Вісник Львівського університету. Сер. прикл. мат. та інформ. – 2007. – Вип. 13. – С.11-19.

УДК 519.21:517.9

ІСНУВАННЯ ГРАНИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ ЧАСОВИХ СЕРЕДНІХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ, ПОБУДОВАНИХ НА РОЗВ'ЯЗКАХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Я. Єлейко, Ю. Жерновий, Н. Бугрій

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: mstat@franko.lviv.ua

Визначено умови існування граничних розподілів часових середніх випадкових еволюцій, побудованих на розв'язках задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на траєкторії напівмарковського процесу зі зліченною множиною станів і нескінченним середнім часом перебування у фіксованому стані.

Ключові слова: випадкова еволюція; граничний розподіл; напівмарковський процес; система звичайних диференціальних рівнянь; задача Коші.

1. ВСТУП

Часто на явища, описувані звичайними диференціальними рівняннями, впливає велика кількість зовнішніх випадкових факторів, які певним чином змінюють сам вигляд рівняння. З огляду на це актуальною є побудова випадкових еволюцій на розв'язках звичайних диференціальних рівнянь. Для дослідження реальних процесів важливо знайти асимптотику при $t \to \infty$ часових середніх значень головних параметрів процесу або принаймні визначити умови існування для них граничного розподілу.

За допомогою ергодичної теореми Скорохода [1, с.362] та теореми [2] про існування граничних розподілів часових середніх для процесів з марковським втручанням випадку у статтях [3-5] вивчено асимптотичну поведінку часових середніх випадкових еволюцій, побудованих на розв'язках задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на траєкторії напівмарковського процесу зі скінченним і нескінченним середнім часом перебування у фіксованому стані. Нижче розглянуто випадок, коли середній час перебування у фіксованому стані нескінченний, а множина станів напівмарковського процесу зліченна.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ. ЗАГАЛЬНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ГРАНИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ

Розглянемо систему $S(t)$ довільної природи, параметри якої змінюються в часі, а множина $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ можливих станів зліченна. Перебування в кожному з якісно різних станів описує система звичайних диференціальних рівнянь

$$x_s'(t) = f_s(t, x_s), \qquad x_s(0) = x_{0s}, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

де $x_s(t) = \left(x_{1s}(t), \ldots, x_{ns}(t),\right)$ $f_s(t, x_s)$ – векторна функція, задана на множині

© Єлейко Я., Жерновий Ю., Бугрій Н., 2007

$\Omega = \{(t,x) : t \in [0,\infty),\ x \in D \subset R_+^n\}$; $x_{0s} \in D -$ задане початкове значення $x_s(t)$. Процес випадкових блукань системи $S(t)$ по заданій множині станів будемо вважати напівмарковським процесом $z(t)$ зі зліченною множиною станів X та неперервним часом. Позначимо через $\tau_0 = 0,\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$ моменти послідовних стрибків процесу, тобто

$$\tau = \inf\{t > 0 : z(t) \neq z(0)\}; \quad \tau_1 = \tau, \quad \tau_2 = \inf\{t > \tau_1 : z(t) \neq z(\tau_1)\}; \ldots;$$
$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : z(t) \neq z(\tau_{k-1})\}; \ldots.$$

Вкладений однорідний ланцюг Маркова $z(\tau_0),\ z(\tau_1), \ldots, z(\tau_k), \ldots$ вважатимемо ергодичнним зі стаціонарним розподілом p_j, $j = 1, 2, \ldots$, таким, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(j,s) = p_s, \quad j,s = 1,2,\ldots, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{ij} = p_j, \quad j = 1,2,\ldots, \quad (2)$$

де $P^k(j,s) = P\{z(\tau_k) = s \,|\, z(\tau_0) = j\} -$ перехідні ймовірності за k кроків ланцюга Маркова, $p_{ij} = P\{z(\tau_1) = j \,|\, z(\tau_0) = i\}$. Позначимо:

$$F_{is}(t) = P_i\{z(\tau_1) = s,\ \tau_1 < t\}, \quad F_i(t) = \sum_{s=1}^{\infty} F_{is}(t) = P_i\{\tau_1 < t\}, \quad \varphi_i(y) = \int_0^{\infty} e^{-yt} dF_i(t),$$

де P_i – умовна ймовірність за умови, що $z(0) = i$.

Вважаючи, що середній час перебування у фіксованому стані нескінченний, вимагатимемо виконання умов:

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\varphi_i(y)}{y^{\alpha} L(y)} = a_i, \qquad i = 1,2,\ldots; \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i > 0, \quad (3)$$

і, крім цього, $\dfrac{1-\varphi_i(y)}{y^{\alpha} L(y)} \underset{y\to 0}{\to} a_i$ в середньому за мірою p_i для $i = 1,2,\ldots$, де $\alpha \in [0,1)$, $L(y)$ – повільно змінна в нулі функція.

За умови існування єдиного розв'язку $x_s(t)$ кожної s-ї задачі (1) $(s = 1,2,3,\ldots)$ для $t \in [0,\infty)$ можемо описати поведінку системи $S(t)$ за допомогою випадкової еволюції, побудованої на траєкторії напівмарковського процесу $z(t)$ у вигляді

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x_i(t), & 0 \le t < \tau_1,\ z(0) = i; \\ x_j(t-\tau_1), & \tau_1 \le t < \tau_2,\ z(\tau_1) = j; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_s(t-\tau_k), & \tau_k \le t < \tau_{k+1},\ z(\tau_k) = s, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} \quad (4)$$

де $x_s(t)$ $(s = 1,2,3,\ldots) -$ розв'язок s-ї задачі Коші (1). Очевидно, що випадкова еволюція $\tilde{x}(t)$ є процесом з марковським втручанням випадку τ [1].

Позначимо k-у компоненту векторної функції (4) через $\tilde{x}_k(t)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, тоді

$\tilde{x}(t) = \left(\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)\right)$. З'ясуємо умови існування невироджених граничних розподілів при $t \to \infty$ для адитивних функціоналів $\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}_k(u)du \quad \left(k = \overline{1,n}\right)$.

Теорема 1. *Нехай існує єдиний розв'язок кожної s-ї задачі Коші (1)* $x_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, *визначений і обмежений для всіх* $t \geq 0$, *для компонент якого виконані умови*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_{ks}(u)du = b_{ks}, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Нехай $z(t)$ *– напівмарковський процес з множиною станів* $X = \{1, 2, \ldots\}$ *та неперервним часом, а відповідний вкладений ланцюг Маркова* $z(\tau_0)$, $z(\tau_1), \ldots z(\tau_k), \ldots$ *ергодичний зі стаціонарним розподілом* p_j, $j = 1, 2, \ldots$, *і виконані умови (2), (3). Якщо* $\tilde{x}(t)$ *– випадкова еволюція вигляду (4), побудована на траєкторії процесу* $z(t)$, *то для всіх* $i = 1, 2, \ldots$ *і для всіх точок x неперервності функцій розподілу* $G_k(\cdot)$ $(k = \overline{1,n})$ *виконані співвідношення*

$$\lim_{t\to\infty} P_i\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}_k(u)du < x\right\} = G_k(x), \qquad k = \overline{1,n},$$

де для $\lambda_k > -\inf_{i\in X} b_{ki}$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda_k + x} dG_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^\infty a_i p_i (b_{ki} + \lambda_k)^{\alpha-1}}{\sum_{i=1}^\infty a_i p_i (b_{ki} + \lambda_k)^{\alpha}}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Доведення. Однозначна розв'язність кожної з задач (1) для $t \geq 0$ забезпечує коректну визначеність еволюції $\tilde{x}(t)$. У праці [6] для напівмарковського процесу $z(t)$ з довільним фазовим простором станів (X, $\mathfrak{B}$) розглянуто випадковий процес

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} g(z(\tau_0), t), & 0 \leq t < \tau_1; \\ g(z(\tau_1), t), & \tau_1 \leq t < \tau_2; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ g(z(\tau_1), t), & \tau_k \leq t < \tau_{k+1}; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

і з'ясовано умови існування граничного розподілу для функціоналу $\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{z}(u)du$. Тут $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра множин на X, зчисленно породжена, $g(x,y)$: $(X\times\mathbb{R}^+, \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}^+)\to(\mathbb{R}^+, \mathfrak{B}^+)$ – обмежена вимірна функція, $\mathfrak{B}^+$ – σ-алгебра борелівських множин на $\mathbb{R}^+$. Якщо в умовах теореми, доведеної в [6], покласти:

$$X=\{1,2,\ldots\},\ \ \varphi(s,y)=\varphi_s(y),\ \ a(s)=a_s,\ b(s)=b_{ks},\ \int_X a(x)\Pi(dx)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i p_i$$

(Π – міра напівмарковського процесу $z(t)$), $g(s,t)=x_{ks}(t)$, $s=1,2,\ldots$, $\tilde{z}(t)=\tilde{x}_k(t)$ $(k=\overline{1,n})$, то вони набувають вигляду (2), (3), (5), отже, виконуються для кожної компоненти $\tilde{x}_k(t)$ $(k=\overline{1,n})$ випадкової еволюції $\tilde{x}(t)$ вигляду (4). Теорему доведено. □

Нижче розглянемо деякі випадки реалізації умов теореми 1 стосовно розв'язків звичайних диференціальних рівнянь.

3. УМОВИ ОБМЕЖЕНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Стосовно розв'язків задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку у формулюванні теореми 1 поставлена вимога їхнього існування, єдиності, обмеженості на проміжку $[0,\infty)$ і виконання граничних співвідношень (5) для часових середніх. Умови єдиності розв'язку відомі [4], а необхідні і достатні умови існування розв'язку на проміжку $[0,\infty)$ з'ясовані в праці [5, теорема 3].

Розглянемо задачу Коші для системи

$$x_i'(t)=f_i\left(t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\right),\quad t\ge 0;\quad x_i(0)=x_{0i}\quad \left(i=\overline{1,n}\right), \tag{6}$$

де функції $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)$ вважатимемо неперервними для $(t,x_1,\ldots,x_n)\in R_+\times R^n$; а $x_{0i}\in R$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – задані початкові значення $x_i(t)$. Визначимо умови обмеженості розв'язків задачі Коші (6) на проміжку $[0,\infty)$.

Теорема 2. *Нехай вектор-функція $f(t,x)$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x в області $R_+\times R^n$ і*

$$f_i(t,x_1,\ldots,x_n)\in C(R_+\times R^n)\ \ \left(i=\overline{1,n}\right);\quad \omega=\{1,2,\ldots,n\},\quad \omega=\omega_1\cup\omega_2\cup\omega_3\cup\omega_4,$$

де $\omega_k\subseteq\omega$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$. Нехай $\forall\ i\in\omega_1$

$$\begin{gathered} f_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{0i},x_{i+1},\ldots,x_n)\le 0=f_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},a_{1i},x_{i+1},\ldots,x_n)\\ \forall\ t\ge 0,\quad x_j\in R\ \ (j\ne i). \end{gathered} \tag{7}$$

Нехай $\forall\ i\in\omega_2$

$$\begin{gathered} f_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},b_{2i},x_{i+1},\ldots,x_n)=0\le f_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{0i},x_{i+1},\ldots,x_n)\\ \forall\ t\ge 0,\quad x_j\in R\ \ (j\ne i). \end{gathered} \tag{8}$$

Нехай $\forall\ i \in \omega_3$ *знайдуться числа* $\delta_i \geq 0$ *такі, що*

$$x_i f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \quad \forall\ t \geq 0, \quad |x_i| \geq \delta_i, \quad x_j \in R \quad (j \neq i). \tag{9}$$

Нехай $\forall\ i \in \omega_4$

$$\begin{gathered} f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, b_{4i}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq 0 \leq f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, a_{4i}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ \forall\ t \geq 0, \quad x_j \in R \ \ (j \neq i), \end{gathered} \tag{10}$$

де $a_{4i} \leq b_{4i}$. *Тоді* $\forall\ x_{0i} \geq a_{1i}\ (i \in \omega_1)$, $x_{0i} \leq b_{2i}\ (i \in \omega_2)$, $x_{0i} \in R\ (i \in \omega_3)$, $x_{0i} \in [a_{4i}, b_{4i}]\ (i \in \omega_4)$ *існує єдиний розв'язок задачі (6), обмежений* $\forall\ t \geq 0$, *причому*

$$a_{1i} \leq x_i(t) \leq x_{0i} = b_{1i}, \quad i \in \omega_1; \qquad a_{2i} = x_{0i} \leq x_i(t) \leq b_{2i}, \quad i \in \omega_2;$$
$$a_{3i} = \min\{-\delta_i; x_{0i}\} \leq x_i(t) \leq \max\{\delta_i; x_{0i}\} = b_{3i}, \quad i \in \omega_3; \qquad a_{4i} \leq x_i(t) \leq b_{4i}, \quad i \in \omega_4.$$

Доведення. Умови теореми 3 праці [5] виконуються, якщо взяти: $\alpha_i(t) = a_{ki}$, $\beta_i(t) = b_{ki}$, $i \in \omega_k$, $k = \overline{1,4}$. □

Зауваження. *Деякі умови теореми 2 можна послабити. Так умову*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in C(R_+ \times R^n) \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

можна замінити такою

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in C(R_+ \times \Omega') \quad \left(i = \overline{1,n}\right); \quad i \in \omega_k, \quad k = \overline{1,4},$$

де $\Omega' = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n :\ x_i \in [a_{ki}, b_{ki}],\ i \in \omega_k,\ k = \overline{1,4}\}$. *Виконання умов (7)-(10) досить вимагати не для* $x_j \in R\ \ (j \neq i)$, *а для* $x_j \in [a_{kj}, b_{kj}],\ j \in \omega_k,\ k = \overline{1,4}\ \ (j \neq i)$.

4. УМОВИ ІСНУВАННЯ ГРАНИЦІ ДЛЯ ЧАСОВИХ СЕРЕДНІХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Теорема 3. *Нехай вектор-функція* $f(t, x)$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінною* x *в області* $R_+ \times \tilde{\Omega}$ *і* $f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in C(R_+ \times \tilde{\Omega})\ \left(i = \overline{1,n}\right)$;

$$\tilde{\Omega} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n :\ x_i \in [a_{ki}, b_{ki}],\ i \in \omega_k,\ k = 1,2\}; \quad \omega = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$\omega = \omega_1 \cup \omega_2, \quad \omega_k \subseteq \omega \ \ (k = 1,2); \quad a_{1i} \leq x_{0i} = b_{1i}, \quad i \in \omega_1; \qquad a_{2i} = x_{0i} \leq b_{2i}, \quad i \in \omega_2.$$

Нехай $\forall\ i \in \omega_1$

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \quad \forall\ t \geq 0, \quad x_i \in (a_{1i}, x_{0i}], \quad x_j \in [a_{kj}, b_{kj}], \quad j \in \omega_k, \quad k = 1,2 \quad (j \neq i);$$

a_{1i} – *єдина точка на проміжку* $[a_{1i}, x_{0i}]$, *в якій*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, a_{1i}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0 \quad \forall\ t \ge 0, \quad x_j \in [a_{kj}, b_{kj}], \quad j \in \omega_k, \quad k = 1, 2 \quad (j \ne i).$$

Нехай $\forall\ i \in \omega_2$

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \ge 0 \quad \forall\ t \ge 0, \quad x_i \in [x_{0i}, b_{2i}), \quad x_j \in [a_{kj}, b_{kj}], \quad j \in \omega_k, \quad k = 1, 2 \quad (j \ne i);$$

b_{2i} *– єдина точка на проміжку* $[x_{0i}, b_{2i}]$, *в якій*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, b_{2i}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0 \quad \forall\ t \ge 0, \quad x_j \in [a_{kj}, b_{kj}], \quad j \in \omega_k, \quad k = 1, 2 \quad (j \ne i).$$

Тоді $\forall\ x_{0i} \ge a_{1i}\ (i \in \omega_1)$, $x_{0i} \le b_{2i}\ (i \in \omega_2)$ *існує єдиний розв'язок задачі (6), обмежений* $\forall\ t \ge 0$, *причому*

$$a_{1i} \le x_i(t) \le x_{0i} = b_{1i}, \quad i \in \omega_1; \qquad a_{2i} = x_{0i} \le x_i(t) \le b_{2i}, \quad i \in \omega_2; \tag{11}$$

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = a_{1i} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i(u)du, \quad i \in \omega_1; \qquad \lim_{t\to\infty} x_i(t) = b_{2i} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i(u)du, \quad i \in \omega_2.$$

Доведення. Якщо $x_{0i} = a_{1i}$ для деякого $i \in \omega_1$ або $x_{0i} = b_{2i}$ для деякого $i \in \omega_2$, то $x_i(t) \equiv x_{0i}$ для цього i, отже, твердження теореми для цього i виконуються. В загальному випадку, коли $x_{0i} \ne a_{1i}\ (i \in \omega_1)$; $x_{0i} \ne b_{2i}\ (i \in \omega_2)$, існування обмеженого розв'язку задачі (6) і оцінки (11) одержимо з теореми 2 при $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$. З оцінок (11) і умов теореми 3 випливає, що $\forall\ t \ge 0$ кожна з функцій $f_i\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ не змінює знаку, тобто функції $x_i(t)\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ монотонні $\forall\ t \ge 0$. Застосовуючи теорему про границю монотонної функції [7, с. 111-112], з врахуванням обмеженості $x_i(t)\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ одержимо, що

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = a_{1i} \quad \left(i \in \omega_1\right); \qquad \lim_{t\to\infty} x_i(t) = b_{2i} \quad \left(i \in \omega_2\right),$$

оскільки $a_{1i} = \inf\limits_{t\ge 0} x_i(t)\ \left(i \in \omega_1\right)$; $b_{2i} = \sup\limits_{t\ge 0} x_i(t) \quad \left(i \in \omega_2\right)$.

Внаслідок монотонності $x_i(t)\ \left(i = \overline{1,n}\right)$, починаючи хоча б з деякого t, $x_i(t)$ буде знакосталою, а функція $X_i(t) = \left|\int_0^t x_i(u)du\right|$ монотонно зростаючою. Тому інтеграл $\int_0^\infty x_i(u)du$ може або збігатися (коли функція $X_i(t)$ обмежена для $t \in (0, \infty)$) або $\left|\int_0^\infty x_i(u)du\right| = +\infty$ (коли функція $X_i(t)$ необмежена на $(0, \infty)$). Якщо $\int_0^\infty x_i(u)du$ збігається, то $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, бо інакше функція $X_i(t)$ не була б обмеженою згори.

У цьому випадку, очевидно, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t x_i(u)du = 0$. Якщо ж $\left|\int\limits_0^\infty x_i(u)du\right| = +\infty$, то, згідно з правилом Лопіталя,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_i(u)du = \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}\int_0^t x_i(u)du = \lim_{t\to\infty} x_i(t).$$

Теорему доведено. □

5. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ УМОВ ТЕОРЕМ 2 ТА 3

На прикладі задачі Коші для одного диференціального рівняння

$$x'(t) = f(t,x), \quad t \ge 0; \quad x(0) = x_0; \qquad f(t,x) = \begin{cases} a(t)\left(x^2-1\right), & x \le 1, \ t \ge 0; \\ a(t)\left(1-x\right), & x \ge 1, \ t \ge 0; \end{cases} \tag{12}$$

де $a(t)$ – невід'ємна неперервна функція, визначена для $t \ge 0$, розглянемо особливості застосування умов (7)–(10) теореми 2 для визначення апріорних оцінок розв'язку $x(t)$. Отже, умова (10) виконується, якщо взяти $a_4 \le -1$, $b_4 \ge 1$ (тут використовуємо позначення, введені для теореми 2, але без індекса *i*). Тому для розв'язку задачі (12) $\forall\ x_0 \in [a_4, b_4]$ і $\forall\ t \ge 0$ отримуємо оцінку $a_4 \le x(t) \le b_4$. Умова (9) виконується, якщо взяти δ=1. Тоді отримаємо, що $\forall\ t \ge 0$ $x_0 \le x(t) \le 1$ при $x_0 \le -1$; $-1 \le x(t) \le 1$ при $x_0 \in [-1,1]$ і $-1 \le x(t) \le x_0$ при $x_0 \ge 1$. Умова (8) виконується для $x_0 \le -1$, $b_2 = -1$, , тоді $x_0 \le x(t) \le -1$ $\forall\ t \ge 0$. Умова (7) виконується як для $x_0 \in [-1,1]$, $a_1 = -1$ (тоді $-1 \le x(t) \le x_0$ $\forall\ t \ge 0$), так і для $x_0 \ge 1$, $a_1 = 1$ (тоді $1 \le x(t) \le x_0$ $\forall\ t \ge 0$).

Перевіряючи отримані оцінки за допомогою розв'язку задачі (12)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(1+x_0)e^{-2\int\limits_0^t a(u)\,du} + x_0 - 1}{(1+x_0)e^{-2\int\limits_0^t a(u)\,du} + 1 - x_0}, \qquad x_0 \le 1; \\ x(t) &= 1 + (x_0-1)e^{-2\int\limits_0^t a(u)\,du}, \qquad x_0 \ge 1, \end{aligned} \tag{13}$$

бачимо, що всі вони вірні, але найточніші оцінки – ті, які отримано як наслідок виконання умов (7) або (8). Для задачі (12) виконані також і умови теореми 3, на основі чого ми можемо стверджувати, що $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t x(u)du = -1$ при $x_0 \le 1$ і $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t x(u)du = 1$ при $x_0 \ge 1$. Такі самі значення отримаємо для $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$

безпосередньо з (13), а значення асимптотичних середніх $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t x(u)du$ можна перевірити, поклавши в (13), наприклад, $a(t)\equiv 1$.

Для задачі Коші для системи двох диференціальних рівнянь

$$x_1'(t)=x_1(\beta-x_2),\quad x_2'(t)=x_2(\beta+x_1),\quad t\ge 0;\qquad x_1(0)=x_0,\quad x_2(0)=-x_0$$

при $\beta<0,\ |x_0|<-\beta$ виконуються умови теореми 3. У цьому випадку $\omega_1=\{2\}$, $\omega_2=\{1\}$, $a_{12}=b_{21}=0$, якщо $x_0<0$; $\omega_1=\{1\}$, $\omega_2=\{2\}$, $a_{11}=b_{22}=0$, якщо $x_0>0$. Тому повинні виконуватися оцінки:

$$\min\{x_0;0\}\le x_1(t)\le\max\{x_0;0\},\quad \min\{-x_0;0\}\le x_2(t)\le\max\{-x_0;0\},$$

причому $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t x_i(u)du=\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0,\quad i=1,\ 2.$ Легко перевірити, що це справді так, оскільки $x_1(t)=\dfrac{x_0\beta e^{\beta t}}{x_0+\beta-x_0e^{\beta t}},\quad x_2(t)=-x_1(t),\quad t\ge 0.$

6. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СПІВІСНУВАННЯ ПОПУЛЯЦІЙ БІОЛОГІЧНИХ ВИДІВ

Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$x_r'(t)=\left(\varepsilon_r-\frac{1}{\beta_r}\sum_{k=1}^n a_{rk}x_k\right)x_r,\quad t\ge 0;\quad x_r(0)=x_{0r}\quad \left(r=\overline{1,n}\right)\tag{14}$$

описує співіснування n видів тварин в обмеженому середовищі, які знищують (поїдають) один одного [8, розд.3]. Тут додатні функції $x_r(0)$ позначають чисельності видів; $\beta_r>0,\ \varepsilon_r,\ a_{rk}=-a_{kr},\ a_{rr}>0$ – сталі, які визначаються природними умовами середовища і особливостями взаємодії видів. Початкові дані $x_{0r}\ \left(r=\overline{1,n}\right)$ можуть бути лише натуральними числами, оскільки відповідають заданим початковим чисельностям видів. Якщо розв'язки $x_r\ \left(r=\overline{1,n}\right)$ алгебраїчної системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^n a_{rk}x_k=\varepsilon_r\beta_r,\qquad \left(r=\overline{1,n}\right)$$

додатні, то [8, розд.3] задача (14) має єдиний розв'язок $x_r(t)\ \left(r=\overline{1,n}\right)$, визначений $\forall\ t\ge 0$, причому кожна з функцій $x_r(t)$ обмежена двома додатними числами і для

неї існують скінченні асимптотичні середні $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_r(u)du.$

Описана математична модель відповідає лише ідеальним умовам співіснування видів. Адже під дією випадкових факторів (міграція тварин, екологічні катастрофи, втручання людини, зміна кліматичних умов тощо) у деякі випадкові моменти часу можуть зазнавати значних змін як чисельності окремих видів, так і природні умови середовища, які безпосередньо впливають на значення коефіцієнтів приросту чисельностей видів ε_r.

Введемо множину станів, в якій різні стани відрізяються різними початковими даними задачі (14) або різними значеннями коефіцієнтів приросту ε_r, що відповідають різним природним умовам середовища. Здійснивши певну класифікацію природних умов, кількість станів, які відрізняються лише природними умовами середовища, можна вважати скінченною. Кількість станів, що відповідають різним варіантам задання початкових даних задачі (14), можна вважати або зліченною, або скінченною (зважаючи на обмеженість середовища).

Трактуючи описаний процес співіснування видів з втручанням випадкових факторів як випадкове блукання введеною множиною станів, з незначним ступенем ідеалізації його можна вважати напівмарковським зі скінченною або зліченною множиною станів і нескінченним середнім часом перебування у фіксованому стані (процес з нечастими перемиканннями станів).

Отже, на основі розв’язків задач вигляду (14) з різними початковими даними x_{0r} і різними значеннями коефіцієнтів приросту ε_r, що відповідають різним станам, можна побудувати випадкову еволюцію вигляду (4) і застосувати для її дослідження або теорему 1 у випадку зліченної множини станів, або теорему 2 праці [5] у випадку скінченної множини станів, оскільки розв'язки задачі (14) обмежені і для них існують скінченні асимптотичні середні.

7. ВИСНОВКИ

Отже, випадкові еволюції, побудовані на траєкторії напівмарковського процесу з нескінченним середнім часом перебування у фіксованому стані, відповідають реальним процесам з нечастими перемиканнями станів. Ми з’ясували, що умовами існування граничних невироджених розподілів часових середніх таких еволюцій, побудованих на розв’язках задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, є обмеженість розв’язків на проміжку $[0,\infty)$ та існування границь для їхніх часових середніх при $t\to\infty$. Це накладає певні обмеження на праві частини диференціальних рівнянь, визначені умовами теорем 2 та 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1973. Т.2.
2. *Елейко Я.И.* Предельные распределения временных средних для процессов с марковским вмешательством случая// Укр. матем. журн. 1987. Т.39. № 6. С. 779-782.

3. *Єлейко Я., Жерновий Ю.* Асимптотичні властивості випадкових еволюцій, що описуються розв'язками звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних стосовно старших похідних// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2002. Вип. 60. С. 60-66.
4. *Єлейко Я., Жерновий Ю.* Асимптотична поведінка випадкових еволюцій, побудованих на основі розв'язків звичайних диференціальних рівнянь// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл матем. та інформ. 2003. Вип. 7. С. 41-52.
5. *Єлейко Я., Жерновий Ю. Бугрій Н.* Граничні розподіли часових середніх випадкових еволюцій, побудованих на розв'язках звичайних диференціальних рівнянь// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл матем. та інформ. 2004. Вип. 9. С. 63-73.
6. *Yeleiko Ya.,I.* Some refinements of limit theorems for semi-Markov processes with a general phase space// Theor. Probability and Math. Statist. 1999. No. 59. P. 57-65.
7. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. М.: Высш. школа, 1981. Т.1.
8. *Вольтерра В*. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

EXISTENCE OF LIMITING DISTRIBUTIONS OF THE TIME MEANS OF STOCHASTIC EVOLUTIONS CONSTRUCTED ON THE SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ya. Yeleyko, Yu. Zhernovyi, N. Buhriy
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: mstat@franko.lviv.ua

Conditions of existence of limiting distributions of the time means of stochastic evolutions constructed on the solutions of the Cauchy problems for systems of ordinary differential equations of the first order on the semi-Markov process trajectory with the numerable set of the states and in the fixed state infinite mean response time are found.

Key words: stochastic evolution; limiting distribution; semi-Markov process; system of ordinary differential equations; Cauchy problem.

Стаття надійшла до редколегії .04.2006
Прийнята до друку