НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
Институт математики АН УССР, Киев, 1980

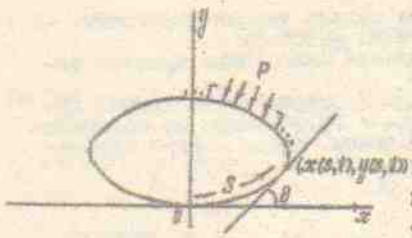
УДК 517.946.9

Ю.В.Жерновой

УРАВНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ГИБКОГО КОЛЬЦА

Получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка, определяющее напряженное и деформированное состояние упругого нерастяжимого кольца при гидростатическом давлении.

Рассмотрим упругое нерастяжимое кольцо, подвергаемое действию гидростатического давления с линейной плотностью $p = p(t)$, изменяющейся во времени.



Недеформированной формой кольца считаем окружность радиуса a. Геометрия кольца показана на рисунке. Здесь s обозначает длину дуги, а $\theta(s,t)$ – угол между касательной к кольцу и положительным направлением оси x. Декартовы координаты $x(s,t)$, $y(s,t)$ частицы s кольца удовлетворяют соотношениям

$$x_s(s,t) = \cos\theta(s,t), \qquad y_s(s,t) = \sin\theta(s,t), \tag{1}$$

где индекс обозначает дифференцирование по s. Систему координат фиксируем требованиями $x(0,t)=0$, $y(0,t)=0$,

$$\theta(0,t) = 0. \tag{2}$$

Величины, определяющие деформацию кольца, должны, очевидно, удовлетворять следующим условиям:

$$\theta(s+2\pi a, t) = \theta(s,t) + 2\pi, \tag{3}$$

$$x(s+2\pi a, t) = x(s,t), \qquad y(s+2\pi a, t) = y(s,t). \tag{4}$$

Учитывая соотношения (1), равенства (4) можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi a} \cos\theta(s,t)\,ds = \int_0^{2\pi a} \sin\theta(s,t)\,ds = 0. \tag{5}$$

Пренебрегая деформацией кручения, рассмотрим изгибные колебания кольца. Для получения уравнения колебаний воспользуемся принципом Гамильтона. Потенциальная энергия кольца имеет вид [I]

$$V(t) = U(t) - U_1(t), \tag{6}$$

где $U(t) = \frac{1}{2} EJ \int_0^{2\pi a} \left[\theta_s(s,t) - \frac{1}{a}\right]^2 ds$ представляет энергию деформации кольца (E – модуль упругости, J – момент инерции), а $U_1(t) = -p(t)\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a} (x(s,t) y_s(s,t) - x_s(s,t) y(s,t))\, ds - \pi a^2\right]$ – работа внешних сил. Кинетическая энергия кольца определяется интегралом

$$T(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi a} \left[x_t^2(s,t) + y_t^2(s,t)\right] ds , \tag{7}$$

где ρ – линейная плотность кольца. Согласно принципу Гамильтона, действительные движения кольца $\theta(s,t)$ минимизируют функционал

$$I(x,y,\theta) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{2\pi a} F(s,t,x,y,\theta,x_s,y_s,\theta_s,x_t,y_t)\, ds\, dt , \tag{8}$$

где

$$2F = \rho\left[x_t^2(s,t) + y_t^2(s,t)\right] - EJ\left[\theta_s(s,t) - \frac{1}{a}\right]^2 - p(t)\left[x(s,t) y_s(s,t) - x_s(s,t) y(s,t) - 2\pi a^2\right], \tag{9}$$

при дифференциальных связях (I). Как известно [2] , задача на условный экстремум (8), (I) сводится к задаче на экстремум для вспомогательного функционала

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{2\pi a} \left[F + \lambda_1(s,t)(x_s - \cos\theta(s,t)) + \lambda_2(s,t)(y_s - \sin\theta(s,t))\right] ds\, dt , \tag{I0}$$

в котором при помощи переменных множителей $\lambda_1(s,t)$ и $\lambda_2(s,t)$ введены дифференциальные связи (I). Уравнения Эйлера для функционала (I0), соответствующие переменным x, y, θ , выписываются в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{2} p(t) y(s,t) + \lambda_1(s,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho x_t(s,t)\right] + \frac{1}{2} p(t) y_s(s,t) = 0 , \\ \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{1}{2} p(t) x(s,t) + \lambda_2(s,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho y_t(s,t)\right] - \frac{1}{2} p(t) x_s(s,t) = 0 , \\ EJ \frac{\partial}{\partial s}\left[-\theta_s(s,t) + \frac{1}{a}\right] - \lambda_1(s,t) \sin\theta(s,t) + \lambda_2(s,t) \cos\theta(s,t) = 0. \end{gathered} \tag{II}$$

Из первых двух уравнений находим:

$$\lambda_1(s,t) = -p(t) y(s,t) - \rho \int_0^s x_{tt}(\xi,t)\, d\xi + \mu_1 ,$$

$$\lambda_2(s,t) = p(t)x(s,t) - \rho\int_0^s y_{tt}(\xi,t)d\xi - \mu_2 \,, \qquad (I2)$$

где μ_1 , μ_2 – произвольные постоянные. Подставляя найденные выражения для $\lambda_1(s,t)$ и $\lambda_2(s,t)$ в последнее уравнение системы (II) и используя соотношения (I), получаем

$$-EJ\theta_{ss}(s,t) + p(t)\int_0^s \cos[\theta(s,t)-\theta(\xi,t)]d\xi - \rho\int_0^s\int_0^\xi [\theta_t^2(\alpha,t)\sin[\theta(s,t)-\theta(\alpha,t)] +$$

$$+\theta_{tt}(\alpha,t)\cos[\theta(s,t)-\theta(\alpha,t)]]d\alpha\, d\xi = \mu_1\sin\theta(s,t) + \mu_2\cos\theta(s,t) \,. \qquad (I3)$$

Последовательным дифференцированием из уравнения (I3) можно исключить μ_1 и μ_2 . При этом получаем следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение движения кольца

$$EJ\left[\left(\frac{\theta_{sss}(s,t)}{\theta_s(s,t)}\right)_s + \theta_{ss}(s,t)\theta_s(s,t)\right] - p(t)\left(\frac{1}{\theta_s(s,t)}\right)_s + \rho\frac{1}{\theta_s(s,t)}\theta_{tt}(s,t) +$$

$$+2\rho\int_0^s\left[\theta_t^2(\xi,t)\cos[\theta(s,t)-\theta(\xi,t)] - \theta_{tt}(\xi,t)\sin[\theta(s,t)-\theta(\xi,t)]\right]d\xi +$$

$$+\rho\left(\frac{1}{\theta_s(s,t)}\right)_s\cdot\int_0^s\left[\theta_t^2(\xi,t)\sin[\theta(s,t)-\theta(\xi,t)] + \theta_{tt}(\xi,t)\cos[\theta(s,t)-\theta(\xi,t)]\right]d\xi = 0 \,. \qquad (I4)$$

Перейдем к безразмерной независимой переменной $s_1 = \frac{s}{a}$ и введем новую функцию $\psi(s_1,t) = \theta(s,t) - \frac{s}{a} = \theta(as_1,t) - s_1$. Тогда, опуская индекс "I", уравнение (I4) и условия (2), (3), (5) перепишем в виде

$$\psi_{ssss}(s,t) - \frac{\psi_{ss}(s,t)}{1+\psi_s(s,t)}\psi_{sss}(s,t) + (1+\psi_s(s,t))^2\psi_{ss}(s,t) + \frac{a^3}{EJ}\left\{p(t)\cdot\frac{\psi_{ss}(s,t)}{1+\psi_s(s,t)} +\right.$$

$$+\rho a\psi_{tt}(s,t) + 2\rho a(1+\psi_s(s,t))\int_0^s[\psi_t^2(\xi,t)\cos(s-\xi+\psi(s,t)-\psi(\xi,t)) -$$

$$-\psi_{tt}(\xi,t)\sin(s-\xi+\psi(s,t)-\psi(\xi,t))]d\xi - \rho a\frac{\psi_{ss}(s,t)}{1+\psi_s(s,t)}\int_0^s[\psi_t^2(\xi,t)\sin(s-\xi+$$

$$\left.+\psi(s,t)-\psi(\xi,t)) + \psi_{tt}(\xi,t)\cos(s-\xi+\psi(s,t)-\psi(\xi,t))]d\xi\right\} = 0 \,; \qquad (I5)$$

$$\psi(0,t) = 0, \quad \psi(s+2\pi,t) = \psi(s,t) \,,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos[s+\psi(s,t)]ds = \int_0^{2\pi}\sin[s+\psi(s,t)]ds = 0 \,. \qquad (I6)$$

В предположении малости деформаций кольца ($\psi_s \ll 1$) приходим к соответствующей линейной задаче

$$\psi_{ssss}(s,t)+\psi_{ss}(s,t)+\frac{a^3}{EJ}\Big\{p(t)\psi_{ss}(s,t)+\rho a\psi_{tt}(s,t)-2\rho a\int_0^s\psi_{tt}(\xi,t)\times \\ \times\sin(s-\xi)\,d\xi\Big\}=0\,; \tag{I5'}$$

$$\psi(0,t)=0\,,\quad \psi(s+2\pi,t)=\psi(s,t)\,,\quad \int_0^{2\pi}\psi(s,t)\sin s\,ds=\int_0^{2\pi}\psi(s,t)\cos s\,ds=0\,. \tag{I6'}$$

При рассмотрении конкретных задач решения полученных уравнений должны удовлетворять определенным начальным условиям или условиям периодичности по времени t .

Уравнения равновесия изгиба упругого нерастяжимого кольца в линейной и нелинейной постановке вытекают из (I5) – (I6′), если принять, что $\psi=\psi(s)$, $\psi_t=\psi_{tt}=0$

$$\psi_{ssss}(s)-\frac{\psi_{ss}(s)}{1+\psi_s(s)}\,\psi_{sss}(s)+(1+\psi_s(s))^2\psi_{ss}(s)+\frac{a^3}{EJ}p\,\frac{\psi_{ss}(s)}{1+\psi_s(s)}=0\,, \tag{I7}$$

$$\psi(0)=0\,,\quad \psi(s+2\pi)=\psi(s)\,,\quad \int_0^{2\pi}\cos[s+\psi(s)]\,ds=\int_0^{2\pi}\sin[s+\psi(s)]\,ds=0\,; \tag{I8}$$

$$\psi_{ssss}(s)+\left(1+p\frac{a^3}{EJ}\right)\psi_{ss}(s)=0\,, \tag{I7'}$$

$$\psi(0)=0\,,\quad \psi(s+2\pi)=\psi(s)\,,\quad \int_0^{2\pi}\psi(s)\sin s\,ds=\int_0^{2\pi}\psi(s)\cos s\,ds=0\,. \tag{I8'}$$

В соответствующей безразмерной форме задача (I7), (I8) исследована в работе [3].

I. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. ч.I. – Киев: Наук.думка, 1976.–452 с.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. т.I. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 476 с.
3. Таджбахш И. Формы изгиба упругих колец. – В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения.–М.: Мир, 1974, с.46–62.