ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

1. ТЕРМІНОЛОГІЯ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

Теорія надійності – наука, що вивчає закономірності відмов технічних систем.

Надійністю називається властивість технічного об'єкта зберігати свої характеристики (параметри) в певних межах при даних умовах експлуатації.

Відмовою називається подія, після виникнення якої характеристики технічного об'єкта (параметри) виходять за допустимі межі.

Елемент – об'єкт (матеріальний, енергетичний, інформаційний), що володіє рядом властивостей, внутрішня будова (зміст) якого значення не має. В теорії надійності під елементом розуміють елемент, вузол, блок, який має показник надійності, що самостійно враховується при розрахунку показників надійності системи.

Система – сукупність пов'язаних між собою елементів, що володіє властивістю (призначенням, функцією), відмінною від властивостей окремих її елементів.

Технічний об'єкт в процесі функціонування може знаходитися в різних станах, що оцінюються кількісними показниками. Наведемо терміни стану об'єкта та їхні оцінки.

Справність – стан об'єкта, при якому він відповідає всім вимогам, встановленим нормативно-технічною документацією (НТД).

Працездатність – стан об'єкта, при якому він здатний виконувати задані функції, зберігаючи значення основних параметрів, встановлених НТД.

Граничний стан – стан об'єкта, при якому його застосування за призначенням неможливе або недоцільне.

Для деяких об'єктів граничний стан є останнім в його функціонуванні, тобто об'єкт знімається з експлуатації, для інших об'єктів – певною фазою в експлуатаційному графіку, що вимагає проведення ремонтно-відновлювальних робіт. У зв'язку з цим, об'єкти можуть бути:

- *невідновлювані*, для яких працездатність в разі виникнення відмови не підлягає відновленню;
- *відновлювані*, працездатність яких може бути відновлена, в тому числі і шляхом заміни.

До числа невідновлюваних об'єктів можна віднести, наприклад, підшипники кочення, напівпровідникові вироби, зубчасті колеса і т. п. Об'єкти, що складаються з багатьох елементів, наприклад верстат, автомобіль, електронна апаратура, є відновлюваними, оскільки їх відмови пов'язані з пошкодженнями одного або небагатьох елементів, які можуть бути замінені.

Напрацювання – тривалість або обсяг роботи об'єкта, що вимірюються одиницями часу, кількістю циклів навантаження, кілометрами пробігу і т. п.

Напрацювання до відмови – напрацювання об'єкта від початку його експлуатації до виникнення першої відмови.

Технічний ресурс – напрацювання об'єкта від початку його експлуатації (або її відновлення після ремонту) до переходу в граничний стан.

Для невідновлюваних об'єктів поняття технічного ресурсу і напрацювання до відмови збігаються.

Технічні системи можуть бути невідновлюваними і відновлюваними, тривалого і короткого терміну роботи, резервованими і нерезервованими.

Технічна система називається *невідновлюваною* (неремонтованою), якщо її відмова призводить до невідворотних наслідків і систему не можна використовувати за своїм призначенням. Робота після відмови невідновлюваної системи вважається неможливою або недоцільною. Типовими прикладами невідновлюваних систем є напівпровідникові прилади, керовані снаряди, система управління повітряним судном в процесі польоту і т. п.

Під *відновлюваною* (ремонтованою) розуміють систему, яка може продовжувати виконання своїх функцій після усунення відмови, що викликала припинення її функціонування. Робота відновлюваної системи після відмови може бути відновлена в результаті проведення необхідних відновлювальних робіт. При цьому під відновленням системи розуміють не тільки ремонт тих чи інших елементів системи, а й повну заміну тих елементів, що відмовили, на нові.

Існують системи *змішаного типу*, у яких частина елементів може відновлюватися, а інші – ні.

Резервуванням називають спосіб підвищення надійності шляхом використання резервних одиниць, здатних у разі відмови основного пристрою виконувати його функції.

Різноманітні методи резервування і способи використання резерву можна звести до трьох методів: загального, роздільного (поелементного) і комбінованого (змішаного) резервування. *Загальним* називається таке резервування системи, при якому паралельно використовуються (вмикаються) ідентичні системи. *Роздільним* називається резервування системи шляхом використання окремих резервних пристроїв. При *комбінованому* резервуванні в одній і тій же системі застосовується загальне і роздільне резервування.

Відношення кількості резервних пристроїв до кількості основних називається *кратністю резервування*. Якщо основний елемент лише один, то таке резервування називається *резервуванням з цілою кратністю*, в протилежному випадку – *з дробовою кратністю*. Резервування може бути з відновленням, якщо основні та резервні елементи ремонтуються в процесі експлуатації, і без відновлення в протилежному випадку.

Основними способами використання резервних пристроїв при відмовах основних є такі:

- постійне, при якому резервні об'єкти з'єднані з основними протягом всього часу роботи;
- заміщенням, при якому резервні об'єкти заміщають основні тільки після відмови останніх.

В обидвох випадках резервні об'єкти можуть перебувати в трьох режимах роботи:

- *навантаженому*, коли резервні об'єкти знаходяться в тих же умовах, що і основні;
- *ненавантаженому*, коли резервні об'єкти не увімкнені і не можуть відмовляти;
- полегшеному, при якому резервні об'єкти увімкнені, але працюють не на повному навантаженні.

2. КРИТЕРІЇ НАДІЙНОСТІ НЕВІДНОВЛЮВАНИХ СИСТЕМ

2.1. Імовірність безвідмовної роботи

І.б.р. (*функцією надійності*) називається ймовірність того, що технічний об'єкт не відмовить протягом часу t або що час X роботи до відмови технічного об'єкта більший від часу його функціонування t:

$$P(t) = P\{X > t\}.$$

$P(t) -$ спадна функція часу, для якої $P(0)=1,\ P(+\infty)=0.$

І.б.р. характеризує надійність невідновлюваної техніки або відновлюваної до першої відмови. І.б.р. характеризує надійність у часі і є інтервальною оцінкою.

2.2. Щільність розподілу часу безвідмовної роботи (частота відмов)

Щ.р.ч.б.р. $f(t) -$ це щільність розподілу випадкової величини $X -$ часу безвідмовної роботи. Вона характеризує надійність в даний момент, тобто є точковою характеристикою. За допомогою функції $f(t)$ можна визначити будь-який показник надійності невідновлюваної системи.

2.3. Інтенсивність відмов

І.в. називається відношення щільності розподілу часу безвідмовної роботи до ймовірності безвідмовної роботи об'єкта:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}.$$

З означення $\lambda(t)$ випливає, що $\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}$, тобто $\int_0^t \lambda(u)du = -\ln P(t)$ або

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}.$$

Інтенсивність відмов є основним показником надійності складних систем.

2.4. Середній час безвідмовної роботи

С.ч.б.р. – це математичне сподівання часу безвідмовної роботи технічного об'єкта:

$$E(X)=\int_0^\infty tf(t)dt.$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$T=\int_0^\infty tf(t)dt=-\int_0^\infty tP'(t)dt=-tP(t)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty P(t)dt=\int_0^\infty P(t)dt,$$

оскільки $P(0)=1,\ \ P(+\infty)=0.$

Використовують ще такі показники надійності:

$\Lambda(t)=-\ln P(t)=\int_0^t \lambda(u)du-$ *функція ресурсу*;

$t_\gamma-\gamma$*-відсотковий ресурс* – напрацювання, протягом якого елемент не досягає стану відмови з імовірністю $\dfrac{\gamma}{100}$, тобто $P(t_\gamma)=\dfrac{\gamma}{100}$.

3. КРИТЕРІЇ НАДІЙНОСТІ ВІДНОВЛЮВАНИХ СИСТЕМ

Показниками надійності відновлюваних елементів і систем можуть бути також показники надійності невідновлюваних елементів у тих випадках, коли система, у склад якої входить елемент не підлягає ремонту за умовами її роботи (автоматичний літальний апарат, апаратура, яка працює в агресивному середовищі, літак у процесі польоту, відсутність запчастин для ремонту і т.п.).

Надійність відновлюваних об’єктів оцінюють такими показниками:

$E(X_S)-$ середній час роботи до відмови;

$E(\tilde{X}_S)-$ середній час роботи між відмовами;

$K(t)-$ функція готовності – ймовірність того, що система справна в момент t;

$K=\lim\limits_{t\to\infty}K(t)-$ коефіцієнт готовності – ймовірність того, що система буде справною в умовах тривалої експлуатації (стаціонарний режим).

4. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ЧАСУ БЕЗВІДМОВНОЇ РОБОТИ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

4.1. Показниковий розподіл

Задається функцією розподілу $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, $t \geq 0$. За допомогою цього розподілу апроксимують час безвідмовної роботи елементів радіоелектронної апаратури, в медицині – тривалість життя хворих, в задачах масового обслуговування.

Цей розподіл має один параметр $\lambda = \frac{1}{T}$, де $T = E(X) -$ середнє напрацювання елемента до відмови. Отже, параметр λ характеризує кількість відмов за одиницю часу і називається інтенсивністю відмов. Щільність показникового розподілу задається у вигляді $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Функція надійності $P(t) = e^{-\lambda t}$ визначає ймовірність безвідмовної роботи за час t. У даному випадку інтенсивність відмов є сталою: $\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \lambda$. Функція ресурсу є лінійною функцією: $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du = \lambda t$.

З рівності $P(t_\gamma) = \frac{\gamma}{100}$ знаходимо величину γ-відсоткового ресурсу:

$$t_\gamma = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\gamma}{100}.$$

Показниковий розподіл має властивість відсутності пам'яті. Нехай X – показниково розподілений час безвідмовної роботи деякого виробу. Відсутність пам'яті означає, що виріб, який пропрацював час t, має такий самий розподіл часу безвідмовної роботи, як і новий, тобто виконується рівність

$$P\{X > t + x / X > t\} = P\{X > x\}$$

для будь-яких $t, x \geq 0$. Ця властивість ніби виключає зношування і старіння виробу.

Для характеристики поступових відмов використовують інші розподіли.

4.2. Нормальний розподіл

Характеризується щільністю розподілу

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Розподіл наближається до нормального, якщо на випадкову величину впливає велика кількість незалежних приблизно рівнозначних випадкових чинників. Для великого часу роботи елемента і наявності відновлення середня кількість відмов має асимптотично нормальний розподіл.

Для нормального розподілу ймовірність безвідмовної роботи обчислюється за формулою

$$P(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=0,5-\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx-$ функція Лапласа.

Сума незалежних нормально розподілених випадкових величин також має нормальний розподіл.

4.3. Усічений нормальний розподіл

Усічений нормальний розподіл одержується з нормального в результаті обмеження інтервалу зміни випадкової величини на проміжок $[0,+\infty)$. Щільність розподілу містить коефіцієнт пропорційності c:

$$f(t)=\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}},$$

який визначається з умови $\int_0^{\infty}f(t)dt=1$ у вигляді $c=\frac{1}{0,5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)}$.

Математичне сподівання і дисперсія цього розподілу визначаються за формулами:

$$E(X)=a+k\sigma,\quad D(X)=\sigma^2\left(1+k\frac{a}{\sigma}-k^2\right),\;\; k=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$$

Імовірність безвідмовної роботи обчислюється за формулою

$$P(t)=\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=c\left(0,5-\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)\right).$$

4.4. Розподіл Вейбулла

Є універсальним, оскільки дає змогу змінювати обидва його параметри. Задається щільністю розподілу

$$f(t)=\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

з параметром форми α і параметром масштабу β. Для цього розподілу

$$F(t)=P\{X<t\}=1-e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}},\; E(X)=\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right),\; D(X)=\beta^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right),$$

де $\Gamma(t)=\int\limits_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}dx -$ гамма-функція. Універсальність розподілу Вейбулла полягає в тому, що при $\alpha=1$ він стає показниковим, при $\alpha<1$ функції щільності та інтенсивності відмов спадні, при $\alpha>1$ інтенсивність відмов зростаюча, при $\alpha=2$ функція $\lambda(t)$ лінійна і розподіл Вейбулла стає розподілом Релея зі щільністю $f(t)=2\lambda t e^{-\lambda t^2}$, при $\alpha=3{,}3$ розподіл Вейбулла близький до нормального.

Поряд з логарифмічно нормальним розподілом, розподіл Вейбулла добре описує напрацювання деталей, які підлягають руйнуванням втоми, напрацювання до відмови підшипників, а також використовується для оцінки надійності деталей і вузлів автомобілів, підйомно-транспортних та інших машин. Залежності між показниками надійності у випадку розподілу Вейбулла часу безвідмовної роботи є такими:

$$P(t)=e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}, \quad T=\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right), \quad \lambda=\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}t^{\alpha-1}.$$

4.5. Гамма-розподіл

Гамма-розподіл задається щільністю

$$f(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{t}{\beta}}$$

з параметрами α і β. Для цього розподілу

$$E(X)=\alpha\beta, \qquad D(X)=\alpha\beta^2.$$

Імовірність безвідмовної роботи елемента, для якого час безвідмовної роботи має гамма-розподіл, виражається через інтеграл

$$P(t)=\int\limits_t^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}}dx=1-\int\limits_0^{t}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}}dx.$$

Параметр α характеризує асиметрію гамма-розподілу і визначає вигляд характеристик надійності. При $\alpha>1$ інтенсивність відмови зростає, при $\alpha<1$ спадає, а при $\alpha=1$ є сталою, тому що гамма-розподіл перетворюється в показниковий.

Для натуральних α гамма-розподіл стає розподілом Ерланга порядку α. Для цього розподілу показники надійності мають вигляд

$$P(t)=e^{-\frac{t}{\beta}}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{t^i}{i!\beta^i}, \quad E(X)=\alpha\beta, \quad \lambda(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}\sum\limits_{i=0}^{\alpha-1}\frac{t^i}{i!\beta^i}}.$$

4.6. Моделювання деяких розподілів за допомогою GPSS World

В GPSS World існують бібліотечні оператори, призначені для моделювання основних розподілів випадкових величин. Наведемо деякі з них.

(Uniform(n,a,b))

Задається випадкова величина, розподілена рівномірно на проміжку [a,b]. Номер генератора випадкових чисел n – довільне натуральне число.

(Exponential(n,0,a))

Задається випадкова величина, розподілена згідно з показниковим законом з середнім значенням a. Номер генератора випадкових чисел n.

(Gamma(n,0,b,a))

Задається випадкова величина, розподілена згідно з гамма-розподілом з параметром форми $\alpha = a$ і параметром масштабу $\beta = b$. Номер генератора випадкових чисел n.

(Weibull(n,0,b,a))

Задається випадкова величина, розподілена згідно з розподілом Вейбулла з параметром форми $\alpha = a$ і параметром масштабу $\beta = b$. Номер генератора випадкових чисел n.

(Normal(n,a,σ))

Задається випадкова величина, розподілена нормально з середнім значенням a і середнім квадратичним відхиленням σ. Номер генератора випадкових чисел n.

5. АНАЛІЗ НАДІЙНОСТІ НЕВІДНОВЛЮВАНИХ СИСТЕМ

Припустимо, що невідновлювана система складається з елементів, часи до відмови яких є незалежними випадковими величинами X_i. Нехай $P_i(t)$ і $f_i(t)$ – імовірність безвідмовної роботи і щільність розподілу часу до відмови i-го елемента відповідно, X_S – час безвідмовної роботи системи.

Визначимо такі характеристики надійності системи: ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$, середній час безвідмовної роботи $E(X_S)$, щільність розподілу часу до відмови $f(t)$, інтенсивність відмов $\lambda(t)$. Розглянемо випадки нерезервованої і структурно резервованої системи при загальному і роздільному резервуванні з постійно увімкненим резервом і за методом заміщення.

5.1. Надійність нерезервованої системи

Структурна схема (схема розрахунку надійності) нерезервованої системи, яка складається з n елементів, наведена на рис. 5.1.

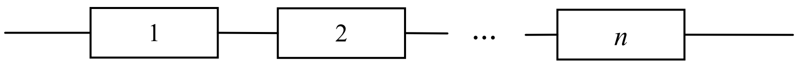


Рис. 5.1

Таке з'єднання в теорії надійності називається основним. У цьому випадку відмова системи відбувається внаслідок відмови елемента з найменшим часом безвідмовної роботи, тобто

$$X_S = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

де X_S – час роботи системи до відмови. В результаті всі інші елементи припиняють роботу.

Згідно з теоремою множення незалежних подій отримаємо:

$$P\{X_S > t\} = P\{\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > t\} = P\{X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_n > t\} = \prod_{j=1}^{n} P\{X_j > t\},$$

де t – час функціонування системи. Звідси випливає, що ймовірність безвідмовної роботи системи дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи її елементів:

$$P_S(t) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t).$$

Оскільки щільність розподілу часу безвідмовної роботи $f_S(t) = -P_S'(t)$, то

$$f_S(t) = \sum_{j=1}^{n} P_1(t) \dots f_j(t) \dots P_n(t).$$

Середній час безвідмовної роботи – це математичне сподівання часу до відмови системи, тому

$$T=\int_0^\infty t f_S(t)dt=\int_0^\infty P_S(t)dt.$$

Визначимо інтенсивність відмов системи, використовуючи означення

$$\lambda_S(t)=\frac{f_S(t)}{P_S(t)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}P_1(t)\dots f_j(t)\dots P_n(t)}{\prod_{i=1}^{n}P_i(t)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(t)}{P_j(t)},$$

тому

$$\lambda_S(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t).$$

Таким чином, інтенсивність відмов системи з основним з’єднанням елементів дорівнює сумі інтенсивностей відмов її елементів, незалежно від їхніх законів розподілу часу до відмов.

Формулу $\lambda_S(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)$ можна отримати іншим шляхом, якщо врахувати, що $P_S(t)=e^{-\int_0^t \lambda_S(u)du}$:

$$P_S(t)=\prod_{j=1}^{n}P_j(t)=\prod_{j=1}^{n}e^{-\int_0^t \lambda_j(u)du}=e^{-\int_0^t\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(u)du}=e^{-\int_0^t \lambda_S(u)du}.$$

Якщо елементи мають однакову надійність $\tilde{\lambda}(t)$, то

$$\frac{\lambda_S(t)}{\tilde{\lambda}(t)}=n.$$

Останнє означає, що інтенсивність відмов системи, складеної з рівнонадійних елементів, в n разів перевищує інтенсивність відмов елемента.

Отримаємо формули показників надійності системи для випадку сталих інтенсивностей відмов елементів. В даному випадку

$$P_S(t)=\prod_{j=1}^{n}P_j(t)=\prod_{j=1}^{n}e^{-\lambda_j t}=e^{-t\sum_{j=1}^{n}\lambda_j},$$

тобто

$$P_S(t)=e^{-\lambda_S t},\qquad \lambda_S=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j.$$

Середній час безвідмовної роботи

$$E(X_S)=\int_0^\infty P_S(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda_S t}dt=\frac{1}{\lambda_S}.$$

5.2. Надійність найпростіших резервованих систем

Основним способом підвищення надійності і зниження техногенного ризику є *структурне резервування*, яке реалізується шляхом введення в систему додаткових елементів, вузлів, блоків. Розглянемо системи з постійно увімкненим резервом і з резервом заміщенням.

5.2.1. Система з паралельним з'єднанням елементів (постійно увімкнений резерв, один основний елемент)

Структурна схема системи з постійно увімкненим резервом зображена на рис. 5.3. Елемент з номером 0 є основним, а елементи з номерами 1,2,...,m – резервними. Загальна кількість елементів в системі $n = m+1$, де $m-$ кратність резервування – відношення кількості резервних елементів до кількості основних У даному випадку відмова системи настає при відмові елемента з максимальним часом роботи, тобто $X_S = \max\{X_0, X_1, \ldots, X_m\}$.

За теоремою множення для незалежних подій

$$P\{X_S < t\} = P\{\max\{X_0, X_1, \ldots, X_m\} < t\} =$$

$$= P\{X_0 < t, X_1 < t, ..., X_m < t\} = \prod_{k=0}^{m} P\{X_k < t\}.$$

Звідси випливає, що ймовірність відмови системи дорівнює добутку ймовірностей відмов її елементів:

$$Q_S(t) = 1 - P_S(t) = \prod_{k=0}^{m} Q_k(t)$$

або

$$P_S(t) = 1 - \prod_{k=0}^{m} \left(1 - P_k(t)\right).$$

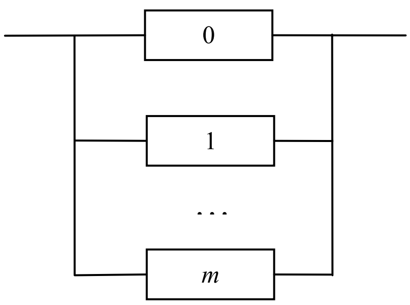


Рис. 5.3

На практиці часто зустрічаються випадки, коли основна система і всі резервні однакові і мають ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$. Тоді

$$P_S(t) = 1 - \left(1 - P(t)\right)^n.$$

Оскільки $f(t) = Q'(t)$, то

$$f_S(t)=\sum_{k=0}^{m}Q_0(t)...f_k(t)...Q_m(t),$$

тоді

$$f_S(t)=\sum_{k=0}^{m}\big(1-P_0(t)\big)...f_k(t)...\big(1-P_m(t)\big).$$

Визначимо інтенсивність відмов $\lambda_S(t)$ резервованої системи з постійно увімкненим резервом. За означенням інтенсивності відмов маємо:

$$\lambda_S(t)=\frac{f_S(t)}{P_S(t)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m}Q_0(t)...f_k(t)...Q_m(t)}{1-\prod\limits_{k=0}^{m}Q_k(t)}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}f_j(t)\prod\limits_{k\neq j}^{m}Q_k(t)}{1-\prod\limits_{k=0}^{m}Q_k(t)}.$$

Отримаємо розрахункові формули для випадку рівнонадійних систем і постійної інтенсивності відмов елементів $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_m=\lambda.$ У цьому випадку ймовірність безвідмовної роботи системи визначається за формулою:

$$P_S(t)=1-\big(1-P(t)\big)^{m+1}=1-(1-e^{-\lambda t})^{m+1}. \qquad (5.1)$$

Вираз для інтенсивності відмов системи легко отримати зі співвідношення:

$$\lambda_S(t)=-\frac{P_S'(t)}{P_S(t)}.$$

Підставляючи сюди $P_S(t)$ з (5.1) і його похідну $P_S'(t),$ одержимо

$$\lambda_S(t)=\frac{(m+1)\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^m}{1-(1-e^{-\lambda t})^{m+1}}.$$

З цього виразу видно, що $\lambda_S(0)=0$ і функція $\lambda_S(t)$ зростаюча, причому

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_S(t)=\lambda.$$

Залежність інтенсивності відмов від часу зображено на рис. 5.4.

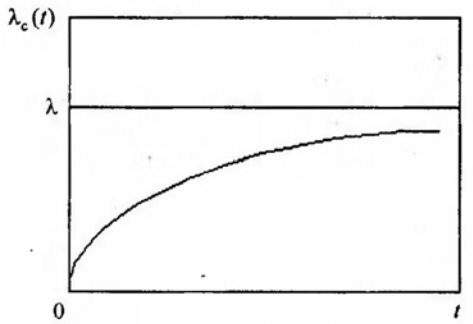


Рис. 5.4

Отримаємо вираз для середнього часу безвідмовної роботи системи. З виразу (5.1) випливає, що

$$T=\int_0^\infty P_S(t)dt=\int_0^\infty\Big(1-(1-e^{-\lambda t})^{m+1}\Big)dt.$$

Обчислимо інтеграл

$$I(m+1)=\int_0^\infty\Big(1-(1-e^{-\lambda t})^{m+1}\Big)dt=\int_0^\infty\Big(1-(1-e^{-\lambda t})^{m}(1-e^{-\lambda t})\Big)dt=$$

$$=I(m)+\int_0^\infty(1-e^{-\lambda t})^m e^{-\lambda t}dt=I(m)+\left.\frac{(1-e^{-\lambda t})^{m+1}}{(m+1)\lambda}\right|_0^\infty=I(m)+\frac{1}{(m+1)\lambda}.$$

Звідси випливає, що

$$I(m+1)=I(m)+\frac{1}{(m+1)\lambda}=I(m-1)+\frac{1}{m\lambda}+\frac{1}{(m+1)\lambda}=\cdots=$$

$$=I(1)+\frac{1}{2\lambda}+\cdots+\frac{1}{m\lambda}+\frac{1}{(m+1)\lambda}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda}+\cdots+\frac{1}{m\lambda}+\frac{1}{(m+1)\lambda}.$$

Отже,

$$T=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}.$$

Оскільки середній час безвідмовної роботи нерезервованої системи $T_0=1/\lambda$, то

$$T=T_0\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}.$$

З цієї формули видно, що зі зростанням кратності резервування (m) час безвідмовної роботи системи росте повільно.

5.2.2. Резервування з дробовою кратністю (кількість основних елементів більша за 1)

Існують технічні системи, які часто називають мажоритарними, з дробовою кратністю резервування $m/(n-m)$, де $m-$ кількість резервних елементів, $n-$ загальна кількість елементів.

Мажоритарна система буде працездатною протягом часу t (подія A) у випадку відмови не більш, ніж m елементів. Нехай A_i- подія, яка означає відмову будь-яких i $(0\le i\le m)$ елементів за час t. Тоді $A=A_0+A_1+\cdots+A_m$. Подія A_i відбудеться, якщо відмовлять будь-які i елементів, а решта $n-i$ елементів залишаться працездатними. Імовірність цієї події виражається формулою Бернуллі

$$P(A_i)=C_n^iQ^i(t)P^{n-i}(t).$$

Оскільки події A_i попарно несумісні, то ймовірність суми подій рівна сумі ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A)=\sum_{i=0}^{m}P(A_i)=\sum_{i=0}^{m}C_n^iQ^i(t)P^{n-i}(t).$$

Таким чином, імовірність безвідмовної роботи мажоритарної системи за умови, що всі елементи мають однакову надійність, дорівнює

$$P_S(t)=\sum_{i=0}^{m}C_n^iQ^i(t)P^{n-i}(t). \qquad (5.2)$$

Зокрема, при $m=0$ отримуємо основне з'єднання елементів, для якого $P_S(t)=P^n(t),$ при $m=n-1-$ резервне з'єднання елементів, для якого $P_S(t)=1-Q^n(t).$ При $m=1$ отримуємо систему, відмова якої настає у випадку відмови будь-якого з двох її елементів. Тоді $P_S(t)=P^n(t)+nQ(t)P^{n-1}(t).$

Інколи через m позначають кількість основних елементів, тоді формула (5.2) набуває вигляду

$$P_S(t)=\sum_{k=m}^{n} C_n^k P^k(t)Q^{n-k}(t).$$

Визначимо інтенсивність відмов $\lambda_S(t)$ мажоритарної системи і дослідимо її властивості. Оскільки $f_S(t)=-P_S'(t),$ то використовуючи формулу (5.2), одержимо:

$$f_S(t)=-\sum_{k=0}^{m} C_n^k k Q^{k-1}(t)P^{n-k}(t)f(t)+\sum_{k=0}^{m} C_n^k (n-k)Q^k(t)P^{n-k-1}(t)f(t).$$

Перетворимо цей вираз:

$$f_S(t)=-\sum_{k=1}^{m}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}Q^{k-1}(t)P^{n-k}(t)f(t)+\sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}Q^k(t)P^{n-k-1}(t)f(t)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}Q^k(t)P^{n-k-1}(t)f(t)+\sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}Q^k(t)P^{n-k-1}(t)f(t)=$$

$$=(n-m)C_n^m Q^m(t)P^{n-m-1}(t)f(t).$$

Знайдемо тепер інтенсивність відмов мажоритарної системи

$$\lambda_S(t)=\frac{f_S(t)}{P_S(t)}=\frac{(n-m)C_n^m Q^m(t)P^{n-m-1}(t)f(t)}{\sum_{k=0}^{m} C_n^k Q^k(t)P^{n-k}(t)}$$

або

$$\lambda_S(t)=\frac{f_S(t)}{P_S(t)}=\frac{(n-m)C_n^m Q^m(t)P^{n-m}(t)}{\sum_{k=0}^{m} C_n^k Q^k(t)P^{n-k}(t)}\lambda(t).$$

Обчислимо, відношення інтенсивності відмов системи до інтенсивності відмов одного елемента:

$$\frac{\lambda_S(t)}{\lambda(t)}=(n-m)\frac{C_n^m Q^m(t)P^{n-m}(t)}{\sum_{k=0}^{m} C_n^k Q^k(t)P^{n-k}(t)}.$$

Розглянемо випадок наявності резерву $(m\ge 1).$ Враховуючи, що $P(0)=1,$ $Q(0)=0,$ одержимо, що в початковий момент часу

$$\frac{\lambda_S(0)}{\lambda(0)}=0,$$

а оскільки $P(\infty)=0,$ $Q(\infty)=1,$ то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_S(t)}{\lambda(t)}=(n-m)\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{C_n^k}{C_n^m}\left(\frac{P(t)}{Q(t)}\right)^{m-k}}=n-m.$$

Таким чином, наявність резерву призводить до зміни відношення інтенсивності відмов системи до інтенсивності відмов елемента від нуля до сталої величини, яка дорівнює кількості основних елементів системи $n-m$.

5.2.3. Резерв заміщенням

Структурну схему системи зображено на рис. 5.7. Відмова системи настає у випадку відмови нульового елемента, потім першого, другого і т.д., тобто всіх $(m+1)$ елементів.

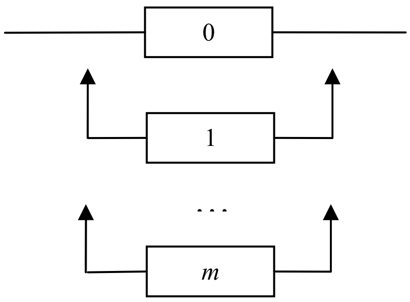


Рис. 5.7

Отже, загальний час до відмови системи дорівнює сумі часів до відмови елементів $X_S=\sum\limits_{i=0}^{m}X_i$. З теорії ймовірностей відомо, що щільність розподілу суми незалежних випадкових величин дорівнює згортці щільностей доданків, тому

$$f_S(t)=f_0*f_1*...*f_m(t).$$

Визначимо ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу t. Нехай спочатку $m=1$. Система пропрацює безвідмовно протягом часу t при настанні однієї з двох несумісних подій:

$A-$елемент з номером 0 пропрацює безвідмовно протягом часу t;

$B-$ елемент з номером 0 відмовить в певний момент часу $x<t,$ а елемент з номером 1 пропрацює безвідмовно протягом часу, що залишився $(t-x)$.

Імовірність події A дорівнює $P_0(t)$. Імовірність події B, отримана за формулою повної ймовірності, дорівнює

$$\int_0^t f_0(x)P_1(t-x)dx=f_0*P_1(t).$$

За теоремою додавання ймовірностей отримаємо:

$$P_S(t)=P_0(t)+f_0*P_1(t).$$

Цю формулу можна узагальнити на систему, яка містить $(m+1)$ елементів:

$$P_S(t)=P_0(t)+f_0*P_1(t)+f_0*f_1(t)*P_2(t)+\cdots+f_0*f_1(t)*\cdots f_{m-1}(t)*P_m(t),$$

або

$$P_S(t)=\sum_{k=0}^{m} f_0 * f_1 * \ldots * f_{k-1} * P_k(t). \tag{5.3}$$

На практиці в більшості випадків резервування заміщенням здійснюється однотипними системами, коли основна система і всі резервні рівнонадійні. У цьому випадку з формули (5.3) випливає, що

$$P_S(t)=\sum_{k=0}^{m} f^{*(k)} * P(t),$$

де $f(t)-$ щільність розподілу часу безвідмовної роботи, $f^{*(k)}(t)=\underbrace{f * f * \ldots * f}_{k}(t)-$ k-разова згортка щільностей, $P(t)-$ імовірність безвідмовної роботи кожного елемента.

Перетворимо отриманий вираз, використовуючи співвідношення $P(t)=P\{X>t\}$, тобто

$$P_S(t)=1-\int_0^t f_S(x)dx.$$

Отже,

$$P_S(t)=1-\int_0^t f^{*(m+1)}(x)dx.$$

Отримаємо формулу для ймовірності безвідмовної роботи за умови, що інтенсивність відмов λ є величиною сталою. Оскільки сума випадкових величин з $(m+1)$-го доданка, кожен з яких має показниковий розподіл з параметром λ, підпорядкована розподілу Ерланга з параметрами $\alpha=m+1$ і $\beta=1/\lambda$, то

$$P_S(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

Формулу для середнього часу безвідмовної роботи можна одержати зі співвідношення

$$T=E(X_0)+E(X_1)+\ldots+E(X_m).$$

Отже,

$$T=(m+1)\frac{1}{\lambda}=(m+1)T_0,$$

де T_0- середній час безвідмовної системи основної системи. Цей результат зрозумілий, якщо згадати струкутуру системи.

5.3. Надійність систем у випадках загального і роздільного резервування

Основними видами структурного резервування є загальне і роздільне (поелементне) при постійно увімкненому резерві і за способом заміщення. Метод резервування, коли резервується вся система в цілому, називається загальним, а в разі, коли резервуються окремі елементи системи, називається роздільним. Структурні схеми цих видів резервування (схеми розрахунку надійності) наведені на рис. 5.9-5.12. На рисунках введено наступні позначення: $n -$ кількість елементів основної системи, $m -$ кількість резервних систем.

Знайдемо залежність часу безвідмовної роботи системи від часу роботи її елементів. Нехай X_{ij} – випадковий час до відмови елемента, який знаходиться в i-му ряду і j-й колонці, тобто елемента з номером (i, j), X_S – випадковий час до відмови системи, $P_{ij}(t) -$ імовірність безвідмовної роботи елемента з номером (i, j), а $f_{ij}(t) -$ щільність розподілу часу до відмови цього елемента, $i = 0,1,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$. Отримаємо формули, що зв'язують X_S з X_{ij} для різних схем розрахунку надійності і обчислимо ймовірність безвідмовної роботи системи $P_S(t)$ для різних способів резервування.

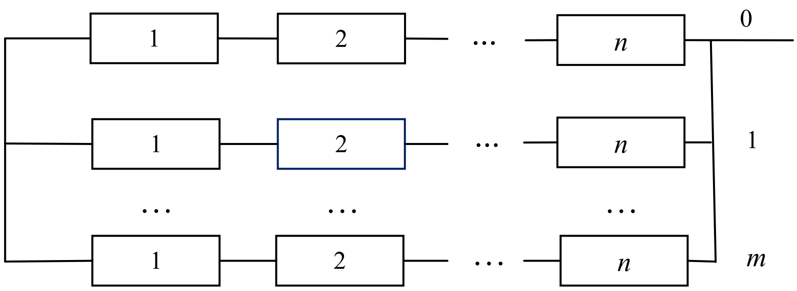


Рис. 5.9. Загальне резервування з постійно увімкненим резервом

У випадку *загального резервування з постійно увімкненим резервом* (див. рис. 5.9) елементи i-го ряду $(i = 0,1,2,\ldots,m)$ утворюють послідовне з'єднання елементів, тому час до відмови підсистеми, складеної з елементів i-го ряду, дорівнює $X_i = \min\limits_{j=1,2,\ldots,n} X_{ij}$. Оскільки вся система є паралельним з'єднанням цих підсистем, то час до відмови системи дорівнює $X_S = \max\limits_{i=0,1,\ldots,m} X_i$, звідси

$$X_S = \max_{i=0,1,\ldots,m} \min_{j=1,2,\ldots,n} X_{ij}.$$

З послідовного з'єднання елементів i-го ряду випливає, що ймовірність безвідмовної роботи підсистеми, складеної з елементів i-го ряду,

$$P_i(t) = \prod_{j=1}^{n} P_{ij}(t), \quad 0 \le i \le m.$$

Оскільки вся система є паралельним з'єднанням цих підсистем, то ймовірність відмови системи

$$Q_S(t) = \prod_{i=0}^{m} Q_i(t) = \prod_{i=0}^{m} \left(1 - P_i(t)\right) = \prod_{i=0}^{m} \left(1 - \prod_{j=1}^{n} P_{ij}(t)\right) = 1 - P_S(t).$$

Отже, ймовірність безвідмовної роботи системи

$$P_S(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} \left(1 - \prod_{j=1}^{n} P_{ij}(t)\right).$$

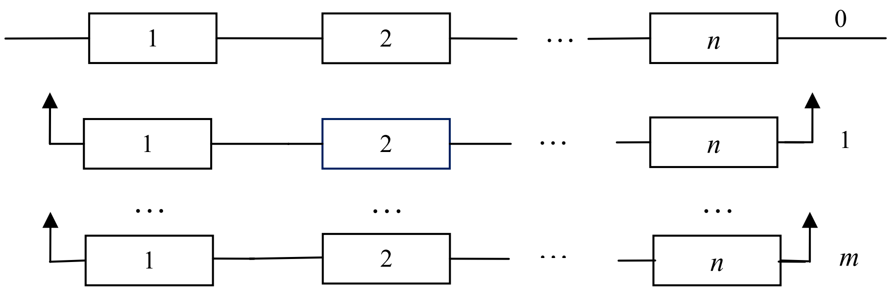


Рис. 5.10. Загальне резервування заміщенням

У випадку *загального резервування заміщенням* (див. рис. 5.10) елементи i-го ряду $(i = 0,1,2,\dots,m)$ утворюють послідовне з'єднання елементів, тому час до відмови підсистеми, складеної з елементів i-го ряду, дорівнює $X_i = \min\limits_{j=1,2,\dots,n} X_{ij}$. Час до відмови всієї системи дорівнює, очевидно, сумі часів до відмови цих підсистем, отже, $X_S = \sum\limits_{i=0}^{m} X_i$, звідси

$$X_S = \sum_{i=0}^{m} \min_{j=1,2,\dots,n} X_{ij}.$$

Маємо:

$$P_S(t) = \sum_{i=0}^{m} f_0 * f_1 * \dots * f_{i-1} * P_i(t),$$

де

$$P_i(t) = \prod_{j=1}^{n} P_{ij}(t), \qquad f_i(t) = -P_i'(t).$$

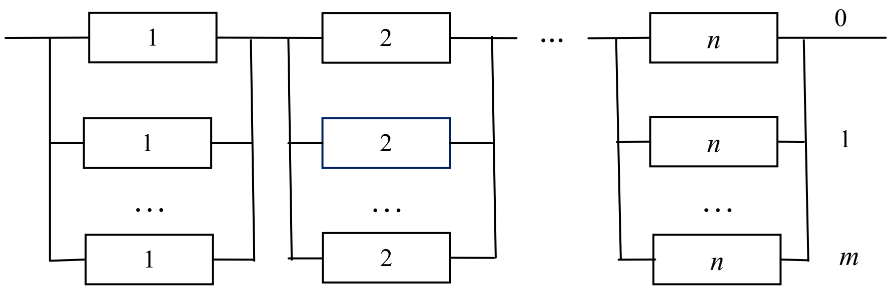


Рис. 5.11. Роздільне резервування з постійно увімкненим резервом

У випадку *роздільного резервування з постійно увімкненим резервом* (див. рис. 5.11) елементи j-ї колонки $(j = 1,2,\dots,n)$ утворюють паралельне з'єднання елементів, тому час до відмови підсистеми, складеної з елементів j-ї колонки, дорівнює $X^j = \max\limits_{i=0,1,\dots,m} X_{ij}$. Оскільки вся система являє собою послідовне з'єднання цих підсистем, то час до відмови системи дорівнює $X_S = \min\limits_{j=1,2,\dots,n} X^j$, звідси

$$X_S = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=0,1,\dots,m} X_{ij}.$$

З паралельного з'єднання елементів j-ї колонки випливає, що ймовірність відмови підсистеми, складеної з цих елементів

$$Q^j(t)=\prod_{i=0}^{m}Q_{ij}(t)=\prod_{i=0}^{m}\left(1-P_{ij}(t)\right),\quad P^j(t)=1-Q^j(t)=1-\prod_{i=0}^{m}\left(1-P_{ij}(t)\right).$$

Отже, ймовірність безвідмовної роботи всієї системи, яка є послідовним з'єднанням цих підсистем,

$$P_S(t)=\prod_{j=1}^{n}P^j(t)=\prod_{j=1}^{n}\left(1-\prod_{i=0}^{m}\left(1-P_{ij}(t)\right)\right).$$

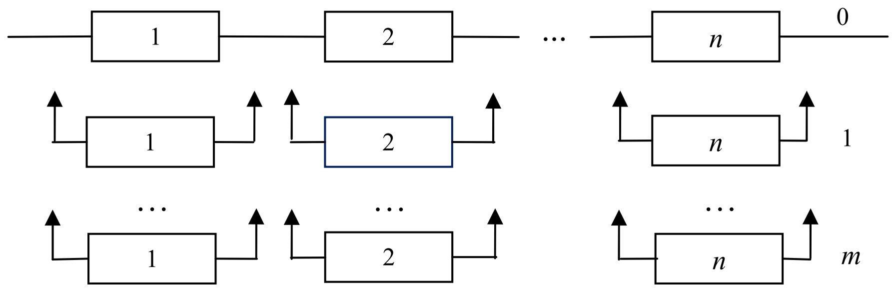


Рис. 5.12. Роздільне резервування заміщенням

У випадку *роздільного резервування заміщенням* (див. рис. 5.12) час до відмови підсистеми, утвореної елементами j-ї колонки $(j=1,2,\ldots,n)$ дорівнює сумі часів до відмови елементів, отже, $X^j=\sum_{i=0}^{m}X_{ij}$. Оскільки вся система являє собою послідовне з'єднання цих підсистем, то час до відмови системи дорівнює $X_S=\min\limits_{j=1,2,\ldots,n}X^j$, звідси

$$X_S=\min_{j=1,2,\ldots,n}\sum_{i=0}^{m}X_{ij}.$$

Для підсистеми, утвореної елементами j-ї колонки,

$$P^j(t)=\sum_{i=0}^{m}f_{0j}*f_{1j}*\ldots*f_{i-1,j}*P_{ij}(t),\qquad f_{ij}(t)=-P'_{ij}(t).$$

Для всієї системи, яка є послідовним з'єднанням цих підсистем

$$P_S(t)=\prod_{j=1}^{n}P^j(t)=\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}f_{0j}*f_{1j}*\ldots*f_{i-1,j}*P_{ij}(t).$$

Для наглядності запишемо отримані співвідношення для малих значень параметрів: $m=1,\ n=2$.

Загальне резервування з постійно увімкненим резервом:

$$P_S(t)=1-\left(1-P_{01}(t)P_{02}(t)\right)\left(1-P_{11}(t)P_{12}(t)\right).\qquad(5.4)$$

загальне резервування заміщенням:

$$P_S(t)=P_{01}(t)P_{02}(t)-\int_0^t\left(P_{01}(\tau)P_{02}(\tau)\right)'P_{11}(t-\tau)P_{12}(t-\tau)d\tau;$$

роздільне резервування з постійно увімкненим резервом:

$$P_S(t) = \left(1-\left(1-P_{01}(t)\right)\left(1-P_{11}(t)\right)\right)\left(1-\left(1-P_{02}(t)\right)\left(1-P_{12}(t)\right)\right); \qquad (5.5)$$

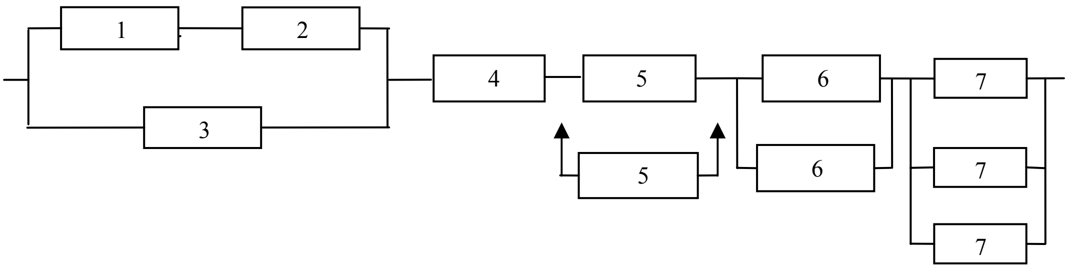
роздільне резервування заміщенням:

$$P_S(t) = \left(P_{01}(t) - \int_0^t P'_{01}(\tau)P_{11}(t-\tau)d\tau\right)\left(P_{02}(t) - \int_0^t P'_{02}(\tau)P_{12}(t-\tau)d\tau\right).$$

5.4. Розрахунок показників надійності системи складної структури

Методика аналізу надійності невідновлюваних систем, розглянута раніше, дозволяє розрахувати показники надійності системи складної структури. Задача при цьому формулюється так: задана структурна схема системи (схема розрахунку надійності) і показники надійності її елементів, необхідно розрахувати показники надійності системи. Розглянемо методику на прикладі.

Структурна схема системи представлена на рисунку. Імовірності безвідмовної роботи її елементів в деякий фіксований момент часу t задані. Обчислити ймовірність безвідмовної роботи $P_S(t)$.



Зобразимо дану систему у вигляді послідовного з'єднання її підсистем. Першою підсистемою є сукупність елементів 1, 2, 3, які утворюють резервовану систему з нерівнонадійними елементами. Елементи 1, 2 з'єднані в сенсі надійності послідовно, тому $P_{1,2} = p_1 p_2$ або $Q_{1,2} = 1 - p_1 p_2$. Тому ймовірність безвідмовної роботи першої підсистеми (1,2,3), яка є системою з постійно увімкненим резервом (елемент 3), дорівнює

$$P_{1,2,3} = 1 - (1 - p_1 p_2)(1 - p_3).$$

Елементи 5 утворюють систему з резервуванням методом заміщення. За допомогою формули

$$P_S(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

і враховуючи, що $m = 1,\ p_5 = e^{-\lambda t},\ \lambda t = -\ln p_5,$ одержимо

$$P_{5,5} = e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} = p_5(1 - \ln p_5).$$

Елементи 6 утворюють систему з постійно увімкненим резервом. Імовірність безвідмовної роботи така $P_{6,6} = 1 - (1 - p_6)^2$.

Елементи 7 утворюють систему з дробовою кратністю резервування: $m = 1,\ n = 3,\ m/(m - n) = 1/2.$ Отже,

$$P_{7,7,7} = \sum_{i=0}^{1} C_3^i (1 - p_7)^i p_7^{3-i} = 3p_7^2 - 2p_7^3.$$

Вважаючи відмови підсистем подіями незалежними, на основі теореми множення ймовірностей одержимо:

$$P_S = P_{1,2,3} \cdot P_4 \cdot P_{5,5} \cdot P_{6,6} \cdot P_{7,7,7} =$$

$$= \left(1 - (1 - p_1 p_2)(1 - p_3)\right) \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot (1 - \ln p_5) \cdot \left(1 - (1 - p_6)^2\right) \cdot (3p_7^2 - 2p_7^3).$$

6. ОБЧИСЛЕННЯ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ВІДНОВЛЮВАНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Основне коло задач, що розглядаються при розрахунку надійності відновлюваних систем, відноситься до наступної ситуації. Справний виріб починає експлуатуватися в момент часу $t=0$ і, пропрацювавши випадковий час X_i, виходить з ладу. На ремонт потрібно витратити випадковий час Y_i. Цей процес триває протягом усього терміну служби виробу, причому випадкові величини X_i і Y_i $(i=1,2,\ldots)$ незалежні.

6.1. Класифікація потоків подій. Найпростіший потік. Пуассонівський потік

Потоком подій називають послідовність подій, що відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу. Графічно потік подій зображають як послідовність точок t_1, $t_2\ldots$ на числовій осі Ot, що відповідають моментам появи подій.

Потік подій називають ***стаціонарним***, якщо $\forall\ t>0$ і цілого $k\geq 0$ ймовірність того, що за проміжок часу $(a,\ a+t)$ відбудеться k подій, одна і та сама для всіх $a\geq 0$ (і, отже, залежить лише від k і t). Надалі позначатимемо цю ймовірність через $v_k(t)$.

Вважають, що потік володіє властивістю ***відсутності післядії***, якщо ймовірність $v_k(t)$ появи k подій за проміжок часу $(a,\ a+t)$ не залежить від чергування подій до моменту a; іншими словами, умовна ймовірність появи k подій за проміжок часу $(a,\ a+t)$, обчислена за будь-якого припущення щодо чергування подій до моменту a, дорівнює безумовній імовірності $v_k(t)$ появи k подій. Відсутність післядії – це взаємна незалежність протікань потоку в проміжках часу, що не перетинаються.

Нехай для стаціонарного потоку $\psi(t)=1-v_0(t)-v_1(t)=\sum\limits_{k=2}^{\infty} v_k(t)$ – імовірність того, що за (де завгодно розташований) проміжок часу довжини t відбудеться *хоча б дві події.* Стаціонарний потік називають ***ординарним***, якщо $\psi(t)=o(t)$ при $t\to 0$, тобто $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t}=0$. Ординарність потоку виражає практичну неможливість суміщення двох і більше подій в один і той самий момент часу.

Потік, який володіє трьома переліченими властивостями, тобто стаціонарний ординарний потік без післядії, називають ***найпростішим потоком***.

Вивчення найпростішого потоку розпочнемо з обчислення щодо нього ймовірності появи k подій за проміжок часу довжини t, тобто визначення функції $v_k(t)$. Розглянемо проміжок часу одиничної довжини і позначимо через p ймовірність того, що за цей час не відбудеться жодної події ($p=v_0(1)$).

Розіб'ємо проміжок 1 на n рівних частин довжиною $1/n$, які не перетинаються. Унаслідок стаціонарності та відсутності післядії

$$p = \left(v_0\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n ,$$

(імовірність добутку незалежних подій), звідси:

$$v_0\left(\frac{1}{n}\right) = p^{1/n}, \quad v_0\left(\frac{k}{n}\right) = p^{k/n},$$

де k – натуральне число.

Нехай $t \geq 0$ – деяке невід'ємне число. Тоді для кожного натурального n існує натуральне число k, таке, що $\frac{k-1}{n} \leq t < \frac{k}{n}$. Оскільки $v_0(t)$ – незростаюча функція часу (чим довший проміжок часу t, тим менша ймовірність, що не відбудеться жодна подія), то:

$$v_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq v_0(t) \geq v_0\left(\frac{k}{n}\right),$$

тобто

$$p^{(k-1)/n} \geq v_0(t) \geq p^{k/n}.$$

Нехай тепер k і n прямують до ∞ так, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} = t$. З попередніх нерівностей випливає, що $v_0(t) = p^t$.

Оскільки $v_0(t)$ як імовірність задовольняє нерівності $0 \leq v_0(t) \leq 1$, то тут можливі такі 3 випадки: 1) $p=0$; 2) $p=1$; 3) $0<p<1$. Перші 2 випадки для нас нецікаві. В першому для всіх t $v_0(t)=0$ і, отже, ймовірність за проміжок часу будь-якої тривалості відбутися хоча б одній події дорівнює 1. Це означає, що кількість подій нескінченна для всіх t з імовірністю 1. У другому випадку $v_0(t)=1$ і, отже, події не відбуваються. Розглянемо третій випадок, в якому покладемо $p = e^{-\lambda}$, де $\lambda=\text{const}>0$ ($\lambda = -\ln p$).

Використовуючи лише умови стаціонарності та відсутності післядії, ми визначили, що:

$$\forall \quad t \geq 0 \qquad v_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Очевидно, що для всіх t $v_0(t)+v_1(t)+\psi(t)=1$. Для малих t з виразу для $v_0(t)$ випливає рівність (розклад за формулою Маклорена) $v_0(t)=1-\lambda t+o(t)$. Оскільки $\psi(t)=o(t)$ (ординарність), то при малих t

$$v_1(t)=\lambda t+o(t).$$

Перейдемо безпосередньо до виведення формули для $v_k(t)$ при $k \geq 1$. З цією метою визначимо ймовірність того, що за час $t+\Delta t$ подія відбудеться k разів. Це може здійснитися $k+1$ різним способом, а саме: 1) за проміжок часу t відбудуться усі k подій, а за проміжок Δt не відбудеться жодної; 2) за проміжок t відбудеться $k-1$ подія, а за проміжок Δt – одна… $k+1$) за проміжок t не відбудеться жодної події, а за проміжок Δt – k подій. Беручи до уваги умови стаціонарності та відсутності післядії, за формулою повної ймовірності отримаємо рівність:

$$v_k(t+\Delta t)=\sum_{j=0}^{k} v_j(t)v_{k-j}(\Delta t).$$

Поклавши $R_k=\sum_{j=0}^{k-2} v_j(t)v_{k-j}(\Delta t),$ одержимо:

$$R_k \le \sum_{j=0}^{k-2} v_{k-j}(\Delta t)=\sum_{s=2}^{k} v_s(\Delta t)\le\sum_{s=2}^{\infty} v_s(\Delta t)=\psi(\Delta t)=o(\Delta t)$$

(остання рівність випливає з умови ординарності потоку).

Отже,

$$v_k(t+\Delta t)=v_k(t)v_0(\Delta t)+v_{k-1}(t)v_1(\Delta t)+o(\Delta t).$$

Враховуючи вирази для $v_0(t)$ і $v_1(t)$, для малих Δt маємо:

$$v_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t); \qquad v_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

Тому $v_k(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)v_k(t)+\lambda\Delta t v_{k-1}(t)+o(\Delta t).$ Звідси:

$$\frac{v_k(t+\Delta t)-v_k(t)}{\Delta t}=-\lambda v_k(t)+\lambda v_{k-1}(t)+o(1).$$

Оскільки при $\Delta t\to 0$ границя правої частини існує, то існує й границя лівої частини. Перейшовши в останній рівності до границі, одержимо диференціальне рівняння для визначення $v_k(t)$:

$$\frac{dv_k(t)}{dt}=-\lambda v_k(t)+\lambda v_{k-1}(t).$$

З виразу для $v_0(t)$ та умови ординарності випливають початкові умови:

$$v_0(0)=1, \quad v_k(0)=0,\ k\ge 1.$$

У рівняннях для $v_k(t)$ зробимо заміну шуканих функцій:

$$v_k(t)=e^{-\lambda t}u_k(t).$$

Тоді з виразу для $v_0(t)$ випливає, що $u_0(t)=1$, а з початкових умов для $v_k(t)$ отримаємо:

$$u_0(0)=1, \quad u_k(0)=0,\ k\ge 1.$$

Здійснивши заміну, одержимо систему диференціальних рівнянь для послідовного визначення функцій $u_k(t)$, $k\ge 1$:

$$\frac{du_k(t)}{dt}=\lambda u_{k-1}(t).$$

При $k=1$ звідси отримаємо рівняння $\frac{du_1(t)}{dt}=\lambda;$ інтегруючи його з урахуванням початкової умови, визначимо: $u_1(t)=\lambda t$. Продовжуючи аналогічно процес послідовного інтегрування рівнянь для $u_k(t)$, для всіх $k\ge 1$ матимемо: $u_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}$. Звідси остаточно визначимо функції $v_k(t)$ для всіх $k\ge 0$:

$$v_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ \ k=0,1,2,\ldots \tag{6.1}$$

Співвідношення (6.1) дають змогу стверджувати, що ті 3 властивості (стаціонарність, відсутність післядії, ординарність), якими ми визначили найпростіший потік, цілком характеризують його структуру з точністю до параметра λ, який може бути будь-яким додатним числом. Два найпростіші потоки можуть відрізнятися один від одного лише значеннями цього параметра.

Співвідношення (6.1) означають, що для найпростішого потоку кількість подій, які відбуваються за проміжок часу t, розподілена за законом Пуассона з параметром λt.

Для будь-якого стаціонарного потоку домовимося позначати через $w(t)$ ймовірність того, що за проміжок часу t відбудеться *хоча б одна* подія, тобто:

$$w(t) = 1 - v_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) = v_1(t) + \psi(t).$$

Для будь-якого стаціонарного потоку існує границя:

$$\lim_{t \to 0} \frac{w(t)}{t} = \lambda > 0,$$

яка називається параметром стаціонарного потоку, причому не виключений випадок $\lambda = +\infty$.

Розглядатимемо лише потоки, в яких за скінченний проміжок часу з імовірністю 1 відбувається скінченна кількість подій, тобто виконується умова $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = 1$ для будь-якого t. Тоді для стаціонарного потоку без післядії (в тому числі і для найпростішого потоку) $v_0(t) = e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$ – стала), тому

$$w(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - (1 - \lambda t + o(t)) = \lambda t + o(t), \qquad \lim_{t \to 0} \frac{w(t)}{t} = \lambda.$$

Отже, параметр стаціонарного потоку без післядії завжди є деяким скінченним додатним числом. Однак, якщо припустити можливість післядії, то λ може перетворюватися в $+\infty$.

Математичне сподівання кількості подій за одиницю часу називають ***інтенсивністю стаціонарного потоку.*** Отже, для найпростішого потоку ітенсивність дорівнює параметру λ.

Визначимо закон розподілу інтервалу часу T між двома будь-якими сусідніми подіями в найпростішому потоці. Імовірність того, що на проміжку часу довжини t, який триває безпосередньо після однієї з подій, не з'явиться жодної події $v_0(t)=e^{-\lambda t}$ (унаслідок відсутності післядії в найпростішому потоці наявність події на початку проміжку не впливає на ймовірність появи тієї чи іншої кількості подій саме на проміжку). Проте ця ймовірність дорівнює ймовірності того, що випадкова величина T буде більшою від величини t (бо подія виникає через проміжок T), тобто $P\{T>t\}=e^{-\lambda t}$, звідки $F(t) = P\{T < t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$, де $F(t)$ – функція розподілу випадкової величини T. Диференціюючи останню рівність, одержимо щільність розподілу випадкової величини T: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$.

Отже, *у найпростішому потоці інтервал часу між двома сусідніми подіями розподілений згідно з показниковим законом з параметром* λ.

Розглянемо на осі Ot найпростіший потік і точку S, яка випадково падає на цю вісь. Позначимо через Θ інтервал часу між точкою S і першою подією, яка відбулась після точки S. Для найпростішого потоку випадкова величина Θ розподілена так само, як і випадкова величина T, тобто за показниковим законом з тим самим параметром λ.

Ця чудова властивість найпростішого потоку є іншою формою прояву властивості відсутності післядії. Вона означає, що будь-яка як завгодно докладна інформація про те, як себе поводив потік у минулому (до довільної точки S), не дає нам жодної інформації про те, що відбудеться після цієї точки. Іншими словами, ***майбутній розвиток процесу появи подій не залежить від того, як цей процес проходив у минулому***.

Потік, який не володіє стаціонарністю, однак, як і найпростіший потік, є ординарним потоком без післядії, називають ***пуассонівським***.

Якщо потік нестаціонарний, то ймовірність появи k подій за проміжок часу довжини τ залежить не лише від τ, а й від початкового моменту t цього проміжку, отож позначатимемо її через $v_k(\tau,t)$. Отже, $v_k(\tau,t)$ – ймовірність того, що за проміжок часу $(t,\ t+\tau)$ відбудеться k подій.

По аналогії зі стаціонарним випадком покладемо:

$$w(\tau,t)=1-v_0(\tau,t), \qquad \psi(\tau,t)=1-v_0(\tau,t)-v_1(\tau,t).$$

Назвемо нестаціонарний потік ***ординарним***, якщо для кожного фіксованого $t\geq 0$ $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\psi(\tau,t)}{\tau}=0$. Припустимо, що $\forall\ t\geq 0$ існує границя:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{w(\tau,t)}{\tau}=\lambda(t)-$$

миттєве значення параметра.

Можна довести, що для потоку зі змінним параметром кількість подій у проміжку $(t,\ t+\tau)$ розподілена за законом Пуассона, однак параметр цього закону тепер залежить не лише від довжини τ цього проміжку, а й від його початкового моменту t:

$$v_k(\tau,t)=e^{-\Lambda(\tau,t)}\frac{\left(\Lambda(\tau,t)\right)^k}{k!} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\ \ \Lambda(\tau,t)\ =\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du.$$

6.2. Система рівнянь щодо ймовірностей станів для пуассонівської системи. Ергодичні марковські процеси

Об'єктом нашого вивчення буде випадковий процес, що протікає у деякій системі і описує зміни станів цієї системи в часі. Розглянемо лише такі системи, які мають скінченну або зліченну множину можливих станів. Такі системи називатимемо *системами з дискретними станами*. Стани системи позначатимемо через s_0, s_1… s_n (для систем зі скінченною множиною станів) або через s_0, s_1… s_k… (для систем з нескінченною множиною станів). Вважатимемо, що перехід системи зі стану у стан здійснюється миттєво (стрибком).

Дискретним випадковим процесом $X(t)$ називатимемо процес, який протікає в системі з дискретними станами. Такий процес зручно інтерпретувати за допомогою *графа* (схеми) можливих станів, на якому стрілками позначають можливі переходи зі стану у стан. Наприклад, граф можливих станів відновлюваної системи можна зобразити у вигляді:

$$s_0 \rightleftarrows s_1,$$

де стан s_0 означає, що система працює, s_1 – система відмовила і перебуває на ремонті.

Стан, з якого система не може перейти в жоден інший, називають *станом без виходу* (або поглинаючим). Наприклад, електрична лампочка може перебувати в трьох станах: вимкнена (s_0), увімкнена (s_1) і перегоріла (s_2). Граф такої системи має вигляд:

$$s_0 \rightleftarrows s_1 \to s_2.$$

Очевидно, що тут s_2 – стан без виходу.

Стан, в який система не може перейти з жодного іншого, називають *станом без входу*. Наприклад, для системи

$$s_0 \to s_1 \rightleftarrows s_2$$

стан s_0 є станом без входу.

Нехай маємо дискретний випадковий процес, який протікає в системі з можливими станами s_0, s_1… s_i… s_j…. Позначимо умовну ймовірність того, що в момент $t=t_0+\tau$ система перебуватиме у стані s_j, якщо в момент t_0 вона перебувала у стані s_i, через $p_{ij}(t_0,\tau)$.

Дискретний випадковий процес $X(t)$ називають ***марковським***, якщо ймовірність $p_{ij}(t_0,\tau)$ залежить лише від параметрів i, j, t_0, τ, тобто від того, в якому стані система перебувала в момент t_0 і в який стан вона перейде через час τ. Іншими словами, всі ймовірнісні характеристики марковського процесу в майбутньому (при $t>t_0$) залежать лише від того, в якому стані цей процес перебуває у теперішній момент часу t_0 і не залежать від того, як цей процес протікав до моменту t_0 (у минулому), тобто для марковського процесу *майбутнє залежить від минулого лише через теперішнє. Марковським випадковим процесом з неперервним часом* називають такий марковський процес, коли перехід з одного стану в інший можливий у будь-який момент часу t.

Справедливе таке важливе твердження: ***якщо всі потоки подій, які переводять систему зі стану у стан, - пуассонівські, то випадковий процес, який протікає в системі, є марковським з неперервним часом.***

Системи, в яких протікають марковські випадкові процеси з неперервним часом, називатимемо *пуассонівськими* системами. Для пуассонівської системи позначимо через $\lambda_{ij}(t)$ інтенсивність потоку подій, який переводить систему зі стану s_i безпосередньо у стан s_j. Наприклад, граф

$$s_0 \underset{\lambda_{10}(t)}{\overset{\lambda_{01}(t)}{\rightleftarrows}} s_1 \tag{6.2}$$

зображає систему з двома станами s_0 і s_1, причому перехід системи зі стану s_0 у стан s_1 відбувається під дією пуассонівського потоку подій з інтенсивністю $\lambda_{01}(t)$, а зі стану s_1 у стан s_0 – унаслідок дії пуассонівського потоку з інтенсивністю $\lambda_{10}(t)$.

Головна перевага пуассонівських систем стосовно їхнього дослідження полягає у тому, що для цих систем імовірності станів описують за допомогою звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Щоб проілюструвати методику виведення цих рівнянь, розглянемо просту систему з двома станами s_0 і s_1, граф якої має вигляд (6.2). Складемо рівняння, які визначають імовірності $p_0(t)$ і $p_1(t)$ того, що система у будь-який момент часу t перебуває у стані s_0 і s_1, відповідно. З цією метою розглянемо момент часу t і надамо йому малий приріст Δt. Тоді $p_0(t+\Delta t)$ – ймовірність того, що в момент часу $t+\Delta t$ система перебуває у стані s_0. Ця подія можлива у двох випадках: A – система в момент часу t була у стані s_0 і за час Δt з нього не вийшла; B – система в момент часу t була у стані s_1 і за час Δt перейшла у стан s_0. Унаслідок ординарності пуассонівських потоків подій імовірність здійснення кількох переходів (понад один) за час Δt є величиною вищого порядку мализни порівняно з Δt ($o(\Delta t)$).

Визначимо ймовірність події A. Ця подія відбудеться, якщо в момент часу t система перебуватиме у стані s_0 (імовірність цього дорівнює $p_0(t)$) і за час Δt не відбудеться жодної події в потоці з інтенсивністю $\lambda_{01}(t)$. Імовірність останньої події дорівнює:

$$v_0(\Delta t,t)=e^{-\Lambda(\Delta t,t)}=\exp\left(-\int\limits_t^{t+\Delta t}\lambda_{01}(\tau)d\tau\right).$$

Отже, $P(A)=p_0(t)\exp\left(-\int\limits_t^{t+\Delta t}\lambda_{01}(\tau)d\tau\right)$. Вважаючи величину Δt малою, а інтенсивність $\lambda_{01}(t)$ – неперервною функцією, одержимо:

$$P(A)=p_0(t)\left(1-\lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t+o(\Delta t)\right).$$

У цьому випадку інтеграл записано згідно з теоремою про середнє у вигляді:

$$\int\limits_t^{t+\Delta t}\lambda_{01}(\tau)d\tau=\lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t,$$

де $\tilde{t}\in(t,t+\Delta t)$.

Подія B відбудеться, якщо в момент часу t система перебуватиме у стані s_1 і в потоці подій з інтенсивністю $\lambda_{10}(t)$ за час Δt відбудеться хоча б одна подія, а в потоці з інтенсивністю $\lambda_{01}(t)$ за цей же час не відбудеться жодної події. Спираючись на ті самі формули для пуассонівського потоку подій і вважаючи функцію $\lambda_{10}(t)$ неперервною, одержимо:

$$P(B) = p_1(t)\left(1 - \exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_{10}(\tau)d\tau\right)\right)\exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_{01}(\tau)d\tau\right) =$$

$$= p_1(t)\Big(1 - 1 + \lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})\Delta t + o(\Delta t)\Big)\Big(1 - \lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t + o(\Delta t)\Big) =$$

$$= p_1(t)\Big(\lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})\Delta t + o(\Delta t)\Big),$$

де $\tilde{\tilde{t}} \in (t, t + \Delta t)$.

Застосовуючи теорему додавання ймовірностей (події несумісні), запишемо:

$$p_0(t + \Delta t) = P(A) + P(B) = p_0(t)\Big(1 - \lambda_{01}(\tilde{t})\Delta t\Big) + p_1(t)\lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})\Delta t + o(\Delta t).$$

Здійснивши елементарні перетворення, одержимо:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_{01}(\tilde{t})p_0(t) + \lambda_{10}(\tilde{\tilde{t}})p_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}(t)p_0(t) + \lambda_{10}(t)p_1(t). \tag{6.3}$$

Зазначимо, що при виведенні цього диференціального рівняння використано обидві властивості пуассонівського потоку подій: ординарність і відсутність післядії.

Очевидно, користуючись аналогічними міркуваннями і враховуючи для кожного стану всі можливі переходи, які зв'язують цей стан з сусідніми, можна отримати стільки звичайних диференціальних рівнянь, скільки існує можливих станів системи. Щодо нашого випадку друге рівняння для $p_1(t)$ запишемо у вигляді:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{10}(t)p_1(t) + \lambda_{01}(t)p_0(t). \tag{6.4}$$

Природно, для кожного t виконуватиметься умова $p_0(t) + p_1(t) = 1.$

Отже, ймовірності станів $p_0(t)$ і $p_1(t)$ пуассонівської системи, граф якої має вигляд (6.2), визначають інтегруванням системи диференціальних рівнянь (6.3), (6.4) за певних початкових умов.

Аналізуючи систему рівнянь (6.3), (6.4), можна одержати просте *мнемонічне правило* щодо складання системи диференціальних рівнянь для ймовірностей станів $p_i(t)$ $(i = \overline{0,n})$ пуассонівської системи з n+1 станами s_0, s_1… s_n. Похідна $dp_i(t)/dt$ дорівнює алгебричній сумі кількох членів; кількість членів цієї суми дорівнює кількості стрілок на графі станів системи, які виходять зі стану s_i і входять у нього (з'єднують стан s_i з іншими станами).

Якщо стрілка спрямована у стан s_i, то член беруть зі знаком плюс; якщо стрілка виходить зі стану s_i – зі знаком мінус. Кожний член суми дорівнює добуткові ймовірності того стану, від якого спрямована стрілка, на інтенсивність потоку подій, який переводить систему по цій стрілці. Кількість від'ємних членів дорівнює кількості стрілок, спрямованих зі стану s_i; кількість додатних членів дорівнює кількості стрілок , спрямованих у стан s_i.

Отже, для загального випадку пуассонівської системи з $n+1$ станами s_0, $s_1 \dots s_n$ систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів записують у вигляді:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \lambda_{kj}(t) p_k(t) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_{ik}(t) p_i(t), \qquad k = \overline{0,n}. \tag{6.5}$$

Щоб отримати за допомогою загальної системи рівнянь (6.5) відповідну систему рівнянь для конкретної пуассонівської системи, необхідно пам'ятати: якщо перехід зі стану s_k безпосередньо у стан s_l неможливий, то інтенсивність відповідного потоку подій вважають нульовою: $\lambda_{kl}(t) \equiv 0$, а також для будь-якого k інтенсивність $\lambda_{kk}(t) \equiv 0$.

Щоб проінтегрувати систему (6.5), необхідно задати початкові ймовірності $p_0(0), p_1(0) \dots p_n(0)$, на які накладаються природні обмеження:

$$0 \le p_k(0) \le 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} p_k(0) = 1.$$

Окрім того, для кожного $t>0$ розв'язки системи (6.5) повинні задовольняти нормувальну умову $\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1.$

Вивчимо дискретний марковський процес з неперервним часом, який володіє *ергодичною властивістю*.

Нехай маємо систему зі станами s_0, $s_1 \dots s_n$. Припустимо, що в момент часу t_0 система перебувала у стані s_i. Нагадаємо, що через $p_{ik}(t_0,t)$ ми позначили умовну ймовірність того, що в момент часу $\tau=t_0+t$ система перебуватиме у стані s_k, якщо в момент t_0 вона перебувала у стані s_i. Згідно з означенням марковського процесу, можна записати:

$$p_{ik}(t_0,t) = P\{X(t_0+t) = s_k / X(t_0) = s_i\}.$$

Якщо ймовірність $p_{ik}(t_0,t)$ не залежить від t_0, а лише від t, тобто $p_{ik}(t_0,t)=p_{ik}(t)$, то марковський процес протікає однорідно в часі і його називають *однорідним*. Для того, щоб марковський випадковий процес був однорідним, очевидно, досить вимагати, щоб усі потоки подій, які переводять систему зі стану у стан, були стаціонарними пуассонівськими, тобто найпростішими потоками.

Імовірність $p_k(t)$ застати систему в момент t у стані s_k за формулою повної ймовірності дорівнює:

$$p_k(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i(0) p_{ik}(t) \quad (k = \overline{0,n});$$

ця ймовірність залежить як від t, так і від початкових даних $p_i(0)$ $(i=\overline{0,n})$. У прикладних задачах, однак, зазвичай вважають можливим розглядати ймовірність p_k застати систему у стані s_k незалежною від обраного моменту часу і від початкових даних. Щоб теоретично обґрунтувати таку практику, необхідно встановити, що процес $X(t)$ при $t\to\infty$ безмежно наближається до деякого стаціонарного процесу (такий процес $X(t)$ називають ***ергодичним***). Це означає, що ймовірності $p_k(t)$ при $t\to\infty$ прямують до деяких сталих p_k $(k=\overline{0,n})$, які не залежать від початкових даних, тобто

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t)=p_k \quad (k=\overline{0,n}).$$

Домовимося називати марковський процес, для якого перехідні ймовірності дорівнюють $p_{ik}(t)$ $(i,k=\overline{0,n})$, ***транзитивним***, якщо існує такий момент часу $t>0$, що $p_{ik}(t)>0$ $(i,k=\overline{0,n})$. Отож для транзитивного процесу існує такий проміжок часу, протягом якого можливий перехід системи з будь-якого стану в будь-який інший. Це означає, що граф станів системи не повинен мати жодного окремого стану без виходу і без входу і жодної групи таких станів.

Теорема Маркова. Для будь-якого транзитивного марковського процесу $p_{ik}(t)$ $(i,k=\overline{0,n})$ існує границя $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)=p_k$ $(k=\overline{0,n})$.

Отже, згідно з теоремою Маркова будь-який транзитивний однорідний марковський процес зі скінченною кількістю станів володіє ***ергодичною*** властивістю. Режим роботи системи, при якому ймовірності p_k перебування системи у стані s_k $(k=\overline{0,n})$ не залежать від часу, називають ***стаціонарним*** режимом. Отож будь-який процес, який володіє ергодичною властивістю, має граничний стаціонарний режим, реалізація якого практично розпочинається після достатньо тривалого часу функціонування системи.

Отже, для того щоб марковський процес, який протікає в системі зі скінченною кількістю станів, володів ергодичною властивістю, досить вимагати, щоб: а) граф станів системи не мав жодного стану без виходу і без входу і жодної групи станів без виходу і без входу; б) усі потоки подій, які переводять систему зі стану у стан, були найпростішими (ця умова, нагадаємо, забезпечує однорідність марковського процесу). Такі системи називають *найпростішими ергодичними* системами.

Для будь-якої найпростішої системи (у тім числі й ергодичної) інтенсивності пуассонівських потоків подій не залежать від часу, і система диференціальних рівнянь для ймовірностей станів перетворюється в систему $n+1$-го звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dp_k(t)}{dt}=-\sum_{j=0}^{n}\lambda_{kj}p_k(t)+\sum_{i=0}^{n}\lambda_{ik}p_i(t) \qquad (k=\overline{0,n}). \tag{6.6}$$

Розглянемо найпростішу ергодичну систему, роботу якої описують рівняннями (6.6). Через достатньо тривалий проміжок часу, коли система увійде в стаціонарний режим роботи, відповідно до рівностей $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)=p_k$ $(k=\overline{0,n})$

імовірності станів практично не залежатимуть від часу. Тоді маємо: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{dp_k(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\lim\limits_{t\to\infty}p_k(t)=\frac{dp_k}{dt}=0.$ Тому система диференціальних рівнянь (6.6) перетворюється в систему $n+1$-го однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$-\sum_{j=0}^{n}\lambda_{kj}p_k+\sum_{i=0}^{n}\lambda_{ik}p_i=0 \qquad (k=\overline{0,n}).$$

З цієї системи визначають значення p_k $(k=\overline{0,n})$ з точністю до сталого множника, проте ця невизначеність усувається, якщо використати нормувальну умову $\sum\limits_{k=0}^{n}p_k=1.$

6.3. Відновлювана система без резерву

У більшості академічних підходів випадковий час до відмови та час відновлення (ремонту) вважають розподіленими за показниковими законами, що дає змогу використовувати модель Маркова для дослідження надійності. Позначимо параметри цих розподілів через λ і μ відповідно ($\lambda=const$, $\mu=const$). Імовірність безвідмовної роботи системи визначається функцією

$$P_S(t)=e^{-\lambda t}.$$

У момент часу t система може перебувати в одному з двох станів (рис. 6.1): “0” – система справна і працює, “1” – система несправна і перебуває на ремонті. На систему в стані “0” діє потік відмов інтенсивності λ, а в стані “1” – потік відновлень інтенсивності μ.

$$\boxed{0}\ \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\ \boxed{1}$$

Рис. 6.1. Граф станів системи без резерву

Час до відмови – це час перебування у стані “0”, а час відновлення (простою системи) – це час перебування у стані “1”, тому середній час до відмови $E(X_S)$ та середній час простою $E(X_{SI})$ відомі:

$$E(X_S)=1/\lambda, \quad E(X_{SI})=1/\mu.$$

Введемо позначення: $p_k(t)-$ ймовірність перебування системи у стані “*k*” $(k=0;1).$ Згідно з мнемонічним правилом отримуємо систему рівнянь:

$$p_0'(t)=\mu p_1(t)-\lambda p_0(t),$$

$$p_1'(t)=\lambda p_0(t)-\mu p_1(t),$$

$$p_0(t)+p_1(t)=1,$$

і для початкових умов $p_0(0)=1,\ p_1(0)=0$ одержуємо такий розв’язок:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Очевидно, що $p_0(t)-$ це функція готовності $K(t)$, тобто ймовірність перебування системи у стані “0” в довільний момент часу t за умови, що в момент часу $t=0$ система перебувала у стані “0”:

$$K(t) = p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Для $t \to \infty$, $K(t)$ наближається до граничного значення K, яке називається коефіцієнтом готовності:

$$K = \lim_{t\to\infty} K(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}.$$

6.4. Відновлювана двоелементна система з паралельним з’єднанням і відсутністю черги на ремонт

6.4.1. Випадок різних інтенсивностей потоків відмов та відновлень для кожного елемента

Розглянемо систему, логічна схема роботи якої зображена на рис. 6.2.

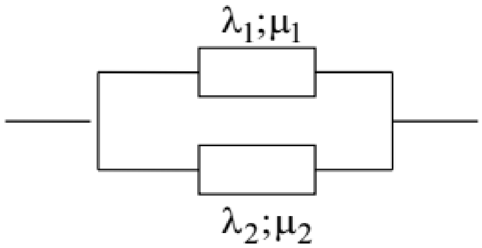


Рис. 6.2

Тут $\lambda_1, \lambda_2 -$ інтенсивності потоків відмов елементів, $\mu_1, \mu_2 -$ інтенсивності потоків відновлень елементів. В початковий момент часу обидва елементи в робочому стані. Систему обслуговують дві ремонтні бригади.

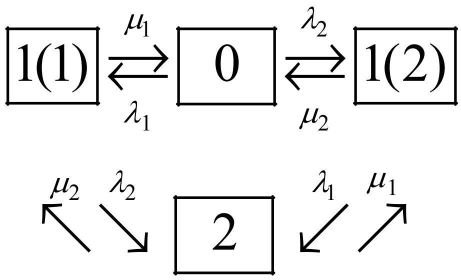


Рис. 6.3

Введемо позначення для станів системи: “0” – обидва елементи працюють, система працює, “1(1)” – перший елемент відмовив і перебуває на ремонті, другий працює, система працює, “1(2)” – другий елемент відмовив і перебуває на ремонті, перший працює, система працює, “2” – обидва елементи відмовили і перебувають на ремонті, система відмовила. Граф станів системи зображено на рис. 6.3.

Система рівнянь, складена за мнемонічним правилом, має вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{dp_0}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)p_0 + \mu_1 p_{1(1)} + \mu_2 p_{1(2)}, \\ &\frac{dp_{1(1)}}{dt} = -(\mu_1 + \lambda_2)p_{1(1)} + \lambda_1 p_0 + \mu_2 p_2, \\ &\frac{dp_{1(2)}}{dt} = -(\mu_2 + \lambda_1)p_{1(2)} + \lambda_2 p_0 + \mu_1 p_2, \\ &\frac{dp_2}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2)p_2 + \lambda_1 p_{1(2)} + \lambda_2 p_{1(1)}, \\ &p_0 + p_{1(1)} + p_{1(2)} + p_2 = 1. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Початкові умови:

$$p_0(0) = 1, \quad p_{1(1)}(0) = p_{1(2)}(0) = p_2(0) = 0.$$

Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь за допомогою пакету Mathematica ($p_0 = p,\ p_{1(1)} = q,\ p_{1(2)} = r,\ p_2 = 1 - p - q - r,\ \lambda_i = L[i],\ \mu_i = M[i]$):

```
DSolve[{p'[t]==-(L[1]+L[2])p[t]+M[1]q[t]+M[2]r[t],q'[t]==L[1]p[t]-
(M[1]+L[2])q[t]+M[2](1-p[t]-q[t]-r[t]),r'[t]==L[2]p[t]-
(L[1]+M[2])r[t]+M[1](1-p[t]-q[t]-
r[t]),p[0]==1,q[0]==0,r[0]==0},{p,q,r},t]
```

Отримуємо розв'язок:

```
p → Function[{t},
  (ⅇ^(t (-L[1]-L[2]-M[1]-M[2])) L[1] L[2] + ⅇ^(t (-L[2]-M[2])) L[2] M[1] +
     ⅇ^(t (-L[1]-M[1])) L[1] M[2] + M[1] M[2]) /
   ((L[1] + M[1]) (L[2] + M[2]))],
q → Function[{t},
  -(L[1] (-ⅇ^(t (-L[2]-M[2])) L[2] + ⅇ^(t (-L[1]-L[2]-M[1]-M[2])) L[2] -
        M[2] + ⅇ^(t (-L[1]-M[1])) M[2])) /
    ((L[1] + M[1]) (L[2] + M[2]))],
r → Function[{t},
  -(ⅇ^(-t (L[1]+M[1])) L[2]
      (-L[1] + ⅇ^(t (L[1]+M[1])+t (-L[1]-L[2]-M[1]-M[2])) L[1] -
        ⅇ^(t (L[1]+M[1])) M[1] + ⅇ^(t (L[1]+M[1])+t (-L[2]-M[2])) M[1])) /
    ((L[1] + M[1]) (L[2] + M[2]))]
```

Отже,

$$p_0(t)=\frac{1}{\Delta}\Big(\lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)t}+\lambda_2\mu_1 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}+\lambda_1\mu_2 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}+\mu_1\mu_2\Big),$$

$$p_{1(1)}(t)=\frac{1}{\Delta}\Big(-\lambda_1\left(\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)t}-\lambda_2 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}+\mu_2 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}-\mu_2\right)\Big),$$

$$p_{1(2)}(t)=\frac{1}{\Delta}\Big(-\lambda_2\left(\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)t}+\mu_1 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}-\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}-\mu_1\right)\Big),$$

$$p_2(t)=1-p_0(t)-p_{1(1)}(t)-p_{1(2)}(t),\quad K(t)=p_0(t)+p_{1(1)}(t)+p_{1(2)}(t),$$

де $\Delta=(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)$.

Розв'язавши алгебраїчну систему для стаціонарних імовірностей (або обчисливши границі $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t),\ k=0, 1(1), 1(2), 2,$ отримуємо значення стаціонарних характеристик системи:

$$p_0=\frac{\mu_1\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)},\quad p_{1(1)}=\frac{\lambda_1\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)},$$

$$p_{1(2)}=\frac{\lambda_2\mu_1}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)},\quad p_2=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)},$$

$$K=1-p_2.$$

Час простою системи X_{SI} – це час перебування у стані "2", тобто час, розподілений показниково з параметром $\mu_1+\mu_2$. Отже, для середнього часу простою системи маємо формулу:

$$E(X_{SI})=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}.$$

Використовуючи властивості показникових розподілів, виведемо формули для обчислення середнього часу до відмови і середнього часу між відмовами. Введемо позначення: X_S- час до відмови (початок – момент першого потрапляння системи до стану "0" після виходу зі стану "2", завершення – момент переходу до стану "2"); $\tilde{X}_{S(1)}-$ час між відмовами 1 (початок – момент переходу системи до стану "1(1)" зі стану "2", завершення – момент переходу до стану "2"); $\tilde{X}_{S(2)}-$ час між відмовами 2 (початок – момент переходу системи до стану "1(2)" зі стану "2", завершення – момент переходу до стану "2").

Середній час перебування системи у стані "0" дорівнює $1/(\lambda_1+\lambda_2)$, ймовірності переходів зі стану "0" до станів "1(1)" і "1(2)" відповідно рівні $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ і $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$. Застосовуючи аналогічні міркування до станів "1(1)" і "1(2)", отримуємо систему рівнянь

$$E(X_S)=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}E(\tilde{X}_{S(1)})+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}E(\tilde{X}_{S(2)}),$$

$$E(\tilde{X}_{S(1)})=\frac{1}{\mu_1+\lambda_2}+\frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_2}E(X_S),\quad E(\tilde{X}_{S(2)})=\frac{1}{\mu_2+\lambda_1}+\frac{\mu_2}{\mu_2+\lambda_1}E(X_S),$$

звідки

$$E(X_S)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)(\mu_1+\lambda_2)+\lambda_1(\lambda_1+\mu_2)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)}.$$

6.4.2. Випадок однакових інтенсивностей потоків відмов та відновлень для кожного елемента

Якщо всі елементи системи мають однакові показники інтенсивностей відмов і відновлень, то в багатьох випадках система описується процесом загибелі і розмноження.

Нехай маємо систему, логічна схема роботи якої зображена на рис. 6.4.

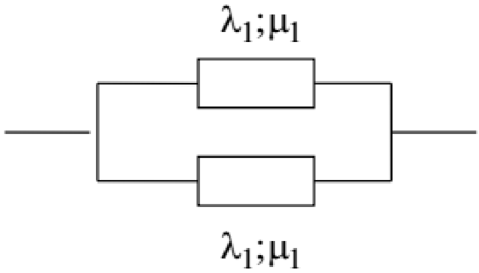


Рис. 6.4

Нехай $\lambda_1=\lambda_2=\lambda-$ інтенсивності потоків відмов елементів, $\mu_1=\mu_2=\mu-$ інтенсивності потоків відновлень елементів.

$$\boxed{0}\ \underset{\mu}{\overset{2\lambda}{\rightleftarrows}}\ \boxed{1}\ \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\ \boxed{2}$$

Рис. 6.5

Якщо “k” – стан системи, який означає, що k елементів вийшли з ладу, то граф станів має вигляд, зображений на рис. 6.5. Використовуючи граф станів системи і враховуючи, що час простою $X_{SI}-$ це час перебування у стані “2”, можемо отримати формули для стаціонарних імовірностей станів і обчислити коефіцієнт готовності системи та середній час простою

$$p_0=\frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2},\quad p_1=\frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2},\quad p_2=\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2};$$

$$K=1-p_2=\frac{1+2\rho}{(\rho+1)^2},\quad \rho=\frac{\lambda}{\mu};\quad E(X_{SI})=\frac{1}{2\mu}.$$

Вирази для стаціонарних імовірностей $p_0,\,p_1,\,p_2$ випливають з формул для $p_0,\,p_{1(1)},\,p_{1(2)}$ з попереднього параграфа, якщо покласти

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda,\quad \mu_1=\mu_2=\mu,\quad p_0=p_0,\quad p_1=p_{1(1)}+p_{1(2)},\quad p_2=p_2.$$

Введемо позначення: X_S- час до відмови (початок – момент першого потрапляння системи до стану “0” після виходу зі стану “2”, завершення –

момент переходу до стану “2”); $\tilde{X}_S -$ час між відмовами (початок – момент переходу системи до стану “1” зі стану “2”, завершення – момент переходу до стану “2”). Міркуючи так само як у попередньому параграфі, одержимо систему рівнянь:

$$E(X_S) = \frac{1}{2\lambda} + E(\tilde{X}_S), \qquad E(\tilde{X}_S) = \frac{1}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} E(X_S),$$

звідки

$$E(X_S) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2}, \qquad E(\tilde{X}_S) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2}.$$

6.5. Роздільне резервування заміщенням для відновлюваної системи з послідовним з’єднанням елементів

Розглянемо систему, яка складається з $n+m$ ідентичних елементів. Припустимо, що розподіли часу життя і часу ремонту кожного елемента показникові з параметрами λ і μ відповідно. Основні n елементів з’єднані послідовно, $m -$ кількість резервних елементів, $m > 0,$ застосовується роздільне резервування заміщенням (рис. 6.6). Кількість каналів ремонту позначимо через c. Окремо розглядатимемо випадки: $1 \le c \le m$ і $m+1 \le c \le m+n$. Припускаємо, що ті $n-1$ елементів, які працювали в момент виходу системи з ладу, продовжують працювати під час простою системи і можуть виходити з ладу.

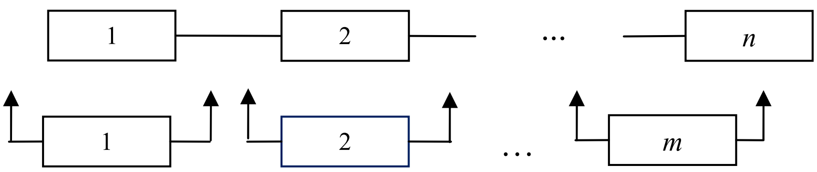


Рис. 6.6

Якщо “k” – стан системи, який означає, що k елементів вийшли з ладу, то графи станів мають вигляд, зображений на рис. 6.7 і 6.8 відповідно

$$\boxed{0} \underset{\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{1} \underset{2\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{2} \underset{3\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{c\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{c} \underset{c\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{c\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{m} \underset{c\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{m+1} \underset{c\mu}{\overset{(n-1)\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{c\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{m+n}$$

Рис. 6.7. Граф станів системи у випадку $1 \le c \le m$

$$\boxed{0} \underset{\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{1} \underset{2\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{2} \underset{3\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{m\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{m} \underset{(m+1)\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{m+1} \underset{(m+2)\mu}{\overset{(n-1)\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{c\mu}{\overset{(m+n+1-c)\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{c} \underset{c\mu}{\overset{(m+n-c)\lambda}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{c\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{m+n}$$

Рис. 6.8. Граф станів системи у випадку $m+1 \le c \le m+n$

Для цієї системи час до відмови X_S і час між відмовами $\tilde{X}_S$ не збігаються, оскільки перший проміжок часу починається в момент переходу зі стану “1” до стану “0”, а другий – в момент переходу зі стану “m+1” до стану “m”, завершуються обидва одночасно в момент переходу зі стану “m” до стану “m+1”.

Враховуючи, що час простою X_{SI} – це час перебування у групі станів $(m+1,...,m+n)$, отримаємо формулу для коефіцієнта готовності системи:

$$K=\sum_{k=0}^{m} p_k,$$

де p_k – стаціонарна ймовірність перебування системи у стані "k". Оскільки процеси, які описуються графами станів, зображеними на рис. 6.7 і 6.8, є процесами загибелі і розмноження, то формули для p_k можна вивести.

$$\boxed{0}\underset{\mu_1}{\overset{\lambda_0}{\rightleftarrows}}\boxed{1}\underset{\mu_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}}\boxed{2}\underset{\mu_3}{\overset{\lambda_2}{\rightleftarrows}}\ldots\underset{\mu_r}{\overset{\lambda_{r-1}}{\rightleftarrows}}\boxed{r}$$

Рис. 6.9. Граф станів для процесу загибелі і розмноження

Для процесу загибелі і розмноження, що описується графом станів, зображеним на рис. 6.9, виконуються рівності:

$$\lambda_k p_k=\mu_{k+1}p_{k+1},\quad p_{k+1}=p_0\prod_{i=0}^{k}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}},\quad 0\le k\le r-1;\quad \sum_{k=0}^{r}p_k=1.$$

Отже,

$$p_0=\frac{1}{1+\sum_{k=0}^{r-1}\prod_{i=0}^{k}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}},\qquad p_k=p_0\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}},\quad 1\le k\le r.$$

Ввівши позначення $\rho=\lambda/\mu$, для випадку, коли кількість каналів ремонту задовольняє умову $1\le c\le m$, отримаємо:

$$p_0=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{c}\frac{(n\rho)^k}{k!}+\sum_{k=c+1}^{m+1}\frac{(n\rho)^k}{c!c^{k-c}}+\sum_{k=m+2}^{m+n}\frac{n!n^m\rho^k}{c!(m+n-k)!c^{k-c}}};$$

$$p_k=p_0\frac{(n\rho)^k}{k!},\ 1\le k\le c;\qquad p_k=p_0\frac{(n\rho)^k}{c!c^{k-c}},\ c+1\le k\le m+1;$$

$$p_k=p_0\frac{n!n^m\rho^k}{c!(m+n-k)!c^{k-c}},\ m+2\le k\le m+n.$$

Якщо $m+2\le c\le m+n$, то

$$p_0=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(n\rho)^k}{k!}+\sum_{k=m+2}^{c}\frac{n!n^m\rho^k}{k!(m+n-k)!}+\sum_{k=c+1}^{m+n}\frac{n!n^m\rho^k}{c!(m+n-k)!c^{k-c}}};$$

$$p_k=p_0\frac{(n\rho)^k}{k!},\ 1\le k\le m+1;\qquad p_k=p_0\frac{n!n^m\rho^k}{k!(m+n-k)!},\ m+2\le k\le c;$$

$$p_k=p_0\frac{n!n^m\rho^k}{c!(m+n-k)!c^{k-c}},\ c+1\le k\le m+n.$$

Якщо $c=m+1$, то

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \sum_{k=m+2}^{m+n} \frac{n! n^m \rho^k}{c!(m+n-k)! c^{k-c}}};$$

$$p_k = p_0 \frac{(n\rho)^k}{k!},\ 1 \le k \le m+1; \quad p_k = p_0 \frac{n! n^m \rho^k}{c!(m+n-k)! c^{k-c}},\ m+2 \le k \le m+n.$$

Введемо позначення: $T_k -$ середній час від моменту потрапляння системи до стану “*k*” до переходу до стану “*m*+1”. Тоді $E(X_S) = T_0,\ E(\tilde{X}_S) = T_m$.

Припустимо, що $m+1 \le c \le m+n$. Використовуючи властивості показникових розподілів, маємо:

$$T_0 = \frac{1}{n\lambda} + T_1; \quad T_k = \frac{1 + k\mu T_{k-1} + n\lambda T_{k+1}}{n\lambda + k\mu},\ 1 \le k \le m-1; \quad T_m = \frac{1 + m\mu T_{m-1}}{n\lambda + m\mu}.$$

Послідовно виражаючи T_k через T_0 для $k \in \{1,2,...,m\}$, отримаємо співвідношення

$$T_k = T_0 - \sum_{i=1}^{k} \frac{k!\mu^{i-1}}{(k-i)! i (n\lambda)^i}, \quad 1 \le k \le m.$$

Отже, маємо рівняння для знаходження T_0:

$$T_m = T_0 - \sum_{i=1}^{m} \frac{m!\mu^{i-1}}{(m-i)! i (n\lambda)^i} = \frac{1 + m\mu T_{m-1}}{n\lambda + m\mu} =$$

$$= \frac{1}{n\lambda + m\mu}\left(1 + m\mu T_0 - m\mu \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(m-1)!\mu^{i-1}}{(m-1-i)! i (n\lambda)^i}\right),$$

звідки

$$T_0 = E(X_S) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(m+1)!\mu^{i-1}}{(m+1-i)! i (n\lambda)^i}, \quad T_m = E(\tilde{X}_S) = \frac{1}{n\lambda} + \sum_{i=1}^{m} \frac{m!\mu^i}{(m-i)!(n\lambda)^{i+1}},$$

$$T_k = T_0 - \sum_{i=1}^{k} \frac{k!\mu^{i-1}}{(k-i)! i (n\lambda)^i} = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(m+1)!\mu^{i-1}}{(m+1-i)! i (n\lambda)^i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{k!\mu^{i-1}}{(k-i)! i (n\lambda)^i}, \quad 1 \le k \le m-1.$$

Отже, ми визначили не лише середній час до відмови і середній час між відмовами, а й $T_k -$ середній час від моменту потрапляння системи до стану “*k*” $(1 \le k \le m-1)$ до відмови системи.

Введемо позначення: $\tau_k -$ середній час від моменту потрапляння системи до стану “*k*” до переходу до стану “*m*”. Тоді середній час простою $E(X_{SI}) = \tau_{m+1}$. Визначимо середній час простою як середній час перебування в групі станів $(m+1,...,m+n)$, припускаючи, що $m+1 \le c \le m+n$.

Нехай $\tilde{p}_m -$ стаціонарна ймовірність перебування у стані “*m*” для підсистеми, граф станів якої зображено на рис. 6.10. Враховуючи, що середній час перебування системи у стані “*m*” дорівнює $1/n\lambda$, а ймовірність перебування в групі станів $(m+1,...,m+n)$ дорівнює $1-\tilde{p}_m$, отримаємо:

$$1-\tilde{p}_m=\frac{\tau_{m+1}}{\tau_{m+1}+\dfrac{1}{n\lambda}}\ \Rightarrow\ \tau_{m+1}=\frac{1-\tilde{p}_m}{n\lambda\tilde{p}_m}.$$

$$\boxed{m}\ \underset{(m+1)\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}}\ \boxed{m+1}\ \underset{(m+2)\mu}{\overset{(n-1)\lambda}{\rightleftarrows}}\ \ldots\ \underset{c\mu}{\overset{(m+n+1-c)\lambda}{\rightleftarrows}}\ \boxed{c}\ \underset{c\mu}{\overset{(m+n-c)\lambda}{\rightleftarrows}}\ \ldots\underset{c\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\boxed{m+n}$$

Рис. 6.10. Граф станів підсистеми для визначення середнього часу простою у випадку $m+1\le c\le m+n$

Користуючись формулами для стаціонарних імовірностей для процесу загибелі і розмноження, що описується графом станів, зображеним на рис. 6.10, одержимо формулу

$$\frac{1}{\tilde{p}_m}=1+\sum_{k=m+1}^{c}\frac{n!m!\rho^{k-m}}{k!(m+n-k)!}+\sum_{k=c+1}^{m+n}\frac{n!m!\rho^{k-m}}{c!(m+n-k)!c^{k-c}}.$$

Отже, середній час простою системи визначається у вигляді

$$\tau_{m+1}=E(X_{SI})=\frac{n!m!}{n\lambda}\left(\sum_{k=m+1}^{c}\frac{\rho^{k-m}}{k!(m+n-k)!}+\sum_{k=c+1}^{m+n}\frac{\rho^{k-m}}{c!(m+n-k)!c^{k-c}}\right),\ m+1\le c\le m+n.$$

У випадку, коли $1\le c\le m,$ використовуючи властивості показникових розподілів, маємо:

$$T_0=\frac{1}{n\lambda}+T_1;\quad T_k=\frac{1+k\mu T_{k-1}+n\lambda T_{k+1}}{n\lambda+k\mu},\ 1\le k\le c;$$

$$T_k=\frac{1+c\mu T_{k-1}+n\lambda T_{k+1}}{n\lambda+c\mu},\ c+1\le k\le m-1;\quad T_m=\frac{1+c\mu T_{m-1}}{n\lambda+c\mu}.$$

Послідовно виражаючи T_k через T_0 для $k\in\{1,2,...,c+1\},$ отримаємо співвідношення

$$T_k=T_0-\sum_{i=1}^{k}\frac{k!\mu^{i-1}}{(k-i)!i(n\lambda)^i},\quad 1\le k\le c+1. \tag{6.8}$$

Виразивши T_k для $k\in\{c+2,...,m\}$ через T_c і T_{c+1}, маємо:

$$T_{c+k}=\frac{1}{(n\lambda)^{k-1}}\left(T_{c+1}\sum_{i=1}^{k}(n\lambda)^{k-i}(c\mu)^{i-1}-T_c\sum_{i=1}^{k}(n\lambda)^{k-1-i}(c\mu)^{i}-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)(n\lambda)^{k-1-i}(c\mu)^{i-1}\right),\qquad 2\le k\le m-c. \tag{6.9}$$

Користуючись співвідношенням (6.9), маємо змогу виразити T_m і T_{m-1} через T_c і T_{c+1}, а, отже, й через T_0. Водночас,

$$T_m=\frac{1+c\mu T_{m-1}}{n\lambda+c\mu}.$$

Прирівнявши два одержані вирази для T_m, отримаємо рівняння для знаходження T_0, розв'язавши яке, знайдемо

$$T_0 = E(X_S) = \frac{1}{(n\lambda)^{m+1}} \left(\sum_{i=1}^{c+1} \frac{(c+1)!(n\lambda)^{m+1-i}\mu^{i-1}}{(c+1-i)!i} + \left(\sum_{i=1}^{m-c} (n\lambda)^{m-c-i}(c\mu)^i \right) \sum_{i=1}^{c+1} \frac{c!(n\lambda)^{c+1-i}\mu^{i-1}}{(c+1-i)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{m-c-1} (m-c-i)(n\lambda)^{m-i}(c\mu)^i \right), \quad 1 \le c \le m-1;$$

$$T_0 = E(X_S) = \frac{1}{(n\lambda)^{c+1}} \sum_{i=1}^{c+1} \frac{(c+1)!(n\lambda)^{c+1-i}\mu^{i-1}}{(c+1-i)!i}, \quad c = m.$$

Обчисливши T_0 і користуючись формулами (6.8) і (6.9), можна визначити не лише середній час між відмовами $E(\tilde{X}_S) = T_m$, а й T_k − середній час від моменту потрапляння системи до стану "k" ($1 \le k \le m-1$) до відмови системи.

Для визначення середнього часу простою $E(X_{SI}) = \tau_{m+1}$ у випадку, коли $1 \le c \le m,$ досить розв'язати систему рівнянь

$$\tau_{m+1} = \frac{1+(n-1)\lambda\tau_{m+2}}{(n-1)\lambda + c\mu}; \qquad \tau_{m+n} = \frac{1}{c\mu} + \tau_{m+n-1};$$
$$\tau_k = \frac{1+(m+n-k)\lambda\tau_{k-1} + c\mu\tau_{k+1}}{(m+n-k)\lambda + c\mu}, \; m+2 \le k \le m+n-1. \tag{6.10}$$

Послідовно виражаючи τ_k через τ_{m+n} для $k \in \{m+1, m+2, ..., m+n-1\}$, отри-маємо співвідношення

$$\tau_{m+n-k} = \tau_{m+n} - \sum_{i=1}^{k} \frac{k!\lambda^{i-1}}{(k-i)!i(c\mu)^i(n\lambda)^i}, \quad 1 \le k \le n-1. \tag{6.11}$$

Прирівнявши вирази для τ_{m+1}, одержані з (6.10) і (6.11), отримаємо рівняння для визначення τ_{m+n}, з якого

$$\tau_{m+n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!\lambda^{i-1}}{(n-i)!i(c\mu)^i}.$$

Підставивши вираз для τ_{m+n} в (6.11) для $k = n-1$, одержимо формулу для середнього часу простою системи

$$E(X_{SI}) = \tau_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!\lambda^{i-1}}{(n-i)!(c\mu)^i}, \quad 1 \le c \le m.$$