АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И УПРУГОСТИ

Препринт 82.II

Киев - 1982

УДК 517.9:539.3:534.I

Ю.В.Жерновой

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО НЕРАСТЯЖИМОГО КОЛЬЦА ПРИ ПОМОЩИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Как известно, неустойчивое верхнее положение физического маятника становится устойчивым при достаточно быстрых вибрациях точки подвеса [I]. Это интересное явление, открытое Н.Н.Боголюбовым, позволило В.Н.Челомею установить принципиально важный эффект повышения устойчивости упругих систем при действии на них продольных высокочастотных сил [2]. В настоящей работе рассматривается вопрос о повышении статической устойчивости упругого нерастяжимого кольца под воздействием высокочастотного гидростатического давления.

Пусть кольцо, недеформированной формой которого является окружность радиуса a , подвергается действию гидростатического давления с линейной плотностью, изменяющейся во времени по гармоническому закону $P(t)=P_0+P_1\cos\omega t$.

Задача о динамической устойчивости такого кольца приводит к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения [3]

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial s^4}+\left[1+\frac{a^3}{EJ}P(t)\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}+\frac{\rho a^4}{EJ}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=F\left(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial s},\dots,\frac{\partial^4\psi}{\partial s^4},\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \qquad (I)$$

с условиями периодичности по s

$$\psi(s+2\pi,t)=\psi(s,t), \qquad (2)$$

$$\int_0^{2\pi}\cos[s+\psi(s,t)]ds=\int_0^{2\pi}\sin\, s+\psi(s,t)\; ds=0 \qquad (3)$$

и граничным условием

$$\psi(0,t)=0, \qquad (4)$$

связанным с фиксацией системы координат. Нелинейность F в правой части уравнения (I) имеет вид

$$F=\frac{\partial^3\psi}{\partial s^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}-\left[\frac{\partial^4\psi}{\partial s^4}+3\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\right]\frac{\partial\psi}{\partial s}-$$

$$
-\frac{\rho a^4}{EJ}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+2\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2\int_0^s\left[\left(\frac{\partial\psi(\xi,t)}{\partial t}\right)^2\cos(s-\xi+\psi(s,t)-\psi(\xi,t))-\right.\right.
$$

$$
\left.-\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial t^2}\sin(s-\xi+\psi(s,t)-\psi(\xi,t))\right]d\xi-\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\int_0^s\left[\left(\frac{\partial\psi(\xi,t)}{\partial t}\right)^2\times\right.
$$

$$
\left.\left.\times\sin(s-\xi+\psi(s,t)-\psi(\xi,t))+\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial t^2}\cos(s-\xi+\psi(s,t)-\psi(\xi,t))\right]d\xi\right\}. \tag{5}
$$

Здесь $\psi(s,t)=\theta(as,t)-s,\ s=s_1/a$, где θ - угол между касательной к кольцу и положительным направлением оси x, s_1 - длина дуги, EJ - изгибная жесткость, ρ - линейная плотность материала кольца.

Не обращая пока внимания на условия (3), (4), рассмотрим задачу отыскания периодических по переменной s решений уравнения (I). Эта задача сводится к эквивалентному интегро-дифференциальному уравнению

$$
\psi(s,t)=\frac{a^3}{EJ}\int_0^{2\pi}\left[P(t)\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial\xi^2}+\rho a\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial t^2}\right]K(s,\xi)\,d\xi=
$$

$$
=\int_0^{2\pi}F\left(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\dots,\frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4},\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)K(s,\xi)\,d\xi. \tag{6}
$$

Здесь $K(s,\xi)$ - обобщенная функция Грина

$$
\begin{gathered}
\frac{d^4K}{\partial s^4}+\frac{d^2K}{\partial s^2}=\delta(s-\xi)-\frac{1}{\pi}\cos(s-\xi)-\frac{1}{2\pi},\quad 0<s,\ \xi<2\pi,\\
K(0,\xi)=K(2\pi,\xi),\quad \frac{d^iK(0,\xi)}{ds^i}=\frac{d^iK(2\pi,\xi)}{ds^i},\quad i=1,2,3,\\
\int_0^{2\pi}K(s,\xi)\,ds=\int_0^{2\pi}K(s,\xi)\cos s\,ds=\int_0^{2\pi}K(s,\xi)\sin s\,ds=0,
\end{gathered} \tag{7}
$$

для которой имеет место представление как в виде билинейной формы

$$
K(s,\xi)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n(s-\xi)}{n^2(n^2-1)}, \tag{8}
$$

так и в замкнутом виде

$$
K(s,\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\begin{cases}(s-\xi+\pi)\sin(s-\xi)+\frac{5}{2}\cos(s-\xi)+2\cos s-\pi(s-\xi)-\frac{1}{2}(s-\xi)^2-\frac{1}{3}\pi^2+1, & 0\le s\le\xi,\\ (s-\xi+\pi)\sin(s-\xi)+\frac{5}{2}\cos(s-\xi)+2\cos s+\pi(s-\xi)-\frac{1}{2}(s-\xi)^2-\frac{1}{3}\pi^2+1, & \xi\le s\le 2\pi.\end{cases} \tag{9}
$$

В силу известных свойств обобщенной функции Грина [4] решение интегро-дифференциального уравнения (6) определяется неоднозначно. Для однозначной характеристики физического процесса необходимо присоединить к нему еще три дополнительных условия. В качестве последних естественно взять условия (3),(4).

Из условий периодичности(2) следует, что $\psi(s,t)$ должна быть периодической функцией по s с периодом $2\pi/_n$, n =I,2,... . Однако [5] , случай n =I несовместим с самими условиями (2), то есть не существует деформированного кольца, удовлетворяющего условиям (2), для которого функция $\psi(s,t)$ имеет 2π наименьшим периодом.

Покажем, что периодическая по s функция $\psi(s,t)=\psi(s+2\pi/n\,,t)$, n =2,3,..., автоматически удовлетворяет условиям (3). Действительно,

$$\int_0^{2\pi}\cos[s+\psi(s,t)]ds=\int_0^{2\pi/n}\cos[s+\psi(s,t)]ds+\int_{2\pi/n}^{4\pi/n}\cos[s+\psi(s,t)]ds+\ldots+\int_{2\pi(n-1)/n}^{2\pi}\cos[s+\psi(s,t)]ds=$$

$$=\int_0^{2\pi/n}\left\{\cos[s+\psi(s,t)]+\cos\left[s+\psi(s,t)+\frac{2\pi}{n}\right]+\ldots+\cos\left[s+\psi(s,t)+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right]\right\}ds=$$

$$=\int_0^{2\pi/n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n}\cdot\cos[s+\psi(s,t)]-\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n}\cdot\sin\left[s+\psi(s,t)\right]\right\}ds=0,$$

так как $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n}=0\,,\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n}=0\,,\quad n=2,3,\ldots$.

Аналогично устанавливается, что $\int_0^{2\pi}\sin\, s+\psi(s,t)\ ds=0$.

Таким образом, исходная задача (I) — (4) допускает эквивалентную формулировку (6),(4).

В линейной постановке задачи интегро-дифференциальное уравнение (6) принимает вид

$$\psi(s,t)+\frac{a^3}{EJ}P(t)\int_0^{2\pi}K(s,\xi)\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial\xi^2}d\xi+\frac{\rho a^4}{EJ}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial^2\phi(\xi,t)}{\partial t^2}-\right.$$

$$\left.-2\int_0^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial t^2}\sin(\xi-\zeta)d\zeta\right]K(s,\xi)d\xi=0\,,\qquad\psi(0,t)=0. \tag{I0}$$

В стационарном случае, когда P_1 =0, получаем однородное интегро-дифференциальное уравнение статической устойчивости упругого нерастяжимого кольца, подвергаемого действию постоянного гидростатического давления

$$\psi(s)+\lambda\int_0^{2\pi}K(s,\xi)\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2}d\xi=0,\quad \psi(0)=0, \tag{II}$$

где $\lambda=\frac{a^3P_0}{EJ}$. Это уравнение имеет отличные от нуля решения

$$\psi_n(s)=A_n\sin ns,\quad n=2,3,\dots, \tag{I2}$$

(A_n – произвольные постоянные) только при $\lambda=n^2-1,\ n=2,3,\dots$. Эти значения λ определяют эйлеровы критические силы

$$P_{кр.(n)}=\frac{EJ}{a^3}(n^2-1),\quad n=2,3,\dots, \tag{I3}$$

которым соответствуют формы потери устойчивости (I2). В случае, когда $P_0=P_1=0$, из (I0) следует линейное уравнение свободных колебаний кольца

$$\psi(s,t)+\frac{\rho a^4}{EJ}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial t^2}-2\int_0^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial t^2}\sin(\xi-\zeta)d\xi\right]K(s,\xi)d\xi=0,\ \ \psi(0,t)=0, \tag{I4}$$

которое после подстановки $\psi(s,t)=\psi(s)\cos\Omega_0 t$, где Ω_0 – частота собственных колебаний ненагруженного кольца, преобразуется в следующее функциональное уравнение:

$$\psi(s)-\frac{\rho a^4}{EJ}\Omega_0^2\int_0^{2\pi}\left[\psi(\xi)-2\int_0^{\xi}\psi(\xi)\sin(\xi-\zeta)d\zeta\right]K(s,\xi)d\xi=0,\ \ \psi(0)=0. \tag{I5}$$

Решение уравнения (I5) можно свести к решению однородной системы алгебраических уравнений. Для этого подставим в (I5) билинейную форму (8) и изменим порядок суммирования и интегрирования. Тогда, учитывая условие $\psi(0)=0$, (I5) преобразуется к виду

$$\psi(s)=\frac{\rho a^4}{\pi EJ}\Omega_0^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n\sin ns, \tag{I6}$$

где

$$a_n=\frac{1}{n^2(n^2-1)}\int_0^{2\pi}\left[\psi(\xi)\sin(\xi-\zeta)d\xi\right]\sin n\xi\, d\xi. \tag{I7}$$

Подставляя (I6) в (I7), приходим к диагональной системе алгебраических уравнений, которая определяет бесконечный дискретный ряд частот свободных колебаний кольца

$$\Omega^2_{0(n)}=\frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}\cdot\frac{EJ}{\rho a^4},\quad n=2,3,\dots. \tag{I8}$$

Вернемся к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению (G).

Правая часть этого уравнения существенно нелинейна. Считая, что колебания кольца достаточно малы, произведем частичную геометрическую линеаризацию уравнения (6), ограничиваясь членами порядка ψ^3. В результате приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\psi(s,t)+\frac{a^3}{EJ}P(t)\int_0^{2\pi}K(s,\xi)\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial\xi^2}\,d\xi+\frac{\rho a^4}{EJ}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial t^2}-$$

$$-2\int_0^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\xi,t)}{\partial t^2}\sin(\xi-\zeta)\,d\zeta\Big]K(s,\xi)\,d\xi=\int_0^{2\pi}\tilde F\Big(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\ldots,\frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4},\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\Big)K(s,\xi)\,d\xi, \tag{6'}$$

где

$$\tilde F\Big(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial s},\ldots,\frac{\partial^4\psi}{\partial s^4},\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\Big)=\frac{\partial^3\psi}{\partial s^3}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}-\Big[\frac{\partial^4\psi}{\partial s^4}+3\Big(1+\frac{\partial\psi}{\partial s}\Big)\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\Big]\frac{\partial\psi}{\partial s}-$$

$$-\frac{\rho a^4}{EJ}\Big\{\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\int_0^s\Big[2\Big(\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)^2\Big)\cos(s-\xi)+\psi\Big(\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)^2\Big)\sin(s-\xi)\Big]d\xi-$$

$$-\Big(2\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\Big)\int_0^s\Big[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\cos(s-\xi)+\Big(\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)^2\Big)\sin(s-\xi)\Big]d\xi+ \tag{5'}$$

$$+\Big[\psi\Big(\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\Big)-2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial s}\Big)^2\Big]\int_0^s\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\sin(s-\xi)\,d\xi-4\psi\frac{\partial\psi}{\partial s}\int_0^s\cos(s-\xi)\,d\xi+$$

$$+4\frac{\partial\psi}{\partial s}\int_0^s\Big[\Big(\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)^2\Big)\cos(s-\xi)-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\sin(s-\xi)\Big]d\xi\Big\}.$$

Решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения (6′) сводится к решению бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений. Действительно, подставляя (8) в (6′) и учитывая условие (4), получаем

$$\psi(s,t)=\sum_{n=2}^{\infty}\varphi_n(t)\sin ns, \tag{19}$$

где $\varphi_n(t)$ определяется из соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ограничиваясь первым приближением

$$\psi(s,t)=\varphi(t)\sin 2s, \tag{20}$$

исследуем потерю устойчивости упругого нерастяжимого кольца, соответствующую первой эйлеровской форме. Тогда для $\varphi(t)$ получаем следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка;

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\Omega_0^2\left(\alpha-\frac{P_1}{P_{кр.}}\cos\omega t\right)F_1(\varphi)+F_2\left(\varphi,\frac{d\varphi}{dt}\right)=0, \qquad (21)$$

определяющее динамическую устойчивость кольца. Здесь $\alpha=1-P_0/P_{кр.}$,

$P_{кр.}=P_{кр.(2)}=\frac{3EJ}{a^4}$, $\quad \Omega_0^2=\Omega_{0(2)}^2=\frac{36}{5}\frac{EJ}{\rho a^4}$, $\quad F_1(\varphi)=25\cdot\frac{\varphi}{g_1(\varphi)}$,

$F_2\left(\varphi,\frac{d\varphi}{dt}\right)=-\left[25\Omega_0^2\varphi^3+\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\cdot\left[g_1(\varphi)\right]^{-1}$, $\quad g_1(\varphi)=44\varphi^2+25$.

Будем предполагать, что частота возбуждения ω значительно превосходит частоту свободных колебаний Ω_0. Тогда, с введением малого параметра $\varepsilon=(\Omega_0/\omega)^2\ll 1$ и безразмерного времени $\tau=\omega t$, уравнение (2I) можно записать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\varepsilon\left(\alpha-\frac{P_1}{P_{кр.}}\cos\tau\right)F_1(\varphi)-\varepsilon\left[\Omega_0^2 g_1(\varphi)\right]^{-1}\cdot\left[25\Omega_0^2\varphi^3+\omega^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right]=0. \qquad (22)$$

Учитывая малость ε, решение $\varphi(t)$ можно приближенно представить как суперпозицию плавно изменяющейся функции φ_0 и малого вибрационного члена $(\Delta P/P_{кр})\varphi_0$, выражающего быстрые колебания системы около значения $\varphi=\varphi_0$ [2,6]

$$\varphi=\varphi_0+\frac{\Delta P}{P_{кр.}}\varphi_0 . \qquad (23)$$

Величину ΔP ищем в виде [7,8] $\Delta P=B_1\cos\tau+B_2\sin\tau$.

Подставим (23) в уравнение (22), пренебрегая величинами $d\varphi_0/d\tau$, $d^2\varphi/d\tau^2$. После умножения полученного при этом равенства соответственно на $\cos\tau$ и $\sin\tau$ и интегрирования по периоду в первом приближении находим

$$B_1=-25\frac{\varepsilon P_1}{g_1 P_0}, \quad B_2=0, \quad \Delta P=-25\frac{\varepsilon P_1}{g_1(\varphi_0)}\cos\tau. \qquad (24)$$

Учитывая (23) и (24), усредним уравнение (2I) по явно содержащемуся времени t. Тогда в первом приближении получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi_0}{dt^2}+\Omega_0^2\left[\alpha+\frac{\varepsilon P^2}{2P_{кр.}^2}F_1'(\varphi_0)\right]F_1(\varphi_0)+F_2\left(\varphi_0,\frac{d\varphi_0}{dt}\right)=0, \qquad (25)$$

где штрих обозначает дифференцирование по φ_0.

Квазистатические решения $\varphi_0=const$ определяются из уравнения

$$f_1(\varphi_0)\varphi_0=0, \qquad (26)$$

где $f_1(\varphi_0) = -\left[44^2\varphi_0^6 + 88(25-22\alpha)\varphi^4 + 25(25+22\frac{\varepsilon P_1^2}{P_{кр.}^2} - 88\alpha)\varphi_0^2 - 25^2(\alpha + \frac{\varepsilon P_1^2}{2P_{кр.}^2})\right]$.
Одно из них тождественно равно нулю, а нахождение остальных сводится к отысканию положительных корней кубического уравнения

$$44^2 z^3 + 88(25-22\alpha)z^2 + 25(25+22\frac{\varepsilon P_1^2}{P_{кр.}^2} - 88\alpha)z - 25^2(\alpha + \frac{\varepsilon P_1^2}{2P_{кр.}^2}) = 0. \quad (27)$$

Каждый из этих корней определяет два квазистатических решения, отличающиеся знаком: $\varphi_0^2 = z$.

Для исследования устойчивости квазистатических решений полагаем $\varphi_0 = \varphi_0 + \delta\varphi_0$ и составляем уравнение в вариациях относительно малых отклонений $\delta\varphi_0$:

$$\frac{d^2\delta\varphi_0}{dt^2} + 25\Omega_0^2\left\{\left[f_2(\varphi_0)\right]^{-2} \cdot \left[(f_1(\varphi_0)\varphi_0)' f_2(\varphi_0) - f_1(\varphi_0)\varphi_0 f_2'(\varphi_0)\right]\right\}\delta\varphi_0 = 0. \quad (28)$$

Здесь $f_2(\varphi_0) = [g_1(\varphi_0)]^3$, а штрих, как и выше, обозначает дифференцирование по φ_0. Из (28) следует условие устойчивости квазистатических решений

$$(f_1(\varphi_0)\varphi_0)' > 0. \quad (29)$$

Для квазистатического решения $\varphi_{01} = 0$ условие (29) упрощается: $f_1(\varphi_0) > 0$. Из вида функции $f_1(\varphi_0)$ заключаем, что условием устойчивости неискривленной формы кольца является

$$\frac{P_0}{P_{кр.}} - 1 < \frac{\varepsilon P_1^2}{2P_{кр.}^2}. \quad (30)$$

Очевидно, что это условие справедливо для P_0 равных и даже незначительно превосходящих критическую статическую силу $P_{кр.}$.

Для квазистатических решений $\varphi_0 \neq 0$, соответствующих искривленным формам, условие (29) преобразуется к виду $f_1'(\varphi_0)\varphi_0 > 0$. Подставляя в него $\varphi_0^2 = z$, получаем

$$g(z)z < 0, \quad \text{т.е.} \quad g(z) < 0, \quad (31)$$

где $g(z) = 3 \cdot 44^2 z^2 + 176(25-22\alpha)z + 25(25 + 22\frac{\varepsilon P_1^2}{P_{кр}^2} - 88\alpha)$.

Кубическое уравнение (27) имеет три различных действительных корня при выполнении условия

$$\mathcal{D} - (25+44\alpha)^2 - 1650\frac{\varepsilon P_1^2}{P_{кр.}^2} > 0. \quad (32)$$

В противном случае ($\mathcal{D} \leq 0$) оно будет иметь только один действительный корень (или три кратных корня). Действительно, исследуя уравнение экстремальной кривой $g(z) = 0$, видим, что при выполнении условия (32) оно имеет два различных действительных корня, что соответствует двум экстремальным точкам, а, следовательно, трем различным действительным корням уравнения (27).

Учитывая знаки коэффициентов уравнения (27), приходим к выводу, что наличие у него положительных корней возможно только в случае, когда выполнено условие (32). При этом уравнение (27) не может иметь двух и более положительных корней, а для существования одного должно дополнительно выполняться условие (30). Отметим, что выполнение условий (32) и (30) зависит от соотношений между величинами $\alpha = 1 - P_0/P_{кр.}$, P_1 и $P_{кр.}$.

Легко доказать, что единственный положительный корень z_1 уравнения (27) не удовлетворяют условию устойчивости (31). Действительно, пусть $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ – корни уравнения $g(z)=0$, тогда его можно записать как $(z-\tilde{z}_1)(z-\tilde{z}_2)=0$. Условие (31) перепишется в виде $(z-\tilde{z}_1)\times(z-\tilde{z}_2)<0$, т.е. будет выполняться только для тех z, для которых $\tilde{z}_1 > z$, $z > \tilde{z}_2$; $\tilde{z}_1 < z < \tilde{z}_2$. Следовательно, значение z должно находиться между двумя экстремальными точками уравнения (27). Значение же единственного положительного корня не может удовлетворять этому требованию.

Квазистатические решения $\varphi_{02} = -\sqrt{z_1}$, $\varphi_{03} = \sqrt{z_1}$ определяют неустойчивое равновесное состояние искривленного кольца.

I. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, I963. -4I0 с.
2. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. – ДАН СССР, I956, II0, №3, с.345-347.
3. Жерновой Ю.В. Уравнение изгибных колебаний упругого гибкого кольца.– В кн.: Нелинейные краевые задачи. Киев, I980, с.I20-I23.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. т.I.–М.–Л.: Гостехиздат, I95I. – 476 с.
5. Таджбах И. Формы изгиба упругих колец.– В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.:Мир,I974,с.46-62.
6. Березовский А.А., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории параметрических колебаний сжатых гибких пластин.– В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., I974, с.II9-I3I.
7. Митропольский Ю.А., Березовский А.А., Тургунов Н. О повышении устойчивости гибкой круглой пластинки при помощи высокочастотных сжимающих усилий.– Укр.мат.журн.,I974, 26, №3, с.402-408.
8. Шулежко Л.Ф. Исследование динамической устойчивости гибких пластинок и оболочек в нелинейной постановке, находящихся под воздействием периодических сил высокой частоты.– В кн.: Труды семинара по мат. физике и нелинейным колебаниям, т.I, вып. I. Киев, I963, с.I35-I69.