Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 1979. – Вип. 14. — С. 45 – 48.

УДК 517.913

Ю. В. Жерновий, В. Г. Костенко

ЛІНІЙНІ ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ, ІНТЕГРОВАНІ У ЗАМКНУТІЙ ФОРМІ

Выделена совокупность линейных обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка, интегрируемых в замкнутой форме, и приведена схема определения фундаментальной системы их решений.

Мета нашої роботи полягає в тому, щоб з усіх лінійних звичайних диференціальних рівнянь п'ятого порядку виділити сукупність тих, фундаментальну систему розв'язків яких можна знайти у замкнутій формі і дати схему визначення цих розв'язків.

Відомо [2], що рівняння

$$y^{(\vee)} + A(x)y''' + B(x)y'' + C(x)y' + D(x)y = 0 \tag{1}$$

може бути інваріантним лише відносно групи перетворень з операторами виду

$$\begin{gathered} X_1 = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + 2\xi'(x)y\frac{\partial}{\partial y}\,, \\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}\,, \end{gathered} \tag{2}$$

а коефіцієнти рівняння (1) при цьому повинні визначатися співвідношеннями

$$\begin{gathered} A(x) = \xi^{-2}(x)\big[c_1 - 10\xi''(x)\xi(x) + 5\xi'^2(x)\big], \quad B(x) = c_2\xi^{-3}(x) + 1,5A'(x), \\ C(x) = \big(c_3 - 3c_2\xi'(x)\big)\xi^{-4}(x) + 0,9A''(x) + \big(0,4A(x)\big)^2, \\ D(x) = \big[c_4 - 2c_3\xi'(x) + 2c_2\big(2\xi'^2(x) - \xi''(x)\xi(x)\big)\big]\xi^{-5}(x) + 0,2A'''(x) + 0,16A(x)A'(x), \end{gathered} \tag{3}$$

де $\xi(x)$ – довільна достатньо гладка функція; c_1, c_2, c_3, c_4 – довільні сталі.

Зауважимо, що виділена сукупність рівнянь (1) з умовами (3) містить лінійні рівняння п'ятого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо $\xi(x) = const$, і рівняння Ейлера, якщо $\xi(x) = x$.

Рівняння (1) з умовами (3) у канонічних змінних

$$\varphi = \int\limits_{x_0}^{x} \xi^{-1}(t)\,dt, \quad \chi = \ln\frac{y}{\xi^2(x)} \tag{4}$$

групи перетворень (2) набере вигляду

$$\begin{gathered} \chi^{(\vee)} + 5\chi'\chi^{(I\vee)} + 10(\chi''\chi''' + \chi'^2\chi''' + \chi'^3\chi'') + 15\chi'\chi''^2 + \\ + c_1(\chi''' + 3\chi'\chi'' + \chi'^3) + c_2(\chi'' + \chi'^2) + \chi'^5 + c_3\chi' + c_4 = 0\,. \end{gathered}$$

Провівши в останньому послідовно заміну

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = u(\varphi), \quad \frac{du}{d\varphi} = \rho(u),$$

матимемо

$$\begin{gathered}\rho^3\rho''' + 4\rho^2\rho'\rho'' + 5u\rho^2\rho'' + \rho\rho'^3 + 5u\rho\rho'^2 + 10\rho(\rho\rho' + u\rho\rho' + u^3) + \\ +15u\rho^2 + c_1(\rho\rho' + 3u\rho + u^3) + +c_2(\rho + u^2) + u^5 + c_3u + c_4 = 0\,.\end{gathered} \tag{1'}$$

Шукаючи розв'язок рівняння $(1')$ у вигляді $\rho(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$, одержимо для визначення α, β, γ систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{gathered}24\alpha^4 + 50\alpha^3 + 35\alpha^2 + 10\alpha + 1 = 0, \quad (6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha + 1)\beta = 0, \\ 50\alpha^2\beta^2 + 40\alpha^3\gamma + 75\alpha\beta^2 + 80\alpha^2\gamma + 50\alpha\gamma + 10\gamma + 25\beta^2 + 2c_1\alpha^2 + 3c_1\alpha + c_1 = 0, \\ 60\alpha^2\beta\gamma + 15\alpha\beta^3 + 100\alpha\beta\gamma + 15\beta^3 + 40\beta\gamma + 3c_1\alpha\beta + 3c_1\beta + c_2\alpha + c_2 = 0, \\ 16\alpha^2\gamma^2 + 22\alpha\beta^2\gamma + \beta^4 + 30\alpha\gamma^2 + 25\beta^2\gamma + 15\gamma^2 + 2c_1\alpha\gamma + c_1\beta^2 + c_2\beta + c_3 = 0, \\ 8\alpha\beta\gamma^2 + \beta^3\gamma + 10\beta\gamma^2 + c_1\beta\gamma + c_2\gamma + c_4 = 0\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Із перших двох рівнянь цієї системи випливає, що α може набувати значення: -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ при довільних β і $-\frac{1}{4}$ при $\beta = 0$. У зв'язку з цим система (5) розпадається на три системи для визначення β і γ при $\alpha = -1$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ і на чотири системи для знаходження γ при $\alpha = -1$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$ і $\beta = 0$.

Розв'язуючи кожну з цих систем і повертаючись до зміннних x, y, одержуємо в кожному випадку

$$y(x, x_0) = \xi^2(x) \exp \chi\big(\varphi(x, x_0)\big). \tag{6}$$

У зображення функції $\chi\big(\varphi(x, x_0)\big)$ входить певна кількість довільних сталих інтегрування, коефіцієнти при яких у (6) дають, принаймні, два лінійно незалежних розв'язки рівняння (1) з умовами (3). Понижуючи порядок рівняння (1) за допомогою цих розв'язків, одержимо лінійне рівняння не вище третього порядку, яке інтегрується у замкненій формі [1]. Легко переконатись, що визначена таким чином сукупність п'яти розв'язків рівняння (1) з умовами (3) утворює фундаментальну систему розв'язків.

Залежно від співвідношень між сталими c_1, c_2, c_3, c_4, що входять в умови (3), а також між коренями допоміжних алгебраїчних рівнянь, які виникають як наслідки системи (5), одержано тридцять два різні випадки і їм відповідні фундаментальні системи розв'язків рівняння (1) з умовами (3).

Наприклад, якщо $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $c_4 + c_2^2c_3 - c_1c_2c_4 = 0$, $-\frac{c_1}{c_2} = a^2 > 0$ і корені δ_1, δ_2, δ_3 рівняння $\delta^3 + (c_1 + a^2)\delta - c_2 = 0$ задовольняють нерівність $\delta_2\delta_3 - \frac{1}{4}\delta_1^2 = \tilde{a}^2 > 0$, то фундаментальна система розв'язків відповідного рівняння (1) з умовами (3) має вигляд

$$\begin{gathered}y_1(x, x_0) = \xi^2(x) \exp\big[a\,\varphi(x, x_0)\big]; \\ y_2(x, x_0) = \xi^2(x) \exp\big[-a\,\varphi(x, x_0)\big]; \\ y_3(x, x_0) = \xi^2(x) \cos\big[\tilde{a}\,\varphi(x, x_0)\big] \exp\big[\delta_1\varphi(x, x_0)/2\big]; \\ y_4(x, x_0) = \xi^2(x) \sin\big[\tilde{a}\,\varphi(x, x_0)\big] \exp\big[\delta_1\varphi(x, x_0)/2\big]; \\ y_5(x, x_0) = \xi^2(x) \exp\big[-\delta_1\varphi(x, x_0)\big],\end{gathered}$$

де $\varphi(x, x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \xi^{-1}(t)\,dt$.

1. *Костенко Е. С.* Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10,** № 10.

2. *Lie Sophus.* Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. – Leipzig, 1891.