ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ | VISNYK LVIV UNIV
Сер. прикл. матем. та інформ. | Ser. Appl. Math. Comp. Sci.
2008. Вип.14. С. 82-92 | 2008. No14. P. 82-92

УДК 519.212

СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ІМОВІРНОСТЕЙ СТАНІВ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВИМУШЕНИМИ ПЕРЕРВАМИ В РОБОТІ

Я. Єлейко, Ю. Жерновий

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: mstat@franko.lviv.ua

Для одноканальної системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги і вимушеними перервами в роботі після n обслуговувань поспіль визначено ймовірності станів граничного стаціонарного процесу у випадку показникового розподілу часу між моментами надходження замовлень та довільно розподіленого часу обслуговування.

Ключові слова: одноканальна система масового обслуговування з вимушеними перервами в роботі, граничний стаціонарний процес, розподіл імовірностей.

1. ВСТУП

У випадку, коли час обслуговування – довільно розподілена випадкова величина, а потік замовлень найпростіший, існування граничного стаціонарного процесу для одноканальної *системи масового обслуговування* (СМО) з необмеженою чергою доведено методом вкладених ланцюгів Маркова [2, с. 98]. Для СМО M/G/1/m ймовірності станів граничного стаціонарного процесу визначено в [4, с. 235].

Нижче розглянуто СМО M/G/1/m, особливістю якої є те, що після n обслуговувань поспіль оголошується вимушена перерва в роботі системи. Необхідність такої перерви може бути зумовлена технологічними або іншими причинами. Наприклад, технічний пристрій, який послідовно виконує однорідні операції, час початку кожної з яких залежить від випадкових чинників, під час проектування може бути розрахований на обмежену кількість операцій, які виконуються без перерви між операціями.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ. ЗАГАЛЬНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ ІМОВІРНОСТЕЙ

Розглянемо одноканальну СМО, для якої кількість місць у черзі не може перевищувати числа m. Нехай проміжки часу T_λ між моментами надходження замовлень у систему – незалежні випадкові величини, розподілені згідно з показниковим законом з параметром λ. Математичне сподівання випадкової величини T_λ позначимо через m_λ: $M(T_\lambda) = m_\lambda = 1/\lambda$. Припустимо також, що тривалості обслуговування замовлень – незалежні однаково розподілені випадкові величини T_μ з довільною функцією розподілу $F_\mu(t)$. Тоді інтенсивність потоку обслуговувань $\mu = 1/m_\mu$, де $m_\mu = M(T_\mu) = \int_0^\infty t\, dF_\mu(t)$.

Особливість функціонування СМО, яку ми розглядаємо, полягає в тому, що кожного разу після n обслуговувань, виконаних поспіль, оголошується вимушена перерва у роботі системи, яка триває випадковий час T_ν. Випадкова величина T_ν розподілена за довільним законом $F_\nu(t)$, а її математичне сподівання

$$m_\nu = M(T_\nu) = \int_0^\infty t\,dF_\nu(t).$$

Замовлення, які на момент оголошення перерви перебувають у черзі, залишаються в системі і чекають на відновлення обслуговування. За наявності вільних місць у черзі новоприбулі замовлення потрапляють у чергу і під час перерви.

Отже, СМО, яку ми розглядаємо, відрізняється від звичайної СМО з обмеженою кількістю місць у черзі тим, що для неї кількість замовлень, обслуговування яких відбувається одне за одним без перерви, не може перевищувати числа n.

Випадок $n = 1$, коли вимушена перерва настає після кожного обслуговування, розглядати немає сенсу, оскільки його можна звести до дослідження СМО M/G/1/m (див. [4, с. 235]), якщо умовно вважати, що час обслуговування є випадкова величина $T_\mu + T_\nu$. Тому припускатимемо надалі, що $n \ge 2$.

Уведемо подвійну нумерацію станів системи: $s_{j(i)}$ – стан j рівня i. Тут j – кількість замовлень, що перебувають у системі; значення $i = \overline{1, n}$ відповідають станам системи, коли відбувається обслуговування i-го за порядком замовлення після періоду простою системи, значення $i = n+1$ відповідає станам системи під час вимушеної перерви; $s_{0(1)}$ – стан, коли система вільна. Отже, всього є $n(m+1)+m+2$ стани: $s_{j(1)}$ $\left(j = \overline{0, m+1}\right)$, $s_{j(i)}$ $\left(i = \overline{2, n};\ j = \overline{1, m+1}\right)$, $s_{j(n+1)}$ $\left(j = \overline{0, m}\right)$.

Припустимо, що в початковий момент часу система перебуває у стані $s_{0(1)}$. Нехай $N(t)$ – номер стану, у якому перебуває система у момент часу t. Для процесу $N(t)$ побудуємо ланцюг Маркова, який дасть змогу дослідити еволюцію СМО у часі. Позначимо через t_k $(k = 1, 2, \ldots)$ момент завершення обслуговування k-го обслуженого замовлення, а через $N_k = N(t_k + 0)$ – номер того стану, до якого переходить система після завершення обслуговування цього замовлення. Тут уточнимо: якщо після завершення обслуговування k-го замовлення настає вимушена перерва, то за момент t_k приймаємо не момент завершення обслуговування, а момент завершення перерви.

Переконаємося в тому, що послідовність $\{N_k\}$ утворює ланцюг Маркова.

Нехай $\varDelta_k$ – кількість замовлень, які надійшли в систему за час T_μ обслуговування k-го обслуженого замовлення; $\tilde{\varDelta}_k$ – кількість замовлень, які надійшли в систему за час $T_\mu + T_\nu$, що дорівнює сумі часу обслуговування k-го замовлення і часу вимушеної перерви після його обслуговування. Проаналізуємо переходи зі стану до стану за один крок у послідовності $\{N_k\}$.

Якщо $N_{k-1} = 0(1)$ (подвійна нумерація) або $N_{k-1} = 1(i)$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ і $\varDelta_k = 0$, то $N_k = 0(1)$. Якщо $N_{k-1} = C_{k-1}(1)$, то $N_k = C_k(2)$, де

$$C_k = \begin{cases} \varDelta_k, & C_{k-1} = 0, \quad 0 < \varDelta_k \le m; \\ m, & C_{k-1} = 0, \quad \varDelta_k > m; \\ C_{k-1} + \varDelta_k - 1, & C_{k-1} > 0, \quad 0 < C_{k-1} + \varDelta_k - 1 \le m; \\ m, & C_{k-1} > 0, \quad C_{k-1} + \varDelta_k - 1 > m. \end{cases} \tag{1}$$

Якщо $N_{k-1} = C_{k-1}(i)$ $\left(i = \overline{2, n-1}\right)$, то $N_k = C_k(i+1)$, де

$$C_k = \min\left\{C_{k-1} + \varDelta_k - 1; m\right\}. \tag{2}$$

Якщо ж $N_{k-1} = C_{k-1}(n)$, то $N_k = C_k(1)$, де

$$C_k = \min\left\{C_{k-1} + \tilde{\varDelta}_k - 1; m\right\}. \tag{3}$$

Оскільки залишок часу від моменту завершення обслуговування $(k-1)$-го замовлення або від моменту завершення вимушеної перерви після його обслуговування до моменту надходження до системи чергового замовлення розподілений за показниковим законом і, отже, не залежить від поведінки системи до моменту t_{k-1}, то випадкові величини $\varDelta_k$ і $\tilde{\varDelta}_k$ не залежать від минулого, тому рівності (1) - (3) доводять марковську властивість послідовності $\{N_k\}$.

Множина станів ланцюга Маркова N_k складається з $nm+1$ стану: $s_{j(1)}$ $\left(j = \overline{0, m}\right)$, $s_{j(i)}$ $\left(i = \overline{2, n};\ j = \overline{1, m}\right)$.

З урахуванням того, що зі станів рівня i $s_{j(i)}$ для $j = \overline{2, m}$, $i = \overline{1, n-1}$ можливий безпосередній перехід лише до станів рівня $i+1$, зі станів рівня n – лише до станів першого рівня, а також неможливості безпосереднього переходу до стану $s_{0(1)}$ зі всіх станів, крім $s_{0(1)}$ і $s_{1(i)}$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$, за формулою повної імовірності для $k = 1, 2, \ldots$ отримаємо рівності:

$$\begin{aligned} P\left\{N_{k+1} = 0(1)\right\} = P\left\{N_{k+1} = 0(1) \mid N_k = 0(1)\right\} P\left\{N_k = 0(1)\right\} + \\ + \sum_{s=1}^{n} P\left\{N_{k+1} = 0(1) \mid N_k = 1(s)\right\} P\left\{N_k = 1(s)\right\}; \end{aligned}$$

$$P\left\{N_{k+1} = j(1)\right\} = \sum_{s=1}^{m} P\left\{N_{k+1} = j(1) \mid N_k = s(n)\right\} P\left\{N_k = s(n)\right\} \quad \left(j = \overline{1, m}\right); \tag{4}$$

$$P\left\{N_{k+1} = j(2)\right\} = \sum_{s=0}^{m} P\left\{N_{k+1} = j(2) \mid N_k = s(1)\right\} P\left\{N_k = s(1)\right\} \quad \left(j = \overline{1, m}\right);$$

$$P\left\{N_{k+1} = j(i)\right\} = \sum_{s=1}^{m} P\left\{N_{k+1} = j(i) \mid N_k = s(i-1)\right\} P\left\{N_k = s(i-1)\right\} \quad \left(j = \overline{1, m};\ i = \overline{3, n}\right).$$

Перехідні ймовірності $p^{(k)}_{j(i)s(l)} = p_{j(i)s(l)} = P\left\{N_{k+1} = j(i) \mid N_k = s(l)\right\}$ не залежать від номера обслуженого замовлення k, а визначені з урахуванням значень випадкових величин $\Delta_k = \Delta,\ \tilde{\Delta}_k = \tilde{\Delta},$ що свідчить про однорідність ланцюга Маркова $\{N_k\}$.

На підставі ергодичної теореми для однорідного незвідного ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів ([3, с. 61] або [1, с. 67]), можемо стверджувати, що існують границі

$$\pi_{j(i)} = \lim_{k\to\infty} P\{N_k = j(i)\} \quad \left(i = 1,\ j = \overline{0,m};\ \ i = \overline{2,n},\ j = \overline{1,m}\ \right).$$

Після переходу до границі в рівностях (4) одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення ймовірностей $\pi_{j(i)}$:

$$\begin{aligned}
&\pi_{0(1)} = \alpha_0\left(\pi_{0(1)} + \sum_{k=1}^{n-1}\pi_{1(k)}\right) + \alpha_0\beta_0\pi_{1(n)};\\
&\pi_{j(1)} = \sum_{k=1}^{j+1}\pi_{k(n)}\sum_{l=0}^{j+1-k}\alpha_l\beta_{j+1-k-l} \quad \left(j = \overline{1,\ m-1}\right);\\
&\pi_{m(1)} = \sum_{k=1}^{m}\pi_{k(n)}\left(1 - \sum_{l=0}^{m-k}\alpha_l\sum_{s=0}^{m-k-l}\beta_s\right);\\
&\pi_{j(2)} = \alpha_j\pi_{0(1)} + \sum_{k=1}^{j+1}\alpha_{j+1-k}\pi_{k(1)} \quad \left(j = \overline{1,\ m-1}\right);\\
&\pi_{m(2)} = \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\right)\pi_{0(1)} + \sum_{k=1}^{m}\left(1 - \sum_{l=0}^{m-k}\alpha_l\right)\pi_{k(1)};\\
&\pi_{j(i)} = \sum_{k=1}^{j+1}\alpha_{j+1-k}\pi_{k(i-1)} \quad \left(j = \overline{1,\ m-1};\ \ i = \overline{3,n}\right);\\
&\pi_{m(i)} = \sum_{k=1}^{m}\left(1 - \sum_{l=0}^{m-k}\alpha_l\right)\pi_{k(i-1)} \quad \left(i = \overline{3,n}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

яку необхідно розв'язувати разом з умовою нормування

$$\sum_{j=0}^{m}\pi_{j(1)} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{m}\pi_{j(i)} = 1.$$

У (5) використано такі позначення: α_j – імовірність того, що в найпростішому потоці інтенсивності λ за час T_μ відбудеться j подій, β_j – аналогічна ймовірність для часу T_ν, тобто

$$\alpha_j = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dF_\mu(t), \qquad \beta_j = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dF_\nu(t).$$

Уведемо позначення: $p_{j(i)}(t) = P\{N(t) = j(i)\}$, $p_{j(i)} = \lim_{t\to\infty} p_{j(i)}(t)$. Доведемо, що, знаючи розв'язки системи (5), можна визначити деякі зі стаціонарних імовірностей $p_{j(i)}$, а також стаціонарні значення характеристик СМО, яку ми розглядаємо.

Проаналізуємо роботу системи на дуже великому проміжку часу *T*. Якщо $N(T)$ – кількість замовлень, що надійшли на вхід системи за час *T* (враховуючи втрачені замовлення), $N_{\text{обс}}(T)$- кількість обслужених замовлень за цей час, то виконується наближена рівність

$$T \approx m_\lambda N(T) \approx \left(m_\lambda \pi_{0(1)} + m_\nu \sum_{k=1}^{m} \pi_{k(n)} + m_\mu \right) N_{\text{обс}}(T). \qquad (6)$$

Рівність (6) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу *T* розглядаємо. Виразивши з (6) відношення $N_{\text{обс}}(T)/N(T)$ і перейшовши до границі при $T \to \infty$, зможемо визначити стаціонарне значення ймовірності обслуговування замовлення, що надійшло на вхід системи,

$$P_{\text{обс}} = \lim_{T\to\infty} \frac{N_{\text{обс}}(T)}{N(T)} = \frac{m_\lambda}{m_\lambda \pi_{0(1)} + m_\nu \sum_{k=1}^{m} \pi_{k(n)} + m_\mu} = \frac{1}{\pi_{0(1)} + \lambda \left(m_\nu \sum_{k=1}^{m} \pi_{k(n)} + m_\mu \right)} = \frac{1}{Z},$$

де $Z = \pi_{0(1)} + \lambda \left(m_\nu \sum_{k=1}^{m} \pi_{k(n)} + m_\mu \right)$.

Оскільки $T_{0(1)}(T) \approx m_\lambda \pi_{0(1)} N_{\text{обс}}(T)$– сумарний (за час *T*) час перебування системи у стані $s_{0(1)}$, то стаціонарну ймовірність перебування системи у цьому стані визначимо за допомогою граничного переходу

$$p_{0(1)} = \lim_{T\to\infty} \frac{T_{0(1)}(T)}{T} = \frac{m_\lambda \pi_{0(1)}}{m_\lambda \pi_{0(1)} + m_\nu \sum_{k=1}^{m} \pi_{k(n)} + m_\mu} = \frac{\pi_{0(1)}}{Z}.$$

Середній час перебування системи в кожному зі станів $s_{1(1)}, \ldots, s_{1(n)}$ можна обчислити як математичне сподівання мінімальної з двох випадкових величин T_λ і T_μ:

$$M(T_{1(i)}) = M\left(\min\{T_\lambda,\, T_\mu\}\right) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - F_\mu(t)\right)dt + \int_0^\infty t p_\mu(t) e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} F_\mu(t) dt + \frac{\alpha_1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right) + \frac{\alpha_1}{\lambda} = \frac{1-\alpha_0}{\lambda} \qquad \left(i = \overline{1,\, n}\right).$$

Тут $p_\mu(t)$– щільність розподілу ймовірностей випадкової величини T_μ, а інтеграл $\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} F_\mu(t) dt$ обчислено інтегруванням частинами.

Отже, сумарний (за час *T*) час перебування системи в стані $s_{1(i)}$

$$T_{1(i)}(T) \approx \frac{(1-\alpha_0)\pi_{1(i)}}{\lambda} N_{\text{обс}}(T) \qquad \left(i = \overline{1,\, n}\right),$$

тому

$$p_{1(i)} = \lim_{T\to\infty}\frac{T_{1(i)}(T)}{T} = \frac{(1-\alpha_0)\pi_{1(i)}}{\lambda\left(m_\lambda\pi_{0(1)} + m_\nu\sum_{k=1}^{m}\pi_{k(n)} + m_\mu\right)} = \frac{(1-\alpha_0)\pi_{1(i)}}{Z} \qquad \left(i=\overline{1,\,n}\right).$$

Виконаємо аналогічний граничний перехід і обчислимо стаціонарне значення ймовірності настання вимушеної перерви у роботі системи

$$P_{\text{пер}} = \sum_{k=0}^{m} p_{k(n+1)} = \frac{m_\nu\sum_{k=1}^{m}\pi_{k(n)}}{m_\lambda\pi_{0(1)} + m_\nu\sum_{k=1}^{m}\pi_{k(n)} + m_\mu} = \frac{\lambda m_\nu\sum_{k=1}^{m}\pi_{k(n)}}{Z}. \qquad (7)$$

За допомогою отриманих формул для стаціонарних імовірностей можна визначити середню кількість зайнятих каналів (коефіцієнт використання одноканальної СМО):

$$\overline{k} = 1 - p_{0(1)} - \sum_{k=0}^{m} p_{k(n+1)} = 1 - \frac{\pi_{0(1)} + \lambda m_\nu\sum_{k=1}^{m}\pi_{k(n)}}{Z} = \frac{\lambda m_\mu}{Z}$$

і ймовірність того, що довжина черги дорівнює m

$$\sum_{k=1}^{n} p_{m+1(k)} + p_{m(n+1)} = 1 - P_{\text{обс}} = \frac{Z-1}{Z}.$$

3. СМО З ОДНИМ МІСЦЕМ У ЧЕРЗІ

Для СМО з одним місцем у черзі $(m=1)$ можна обчислити ще деякі стаціонарні ймовірності станів, а також середню довжину черги $\overline{r}$ і середній час перебування у черзі $\overline{t_r}$.

Справді, оскільки $P_{\text{обс}} = p_{0(1)} + p_{0(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} p_{1(k)}$, а $p_{0(n+1)} + p_{1(n+1)} = P_{\text{пер}}$, і остання ймовірність обчислюємо за формулою (7), то

$$p_{0(n+1)} = P_{\text{обс}} - \left(p_{0(1)} + \sum_{k=1}^{n} p_{1(k)}\right), \qquad p_{1(n+1)} = P_{\text{пер}} - p_{0(n+1)}.$$

З умови нормування $P_{\text{обс}} + p_{1(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} p_{2(k)} = 1$ можна обчислити ймовірність наявності черги під час роботи системи: $\sum_{k=1}^{n} p_{2(k)} = 1 - P_{\text{обс}} - p_{1(n+1)}$. Середня довжина черги

$$\overline{r} = 1 - P_{\text{обс}} = \frac{m_\nu\pi_{1(n)} + m_\mu - \dfrac{1-\pi_{0(1)}}{\lambda}}{m_\lambda\pi_{0(1)} + m_\nu\pi_{1(n)} + m_\mu}.$$

За допомогою формули для $\overline{r}$ визначимо середній час перебування замовлення у черзі

$$\overline{t_r} = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{r}T}{N_{\text{обс}}(T)} = m_\mu + m_\nu \pi_{1(n)} - \frac{1-\pi_{0(1)}}{\lambda}.$$

Для випадку $m=1$ система алгебричних рівнянь (5) разом з умовою нормування набуває простого вигляду

$$\pi_{0(1)} = \alpha_0 \left(\pi_{0(1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \pi_{1(k)} \right) + \alpha_0\beta_0\pi_{1(n)};$$

$$\pi_{1(1)} = (1-\alpha_0\beta_0)\pi_{1(n)}; \qquad \pi_{1(2)} = (1-\alpha_0)\left(\pi_{0(1)} + \pi_{1(1)}\right);$$

$$\pi_{1(i)} = (1-\alpha_0)\pi_{1(i-1)} \quad \left(i=\overline{3,n}\right); \qquad \pi_{0(1)} + \sum_{k=1}^{n} \pi_{1(k)} = 1,$$

а її розв'язки можна записати у компатній формі:

$$\pi_{0(1)} = \frac{1-(1-\alpha_0\beta_0)(1-\alpha_0)^{n-1}}{(1-\alpha_0)^{n-1}} \cdot \pi_{1(n)}; \qquad \pi_{1(1)} = (1-\alpha_0\beta_0)\pi_{1(n)};$$

$$\pi_{1(k)} = \frac{\pi_{1(n)}}{(1-\alpha_0)^{n-k}} \quad \left(k=\overline{2,n-1}\right); \qquad \pi_{1(n)} = \frac{\alpha_0(1-\alpha_0)^{n-1}}{1-(1-\alpha_0)^n}.$$

4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ (5) ДЛЯ $m \ge 2$

Для випадку $m=n=2$ система алгебричних рівнянь (5) разом з умовою нормування набуває вигляду

$$\pi_{0(1)} = \alpha_0\left(\pi_{0(1)} + \pi_{1(1)}\right) + \alpha_0\beta_0\pi_{1(2)};$$

$$\pi_{1(1)} = (\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1)\pi_{1(2)} + \alpha_0\beta_0\pi_{2(2)};$$

$$\pi_{2(1)} = (1-\alpha_0(\beta_0+\beta_1)-\alpha_1\beta_0)\pi_{1(2)} + (1-\alpha_0\beta_0)\pi_{2(2)};$$

$$\pi_{1(2)} = \alpha_1\left(\pi_{0(1)} + \pi_{1(1)}\right) + \alpha_0\pi_{2(1)};$$

$$\pi_{2(2)} = (1-\alpha_0-\alpha_1)\left(\pi_{0(1)} + \pi_{1(1)}\right) + (1-\alpha_0)\pi_{2(1)};$$

$$\pi_{0(1)} + \pi_{1(1)} + \pi_{2(1)} + \pi_{1(2)} + \pi_{2(2)} = 1.$$

Після розв'язання цієї системи отримаємо

$$\pi_{0(1)} = \alpha_0^2\left((\alpha_0-\alpha_1-2)\beta_0 + \left(\alpha_0-\alpha_0^2-\alpha_1\right)\beta_0^2 - \alpha_0\beta_1\right)\Big/ Z_{22};$$

$$\pi_{1(1)} = \frac{\alpha_0}{Z_{22}}\left((1-\alpha_0)(\alpha_0-\alpha_1-1)\beta_0 + \left(\alpha_0^2-\alpha_0+\alpha_1\right)\alpha_0\beta_0^2 - (1-\alpha_0)\alpha_0\beta_1\right);$$

$$\pi_{2(1)} = \left(\alpha_0(1+\beta_0+\alpha_1\beta_1) + \beta_0\left(\alpha_1^2-\alpha_0^2\right) - 1\right)\Big/ Z_{22};$$

$$\pi_{1(2)} = \alpha_0\left(\alpha_0(1+\beta_0) - \beta_0\left(\alpha_0^2+\alpha_1\right) - 1\right)\Big/ Z_{22};$$

$$\pi_{2(2)}=\left(\alpha_0\left(2+\alpha_1\beta_1\right)+\alpha_0^2\left(\beta_0\left(\alpha_1-1\right)-\beta_1-1\right)+\alpha_0^3\left(\beta_0+\beta_1\right)+\alpha_1^2\beta_0-1\right)\Big/Z_{22}\,;$$

$$Z_{22}=2\alpha_0\left(1-\alpha_1\beta_0+\alpha_1\beta_1\right)+\alpha_0^2\left(\beta_0\left(\alpha_1-1\right)-2\beta_1\right)+\alpha_0^3\beta_1+2\alpha_1^2\beta_0-2.$$

Якщо $m=2,\ \ n=3,$ то з (5) одержимо таку систему:

$$\pi_{0(1)}=\alpha_0\left(\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}+\pi_{1(2)}\right)+\alpha_0\beta_0\pi_{1(3)}\,;$$
$$\pi_{1(1)}=\left(\alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1\right)\pi_{1(3)}+\alpha_0\beta_0\pi_{2(3)}\,;$$
$$\pi_{2(1)}=\left(1-\alpha_0(\beta_0+\beta_1)-\alpha_1\beta_0\right)\pi_{1(3)}+\left(1-\alpha_0\beta_0\right)\pi_{2(3)}\,;$$
$$\pi_{1(2)}=\alpha_1\left(\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}\right)+\alpha_0\pi_{2(1)}\,;$$
$$\pi_{2(2)}=\left(1-\alpha_0-\alpha_1\right)\left(\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}\right)+\left(1-\alpha_0\right)\pi_{2(1)}\,;$$
$$\pi_{1(3)}=\alpha_1\pi_{1(2)}+\alpha_0\pi_{2(2)}\,;$$
$$\pi_{2(3)}=\left(1-\alpha_0-\alpha_1\right)\pi_{1(2)}+\left(1-\alpha_0\right)\pi_{2(2)}\,;$$
$$\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}+\pi_{2(1)}+\pi_{1(2)}+\pi_{2(2)}+\pi_{1(3)}+\pi_{2(3)}=1$$

з розв’язками

$$\pi_{0(1)}=\frac{\alpha_0^2\beta_0}{Z_{23}}\left(\alpha_0(3+4\alpha_1)-2+\alpha_0^3-3\alpha_1-2\alpha_1^2-\alpha_0^2(2+\alpha_1)\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0^2}{Z_{23}}\left(\alpha_0\beta_1\left(2\alpha_0-\alpha_0^2-2\alpha_1-1\right)-\beta_0^2\left(\alpha_0^2-\alpha_0+\alpha_1\right)^2-1\right);$$

$$\pi_{1(1)}=\frac{\alpha_0\beta_0}{Z_{23}}\left(2\alpha_0(1+\alpha_1)^2+\alpha_0^3(2+\alpha_1)-2\alpha_0^2(1+2\alpha_1)-\alpha_1-\alpha_1^2-\alpha_0^4-1\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0^2}{Z_{23}}\left(\beta_1\left(2\alpha_0(1+\alpha_1)+\alpha_0^3-2\alpha_0^2-\alpha_1-1\right)+\beta_0^2\left(\alpha_0^2-\alpha_0+\alpha_1\right)^2\right);$$

$$\pi_{2(1)}=\frac{1}{Z_{23}}\left(\alpha_1^3\beta_0-\alpha_0^3\beta_1-1-\alpha_0^2\left(\beta_0(2\alpha_1+1)+\beta_1(\alpha_1-1)\right)\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0}{Z_{23}}\left((1+\beta_0)(1+\alpha_1)+\alpha_1^2(\beta_1-\beta_0)\right);$$

$$\pi_{1(2)}=\frac{\alpha_0}{Z_{23}}\left(\alpha_0(1+\beta_0+\alpha_1\beta_0-\alpha_1\beta_1)-\alpha_1\beta_0(1+\alpha_1)-\alpha_0^2(\beta_0+\alpha_1\beta_0-\beta_1)-\alpha_0^3\beta_1-1\right);$$

$$\pi_{2(2)}=\frac{1}{Z_{23}}\left(\alpha_0^2\left(\alpha_0(1+2\beta_0+\alpha_1\beta_1)+\beta_0(\alpha_1^2-\alpha_1-1)-\alpha_1\beta_1-2\right)+\beta_0(\alpha_1^3-\alpha_0^4)-1\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0}{Z_{23}}\left(2+\alpha_1(1+\beta_0)+\alpha_1^2(\beta_1-\beta_0)\right);$$

$$\pi_{2(3)}=\frac{\alpha_0^3}{Z_{23}}\left(\alpha_0^2(\beta_0+\beta_1)+\alpha_0\left(\beta_0(\alpha_1-2)-2\beta_1-1\right)+2+\beta_0+\beta_1(1+2\alpha_1)\right)+$$

$$+\frac{1}{Z_{23}}\Big(\alpha_0^2\left(2\alpha_1^2\beta_0-\alpha_1(2+\beta_0+2\beta_1)-2\right)+\alpha_0\left(2+2\alpha_1+\alpha_1^2(\beta_1-\beta_0)\right)+\alpha_1^3\beta_0-1\Big);$$

$$Z_{23}=\alpha_0^5\beta_1+\alpha_0^4\left(\beta_0(\alpha_1-1)-3\beta_1\right)+\alpha_0^3\left(1+(2-3\alpha_1)\beta_0+\beta_1(2+3\alpha_1)\right)+$$
$$+\alpha_0^2\left(\beta_0(3\alpha_1^2-1)-6\alpha_1\beta_1-2\right)+3\alpha_0\left(1+\alpha_1+\alpha_1^2(\beta_1-2\beta_0)\right)+3\alpha_1^3\beta_0-3.$$

Для $m=3$, $n=2$ маємо систему

$$\pi_{0(1)}=\alpha_0\left(\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}\right)+\alpha_0\beta_0\pi_{1(2)};$$
$$\pi_{1(1)}=\left(\alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1\right)\pi_{1(2)}+\alpha_0\beta_0\pi_{2(2)};$$
$$\pi_{2(1)}=\left(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0\right)\pi_{1(2)}+\left(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right)\pi+\alpha_0\beta_0\pi_{3(2)};$$
$$\pi_{1(2)}=\alpha_1\left(\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}\right)+\alpha_0\pi_{2(1)};$$
$$\pi_{2(2)}=\alpha_2\left(\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}\right)+\alpha_1\pi_{2(1)}+\alpha_0\pi_{2(1)};$$
$$\pi_{3(2)}=\left(1-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}\right)+\left(1-\alpha_0-\alpha_1\right)\pi_{2(1)}+\left(1-\alpha_0\right)\pi_{3(1)};$$
$$\pi_{0(1)}+\pi_{1(1)}+\pi_{2(1)}+\pi_{3(1)}+\pi_{1(2)}+\pi_{2(2)}+\pi_{3(2)}=1.$$

Після розв’язання цієї системи отримаємо

$$\pi_{0(1)}=\frac{\alpha_0^3\beta_0^2}{Z_{32}}\Big(1+\alpha_0^2+4\alpha_1+\alpha_1^2-\alpha_0(2+\alpha_1+\alpha_2)\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^3\beta_0^3}{Z_{32}}\Big(\alpha_0^2-\alpha_0^3+\alpha_1^2-\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2)\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^3}{Z_{32}}\Big(\alpha_0^2\beta_1^2+\beta_0\left(1+\alpha_0\beta_1(2+\alpha_1)-\alpha_0^2(\beta_1+\beta_2)\right)\Big);$$

$$\pi_{1(1)}=\frac{\alpha_0^2\beta_0^2}{Z_{32}}\Big(\alpha_1(2+\alpha_1)-\alpha_0^3+\alpha_0^2(2+\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_0(1+4\alpha_1+\alpha_1^2+\alpha_2\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^3}{Z_{32}}\Big(\beta_0^3\left(\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_0^2+\alpha_0^3-\alpha_1^2\right)-(\alpha_0-1)\alpha_0\beta_1^2\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^2\beta_0(\alpha_0-1)}{Z_{32}}\Big(\alpha_0^2(\beta_1+\beta_2)-\alpha_0\beta_1(1+\alpha_1)-1\Big);$$

$$\pi_{2(1)}=\frac{\alpha_0}{Z_{32}}\Big(\beta_0^2\left(\alpha_0^2-\alpha_0^3-\alpha_1^2(1+\alpha_1)-\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2)\right)\Big)-\frac{\alpha_0^2\beta_1}{Z_{32}}(\alpha_0+\alpha_0\alpha_1\beta_1-1)+$$
$$+\frac{\alpha_0\beta_0}{Z_{32}}\Big(1+\alpha_1-\alpha_0(2+\alpha_1+\alpha_1\beta_1+\alpha_1^2\beta_1)+\alpha_0^2(1+\alpha_1\beta_2)\Big);$$

$$\pi_{3(1)}=\frac{\alpha_0}{Z_{32}}\Big(\alpha_1^2\beta_0^2(1-2\alpha_2)+\beta_0(\alpha_1^2+\alpha_1^3\beta_1-2\alpha_2-1)-3\alpha_1\beta_1-1\Big)+$$

$$+\frac{\alpha_0^2}{Z_{32}}\Big(\beta_0^2(\alpha_2+\alpha_2^2-\alpha_1)+\beta_0\left(2+\alpha_2+\alpha_1(\beta_1-\alpha_2\beta_1-1)-\alpha_1^2\beta_2\right)+2\alpha_1\beta_1+\alpha_1^2\beta_1^2-\beta_2\Big)+$$
$$+\frac{1}{Z_{32}}\Big(\alpha_0^3\left(\beta_0^2(2\alpha_1-1)-\beta_0(1+\beta_1-\alpha_2\beta_2)-\alpha_2\beta_1^2+\beta_2\right)+(\alpha_1^2\beta_0-1)^2+\alpha_0^4\beta_0(\beta_0+\beta_1)\Big);$$

$$\pi_{1(2)}=\frac{\alpha_0^2\beta_0}{Z_{32}}\Big(1+\alpha_0^2+2\alpha_1-\alpha_0(2+\alpha_1)\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^2}{Z_{32}}\Big(\beta_0^2\left(\alpha_0^2-\alpha_0^3+\alpha_1^2-\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2)\right)-\alpha_0\beta_1(\alpha_0-1)\Big);$$

$$\pi_{2(2)}=\frac{\alpha_0}{Z_{32}}\Big(1+\alpha_1\beta_0-\alpha_1^2\beta_0-\alpha_1^3\beta_0^2+\alpha_0^4\beta_0(\beta_0+\beta_1)+\alpha_0^3\left(\beta_0^2(\alpha_1-1)-\beta_0(1+\beta_1)+\beta_2\right)\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^2}{Z_{32}}\Big(\alpha_1\alpha_2\beta_0^2-2\alpha_1\beta_1-1-\beta_0(1+2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1^2\beta_1)\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^3}{Z_{32}}\Big(\alpha_2\beta_0^2+\alpha_1\beta_1+\beta_0(2+\alpha_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_1)-\beta_2\Big);$$

$$\pi_{3(2)}=\frac{1}{Z_{32}}\Big((\alpha_1^2\beta_0-1)^2-\alpha_0\left(2+2\alpha_2\beta_0+2\alpha_1^2\beta_0(\alpha_2\beta_0-1)+3\alpha_1\beta_1-\alpha_1^3\beta_0\beta_1\right)\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^4}{Z_{32}}\Big(\alpha_0\left(\beta_0(\beta_2-\beta_1)-\beta_1^2\right)+\alpha_2\beta_0^2+(\beta_1-\beta_2)(1+\beta_0)+\beta_1^2-\alpha_1\beta_0(\beta_0+\beta_1)\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^2}{Z_{32}}\Big(1+\alpha_2^2\beta_0^2+\beta_1(1+4\alpha_1)+\alpha_1^2\beta_1^2-\beta_2-\beta_0\left(\alpha_1^2\beta_2+\alpha_1(2+\alpha_2\beta_1)-2\alpha_2-1\right)\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^3}{Z_{32}}\Big(\beta_0^2(\alpha_1^2+\alpha_2-\alpha_1)+(2+\alpha_1)\beta_1+(\alpha_1+\alpha_2)\beta_1^2-2\beta_2\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^3\beta_0}{Z_{32}}(1+\alpha_2(1+\beta_1-\beta_2)-\alpha_1(1+\beta_2));$$

$$Z_{32}=2\alpha_0\left(1+2\alpha_2\beta_0+\alpha_1^2\beta_0(2\alpha_2\beta_0-1)-\alpha_1(\beta_0-3\beta_1)+\alpha_1^3\beta_0(\beta_0-\beta_1)\right)+$$
$$+\alpha_0^4\left(\alpha_2\beta_0^2+2\beta_1^2+\beta_0(\beta_1-\alpha_1\beta_1-2\beta_2)\right)+\alpha_0^5(\beta_0\beta_2-\beta_1^2)+$$
$$+\alpha_0^3\left(\beta_0^2(2\alpha_2-2\alpha_1+\alpha_1^2)+2\left(\beta_1-\beta_2+\beta_1^2(\alpha_1+\alpha_2)\right)-\beta_0\left(2\alpha_2\beta_2+2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)-1\right)\right)+$$
$$+2\alpha_0^2\left(\beta_0^2(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)+\beta_1(1+2\alpha_1+\alpha_1^2\beta_1)-\beta_2\right)-$$
$$-2\alpha_0^2\beta_0\left(\alpha_1^2(\beta_1+\beta_2)+\alpha_1(2+\alpha_2\beta_1)-\alpha_2-1\right)+2\left(\alpha_1^2\beta_0-1\right)^2.$$

5. ВИСНОВКИ

Отже, досліджуючи методом вкладених ланцюгів Маркова граничний стаціонарний процес для одноканальної системи масового обслуговування з вимушеними перервами в роботі після n обслуговувань поспіль, ми отримали систему алгебричних рівнянь для граничних імовірностей ланцюга Маркова. Знаючи розв'язки цієї системи, можна визначити деякі зі стаціонарних імовірностей $p_{j(i)}$, а також стаціонарні значення характеристик СМО з вимушеними перервами в роботі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Жерновий Ю.В.* Марковські моделі масового обслуговування. Львів: ЛНУ ім. І.Франка, 2004.
2. *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.
3. *Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1969.
4. *Cooper R.B.* Introduction to queueing theory. New York: North Holland, 1981.

THE STATISTICAL-EQUILIBRIUM STATE PROBABILITIES DISTRIBUTION FOR THE SINGLE-SERVER QUEUEING SYSTEM WITH FORCED STOPPAGES OF WORK

Ya. Yeleyko, Yu. Zhernovyi

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: mstat@franko.lviv.ua

The statistical-equilibrium state probabilities distribution for the M/G/1/m queueing system with forced stoppages of work after n services in a row is obtained.

Key words: single-server queueing system with forced stoppages of work, statistical-equilibrium state, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії дд.03.2008
Прийнята до друку