700,0	2700,1

Список литературы

1. Березовский А.А., Вигак В.М., Жерновой Д.В. Оптимальное управление нестационарным температурным полем пластины при электронно-лучевой гарнисажной плавке. - Киев, 1984. - 28 с. - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; № 84.68).
2. Березовский А.А., Довбня В.Д. Математические модели тепловых процессов в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Нелинейные краевые задачи. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. - С. 41-57.

3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.- М.: Наука, 1978.- 464 с.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением.- М.: Наука, 1968.- 476 с.
5. Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н. Оптимальное управление нагревом металла.- М.: Metallургия, 1972.- 439 с.
6. Левитан В.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию.- М.: Наука, 1970.- 671 с.
7. Марчук Г.И., Агашков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы.- М.: Наука, 1981.- 416 с.
8. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением.- М.: Мир, 1975.- 936 с.
9. Суринов Ю.С. Интегральные уравнения теплового излучения и методы расчета лучистого теплообмена в системах "серых" тел, разделенных диатермической средой.- Изв. АН СССР, ОТН, -1948, - № 7, с. 981-1002.
10. Фаворский О.Н., Каданер Я.С. Вопросы теплообмена в космосе.- М.: Высшая школа, 1967.- 257 с.