АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И УПРУГОСТИ

Препринт 83.52

Киев - 1983

УДК 517.9:530.182

А.А. Березовский, Ю.В. Жерновой

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Исследованы геометрически нелинейные математические модели для описания изгибных волновых движений в упругом стержне. Рассмотрены упрощения задач, позволяющие найти решения для периодических стационарных волн через эллиптические функции Якоби.

1. Принятие гипотезы плоских сечений и точного выражения для кривизны изогнутой оси стержня [I]

$$k(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

приводит к нелинейному дифференциальному уравнению изгибных колебаний упругого призматического стержня

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\alpha^2\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{5}{2}}\right\}+\frac{5}{2}\alpha^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{7}{2}}\right\}=0 . \quad (I)$$

Здесь искомая функция $w(x,t)$ обозначает поперечное смещение точки x оси стержня в момент времени t , $\alpha^2 = EJ/(\rho S)$, EJ – изгибная жесткость , S –площадь поперечного сечения , ρ – плотность материала стержня.

Считая длину стержня неограниченной , исследуем стационарные волновые решения уравнения (I)

$$w(x,t) = w(\theta), \quad \theta = kx - \omega t, \quad k,\omega = const , \qquad (2)$$

где k и ω – волновое число и частота. Переходя в уравнении (I) от независимых переменных x и t к фазовой переменной θ , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение , определяющее форму искомых стационарных волн

$$\omega^2 w'' + \alpha^2 k^4\frac{d^2}{d\theta^2}\left[w''(1+k^2w'^2)^{-\frac{5}{2}}\right]+\frac{5}{2}\alpha^2 k^6\frac{d}{d\theta}\left[w''^2 w'(1+k^2 w'^2)^{-\frac{7}{2}}\right] = 0 , \quad (3)$$

где штрих обозначает дифференцирование по θ .

Рассмотрим периодические по θ с периодом 2π решения уравнения (3) , описывающие периодические стационарные волны.Искомая функция $w(x,t) = w(\theta)$, $-\pi<\theta<\pi$ должна удовлетворять условиям периодичности

$$w(-\pi)=w(\pi), \quad w'(-\pi)=w'(\pi), \quad w''(-\pi)=w''(\pi), \quad w'''(-\pi)=w'''(\pi) . \quad (4)$$

Интегрируя уравнение (3) по θ в пределах от $-\pi$ до π и полагая затем $w'(\theta) = z(\theta)$, приходим к задаче отыскания периодического решения для уравнения второго порядка

$$\alpha^2k^4z''(1+k^2z^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}\alpha^2k^6zz'^2(1+k^2z^2)^{-\frac{7}{2}} + \omega^2z + C = 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$
$$z(-\pi) = z(\pi), \qquad z'(-\pi) = z'(\pi), \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} z(\theta)\,d\theta = 0, \tag{5}$$

где C - постоянная интегрирования.

Полагая

$$u(z) = \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2, \tag{6}$$

приходим к уравнению первого порядка

$$\alpha^2k^4(1+k^2z^2)^{-\frac{5}{2}}\frac{du}{dz} - 5\alpha^2k^6z(1+k^2z^2)^{-\frac{7}{2}}u + 2(\omega^2z+C) = 0, \tag{7}$$

решение которого записывается в виде

$$u(z) = (1+k^2z^2)^{\frac{5}{2}}\left[A - \frac{z}{d^2k^4}(\omega^2z+2C)\right], \tag{8}$$

где $A = u(0) \geqslant 0$ - постоянная интегрирования. После подстанов - ки полученного решения (8) в (6) , разделения переменных и интегрирования, приходим к квадратуре, определяющей зависимость фазо - вой переменной θ от z

$$\theta(z) = \int\frac{dz}{\pm\sqrt{(1+k^2z^2)^{\frac{5}{2}}\left[A - \frac{z}{\alpha^2k^4}(\omega^2z+2C)\right]}}. \tag{9}$$

Знак перед квадратным корнем необходимо выбирать в соответствии с возрастанием или убыванием функции $z(\theta)$.

В линейном случае квадратура (9) упрощается к виду

$$\theta(z) = \int\frac{dz}{\pm\sqrt{A - \frac{z}{\alpha^2k^4}(\omega^2z+2C)}}. \tag{10}$$

После вычисления квадратуры (10) и последующего ее обращения видим, что она определяет периодические решения

$$z(\theta) = \frac{\alpha k^2}{\omega}\sqrt{A}\cos\left(\frac{\omega}{\alpha k^2}\theta + \varphi\right), \tag{11}$$

для которых $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z(\theta)d\theta = 0$ только при $C = 0$. Условия периодичности (5) приводят к известному [2,3] линейному дисперсионному соотношению , не содержащему амплитуды

$$\omega^2 - \alpha^2 k^4 = 0 , \qquad (12)$$

и из (II) окончательно получаем

$$z(\theta) = \sqrt{A}\, \cos(\theta + \Psi) , \qquad (13)$$

где Ψ - постоянная интегрирования .

Для физически оправдываемой частичной линеаризации [4]

$$(1 + k^2 z^2)^{\frac{5}{2}} \approx 1 + \frac{5}{2} k^2 z^2 \qquad (14)$$

при $C = 0$ квадратура (9) принимает вид

$$\theta(z) = \frac{\alpha k}{\omega} \sqrt{\frac{2}{5}} \int \frac{dz}{\pm\sqrt{\left(z^2 + \frac{2}{5k^2}\right)(z_1^2 - z^2)}} , \qquad (15)$$

где $z_1 = \alpha k^2 \sqrt{A} / \omega$. Из (15) следует дисперсионное соотношение , устанавливающее связь между амплитудным параметром A и k , ω , определяющими число осцилляций на интервале длиной 2π по координате и времени:

$$2\pi = \frac{\alpha k}{\omega} \sqrt{\frac{2}{5}} \oint \frac{dz}{\pm\sqrt{\left(z^2 + \frac{2}{5k^2}\right)(z_1^2 - z^2)}} . \qquad (16)$$

где $\oint$ - интеграл по полной осцилляции переменной z при ее циклическом изменении.

Для определенности ограничимся рассмотрением четных решений $z(-\theta) = z(\theta)$, тогда $z = z(\theta)$ достаточно определить на полупериоде $0 < \theta < \pi$. Предположим , что $z(0) = z_1$, тогда , очевидно , $z(-\pi) = z(\pi) = -z_1$. Пусть θ_1 - значение θ , при котором $z(\theta) = 0$. Теперь (15) перепишем в виде

$$\theta(z) = \frac{\alpha k}{\omega} \sqrt{\frac{2}{5}} \int_z^{z_1} \frac{dx}{\sqrt{[x^2 + 2/(5k^2)](z_1^2 - x^2)}} , \quad 0 < z < z_1 , \quad \frac{dz}{d\theta} < 0 , \qquad (17)$$

$$\theta(z) = \theta_1 + \frac{\alpha k}{\omega} \sqrt{\frac{2}{5}} \int_z^{0} \frac{dx}{\sqrt{[x^2 + 2/(5k^2)](z_1^2 - x^2)}} , \quad -z_1 < z < 0 , \quad \frac{dz}{d\theta} < 0 .$$

Полагая в первой из этих формул $z = 0$, а во второй $z = -z_1$, находим , что $\theta_1 = \pi/2$. Исключая из полученных равенств θ_1 , приходим к дисперсионному соотношению , устанавливающему связь между волновым числом k , частотой ω и амплитудой колебаний z_1 :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha k}{\omega}\sqrt{\frac{2}{5}}\int_0^{z_1}\frac{dx}{\sqrt{[x^2+2/(5k^2)](z_1^2-x^2)}} . \tag{18}$$

Входящий в (18) интеграл выражается через полный эллиптический интеграл $K(m)$ и эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi,m)$ (см. [5 , формула 781.05]), в результате чего дисперсионное соотношение (18) принимает вид

$$\frac{\pi}{2}\omega = \alpha k^2\sqrt{\frac{2}{5z_1^2k^2+2}}\ K(m). \tag{19}$$

Здесь

$$F(\varphi,m)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}},\quad K(m)=F\left(\frac{\pi}{2},m\right)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}m^2+\cdots\right), \tag{20}$$

$$m^2=\frac{5z_1^2k^2}{5z_1^2k^2+2}=\frac{5\alpha^2k^6A}{5\alpha^2k^6A+2\omega^2} . \tag{21}$$

Если амплитуда A мала , то согласно (21) $m^2\approx 5\alpha^2k^6A/(2\omega^2)$, и с помощью (20) для дисперсионного соотношения (19) получаем разложение

$$\omega = \alpha k^2\left(1-\frac{5}{8}k^2A+\cdots\right), \tag{22}$$

главная часть которого совпадает с (12).

Воспользовавшись формулой 781.05 [5], перепишем (17) в виде

$$\theta(z)=\frac{\alpha k^2}{\omega}\sqrt{\frac{2}{5z_1^2k^2+2}}\,F(\varphi,m),\quad 0<z<z_1,\ \frac{dz}{d\theta}<0,\ \varphi=\arccos\frac{z}{z_1}, \tag{23}$$

$$\theta(z)=\frac{\alpha k^2}{\omega}\sqrt{\frac{2}{5z_1^2k^2+2}}\,[2K(m)-F(\varphi,m)],\quad -z_1<z<0,\ \frac{dz}{d\theta}<0,\ \varphi=\arccos\left(-\frac{z}{z_1}\right).$$

Обращая эллиптический интеграл первого рода , приходим к явному выражению для $z(\theta)$ через эллиптический косинус

$$z(\theta) = z_1\, cn\left(\frac{\omega}{\alpha k^2}\sqrt{\frac{5z_1^2k^2+2}{2}}\,\theta\right),\quad 0<\theta<\pi . \tag{24}$$

Полученное решение (24) является четной функцией θ и , следовательно , представляет искомое решение на всем интервале

$-\pi < \theta < \pi$. Так как период эллиптической функции Якоби $cn\, x$ ра- вен $4K(m)$, то, если выполнено дисперсионное соотношение (19), период осцилляции полученной функции (24) равен 2π .

Пользуясь (24) , находим приближенное аналитическое решение исходной нелинейной задачи (3) , (4)

$$w(\theta) = w(-\pi) + \int_{-\pi}^{\theta} z(\psi)\, d\psi = \tag{25}$$

$$= \frac{\alpha k}{\omega} \sqrt{\frac{2}{5}}\, \arccos\left[dn\left(\frac{\omega}{\alpha k^2} \sqrt{\frac{5 z_1^2 k^2 + 2}{2}}\, \theta \right) \right], \quad w(-\pi) = w(\pi) = 0 .$$

Решение (25) является периодическим с наименьшим периодом π , что легко устанавливается по периоду эллиптической функции Якоби $dn\, x$, равному $2K(m)$, и дисперсионному соотношению (19).

2. Если для кривизны изогнутой оси стержня использовать вы- ражение [4]

$$k(s,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{26}$$

(s - длина дуги оси стержня) и ,учитывая , что

$$\frac{dx}{ds} = \left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} ,$$

перейти от x к независимой переменной s , то для описания изгибных колебаний упругого стержня получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial w}{\partial t}\left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \right]^{-1} \right\} - \tag{27}$$

$$- \alpha^2 \frac{\partial}{\partial s}\left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial s}\left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \right]^{-2} \right\} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left\{ \frac{\partial w}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} = 0 .$$

Исследуя периодические стационарные волны в бесконечном стерж- не

$$w(s,t) = w(\eta), \quad \eta = ks - \omega t, \quad k, \omega = const, \tag{28}$$

приходим к задаче отыскания периодического решения для нелинейно- го обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\alpha^2 k^4 \frac{d^2}{d\eta^2}\left[w''(1 - k^2 w'^2)^{-1} \right] - \alpha^2 k^6 \frac{d}{d\eta}\left[w''^2 w' (1 - k^2 w'^2)^{-2} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} k^2 \omega^2 \frac{d}{d\eta}\left[w'^3 (1 - k^2 w'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - \omega^2 \frac{d}{d\eta}\left[w' (1 - k^2 w'^2)^{\frac{1}{2}} \right] = 0, \quad -\pi < \eta < \pi, \tag{29}$$

$$W(-\pi) = W(\pi), \quad w'(-\pi) = w'(\pi), \quad w''(-\pi) = w''(\pi), \quad w'''(-\pi) = w'''(\pi),$$

где $w'(\eta) = dw(\eta)/d\eta$. После интегрирования уравнения (29) для определения $z(\eta) = w'(\eta)$ получаем

$$\alpha^2 k^4 z''(1-k^2z^2)^{-1} + \alpha^2 k^6 z z'^2 (1-k^2z^2)^{-2} - \frac{1}{2} k^2 \omega^2 z^3 (1-k^2z^2)^{-\frac{1}{2}} + \omega^2 z (1-k^2z^2)^{\frac{1}{2}} + C_1 = 0, \quad -\pi < \eta < \pi, \tag{30}$$

$$z(-\pi) = z(\pi), \quad z'(-\pi) = z'(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} z(\eta)\, d\eta = 0,$$

где C_1 - постоянная интегрирования. Интегрируя уравнение (30) с помощью замены $u(z) = (dz/d\eta)^2$, приходим к квадратуре , определяющей зависимость фазовой переменной η от z

$$\eta(z) = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{u(z)}}, \tag{31}$$

где

$$u(z) = (1-k^2z^2)\left\{ \frac{1}{\alpha^2 k^8} \left[\frac{\omega^2}{3}(2k^2+1)(1-k^2z^2)^{\frac{3}{2}} - \omega^2 (1-k^2z^2)^{\frac{1}{2}} - 2C_1 k^4 z - \frac{2}{3}\omega^2 (k^2-1) \right] + A_1 \right\}, \tag{32}$$

$A_1 = u(0) \geq 0$ - постоянная интегрирования.

Решение соответствующей (30) линейной задачи

$$\alpha^2 k^4 z'' + \omega^2 z + C_1 = 0, \quad -\pi < \eta < \pi,$$
$$z(-\pi) = z(\pi), \quad z'(-\pi) = z'(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} z(\eta)\, d\eta = 0, \tag{33}$$

существующее только при $C_1 = 0$, записывается в виде

$$z(\eta) = \sqrt{A_1}\, \cos(\eta + \psi) \tag{34}$$

для волнового числа k и частоты ω , удовлетворяющих диспер - сионному соотношению (I2).

Воспользуемся приближениями

$$(1-k^2z^2)^{\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2} k^2 z^2, \quad (1-k^2z^2)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} k^2 z^2, \tag{35}$$

тогда при $C_1 = 0$ квадратура (3I) принимает вид

$$\eta(z) = \frac{dk}{\omega} \int \frac{dz}{\pm\sqrt{(z_1^2 - z^2)(z_2^2 - z^2)}}, \tag{36}$$

где $z_1 = \alpha k^2 \sqrt{A_1} / \omega$, $z_2 = 1/k$. При интегрировании (36) возможны три случая: 1) $z_1 < z_2$, 2) $z_1 > z_2$, 3) $z_1 = z_2$. Рассмотрим каждый из них.

Если $z_1 < z_2$, то , полагая $z(-\eta) = z(\eta)$, $z(0) = z_1$, после вычисления интеграла в (36) по формуле 781.01 [5] получаем

$$\eta(z) = \frac{\alpha k^2}{\omega}\left[K(m) - F(\varphi, m)\right], \ 0 < z < z_1, \ \frac{dz}{d\eta} < 0, \ \varphi = \arcsin\frac{z}{z_1},$$
$$\eta(z) = \frac{\alpha k^2}{\omega}\left[K(m) - F(\varphi, m)\right], \ -z_1 < z < 0, \ \frac{dz}{d\eta} < 0, \ \varphi = -\arcsin\frac{z}{z_1}, \quad (37)$$

где

$$m = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha k^2}{\omega}\sqrt{A_1} . \quad (38)$$

Требование , чтобы период осцилляции $z(\eta)$ был равен 2π , приводит к соответствующему дисперсионному соотношению

$$\frac{\pi}{2}\,\omega = \alpha k^2 K(m) , \quad (39)$$

которое при малом A_1 можно аппроксимировать первыми членами его разложения в ряд Тейлора

$$\omega = \alpha k^2 \left(1 + \frac{1}{4} k^2 A_1 + \cdots\right) . \quad (40)$$

Обращая эллиптический интеграл первого рода в (37) , для $z(\eta)$ получаем выражение

$$z(\eta) = z_1 \frac{cn\left(\frac{\omega}{\alpha k^2}\eta\right)}{dn\left(\frac{\omega}{\alpha k^2}\eta\right)} , \quad -\pi < \eta < \pi . \quad (41)$$

Приближенное аналитическое решение исходной нелинейной задачи (29) записывается в виде

$$w(\eta) = w(-\pi) + \int_{-\pi}^{\eta} z(\psi)\, d\psi = \quad (42)$$
$$= \frac{\alpha k}{\omega} \ln\left[\frac{1}{dn\left(\frac{\omega}{\alpha k^2}\eta\right)} + m\,\frac{sn\left(\frac{\omega}{\alpha k^2}\eta\right)}{dn\left(\frac{\omega}{\alpha k^2}\eta\right)}\right], \quad w(-\pi) = w(\pi) = 0.$$

Полученное решение описывает периодическую стационарную волну, фазовая скорость которой удовлетворяет неравенству $c = \frac{\omega}{k} > \alpha k^2 \sqrt{A_1}$.

Пусть $z_1 > z_2$, то есть $c = \frac{\omega}{k} < \alpha k^2 \sqrt{A_1}$. В предположении, что $z(-\eta) = z(\eta)$, $z(0) = z_2$ находим

$$z(\eta) = z_2 \frac{cn\,(k\sqrt{A_1}\,\eta)}{dn\,(k\sqrt{A_1}\,\eta)}, \quad -\pi < \eta < \pi, \tag{43}$$

где модуль эллиптических функций $cn\ x$ и $dn\ x$ равен

$$m = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega}{\alpha k^3 \sqrt{A_1}}, \tag{44}$$

а соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

$$K(m) = \frac{\pi}{2}\, k\sqrt{A_1}\,. \tag{45}$$

Интегрируя (43) , получаем приближенное решение задачи (29) в рассматриваемом случае

$$w(\eta) = \frac{\alpha k}{\omega} \ln\left[\frac{1}{dn(k\sqrt{A_1}\,\eta)} + \frac{\omega}{\alpha k^3\sqrt{A_1}} \frac{sn(k\sqrt{A_1}\,\eta)}{dn(k\sqrt{A_1}\,\eta)}\right], \tag{46}$$

$$w(-\pi) = w(\pi) = 0\,;$$

Если $z_1 = z_2$, то модули (38) и (44) совпадают : $m = 1$,а из (41) и (43) получаем

$$z(\eta) = z_1 = z_2 = const\,,$$

то есть в случае, когда волновое число k , частота ω и амплитудный параметр A_1 связаны соотношением $\omega - \alpha k^3\sqrt{A_1} = 0$, периодических волновых решений исследуемой задачи не существует.

Полученные приближенные решения (24) , (25) и (4I) , (42) и дисперсионные соотношения (I9) , (22) и (39) , (40) в обеих случаях совпадают с точностью до значений амплитудных параметров A и A_1 . В линейном случае эти решения переходят в точные решения (I3) , (34) линеаризованных задач , а дисперсионные соотношения совпадают с линейным дисперсионным соотношением (I2) , не содержащим амплитуды.

I. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики, ч. I - Киев: Наук.думка, 1976.-452 с.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир , 1977.-622с.
3. Березовский А.А.,Жерновой Ю.В. Изгибные стационарные волны в стержнях при нелинейном законе упругости.-Укр.мат.журн.,I98I, 33 , № 4, с. 493-498.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат,1956.-600 с.
5. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. -М.: Наука, 1978. - 224 с.