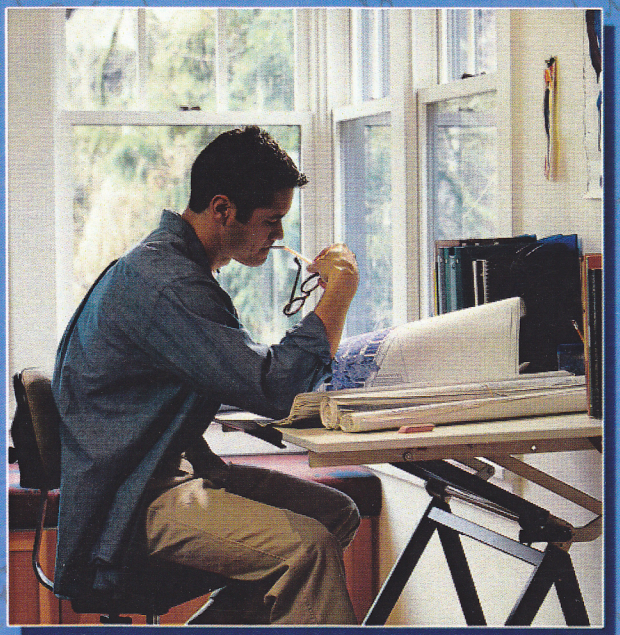
Ю.М. Нефьодов,
Т.Ю. Балицька

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ
В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ



КОНДОР

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

Ю.М. НЕФЬОДОВ, Т.Ю. БАЛИЦЬКА

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

***Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів***

Київ

к о н д о р

2011

ББК 22.18
УДК 519.6
Н 58

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4 / 18-Г-1220 від 30.05.2008 р.)

Рецензенти:

Димарський Я. М., д. ф.-м. н., професор, зав. кафедри інформатики та інформаційних технологій у діяльності ОВС Луганського державного університету внутрішніх справ ім. Е.О. Дідоренка;

Леві Л.І., д. т. н., професор, зав. кафедри фізико-математичних дисциплін Луганського аграрного університету;

Гальченко В.Я., д. т. н., професор, зав. кафедри медбіофізики, медінформатики, біостатистики Луганського державного медичного університету.

Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.
Н 58 **Методи оптимізації в прикладах і задачах:** Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2011. – 324 с.

ISBN 978-966-1571-10-4

В навчальному посібнику викладені основні теоретичні положення та методи розв'язання типових задач оптимізації. Послідовно розглянуті методи та алгоритми лінійного програмування, чисельні методи та алгоритми одновимірної, багатовимірної і умовної багатовимірної оптимізації. Наведено наочні ілюстрації, конкретні приклади та задачі до самостійного розв'язування.

Для студентів математичних та інженерно-технічних спеціальностей вузів.

ББК 22.18
ISBN 978-966-1571-10-4 УДК 519.6

© Нефьодов Ю.М., Балицька Т. Ю.
© Кондор, 2011

ЗМІСТ

Передмова **5**

1. УМОВИ ЕКСТРЕМУМА ФУНКЦІЙ **7**

1.1. Постановка задачі оптимізації і основні означення 7
1.2. Безумовний екстремум 14
1.3. Умовний екстремум при обмеженнях рівностями 25
1.4. Умовний екстремум при обмеженнях нерівностями 42
1.5. Умовний екстремум при змішаних обмеженнях 57
Задачі для самостійного розв'язування 71

2. МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ **75**

2.1. Основні поняття і означення 75
2.2. Симплекс-метод Данцига 85
2.3. Двоїстий симплекс-метод 98
2.4. Спеціальні задачі лінійного програмування 108
2.4.1. Транспортні задачі 108
2.4.2. Параметричні задачі 120
2.4.3. Дробово-лінійні задачі 130
2.4.4. Цілочисельні задачі. Метод Гомори 134
2.4.5. Цілочисельні задачі. Метод розгалужень та границь 138
Задачі для самостійного розв'язування 151

3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОДНОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ **157**

3.1. Постановка задачі і принципи одновимірної оптимізації 157
3.2. Методи нульового порядку 161
3.2.1. Метод рівномірного пошуку 161
3.2.2. Метод ділення відрізка навпіл 164
3.2.3. Метод дихотомії 168
3.2.4. Метод золотого перерізу 171
3.2.5. Метод Фібоначі 174
3.2.6. Метод квадратичної апроксимації 178
3.3. Методи першого й другого порядку 181
3.3.1. Метод середньої точки 182
3.3.2. Метод хорд 185
3.3.3. Метод Ньютона 187
Задачі для самостійного розв'язування 190

4. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ БЕЗУМОВНОЇ БАГАТОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ 194

4.1. Загальні принципи побудови чисельних методів багатовимірної оптимізації 194
4.2. Методи нульового порядку 198
4.2.1. Метод конфігурацій 199
4.2.2. Метод деформуючого многогранника 205
4.2.3. Метод спряжених напрямків 213
4.2.4. Адаптивний метод випадкового пошуку 217
4.3. Методи першого порядку 222
4.3.1. Метод найшвидшого градієнтного спуску 223
4.3.2. Метод Гауса – Зейделя 229
4.3.3. Метод спряжених градієнтів 235
4.4. Методи другого порядку 241
4.4.1. Метод Ньютона 242
4.4.2. Метод Макварда 247
4.4.3. Квазіньютонівский метод 254
Задачі для самостійного розв'язування 259

5. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ УМОВНОЇ БАГАТОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ 264

5.1. Принципи побудови чисельних методів пошуку умовного екстремуму 264
5.2. Метод штрафних функцій 270
5.3. Метод бар'єрних функцій 279
5.4. Метод множників 286
5.5. Метод проекції градієнта 293
5.6. Метод Зойтендейка 312
Задачі для самостійного розв'язування 319

ЛІТЕРАТУРА 322

ПЕРЕДМОВА

Никто не обнимет необъятного.
Козьма Прутков.

Сучасні вимоги до математичної підготовки інженера досить високі. Зокрема, від нього вимагається вміння грамотно перекладати на математичну мову технічні, економічні, природничо-наукові та інші прикладні задачі, аналізувати залежність їхніх розв'язків від умов, режимів, параметрів реальних процесів і вибирати найкращі варіанти, тобто мати навички математичного моделювання й оптимізації реальних об'єктів. Тому дисципліні "Методи оптимізації" приділяється значна роль у математичній підготовці студентів вузів. Оскільки в більшості практично важливих випадків аналітичне розв'язання задач оптимізації важке або неможливе, інженер-дослідник повинен володіти чисельними методами, розрахованими на застосування сучасних комп'ютерів.

Даний навчальний посібник написаний на підставі багаторічного викладання лекцій і проведення семінарських занять для студентів різних спеціальностей. Основна увага приділяється практичному застосуванню чисельних методів оптимізації. Кожен розділ містить основні теоретичні відомості, алгоритми методів, детально розібрані приклади й задачі для самостійної роботи.

У першому розділі описані загальні критерії існування безумовного й умовного екстремуму багатовимірних функцій. Критерії умовного екстремуму розглянуті при різних видах обмежень: рівностях, нерівностях і змішаних обмеженнях. При цьому умови Куна-Такера наведені як для узагальненої, так і для класичної функцій Лагранжа. Пошук і дослідження екстремальних точок проілюстровані великою кількістю прикладів.

Другий розділ містить основні методи розв'язання задач лінійного програмування. Розглянуто алгоритмічні особливості двоїстого симплекса-методу і його застосування для розв'язання параметричних і цілочисельних задач лінійного програмування. Наведені різноманітні приклади використання методів.

У третьому розділі розглянуто чисельні методи одновимірної оптимізації, які широко використаються в алгоритмах методів мінімізації багато-

вимірних функцій. Кожний метод представлений алгоритмом і прикладом.

Четвертий розділ присвячений основним методам нульового, першого й другого порядків безумовної мінімізації функцій декількох змінних. Надається порівняльна характеристика методів. Алгоритми й докладно розібрані приклади дозволяють оцінити особливості кожного методу.

П'ятий розділ містить методи умовної багатовимірної оптимізації, які побудовані на різних ідеях і підходах до розв'язання задач оптимізації з обмеженнями. На практиці використовується велика кількість модифікацій цих методів. Однак у навчальному посібнику розглянуті деякі найцікавіші й важливі з методологічної точки зору методи.

Кожен розділ містить набір задач для самостійного розв'язання з відповідями.

Для засвоєння матеріалу книги досить знань у межах дисциплін математичного аналізу й лінійної алгебри університету.

Розділ 1

УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЙ

1.1. Постановка задачі оптимізації і основні означення

В загальному вигляді задачу пошуку оптимального розв'язку можна сформулювати таким чином: *мінімізувати (максимізувати) цільову функцію з урахуванням обмежень на змінні.*

Задача оптимізації містить:

– *цільову функцію* $f(\mathrm{x})$, де $\mathrm{x} = (x_1;...; x_n)^T$, визначену на n-вимірному евклідовому просторі R^n. Її значення характеризують ступень досягнення мети, в ім'я якої поставлена або розв'язується задача;

– *множину припустимих розв'язків* $X \subseteq R^n$, серед елементів якої здійснюється пошук.

Отже, потрібно знайти такий вектор x^* із множини припустимих розв'язків, якому відповідає мінімальне значення цільової функції на цій множині:

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}).$$

Зауваження 1.1. Задача пошуку максимуму функції $f(\mathrm{x})$ зводиться до еквівалентної задачі пошуку мінімуму (і навпаки) шляхом заміни знака перед функцією на протилежний:

$$f(\mathrm{x}^*) = \max_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}) = -\min_{\mathrm{x} \in X} \left[-f(\mathrm{x})\right].$$

Задача пошуку мінімуму й максимуму цільової функції $f(\mathrm{x})$ називається задачею пошуку *екстремуму*:

$$f(\mathrm{x}^*) = \operatorname{extr}_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}).$$

Якщо множина припустимих розв'язків X задається обмеженнями (умовами), що накладають на вектор x, то розв'язується задача пошуку

умовного екстремуму. Якщо $X = R^n$, тобто обмеження (умови) на вектор x відсутні, то розв'язується задача пошуку *безумовного екстремуму.*

Розв'язком задачі пошуку екстремуму є пара $(\mathrm{x}^*, f(\mathrm{x}^*))$, що включає точку x^* й значення цільової функції в цій точці.

Множина точок *мінімуму (максимуму)* цільової функції $f(\mathrm{x})$ на множині X позначається X^*. Вона може містити скінченне число точок (у тому числі одну), нескінченне число точок або бути порожнім.

Означення 1.1. Точка $\mathrm{x}^* \in X$ називається точкою *глобального (абсолютного) мінімуму* функції $f(\mathrm{x})$ на множині X, якщо функція досягає в цій точці свого найменшого значення, тобто

$$f(\mathrm{x}^*) \le f(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in X .$$

Означення 1.2. Точка $\mathrm{x}^* \in X$ називається точкою *локального (відносного) мінімуму* функції $f(\mathrm{x})$ на множині X, якщо існує $\varepsilon > 0$, таке, що якщо $\mathrm{x} \in X$ й $\| \mathrm{x} - \mathrm{x}^* \| < \varepsilon$, то $f(\mathrm{x}^*) \le f(\mathrm{x})$. Тут $\| \mathrm{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ – евклідова норма вектора x.

В означенні 1.1 точка x^* порівнюється з усіма точками множини припустимих розв'язків X, а в означенні 1.2 – тільки з тими, що належать ε - околу.

Якщо в означеннях 1.1 і 1.2 знак нерівності $\le$ замінити на $\ge$, то отримаємо означення *глобального (абсолютного)* і *локального (відносного) максимумів.*

Глобальний екстремум завжди є одночасно локальним, але не навпаки.

Означення 1.3. *Поверхнею рівня* функції $f(\mathrm{x})$ називається множина точок, в яких функція приймає постійне значення, тобто $f(\mathrm{x}) = \mathrm{const}$. Якщо $n = 2$, поверхня рівня зображується *лінією рівня* на площині R^2.

Приклад 1.1

На рис. 1.1 зображені лінії рівня деякої функції. Числа вказують значення функції $f(\mathrm{x})$ на відповідній лінії. Точкам A і B відповідають значення функції $f(A) = 5$ й $f(B) = 10$. Потрібно класифікувати ці точки.

Розв'язання

Функція розглядається на множині R^2, тобто розв'язується задача пошуку безумовного екстремуму. У точці A з координатами $(1;2)$ дося-

гається локальний і глобальний мінімум одночасно; у точці B з координатами $(2;1)$ досягається локальний мінімум; у точці C немає ні мінімуму, ні максимуму, тому що за одним напрямком функція спадає, а за іншим - зростає. Зазначимо, що зображена структура ліній рівня типова для так званих багатоекстремальних задач.

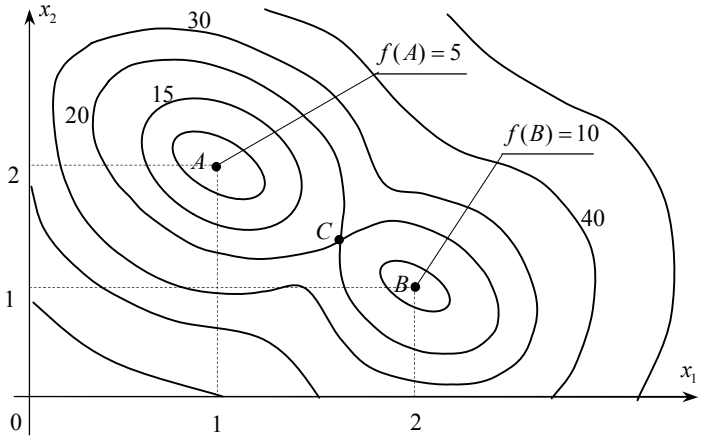


Рис.1.1

Означення 1.4. *Градієнтом* $\nabla f(\mathrm{x})$ неперервно диференційовної функції $f(\mathrm{x})$ в точці x називається вектор-стовпець, елементами якого є частинні похідні першого порядку, обчислені в заданій точці:

$$\nabla f(\mathrm{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_n} \right)^T .$$

Градієнт функції спрямований по нормалі до поверхні рівня (див. означення 1.3), тобто перпендикулярно до дотичної площини, проведеної в точці x, в напрямку найбільшого зростання функції в даній точці.

Означення 1.5. *Матрицею Гессе* $H(\mathrm{x})$ двічі неперервно диференційовної в точці x функції $f(\mathrm{x})$ називається матриця частинних похідних другого порядку, обчислених в заданій точці:

$$H(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_1^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \ldots h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} \ldots h_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} \ldots h_{nn} \end{pmatrix},$$

де $h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Матриця Гессе є симетричною матрицею розміру $(n \times n)$.

Разом із градієнтом можна визначити *антиградієнт,* який дорівнює за модулем градієнту, але протилежний за напрямком. Він вказує напрямок найбільшого спадання функції в даній точці.

За допомогою градієнта і матриці Гессе, використовуючи розвинення в ряд Тейлора, приріст функції $f(\mathrm{x})$ в точці x може бути записаний у формі

$$\Delta f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}) = \nabla f(\mathrm{x})^T \Delta\mathrm{x} + \frac{1}{2} \Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x}) \Delta\mathrm{x} + o\left(\| \Delta\mathrm{x} \|^2\right),$$

де $o\left(\| \Delta\mathrm{x} \|^2\right)$ – сума всіх членів розвинення, що мають порядок вище другого; $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x}) \Delta\mathrm{x}$ – квадратична форма.

Приклад 1.2

Для функції $f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^4$ обчислити градієнт і знайти матрицю Гессе в точках $\mathrm{x}^{(0)} = (0; 0)^T$, $\mathrm{x}^{(1)} = (1; 1)^T$.

Розв'язання

Відповідно до означень 1.4 і 1.5 маємо:

$$\nabla f(\mathrm{x}) = \left(2x_1; 4x_2^3\right)^T, \; H(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix};$$

$$\nabla f(\mathrm{x}^{(0)}) = \left(0; 0\right)^T, \; H\left(\mathrm{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\nabla f(\mathrm{x}^{(1)}) = \left(2; 4\right)^T, \; H\left(\mathrm{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.6. Квадратична форма $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x}) \Delta\mathrm{x}$ (а також відповідна матриця Гессе $H(\mathrm{x})$) називається:

– *додатно визначеною* ($H(\mathrm{x}) > 0$), якщо для будь-якого ненульового $\Delta\mathrm{x}$ виконується нерівність $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x})\Delta\mathrm{x} > 0$;

– *від'ємно визначеною* ($H(\mathrm{x}) < 0$), якщо для будь-якого ненульового $\Delta\mathrm{x}$ виконується нерівність $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x})\Delta\mathrm{x} < 0$;

– *додатно напіввизначеною* ($H(\mathrm{x}) \geq 0$), якщо для кожного $\Delta\mathrm{x}$ виконується нерівність $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x})\Delta\mathrm{x} \geq 0$ і знайдеться відмінний від нуля вектор $\Delta\mathrm{x}$, для якого $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x})\Delta\mathrm{x} = 0$;

– *від'ємно напіввизначеною* ($H(\mathrm{x}) \leq 0$), якщо для кожного $\Delta\mathrm{x}$ виконується нерівність $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x})\Delta\mathrm{x} \leq 0$ і знайдеться відмінний від нуля вектор $\Delta\mathrm{x}$, для якого $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x})\Delta\mathrm{x} = 0$;

– *невизначеною* ($H(\mathrm{x}) \gtrless 0$), якщо існують такі вектори $\Delta\mathrm{x}$, $\Delta\overline{\mathrm{x}}$, що виконуються нерівності $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x})\Delta\mathrm{x} > 0$, $\Delta\overline{\mathrm{x}}^T H(\mathrm{x})\Delta\overline{\mathrm{x}} < 0$;

– *тотожно рівною нулю* ($H(\mathrm{x}) \equiv 0$), якщо для кожного $\Delta\mathrm{x}$ виконується $\Delta\mathrm{x}^T H(\mathrm{x})\Delta\mathrm{x} = 0$.

Приклад 1.3

Класифікувати квадратичні форми й матриці Гессе, отримані в прикладі 1.2:

1. $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Випишемо квадратичну форму

$$\Delta\mathrm{x}^T H\,\Delta\mathrm{x} = (\Delta x_1;\, \Delta x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2 .$$

Очевидно, $\Delta\mathrm{x}^T H\,\Delta\mathrm{x} \geq 0$ для будь-якого вектора $\Delta\mathrm{x}$ й $\Delta\mathrm{x}^T H\,\Delta\mathrm{x} = 0$ для $\Delta x_1 = 0$ й будь-яких $\Delta x_2 \neq 0$. Відповідно до означення 1.6 квадратична форма (матриця Гессе) є додатно напіввизначеною.

2. $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$. Випишемо квадратичну форму

$$\Delta\mathrm{x}^T H\,\Delta\mathrm{x} = (\Delta x_1;\, \Delta x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2 + 12\Delta x_2^2$$

Очевидно, $\Delta\mathrm{x}^T H\,\Delta\mathrm{x} > 0$ для будь-якого ненульового вектора $\Delta\mathrm{x}$. Відповідно до означення 1.6 квадратична форма (матриця Гессе) є додатно визначеною.

Означення 1.7. Множина X називається *опуклою,* якщо вона містить всякий відрізок, кінці якого належать X, тобто якщо для будь-яких $\mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)} \in X$ і $0 \le \lambda \le 1$ має місце $\lambda \mathrm{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathrm{x}^{(2)} \in X$.

Означення 1.8. Функція $f(\mathrm{x})$, визначена на опуклій множині X, називається *опуклою,* якщо $f\left(\lambda \mathrm{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathrm{x}^{(2)}\right) \le \lambda f\left(\mathrm{x}^{(1)}\right) + (1-\lambda) f\left(\mathrm{x}^{(2)}\right)$ $\forall \mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)} \in X$, $0 \le \lambda \le 1$.

Означення 1.9. Функція $f(\mathrm{x})$, визначена на опуклій множині X, називається *строго опуклою,* якщо $f\left(\lambda \mathrm{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathrm{x}^{(2)}\right) < \lambda f\left(\mathrm{x}^{(1)}\right) + (1-\lambda) f\left(\mathrm{x}^{(2)}\right)$ $\forall \mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)} \in X$, $\mathrm{x}^{(1)} \ne \mathrm{x}^{(2)}$, $0 \le \lambda \le 1$.

Означення 1.10. Функція $f(\mathrm{x})$, визначена на опуклій множині X, називається *сильно опуклою* з константою $l > 0$, якщо

$$f\left(\lambda \mathrm{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathrm{x}^{(2)}\right) \le \lambda f\left(\mathrm{x}^{(1)}\right) + (1-\lambda) f\left(\mathrm{x}^{(2)}\right) - \frac{l}{2}\lambda(1-\lambda)\left\|\mathrm{x}^{(1)} - \mathrm{x}^{(2)}\right\|^2$$

$$\forall \mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)} \in X,\ \mathrm{x}^{(1)} \ne \mathrm{x}^{(2)},\ 0 \le \lambda \le 1.$$

Геометрична інтерпретація означень 1.8 - 1.9 полягає в наступному:

– функцію $f(\mathrm{x})$ називають опуклою, якщо її графік цілком лежить не вище відрізка, що з'єднує дві її довільні точки;

– функцію $f(\mathrm{x})$ називають строго опуклою, якщо її графік цілком лежить нижче відрізка, що з'єднує дві її довільні, але не співпадаючі точки.

Зауваження 1.2. Якщо функція сильно опукла, то вона одночасно строго опукла й опукла. Якщо функція строго опукла, то вона одночасно опукла.

Зауваження 1.3. Опуклість функції можна визначити за допомогою матриці Гессе:

– якщо $H(\mathrm{x}) \ge 0$ $\forall \mathrm{x} \in R^n$, то функція опукла;

– якщо $H(\mathrm{x}) > 0$ $\forall \mathrm{x} \in R^n$, то функція строго опукла;

– якщо $H(\mathrm{x}) \ge lE$ $\forall \mathrm{x} \in R^n$, де $l > 0$; E – одинична матриця, то функція сильно опукла.

При розв'язуванні задач зручно використовувати наступні властивості опуклих функцій (доведення див. в [3]):

1. Якщо $f(\mathrm{x})$ - опукла функція на опуклій множині X, то будь-яка точка локального мінімуму є точкою її глобального мінімуму на X.

2. Якщо опукла функція досягає свого мінімуму у двох різних точках, то вона досягає мінімуму у всіх точках відрізка, що з'єднує ці дві точки.

3. Якщо $f(\mathrm{x})$ - строго опукла функція на опуклій множині X, то вона може досягати свого глобального мінімуму на X не більш ніж в одній точці.

Приклад 1.4

Дослідити опуклість функції $f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2$ на множині R^2.

Розв'язання

Матриця Гессе, побудована відповідно до означення 1.5, задовольняє умові

$$H(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } 0 < l \leq 2 .$$

Згідно зауваження 1.3, можна зробити висновок про сильну опуклість функції. Одночасно вона є строго опуклою й опуклою (див. зауваження 1.2).

Означення 1.11. Функція $f(x)$, задовольняє *умові Ліпшица* на відрізку $[a;b] \in R$, якщо існує таке число $L > 0$ (константа Ліпшица), що

$$\left| f(x^{(1)}) - f(x^{(2)}) \right| \leq L \left| x^{(1)} - x^{(2)} \right| \quad \forall x^{(1)}, x^{(2)} \in [a; b] . \qquad (1.1)$$

Якщо нерівність (1.1) виконується з константою L, то вона має місце для нескінченної множини констант, більших за L. Як правило, становить інтерес мінімальна з констант Ліпшица.

Зауваження 1.4. З умови (1.1) випливає неперервність функції $f(\mathrm{x})$ на відрізку $[a; b]$. Якщо крім того функція має на $[a; b]$ неперервну похідну, то константа Ліпшица $L = \max\limits_{x \in [a,b]} \left| f'(x) \right|$.

Умова (1.1) означає, що модуль кутового коефіцієнта будь-якої хорди графіка функції $f(\mathrm{x})$ не перевищує L.

Приклад 1.5

Перевірити, чи задовольняють умові Ліпшица наступні функції:

а) $f(\mathrm{x}) = \sin x$ на відрізку $[0;\pi]$; б) $f(\mathrm{x}) = \sqrt{x}$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання

Скористаємося означенням 1.11 і зауваженням 1.4:

а) функція $f(\mathrm{x}) = \sin x$ задовольняє умові Ліпшица на відрізку $[0;\pi]$ з константою $L = \max\limits_{x \in [0;\pi]} |\cos x| = 1$;

б) функція $f(\mathrm{x})=\sqrt{x}$ не задовольняє умові Ліпшица на відрізку $[0;1]$, тому що при $x\to+0$ кутовий коефіцієнт дотичної до графіка необмежено зростає, а переходячи в (1.1) до границі при $\left|x^{(1)}-x^{(2)}\right|\to 0$, можна прийняти, що якщо в деякій точці існує дотична до графіка функції $f(\mathrm{x})$, то модуль її кутового коефіцієнта не може перевищувати L.

1.2. Безумовний екстремум

Постановка задачі Задано двічі неперервно диференційовну функцію $f(\mathrm{x})$, яка визначена на множині припустимих розв'язків $X=R^n$, тобто на всьому просторі R^n.

Потрібно дослідити функцію $f(\mathrm{x})$ на екстремум, тобто визначити точки $\mathrm{x}^*\in R^n$ її локальних мінімумів і максимумів на R^n:

$$f(\mathrm{x}^*)=\min_{\mathrm{x}\in R^n} f(\mathrm{x});\quad f(\mathrm{x}^*)=\max_{\mathrm{x}\in R^n} f(\mathrm{x}).$$

Стратегія розв'язання задачі Для розв'язання задачі знаходять точки x^* локальних екстремумів за допомогою необхідних умов першого й другого порядку (порядок умов визначається порядком використовуваних похідних), а також достатніх умов безумовного локального екстремуму. Обчислюються значення $f(\mathrm{x}^*)$ функції в знайдених точках локальних екстремумів.

Теорема 1.1 (необхідні умови екстремуму першого порядку).

Нехай $\mathrm{x}^*\in R^n$ *є точкою локального мінімуму (максимуму) функції* $f(\mathrm{x})$ *на множині* R^n *й* $f(\mathrm{x})$ *диференційовна в точці* x^*. *Тоді градієнт функції* $f(\mathrm{x})$ *в точці* x^* *дорівнює нулю, тобто*

$$\nabla f(\mathrm{x}^*)=0 \tag{1.2}$$

або

$$\frac{\partial f(\mathrm{x}^*)}{\partial x_i}=0,\ \ i=1,..,n. \tag{1.3}$$

Означення 1.12. Точки x^*, які задовольняють умові (1.2) або (1.3) називаються *стаціонарними.*

Теорема 1.2 (необхідні умови екстремуму другого порядку).

Нехай точка x^* *є точкою локального мінімуму (максимуму) функції* $f(\mathrm{x})$ *на множині* R^n *й функція* $f(\mathrm{x})$ *двічі диференційовна в цій точці.*

Тоді матриця Гессе $H(\mathrm{x}^*)$ *функції* $f(\mathrm{x})$, *обчислена в точці* x^* *є додатно напіввизначеною (від'ємно напіввизначеною), тобто*

$$H(\mathrm{x}^*) \geq 0 \quad \left(H(\mathrm{x}^*) \leq 0\right).$$

Теорема 1.3 (достатні умови екстремуму).

Нехай функція $f(\mathrm{x})$ *в точці* $\mathrm{x}^* \in R^n$ *двічі диференційовна, її градієнт дорівнює нулю, а матриця Гессе є додатно визначеною (від'ємно визначеною), тобто*

$$\nabla f(\mathrm{x}^*) = 0 \ \ i \ \ H(\mathrm{x}^*) > 0 \ \left(H(\mathrm{x}^*) < 0\right).$$

Тоді точка x^* *є точкою локального мінімуму (максимуму) функції* $f(\mathrm{x})$ *на множині* R^n.

Означення 1.13. Розглянемо визначник матриці Гессе $H(\mathrm{x}^*)$, обчисленої в стаціонарній точці

$$\det H(\mathrm{x}^*) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначники $\Delta_1 = h_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$, …, $\Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} \ldots h_{1n} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ h_{n1} \ldots h_{nn} \end{vmatrix}$ називаються *кутовими мінорами.*

Визначники m-го порядку $(m \leq n)$, які можна одержати із визначника матриці $H(\mathrm{x}^*)$ викреслюванням яких-небудь $(n-m)$ рядків і $(n-m)$ стовпців з тими самими номерами, називаються *головними мінорами.*

Для перевірки виконання достатніх умов екстремуму і необхідних умов другого порядку застосовуються два способи.

Перший спосіб (за допомогою кутових і головних мінорів).

I. ***Критерій перевірки достатніх умов екстремуму*** (критерій Сильвестра).

1. Для того щоб матриця Гессе $H(\mathrm{x}^*)$ була додатно визначеною $(H(\mathrm{x}^*) > 0)$ й точка x^* була точкою локального мінімуму, необхідно й достатньо, щоб знаки кутових мінорів були строго додатними:

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ldots,\Delta_n > 0\ldots$$

2. Для того щоб матриця Гессе $H(\mathrm{x}^*)$ була від'ємно визначеною $(H(\mathrm{x}^*) < 0)$ й точка x^* була точкою локального максимуму, необхідно й достатньо, щоб знаки кутових мінорів чергувалися, починаючи з від'ємного:

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 < 0\ \ldots,\ (-1)^n\Delta_n > 0\ldots$$

II. *Критерій перевірки необхідних умов екстремуму другого порядку*.

1. Для того щоб матриця Гессе $H(\mathrm{x}^*)$ була додатно напіввизначеною $(H(\mathrm{x}^*) \geq 0)$ і точка x^* можливо була б точкою локального мінімуму, необхідно й достатньо, щоб всі головні мінори визначника матриці Гессе були невід'ємні.

2. Для того щоб матриця Гессе $H(\mathrm{x}^*)$ була від'ємно напіввизначеною $(H(\mathrm{x}^*) \leq 0)$ і точка x^* можливо була б точкою локального максимуму, необхідно й достатньо, щоб всі головні мінори парного порядку були невід'ємні, а всі головні мінори непарного порядку – недодатні.

Другий спосіб (за допомогою власних значень матриці Гессе).

Означення 1.14. *Власні значення* λ_i, $i = 1,...,n$ матриці $H(\mathrm{x}^*)$ розміру $(n \times n)$ знаходяться як корні характеристичного рівняння (алгебраїчного рівняння n-го степеню):

$$\left| H(\mathrm{x}^*) - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} h_{11}-\lambda & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22}-\lambda & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (1.4)$$

Власні значення симетричної матриці $H(\mathrm{x}^*)$ є дійсними.

Обидва способи перевірки достатніх і необхідних умов екстремуму другого порядку наведені в таблицях 1.1 і 1.2.

Критерії перевірки достатніх умов другого порядку у задачі пошуку безумовного екстремуму при $\nabla f(\mathrm{x}^*) = 0$

Таблиця 1.1

№	$H(\mathrm{x}^*)$	Перший спосіб	Другий спосіб	Тип стаціонарної точки x^*
1.	> 0	$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$	$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$	Локальний мінімум
2.	< 0	$\Delta_1 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$	$\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$	Локальний максимум

Критерії перевірки необхідних умов другого порядку у задачі пошуку безумовного екстремуму при $\nabla f(\mathrm{x}^*) = 0$

Таблиця 1.2

№	$H(\mathrm{x}^*)$	Перший спосіб	Другий спосіб	Тип стаціонарної точки x^*
1.	≥ 0	Всі головні мінори $\det H(\mathrm{x}^*)$ від'ємні	$\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$	Може бути локальний min, потрібні додаткові дослідження
2.	≤ 0	Всі головні мінори $\det H(\mathrm{x}^*)$ парного прядку від'ємні, а непарного – невід'ємні	$\lambda_1 \leq 0, \ldots, \lambda_n \leq 0$	Може бути локальний max, потрібні додаткові дослідження
3.	$= 0$	Матриця Гессе складається з нульових елементів	$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$	Потрібне додаткове дослідження
4.	$\gtrless 0$	Не виконуються всі попередні умови	λ_i мають різні знаки	Немає екстремуму

Алгоритм

1. Записати необхідні умови екстремуму першого порядку у формі (1.3) і знайти стаціонарні точки x^* в результаті розв'язання системи n алгебраїчних рівнянь із n невідомими. Для чисельного розв'язання системи рівнянь (у загальному випадку нелінійних) можуть використатися відомі чисельні методи: простої ітерації, Зейделя, Ньютона та інші.

2. У знайдених стаціонарних точках x^* перевірити виконання достатніх умов (табл. 1.1), і якщо вони не виконуються, то – необхідних умов другого порядку за допомогою одного із двох способів (табл. 1.2).

3. Обчислити значення $f(\mathrm{x}^*)$ в точках екстремуму.

Зауваження 1.5

1. Якщо потрібно визначити глобальні екстремуми, то вони знаходяться в результаті порівняння значень функції в точках локальних мінімумів і максимумів з урахуванням обмеженості функції на R^n.

2. Для випадку функції $f(\mathrm{x})$ однієї змінної $(n=1)$ можна сформулювати правило, що замінє п. 2 алгоритму:

– якщо функція $f(\mathrm{x})$ і її похідні неперервні, то точка x^* є точкою екстремуму тоді й тільки тоді, коли число m – парне, де m – порядок першої похідної в точці x^*, яка не дорівнює нулю. Якщо $f^{(m)}(x^*)>0$, то в точці x^* – локальний мінімум, а якщо $f^{(m)}(x^*)<0$, то в точці x^* – локальний максимум. Якщо число m непарне, то в точці x^* немає екстремуму.

3. Часто на практиці, особливо при застосуванні чисельних методів пошуку екстремуму, розглянутих у наступних розділах, потрібно перевірити, чи виконуються необхідні й достатні умови екстремуму в деякій точці. Такий аналіз необхідний, тому що багато чисельних методів дозволяють знайти лише стаціонарну точку, тип якої вимагає уточнення.

Приклад 1.6

Знайти екстремум функції $f(\mathrm{x})=x_1^2-x_2^2$ на множині R^2.

Розв'язання

1. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1}=2x_1=0\,,\quad \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2}=-2x_2=0\,.$$

В результаті розв'язання системи одержимо стаціонарну точку $\mathrm{x}^*=(0;\,0)^T$.

2. Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму і необхідних умов другого порядку.

Перший спосіб. Матриця Гессе має вигляд $H(\mathrm{x}^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Оскільки $\Delta_1 = h_{11} = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$, то достатні умови екстремуму не виконуються (табл. 1.1, рядки 1 і 2). Перевіримо виконання необхідних умов другого порядку. Головні мінори першого порядку ($m = 1$) одержимо із Δ_2 в результаті викреслювання $n - m = 2 - 1 = 1$ рядків і стовпців з однаковими номерами: -2, 2. Головний мінор другого порядку ($m = 2$) одержимо із Δ_2 в результаті викреслювання $n - m = 0$ рядків і стовпців, тобто він збігається з Δ_2: -4. Звідси маємо, що необхідні умови екстремуму другого порядку не виконуються (табл. 1.2, рядки 1 і 2). Оскільки матриця Гессе не є нульовою, то можна зробити висновок про те, що в точці x^* немає екстремуму (табл. 1.2, рядок 4).

Другий спосіб. Знайдемо власні значення матриці Гессе, використовуючи (1.4):

$$\det(H - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$, тобто власні значення мають різні знаки. Тому точка x^* не є точкою мінімуму або максимуму (табл. 1.2, рядок 4), а є *сідловою* точкою.

3. Оскільки екстремум не досягається в жодній точці, то $f(\mathrm{x}^*)$ не обчислюємо.

Приклад 1.7

Знайти екстремум функції $f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^4$ на множині R^2.

Розв'язання

1. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1} = 2x_1 = 0, \quad \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2} = 4x_2^3 = 0.$$

В результаті розв'язання системи одержимо стаціонарну точку $\mathrm{x}^* = (0; 0)^T$.

2. Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму й необхідних умов другого порядку. Матриця Гессе має вигляд $H(\mathrm{x}^*)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 12x_2^{*2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Оскільки $\Delta_1=h_{11}=2>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$, то достатні умови екстремуму не виконуються (табл. 1.1, рядки 1 і 2). Перевіримо виконання необхідних умов другого порядку. Одержуємо головні мінори першого порядку: $2;0$, і головний мінор другого порядку: 0. Оскільки всі головні мінори невід'ємні, то в точці x^* може бути мінімум і потрібне додаткове дослідження (табл. 1.2, рядок 1).

3. Обчислимо значення цільової функції в точці x^*: $f(\mathrm{x}^*)=0$ і розглянемо ε - окіл точки x^*, а також поводження функції $f(\mathrm{x})$ на множині R^2. При будь-яких $\mathrm{x}\in R^2$ маємо: $f(\mathrm{x})\ge f(\mathrm{x}^*)=0$, що відповідає не тільки означенню 1.2, але й означенню 1.1. Тому точка x^* є точкою глобального мінімуму.

Приклад 1.8

Знайти екстремум функції $f(\mathrm{x})=(1-x_1)^2+10(x_2-x_1^2)^2$ на множині R^2.

Розв'язання

1. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1}=-2(1-x_1)-40x_1(x_2-x_1^2)=0,\quad \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2}=20(x_2-x_1^2)=0.$$

В результаті розв'язання системи одержимо стаціонарну точку $\mathrm{x}^*=(1;1)^T$.

2. Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму першим способом.

Матриця Гессе має вигляд $H(\mathrm{x}^*)=\begin{pmatrix}82 & -40\\ -40 & 20\end{pmatrix}$. Оскільки $\Delta_1=82>0$, $\Delta_2=82\cdot 20-40\cdot 40=40>0$, то в точці x^* локальний мінімум (табл. 1.1, рядок 1) і $H(\mathrm{x}^*)>0$. Отже функція є строго опуклою. Тому точка x^* – точка глобального мінімуму.

3. Обчислимо значення функції в точці глобального мінімуму x^*: $f(\mathrm{x}^*) = 0$.

Приклад 1.9

Знайти екстремум функції

$$f(\mathrm{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1 x_2 + 2x_3$$

на множині R^3.

Розв'язання

1. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1} = -2x_1 - 1 + x_2 = 0, \quad \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2} = -2x_2 + x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_3} = -2x_3 + 2 = 0.$$

В результаті розв'язання системи одержимо стаціонарну точку $\mathrm{x}^* = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)^T$.

2. Перевіримо виконання достатніх умов.

Перший спосіб. Матриця Гессе має вигляд $H(\mathrm{x}^*) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Оскільки $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $\Delta_3 = (-2)\cdot 3 = -6 < 0$, тобто знаки кутових мінорів чергуються, починаючи з від'ємного, отже точка x^* – точка локального максимуму (табл. 1.1, рядок 2).

Другий спосіб. Знайдемо власні значення матриці Гессе, використовуючи (1.4):

$$\det(H - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси $(-2-\lambda)\left[(-2-\lambda)^2 - 1\right] = 0$ й $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$, $\lambda_3 = -3 < 0$. Оскільки всі власні значення матриці Гессе від'ємні, то в точці x^* локальний максимум (табл. 1.1, рядок 2).

3. Обчислимо значення функції в точці $\mathrm{x}^* = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)^T$ локального максимуму: $f(\mathrm{x}^*) = \frac{4}{3}$.

Приклад 1.10

Знайти екстремум функції

$$f(\mathrm{x}) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$$

на множині R^3.

Розв'язання

1. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3 = 0, \quad \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2} = 2x_2 + x_3 + 6 = 0, \quad \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_3} = 2x_3 + x_2 = 0.$$

В результаті розв'язання системи одержимо дві стаціонарні точки:

$$\mathrm{x}^{(1)*} = (1; -4; 2)^T, \quad \mathrm{x}^{(2)*} = (-1; -4; 2)^T.$$

2. Перевіримо виконання достатніх і необхідних умов другого порядку в кожній стаціонарній точці двома способами.

Дослідимо точку $\mathrm{x}^{(1)*} = (1; -4; 2)^T$.

Перший спосіб. Матриця Гессе має вигляд $H(\mathrm{x}^{(1)*}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Оскільки $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$, $\Delta_3 = 18 > 0$, то точка $\mathrm{x}^{(1)*}$ є точкою локального мінімуму (табл. 1.1, рядок 1).

Другий спосіб. Знайдемо власні значення матриці Гессе, використовуючи (1.4):

$$\left| H(\mathrm{x}^{(1)*}) - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 6 > 0$, $\lambda_2 = 3 > 0$, $\lambda_3 = 1 > 0$ і точка $\mathrm{x}^{(1)*}$ є точкою локального мінімуму (табл. 1.1, рядок 1).

Дослідимо точку $\mathrm{x}^{(2)*} = (-1; -4; 2)^T$.

Перший спосіб. Матриця Гессе має вигляд $H(\mathrm{x}^{(1)*}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Оскільки $\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$, $\Delta_3 = -18 < 0$, то достатні умови екстремуму не виконуються (табл. 1.1).

Перевіримо необхідні умови екстремуму другого порядку. Головні мінори першого порядку $(m = 1)$ одержимо з $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ в результаті викреслювання $n - m = 3 - 1 = 2$ рядків і 2 стовпців з однаковими номерами: -6, 2, 2. Головні мінори другого порядку $(m = 2)$ отримуються з Δ_3 в результаті викреслювання $n - m = 3 - 2 = 1$ рядків і стовпців з однаковими номерами: 3, -12, -12. Головний мінор третього порядку $(m = 3)$ одержимо з Δ_3 в результаті викреслювання $n - m = 3 - 3 = 0$ рядків і стовпців, тобто він збігається з $\Delta_3 = -18$. Звідси маємо, що необхідні умови екстремуму другого порядку не виконуються (табл. 1.2, рядки 1 і 2). Оскільки матриця Гессе не є нульовою, то можна зробити висновок про те, що в точці $\mathrm{x}^{(2)*}$ немає екстремуму (табл. 1.2, рядок 4).

Другий спосіб. Знайдемо власні значення матриці Гессе:

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = -6 < 0$, $\lambda_2 = 3 > 0$, $\lambda_3 = 1 > 0$, тобто власні значення мають різні знаки. Тому в точці $\mathrm{x}^{(2)*}$ немає екстремуму (табл. 1.2, рядок 4).

3. Обчислимо значення функції в точці $\mathrm{x}^{(1)*}$ локального мінімуму: $f(\mathrm{x}^{(1)*}) = -12$.

Приклад 1.11

Знайти екстремум функції

$$f(x) = 5x^6 - 36x^5 + \frac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36$$

на множині R.

Розв'язання

1. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{df(x)}{dx} = 30x^5 - 180x^4 + 330x^3 - 180x^2 = 30x^2(x-1)(x-2)(x-3) = 0.$$

Звідси одержуємо стаціонарні точки: $x^{(1)*} = 0$, $x^{(2)*} = 1$, $x^{(3)*} = 2$, $x^{(4)*} = 3$.

2. Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 150x^4 - 720x^3 + 990x^2 - 360x;$$

$$f''(x^{(1)*}) = 0,\ f''(x^{(2)*}) = 60 > 0,\ f''(x^{(3)*}) = -120 < 0,\ f''(x^{(4)*}) = 540 > 0.$$

Тому в точках $x^{(2)*}$, $x^{(4)*}$ – локальний мінімум, а в точці $x^{(3)*}$ – локальний максимум (табл. 1.1, рядки 1 і 2). У точці $x^{(1)*}$ достатні умови не виконуються (табл. 1.2, рядок 3), тому обчислимо третю похідну:

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = (600x^3 - 2160x^2 + 1980x - 360)\Big|_{x^{(1)*}=0} = -360.$$

Оскільки ця похідна відмінна від нуля й має непарний порядок, то в точці $x^{(1)*}$ немає екстремуму (п. 2 зауваження 1.5).

3. Обчислимо значення функції в точках екстремуму:

$$f(x^{(2)*}) = 27.5,\ f(x^{(3)*}) = 44,\ f(x^{(4)*}) = -4.5.$$

При $x \to -\infty$ й $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$, отже функція не має точки глобального максимуму. Точка $x^{(4)*} = 3$ є точкою глобального мінімуму.

Приклад 1.12

Знайти екстремум функції $f(x) = (x-1)^6$ на множині R.

Розв'язання

1. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{df(x)}{dx} = 6(x-1)^5 = 0.$$

Звідси отримаємо стаціонарну точку $x^* = 1$.

2. Перевіримо достатні умови екстремуму з урахуванням п. 2 зауваження 1.5. Перша похідна, яка не дорівнює нулю має порядок $m = 6$: $f^{(6)}(x) = 6! > 0$. Оскільки m парне, то функція досягає в точці $x^* = 1$ локального мінімуму.

3. Обчислимо значення функції в точці мінімуму: $f(x^*) = 0$.

1.3. Умовний екстремум при обмеженнях рівностями

Постановка задачі Задано двічі неперервно диференційовні на множині R^n цільова функція $f(\mathrm{x}) = f(x_1,...,x_n)$ й функції обмежень $g_i(\mathrm{x}) = g_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1,...,m$. Система обмежень $g_i(\mathrm{x}) = 0$, $i = 1,...,m$ визначає множину припустимих розв'язків X.

Потрібно дослідити функцію $f(\mathrm{x})$ на екстремум, тобто визначити точки $\mathrm{x}^* \in X$ її локальних мінімумів і максимумів на множині X:

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}), \tag{1.5,а}$$

де

$$X = \left\{ \mathrm{x} : g_i(\mathrm{x}) = 0,\ i = 1,...,m;\ m < n \right\}. \tag{1.5,б}$$

Стратегія розв'язання задачі Знаходяться точки x^* локальних екстремумів за допомогою необхідних і достатніх умов мінімуму й максимуму першого й другого порядку при обмеженнях типу рівностей (порядок умов визначається порядком похідних, які використовуються). Обчислюються значення $f(\mathrm{x}^*)$ функції в знайдених точках локального екстремуму.

В класичному математичному аналізі для знаходження умовного екстремуму в задачі (1.5) застосовується *метод множників Лагранжа*. Цей метод дозволяє звести задачу пошуку умовного екстремуму до задачі пошуку безумовного екстремуму.

Означення 1.15. Функція

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(\mathrm{x}) \tag{1.6}$$

називається *узагальненою функцією Лагранжа,* числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – *множниками Лагранжа*, $\lambda = (\lambda_1;\ \lambda_2; ...; \lambda_m)^T$. Якщо $\lambda_0 = 1$, то функція (1.6) називається *класичною функцією Лагранжа*:

$$L(\mathrm{x}, \lambda) = f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(\mathrm{x}). \tag{1.7}$$

Означення 1.16. *Градієнтом узагальненої (класичної) функції Лагранжа* по x називається вектор-стовбець, складений з її частинних похідних першого порядку по x_j, $j = 1,...,n$:

$$\nabla_{\mathrm{x}} L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)=\left(\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1};\ldots;\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)}{\partial x_n}\right)^T, \qquad (1.8)$$

$$\left(\nabla_{\mathrm{x}} L(\mathrm{x},\lambda)=\left(\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda)}{\partial x_1};\ldots;\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda)}{\partial x_n}\right)^T\right).$$

Означення 1.17. *Другим диференціалом узагальненої (класичної) функції Лагранжа* $L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)$ $\left(L(\mathrm{x},\lambda)\right)$ називається функція

$$d^2L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j\,, \qquad (1.9)$$

$$\left(d^2L(\mathrm{x},\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda)}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j\right).$$

Означення 1.18. *Першим диференціалом функції обмеження* $g_i(\mathrm{x})$ називається функція

$$dg_i(\mathrm{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\mathrm{x})}{\partial x_j}dx_j\,,\quad i=1,\ldots,m\,. \qquad (1.10)$$

Означення 1.19. Градієнти обмежень $g_1(\mathrm{x}),\ldots,g_m(\mathrm{x})$ є *лінійно незалежними* в точці x^*, якщо рівність $\lambda_1\nabla g_1(\mathrm{x}^*)+\lambda_2\nabla g_2(\mathrm{x}^*)+\ldots+\lambda_m\nabla g_m(\mathrm{x}^*)=0$ виконується тільки при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$. Якщо існують числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, які одночасно не дорівнюють нулю і для яких рівність виконується, то градієнти *лінійно залежні.* У цьому випадку один з них є лінійною комбінацією інших. Один вектор $\nabla g_1(\mathrm{x}^*)$ теж утворює систему векторів: при $\nabla g_1(\mathrm{x}^*)\neq 0$ лінійно незалежну, а при $\nabla g_1(\mathrm{x}^*)=0$ лінійно залежну. Система векторів, що містить нульовий вектор, завжди лінійно залежна.

Якщо $rang\,A=rang\left(\nabla g_1(\mathrm{x}^*)\ \nabla g_2(\mathrm{x}^*)\ldots\nabla g_m(\mathrm{x}^*)\right)=m$, то система векторів лінійно незалежна. Якщо $rang\,A<m$, то система лінійно залежна.

Теорема 1.4 (необхідні умови екстремуму першого порядку).

Нехай x^* *є точкою локального екстремуму в задачі* (1.5). *Тоді знайдуться числа* $\lambda_0^*,\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*$, *які одночасно не дорівнюють нулю й такі, що виконуються наступні умови:*

– умова стаціонарності узагальненої функції Лагранжа по x *:*

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,...,n; \tag{1.11,а}$$

- умова допустимості розв'язку:

$$g_i(\mathrm{x}^*) = 0, \quad i = 1,...,m. \tag{1.11,б}$$

Якщо при цьому градієнти $\nabla g_1(\mathrm{x}^*), \ldots, \nabla g_m(\mathrm{x}^*)$ *у точці* x^* *лінійно незалежні (виконується умова регулярності*), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Умову (1.11,а) можна записати у векторній формі:

$$\nabla_{\mathrm{x}} L(\mathrm{x}^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0.$$

Система (1.11) містить $n+m$ рівнянь з $n+m+1$ невідомими λ_0^*, $\lambda^* = (\lambda_1^*;...;\lambda_m^*)^T$, $\mathrm{x}^* = (x_1^*;...;x_m^*)^T$. Точки x^*, що задовольняють системі при деяких λ_0^*, λ^* називаються *умовно стаціонарними.*

Точка екстремуму, яка задовольняє системі (1.11) при $\lambda_0^* \neq 0$, називається *регулярною,* а при $\lambda_0^* = 0$ *– нерегулярною.* Випадок коли $\lambda_0^* = 0$ відображає виродженість обмежень. При цьому в узагальненій функції Лагранжа зникає член, що містить цільову функцію, а в необхідних умовах екстремуму не використовується інформація, що надається градієнтом цільової функції.

Зауваження 1.6. При розв'язуванні задач перевірка умови регулярності утруднена, тому що точка x^* заздалегідь не відома. Тому, як правило, розглядаються два випадки: $\lambda_0^* = 0$ і $\lambda_0^* \neq 0$. Якщо $\lambda_0^* \neq 0$, у системі (1.11,а) приймають $\lambda_0^* = 1$. Це еквівалентно діленню системи рівнянь (1.11,а) на λ_0^* й заміні $\dfrac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*}$ на λ_i^*. При цьому узагальнена функція Лагранжа стає класичною, а сама система (1.11) має вигляд

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,...,n; \tag{1.12,а}$$

$$g_i(\mathrm{x}^*) = 0, \quad i = 1,...,m. \tag{1.12,б}$$

Тут число рівнянь дорівнює числу невідомих.

Система (1.12) відображає той факт, що антиградієнт цільової функції в регулярній точці екстремуму x^* є лінійною комбінацією градієнтів

обмежень. Дійсно, з урахуванням (1.7) можна переписати умови (1.12,а) у формі $\nabla f\left(\mathrm{x}^*\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla g_i\left(\mathrm{x}^*\right)=0$.

Звідси
$$-\nabla f\left(\mathrm{x}^*\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla g_i\left(\mathrm{x}^*\right). \qquad (1.13)$$

Умова (1.13) має певний геометричний зміст: у точці x^* антиградієнт цільової функції $-\nabla f(\mathrm{x}^*)$ є лінійною комбінацією градієнтів $\nabla g_i(\mathrm{x}^*)$ (нормалей до поверхонь $g_i(\mathrm{x})=0$).

На рис. 1.2 наведена ілюстрація цього факту для задачі (1.5) при $n=2$, $m=1$. Пунктиром зображені лінії рівня цільової функції $f(\mathrm{x})=c$. У точці x^* вектори $-\nabla f(\mathrm{x}^*)$ й $\nabla g_1(\mathrm{x}^*)$ колінеарні. В точках x з досить малого околу точки x^*, що задовольняють умові $g_1(\mathrm{x})=0$, виконується нерівність $f(\mathrm{x})\ge f(\mathrm{x}^*)$. Точка x^* умовного екстремуму (максимуму) є точкою дотику лінії рівня цільової функції й кривої, що описує обмеження (рис. 1.2). Очевидно, $\mathrm{x}^{(1)}$ є точкою локального умовного мінімуму, а $\mathrm{x}^{(2)}$ – локального максимуму $f(\mathrm{x})$ при обмеженні $g_1(\mathrm{x})=0$. Стаціонарна точка функції Лагранжа $\mathrm{x}^{(3)}$ не є точкою локального умовного екстремуму, тому що з неї можна зміститись, залишаючись на лінії $g_1(\mathrm{x})=0$ так, що значення функції $f(\mathrm{x})$ зміниться в той або інший бік в порівнянні з $f(\mathrm{x}^{(3)})$.

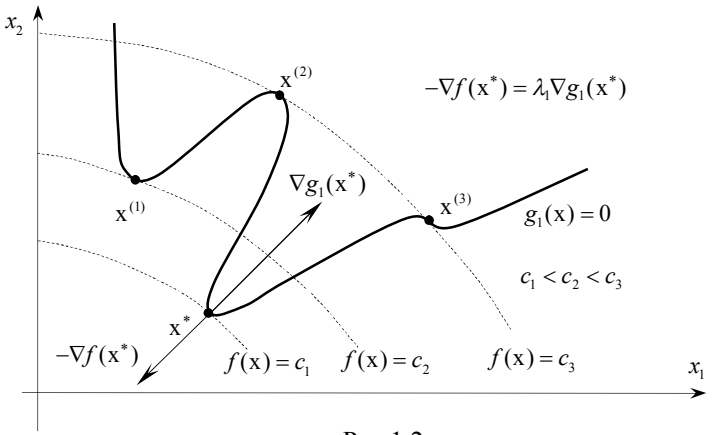


Рис.1.2

Теорема 1.5 (необхідні умови екстремуму другого порядку).

Нехай x^* *– регулярна точка мінімуму (максимуму) в задачі* (1.5) *і є розв'язком* $(\mathrm{x}^*;\lambda^*)$ *системи* (1.12). *Тоді другий диференціал класичної функції Лагранжа, обчислений у точці* $(\mathrm{x}^*;\lambda^*)$, *є невід'ємним (недодатним):*

$$d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)\geq 0 \qquad \left(d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)\leq 0\right) \tag{1.14}$$

для всіх $d\mathrm{x}\in R^n$ *таких, що*

$$dg_i(\mathrm{x}^*)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial g_i(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j}dx_j=0\,,\quad i=1,...,m\,. \tag{1.15}$$

Теорема 1.6 (достатні умови екстремуму).

Нехай є точка (x^*,λ^*), *що задовольняє системі* (1.12). *Якщо в цій точці* $d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)>0$ $\left(d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)<0\right)$ *для всіх ненульових* $d\mathrm{x}\in R^n$ *таких, що*

$$dg_i(\mathrm{x}^*)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial g_i(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j}dx_j=0\,,\quad i=1,...,m\,,$$

то точка x^* *є точкою локального мінімуму (максимуму) в задачі* (1.5).

Необхідні й достатні умови в задачі пошуку умовного екстремуму при обмеженнях типу рівностей

(за умови $\nabla_{\mathrm{x}}L(\mathrm{x}^*,\lambda_0^*,\lambda^*)=0$, $g_i(\mathrm{x}^*)=0$, $i=1,...,m$ ***)***

Таблиця 1.3

№ п/п	$\lambda_0^*\neq 0$, $d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)$	$dg_i(\mathrm{x}^*)$, $i=1,...,m$	Тип умовно стаціонарної точки x^*
1	>0	0, $d\mathrm{x}\neq 0$	Умовний локальний мінімум
2	<0	0, $d\mathrm{x}\neq 0$	Умовний локальний максимум
3	≥ 0	0	Може бути умовний локальний мінімум. Потрібні додаткові дослідження
4	≤ 0	0	Може бути умовний локальний максимум. Потрібні додаткові дослідження
5	$=0$	0	Потрібне додаткове дослідження
6	$\gtrless 0$	0	Немає екстремуму

Зауваження 1.7. Достатні й необхідні умови екстремуму другого порядку перевіряються в умовно стаціонарних точках, які задовольняють системі (1.11) при $\lambda_0^* \neq 0$ або системі (1.12), оскільки для практики становить інтерес випадок, коли у функції Лагранжа присутня цільова функція, екстремум якої шукається.

Алгоритм

1. Скласти узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\mathrm{x}) .$$

2. Записати необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,...,n$;

б) $g_i(\mathrm{x}^*) = 0, \quad i = 1,...,m$.

3. Розв'язати систему рівнянь п.2 для двох випадків:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \neq 0$ (поділити умову «а» на λ_0^* й замінити $\dfrac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*}$ на λ_i^*).

В результаті знайти умовно стаціонарні точки x^*, виділивши з них отримані при $\lambda_0^* \neq 0$ (вони можуть бути регулярними точками екстремуму).

4. Для виділених на кроці 3 точок перевірити достатні умови екстремуму:

а) записати вираз для другого диференціала класичної функції Лагранжа в точці $(\mathrm{x}^*, \lambda^*)$:

$$d^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

б) записати систему (1.15) у точці x^*:

$$dg_i(\mathrm{x}^*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = 1,...,m ;$$

в) з попередньої системи виразити будь-які m диференціалів dx_j через інші $(n-m)$ й підставити в $d^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*)$;

г) якщо $d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)>0$ при ненульових $d\mathrm{x}$, то в точці x^* – умовний локальний мінімум. Якщо $d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)<0$ при ненульових $d\mathrm{x}$, то в точці x^* – умовний локальний максимум. Якщо достатні умови екстремуму не виконуються, варто перевірити виконання необхідних умов другого порядку (див. теорему 1.5), діяти аналогічно. Якщо вони виконуються, то потрібні додаткові дослідження, а якщо не виконуються, то в точці x^* немає умовного екстремуму.

5. Обчислити значення функції в точках умовного екстремуму.

Умови екстремуму в задачі (1.5) наведені в таблиці 1.3.

Зауваження 1.8. Іноді вдається перевірити умову лінійної незалежності градієнтів обмежень на множині X (див. означення 1.19.). Якщо вона виконується, то на кроці 1 варто записати класичну функцію Лагранжа (1.7), на кроці 2 можна записувати відразу систему (1.12), а на кроці 3 відсутній випадок $\lambda_0^*=0$.

Приклад 1.13

Знайти екстремум функції $f(\mathrm{x})=x_1^2+x_2^2$ на множині X, при умові $g_1(\mathrm{x})=x_1+x_2-2=0$.

Розв'язання

Перевіримо умову регулярності. Оскільки $\nabla g_1(\mathrm{x})=(1;1)^T\neq 0$ то умова виконується (див. означення 1.19). Тому будемо користуватися класичною функцією Лагранжа (1.7).

1. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\lambda_1)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1(x_1+x_2-2).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\,\lambda_1)}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1=0$, тобто $x_1=-\dfrac{\lambda_1}{2}$;

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\,\lambda_1)}{\partial x_2}=2x_2+\lambda_1=0,\ \text{тобто}\ x_2=-\frac{\lambda_1}{2};$$

б) $g_1(\mathrm{x})=x_1+x_2-2=0$.

3. Розв'язок системи: $x_1^*=x_2^*=1$, $\lambda_1^*=-2$ – умовно стаціонарна точка.

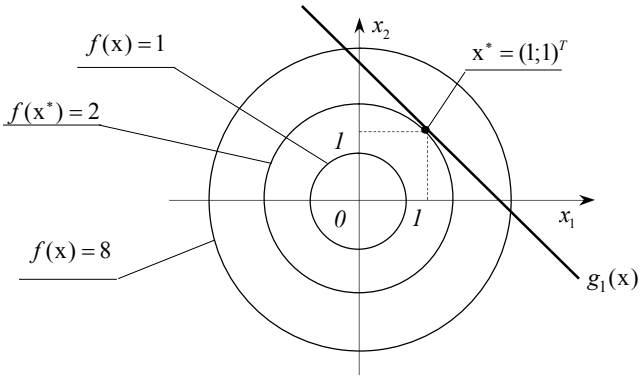


Рис. 1.3

4. Перевіримо достатні умови екстремуму:

а) $d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda_1^*)=2dx_1^2+2dx_2^2$, оскільки

$$\frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_2^2}=2,$$

$$\frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_2\partial x_1}=0;$$

б) $dg_1(\mathrm{x}^*)=dx_1+dx_2=0$, оскільки $\dfrac{\partial g_1(\mathrm{x})}{\partial x_1}=\dfrac{\partial g_1(\mathrm{x})}{\partial x_2}=1$;

в) виразимо диференціал dx_1 через dx_2: $dx_1=-dx_2$ і підставимо в d^2L;

г) $d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda_1^*)=4dx_2^2>0$ при $dx_2\neq 0$, то в точці $\mathrm{x}^*=(1;1)^T$ – регулярний локальний умовний мінімум (табл. 1.3, рядок 1). Графічний розв'язок задачі наведений на рис. 1.3.

Приклад 1.14

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x})=x_1+x_2\to\mathrm{extr};$$

$$g_1(\mathrm{x})=x_1^2+x_2^2-2=0.$$

Розв'язання

Перевіримо умову регулярності. Оскільки $\nabla g_1(\mathrm{x})=(2x_1;2x_2)^T\neq 0$ для всіх $\mathrm{x}\in X$, то умова виконується (див. означення 1.19). Тому будемо користуватися класичною функцією Лагранжа.

1. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\,\lambda_1) = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$ або $x_1 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$,

$\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0$ або $x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$;

б) $g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$.

3. Розв'язком системи є дві умовно стаціонарні точки:

$$A:\ x_1^* = 1,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = -\frac{1}{2};\quad B:\ x_1^* = -1,\ x_2^* = -1,\ \lambda_1^* = \frac{1}{2}.$$

4. Перевіримо достатні умови екстремуму:

а) $d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda_1^*) = 2\lambda_1^* dx_1^2 + 2\lambda_1^* dx_2^2$, оскільки

$$\frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2\lambda_1^*,\quad \frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

б) $dg_1(\mathrm{x}^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$, тому що

$$\frac{\partial g_1(\mathrm{x})}{\partial x_1} = 2x_1,\quad \frac{\partial g_1(\mathrm{x})}{\partial x_2} = 2x_2.$$

в) Дослідимо точку A. Одержимо $dg_1(A) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0$, звідки $dx_1 = -dx_2$. З урахуванням отриманого співвідношення $d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -2dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Тому в точці $\mathrm{x}^* = (1;\,1)^T$ – регулярний умовний локальний максимум (рядок 2 у табл. 1.3).

Дослідимо точку B. Одержимо $dg_1(B) = -2dx_1 - 2dx_2 = 0$, звідки $dx_1 = -dx_2$. З урахуванням отриманого співвідношення $d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Тому в точці $\mathrm{x}^* = (-1;\,-1)^T$ – регулярний умовний локальний мінімум (рядок 1 у табл. 1.3).

4. Обчислимо значення функції в точках екстремуму: $f(A) = 2$, $f(B) = -2$. Графічний розв'язок задачі зображений на рис. 1.4.

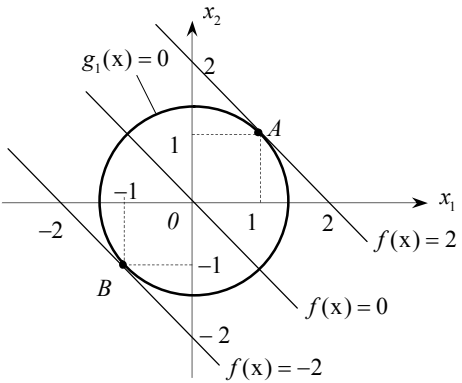


Рис. 1.4

Приклад 1.15

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1 \to \mathrm{extr}\,;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = -x_1^3 + x_2^2 = 0\,.$$

Розв'язання

Перевіримо умову регулярності.

Оскільки $\nabla g_1(\mathrm{x}) = (-3x_1^2;\, 2x_2)^T = 0$ в точці $\mathrm{x}^* = (0;0)^T$, то умова не виконується (див. означення 1.19). Будемо користуватися алгоритмом з використанням узагальненої функції Лагранжа.

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(-x_1^3 + x_2^2)\,.$$

2. Випишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0\,,\quad \dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_1 x_2 = 0\,;$

б) $g_1(\mathrm{x}) = -x_1^3 + x_2^2 = 0\,.$

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0 = 0$. Тоді $\lambda_1 \neq 0$, оскільки в теоремі 1.4 всі множники Лагранжа не можуть одночасно дорівнювати нулю. Звідси $x_1^* = x_2^* = 0\,,\ \lambda_0^* = 0\,.$

В другому випадку $\lambda_0 \neq 0$. Поділимо рівняння наведеної в п. 2 системи на λ_0 із заміною $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$1-3\lambda_1 x_1^2=0;\quad 2\lambda_1 x_2=0;\quad -x_1^3+x_2^2=0.$$

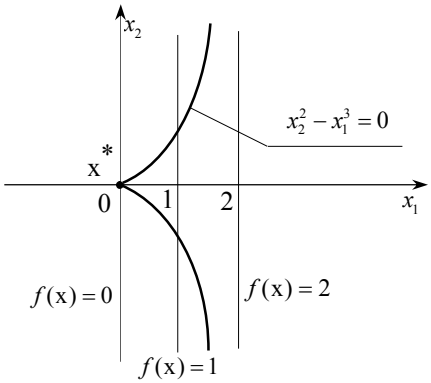


Рис. 1.5

Розглянемо друге рівняння. Якщо $\lambda_1=0$, то система несумісна. Якщо $x_2=0$, то $x_1=0$ і система теж несумісна. Бачимо, що, застосування класичної функції Лагранжа не дає результату.

4. Оскільки $\lambda_0^*=0$, достатні умови екстремуму не перевіряються. Точка x^* із значенням цільової функції $f(\mathrm{x}^*)=0$ є точкою нерегулярного локального й глобального мінімуму, як видно з рис. 1.5.

Приклад 1.16

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x})=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\to\mathrm{extr};$$
$$g_1(\mathrm{x})=x_1^2+x_2^2-2=0.$$

Розв'язання

Будемо дотримуватися алгоритму, не перевіряючи умову регулярності.

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0\left[(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\right]+\lambda_1(x_1^2+x_2^2-2).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1}=2\lambda_0(x_1-2)+2\lambda_1 x_1=0,$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2}=2\lambda_0(x_2-2)+2\lambda_1 x_2=0;$$

б) $g_1(\mathrm{x})=x_1^2+x_2^2-2=0.$

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0=0$. З п.2 маємо:

$$2\lambda_1 x_1=0,\quad 2\lambda_1 x_2=0,\quad x_1^2+x_2^2-2=0.$$

Оскільки відповідно до теореми 1.4 $\lambda_1 \neq 0$, то з перших двох рівнянь: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Однак при цьому третє рівняння (обмеження) не задовольняється: $g_1(\mathrm{x}) = -2 \neq 0$. Отже, система несумісна.

В другому випадку $\lambda_0 \neq 0$. Перепишемо систему, наведену в п. 2, поділивши рівняння на λ_0 із заміною $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_1)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_1)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Система рівнянь (1.16) має два розв'язки, тобто знайдені дві умовно стаціонарні точки:

$$A:\ x_1^* = x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = 1; \qquad B:\ x_1^* = x_2^* = -1,\ \lambda_1^* = -3.$$

4. Перевіримо достатні умови екстремуму, використовуючи умови теореми 1.6:

а) $d^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda_1^*) = (2 + 2\lambda_1^*) dx_1^2 + (2 + 2\lambda_1^*) dx_2^2$;

б) $dg_1(\mathrm{x}^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$.

в) Дослідимо точку A: $dg_1(A) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0$, звідки $dx_1 = -dx_2$ й $d^2 L(A) = 4dx_1^2 + 4dx_2^2 = 8dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Тому в точці A – регулярний умовний *мінімум* (табл. 1.3, рядок 1).

г) Дослідимо точку B: $dg_1(B) = -2dx_1 - 2dx_2 = 0$, звідки $dx_1 = -dx_2$ й $d^2 L(A) = -4dx_1^2 - 4dx_2^2 = -8dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Тому в точці B – регулярний умовний *максимум* (табл. 1.3, рядок 2).

5. Обчислимо значення функції в точках екстремуму: $f(A) = 2$, $f(B) = 18$. Графічний розв'язок задачі зображений на рис. 1.6.

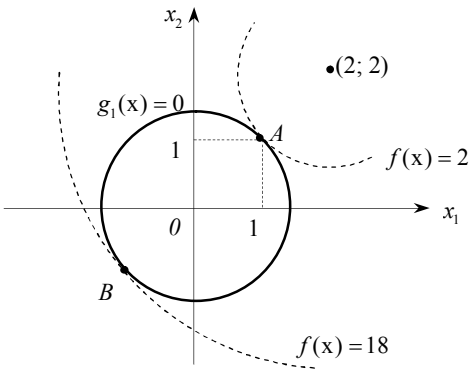


Рис. 1.6

Приклад 1.17

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 - x_2^2 \to \mathrm{extr}\,;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\,.$$

Розв'язання

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0(x_1^2 - x_2^2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)\,.$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0\,,$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_2} = -2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0\,;$$

б) $g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\,.$

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0 = 0$. Тоді $\lambda_1 \neq 0$ в силу теореми 1.4. Тому з перших двох рівнянь маємо: $x_1 = x_2 = 0$. Однак умова «б» при цьому не виконується. Отже, система несумісна.

В другому випадку $\lambda_0 \neq 0$. Перепишемо систему, наведену в п. 2, поділивши рівняння на λ_0 із заміною $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1(1+\lambda_1) = 0, \\ \dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2(-1+\lambda_1) = 0, \\ g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{cases} \qquad (1.17)$$

Нехай $\lambda_1 = -1$. Тоді $x_2 = 0$, а $x_1 = \pm 1$. Нехай $\lambda_1 = 1$. Тоді $x_1 = 0$, а $x_2 = \pm 1$. Інших розв'язків система не має. Таким чином, система (1.17) має чотири умовно стаціонарні точки:

A: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = -1$; B: $x_1^* = -1$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = -1$;

C: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $\lambda_1^* = 1$; D: $x_1^* = 0$, $x_2^* = -1$, $\lambda_1^* = 1$.

4. Перевіримо достатні умови екстремуму. Скористаємося системою (1.17):

а) $d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda_1^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(\lambda_1^* - 1)dx_2^2$;

б) $dg_1(\mathrm{x}^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$.

в,г) Дослідимо точку A: $dg_1(A) = 2dx_1 = 0$, звідки $dx_1 = 0$ й $d^2L(A) = -4dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Тому в точці A – регулярний локальний умовний *максимум* (рядок 2 у табл. 1.3).

Дослідимо точку B: $dg_1(B) = -2dx_1 = 0$, звідки $dx_1 = 0$ й $d^2L(B) = -4dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Тому в точці B – регулярний локальний умовний *максимум* (табл. 1.3, рядок 2).

Дослідимо точку C: $dg_1(C) = 2dx_2 = 0$, звідки $dx_2 = 0$ й $d^2L(C) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$. Тому в точці C – регулярний локальний умовний *мінімум* (табл. 1.3, рядок 1).

Дослідимо точку D: $dg_1(D) = -2dx_2 = 0$, звідки $dx_2 = 0$ й $d^2L(D) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$. Тому в точці D – регулярний локальний умовний *мінімум* (табл. 1.3, рядок 1).

4. Обчислимо значення функції в точці умовного екстремуму: $f(A) = f(B) = 1$, $f(C) = f(D) = -1$. Графічний розв'язок наведено на рис. 1.7.

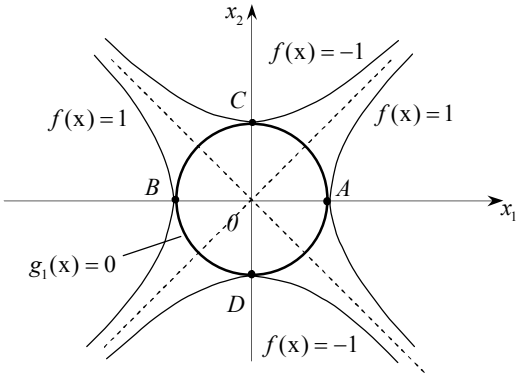


Рис. 1.7

Приклад 1.18

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \mathrm{extr}\,;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\,,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0\,.$$

Розв'язання

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - x_3) + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 4)$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0\,,$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0\,,$$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_3} = 2\lambda_0 x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0\,;$$

б) $g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\,, \quad g_2(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0\,.$

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0 = 0$. Тоді з п.2 маємо систему рівнянь:

$$2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0\,,$$
$$2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0\,,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{або} \quad \lambda_1 = \lambda_2\,,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$$

Перші два рівняння системи перепишуться у вигляді

$$\lambda_1(2x_1 + 1) = 0,$$
$$\lambda_1(2x_2 + 1) = 0.$$

Якщо $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_2 = 0$, що суперечить вимогам теореми 1.4. Якщо $\lambda_1 \neq 0$, то $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Із двох останніх рівнянь системи одержуємо $x_3 = \frac{1}{2}$ й $x_3 = 4 - x_1 - x_2 = 5$, тобто маємо суперечність й система несумісна.

В другому випадку $\lambda_0 \neq 0$. Перепишемо систему, наведену в п. 2, поділивши рівняння на λ_0 із заміною $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_1, λ_2:

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1} = 2x_1(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0,$$
$$\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2} = 2x_2(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0,$$
$$\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_3} = 2x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \quad g_2(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$$

З перших трьох рівнянь маємо:

$$x_1 = x_2 = -\frac{\lambda_2}{2(1 + \lambda_1)}; \quad x_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Підставляючи одержані співвідношення в останні два рівняння й розв'язуючи їх, маємо:

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{10}{3};$$
$$\lambda_1 = -\frac{20}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{68}{3}.$$

Таким чином, одержано дві умовно стаціонарні точки:

$$A:\ x_1^*=1,\ \ x_2^*=1,\ \ x_3^*=2,\ \ \lambda_1^*=\frac{2}{3},\ \ \lambda_2^*=-\frac{10}{3};$$

$$B:\ x_1^*=-2,\ \ x_2^*=-2,\ \ x_3^*=8,\ \ \lambda_1^*=-\frac{20}{3},\ \ \lambda_2^*=-\frac{68}{3};$$

4. Перевіримо достатні умови екстремуму:

а) $d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)=2(1+\lambda_1^*)dx_1^2+2(1+\lambda_1^*)dx_2^2+2dx_3^2$;

б) $dg_1(\mathrm{x}^*)=2x_1^*dx_1+2x_2^*dx_2-dx_3=0$,

$dg_2(\mathrm{x}^*)=dx_1+dx_2+dx_3=0$;

в) виразимо диференціали dx_1 й dx_3 через dx_2:

$$dx_1=-\frac{1+2x_2^*}{1+2x_1^*}dx_2,\qquad dx_3=-\frac{2(x_1^*-x_2^*)}{1+2x_1^*}dx_2;$$

г) дослідимо точку $A:\ dx_1=-dx_2,\ \ dx_3=0$,

$$d^2L(A)=2\left(1+\frac{2}{3}\right)(-dx_2)^2+2\left(1+\frac{2}{3}\right)dx_2^2>0\ \ \text{при}\ \ dx_2\neq 0.$$

Тому в точці A – регулярний локальний умовний мінімум (табл. 1.3, рядок 1).

Досліди точку $B:\ dx_1=-dx_2,\ \ dx_3=0$,

$$d^2L(B)=2\left(1-\frac{20}{3}\right)(-dx_2)^2+2\left(1-\frac{20}{3}\right)dx_2^2<0\ \ \text{при}\ \ dx_2\neq 0.$$

Тому в точці B – регулярний локальний умовний *максимум* (табл. 1.3, рядок 2).

5. Значення функції в точках екстремуму: $f(A)=6$, $f(B)=72$.

Покажемо, що множник Лагранжа λ_i^* характеризує чутливість оптимального значення f^* в задачі (1.5) до змін правої частини b_i в i-му обмеженні (1.5,б). Розглянемо задачу умовної мінімізації в просторі R^2 з одним обмеженням:

$$f(x_1,\,x_2)\to\min;$$
$$g_1(x_1,\,x_2)=b_1.$$

Нехай стаціонарна точка $(\mathrm{x}^*;\,\lambda_1^*)$ класичної функції Лагранжа $L(\mathrm{x},\,\lambda_1)=f(\mathrm{x})+\lambda_1\left(g_1(\mathrm{x})-b_1\right)$ є розв'язком цієї задачі. Оскільки

$g_1(\mathrm{x}^*) = b_1$ й $f^* = L(\mathrm{x}^*, \lambda_1^*) = f(\mathrm{x}^*)$ то, мабуть, оптимальні значення x^*, λ_1^* і f^* зв'язані функціональною залежністю з величиною b_1. Виразимо частинну похідну $\dfrac{\partial f^*}{\partial b_1}$ за допомогою правила диференціювання складної функції:

$$\frac{\partial f^*}{\partial b_1} = \frac{\partial f^*}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial b_1} + \frac{\partial f^*}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial b_1}. \qquad (1.18)$$

З іншого боку, з умови $g_1(x_1, x_2) = b_1$ маємо:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial b_1} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial b_1} - 1 = 0. \qquad (1.19)$$

Помножимо обидві частини рівності (1.19) на λ_1^* й додамо до (1.18):

$$\frac{\partial f^*}{\partial b_1} = -\lambda_1^* + \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial f^*}{\partial x_j} + \lambda_1^*\frac{\partial g_1}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial b_1}.$$

Оскільки $(\mathrm{x}^*, \lambda_1^*)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа, то з урахуванням (1.12,а) одержимо: $\dfrac{\partial f^*}{\partial b_1} = -\lambda_1^*$. Таким чином, швидкість зміни оптимального значення f^*, що визивається зміною правої частини в обмеженні $g_1(x_1, x_2) = b_1$, визначається значенням множника Лагранжа. Для задачі на умовний екстремум з m обмеженнями $g_i(\mathrm{x}) = b_i$, $i = 1,...,m$. Аналогічно можна одержати: $\dfrac{\partial f^*}{\partial b_i} = -\lambda_i^*$.

1.4. Умовний екстремум при обмеженнях нерівностями

Постановка задачі

Задані двічі неперервно диференційовні на множині R^n функція $f(\mathrm{x}) = f(x_1,...,x_n)$ (цільова функція) і функції обмежень $g_i(\mathrm{x}) = g_i(x_1, ..., x_n) \le 0$, $i = 1,...,m$, що визначають множину припустимих розв'язків X.

Потрібно дослідити функцію $f(\mathrm{x})$ на екстремум, тобто визначити точки $\mathrm{x}^* \in X \subset R^n$ її локальних мінімумів (максимумів) на X:

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x}\in X} f(\mathrm{x}); \quad \left(f(\mathrm{x}^*) = \max_{\mathrm{x}\in X} f(\mathrm{x})\right), \tag{1.20}$$

де $X = \{\mathrm{x}: g_i(\mathrm{x}) \le 0,\ i = 1,...,m\}$.

Стратегія розв'язання задачі Для розв'язання задачі знаходять точки x^* локального екстремуму за допомогою необхідних і достатніх умов мінімуму й максимуму першого й другого порядку при обмеженнях типу нерівностей (порядок умов визначається порядком похідних які використовуються). Обчислюють значення $f(\mathrm{x}^*)$ функції в знайдених точках локального екстремуму.

Означення 1.20. Обмеження $g_i(\mathrm{x}) \le 0$ називається *активним* у точці x^*, якщо $g_i(\mathrm{x}^*) = 0$. Якщо $g_i(\mathrm{x}^*) < 0$, то обмеження називається *пасивним.*

Якщо припустима множина X задовольняє так званій *умові регулярності (умові Слейтера)*, то існує точка $\mathrm{x}^{(0)} \in \ \in X \subset R^n$, така, що $g_i(\mathrm{x}^{(0)}) < 0$ при всіх $i = 1,...,m$. Це означає, що у множини X є хоча б одна внутрішня точка.

Теорема 1.7 (необхідні умови мінімуму (максимуму) першого порядку).

Нехай x^* *– точка локального мінімуму (максимуму) у задачі* (1.20). *Тоді знайдеться таке число* $\lambda_0^* \ge 0$ *і вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*;...;\lambda_m^*)^T$, *не рівні одночасно нулю й такі, що виконуються наступні умови:*

– умова стаціонарності узагальненої функції Лагранжа по x*:*

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,...,n; \tag{1.21,а}$$

– умова припустимості розв'язків:

$$g_i(\mathrm{x}^*) \le 0, \quad i = 1,...,m; \tag{1.21,б}$$

– умова невід'ємності для умовного мінімуму:

$$\lambda_i^* \ge 0, \quad i = 1,...,m; \tag{1.21,в}$$

(*умова недодатності для умовного максимуму:*

$$\lambda_i^* \le 0, \quad i = 1,...,m \ ):$$

– умова доповнюючої нежорсткості:

$$\lambda_i^* g_i(\mathrm{x}^*) = 0, \quad i = 1,...,m. \tag{1.21,г}$$

Якщо при цьому градієнти активних у точці x^* *обмежень лінійно незалежні (виконується умова регулярності), то* $\lambda_0^* \neq 0$.

Точки x^*, які задовольняють системі (1.21), називаються *умовно стаціонарними.*

На відміну від випадку обмежень типу рівностей необхідні умови екстремуму першого порядку формулюються окремо для максимуму й мінімуму. Теорема 1.7 була доведена Ф. Джоном (F. John), а при $\lambda_0^* \neq 0$ Куном і Таккером (H.W. Kuhn, A.W. Tucker).

Якщо в задачі, яка розв'язується, обмеження записані у формі $g_i(\mathrm{x}) \geq 0$ то їх необхідно переписати у вигляді, що використовується в (1.20): $-g_i(\mathrm{x}) \leq 0$.

Далі будемо використовувати *множину індексів обмежень, активних у точці* x^*, які позначимо через I_a.

При розв'язанні задач пошуку умовного максимуму можна використовувати необхідні й достатні умови мінімуму, застосовуючи перетворення, описані в зауваженні 1.1.

Зауваження 1.9. Оскільки точка x^* заздалегідь невідома, то перевірка умови регулярності утруднена, тому рекомендується додержуватися алгоритму, описаному в зауваженні 1.6.

Точка екстремуму, що задовольняє системі (1.21) при $\lambda_0^* \neq 0$, називається *регулярною,* а при $\lambda_0^* = 0$ – *нерегулярною.* Випадок $\lambda_0^* = 0$ відображає виродженість обмежень.

Умова (1.21,а) в регулярній точці екстремуму x^* відображає той факт, що антиградієнт цільової функції є невід'ємною (недодатною у випадку максимуму) лінійною комбінацією градієнтів функцій, які утворюють активні обмеження в точці x^*. Дійсно, умову (1.21,а) з урахуванням (1.21,г) можна переписати у формі

$$-\nabla f(\mathrm{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathrm{x}^*) = \sum_{i \in I_a} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathrm{x}^*).$$

На рис. 1.8 в точці x^* досягається мінімум і виконується наведена рівність. В інших точках ця рівність не виконується.

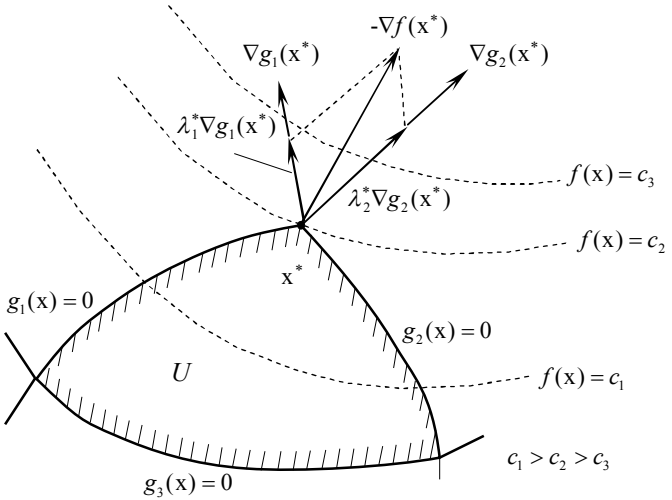


Рис. 1.8

Зауваження 1.10. При $\lambda_0^* \neq 0$ мають місце два важливих твердження:

1) якщо функції $f(\mathrm{x})$, $g_i(\mathrm{x})$, $i = 1,...,m$, опуклі, то умови теореми 1.7 є одночасно й достатніми умовами глобального мінімуму;

2) якщо функції $-f(\mathrm{x})$, $g_i(\mathrm{x})$, $i = 1,...,m$, опуклі, то умови теореми 1.7 є одночасно й достатніми умовами глобального максимуму.

В обох випадках множина припустимих розв'язків X опукла.

Умова припустимості розв'язків, що є наслідком постановки задачі (1.20), входить до (1.21) для зручності формування алгоритму розв'язку задачі.

Зауваження 1.11. З умови доповнюючої нежорсткості маємо, що якщо обмеження в точці x^* пасивне, тобто $g_i(\mathrm{x}^*) < 0$, то $\lambda_i^* = 0$, а якщо – активне, тобто $g_i(\mathrm{x}^*) = 0$, то $\lambda_i^* \geq 0$ (для мінімуму) і $\lambda_i^* \leq 0$ (для максимуму).

Теорема 1.8 (достатні умови мінімуму (максимуму) першого порядку).

Нехай є точка $(\mathrm{x}^*; \lambda^*)$, *яка задовольняє системі* (1.21) *при* $\lambda_0^* \neq 0$, *число активних обмежень у точці* x^* *збігається із числом* n *змінних (при цьому умова регулярності виконується). Якщо* $\lambda_i^* > 0$ *для всіх* $i \in I_a$,

то точка x^* *– точка умовного локального мінімуму. Якщо* $\lambda_i^* < 0$ *для всіх* $i \in I_a$, *то* x^* *– точка умовного локального максимуму в задачі* (1.20).

Терема 1.9. (необхідна умова мінімуму (максимуму) другого порядку).

Нехай x^* *– регулярна точка мінімуму (максимуму) в задачі* (1.20) *і маємо розв'язок* $(\mathrm{x}^*; \lambda^*)$ *системи* (1.21). *Тоді другий диференціал класичної функції Лагранжа, обчислений у точці* $(\mathrm{x}^*; \lambda^*)$, *невід'ємний (недодатний):*

$$d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad (\, d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) \leq 0 \,) \tag{1.22}$$

для всіх $d\mathrm{x} \in R^n$ *таких, що*

$$dg_i(\mathrm{x}^*) = 0, \quad i \in I_a, \quad \lambda_i^* > 0 \quad (\lambda_i^* < 0 \,);$$

$$dg_i(\mathrm{x}^*) \leq 0, \quad i \in I_a, \quad \lambda_i^* = 0.$$

Теорема 1.10. (достатні умови екстремуму другого порядку).

Нехай є точка $(\mathrm{x}^*, \lambda^*)$, що *задовольняє системі* (1.21) *при* $\lambda_0^* \neq 0$. *Якщо в цій точці* $d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) \geq 0$ $(\, d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) \leq 0)$ *для всіх ненульових* $d\mathrm{x} \in R^n$ *таких, що*

$$dg_i(\mathrm{x}^*) = 0, \quad i \in I_a, \quad \lambda_i^* > 0 \quad (\lambda_i^* < 0);$$

$$dg_i(\mathrm{x}^*) \leq 0, \quad i \in I_a, \quad \lambda_i^* = 0,$$

то точка x^* *є точкою локального мінімуму (максимуму) в задачі* (1.20).

Зауваження 1.12. У розглянутій задачі зауваження 1.3 і зауваження 1.4 також мають місце з урахуванням заміни (1.13) на (1.21).

Алгоритм

1. Скласти узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\mathrm{x}).$$

2. Записати необхідні умови мінімуму (максимуму) першого порядку

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$;

б) $g_i(\mathrm{x}^*) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$;

в) $\lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$ (для мінімуму), $\lambda_i^* \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$ (для максимуму);

г) $\lambda_i^* g_i(\mathrm{x}^*) = 0$, $i = 1,...,m$.

3. Розв'язати систему для двох випадків:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \neq 0$ (при цьому поділити умови, записані на кроці 2, на λ_0^* й замінити $\frac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*}$ на λ_i^*).

В результаті знайти умовно стаціонарні точки x^*, виділивши з них отримані при $\lambda_0^* \neq 0$ (вони можуть бути регулярними точками екстремуму). У кожному з двох випадків варто починати з розгляду 2^m варіантів задоволення умові «г» доповнюючої нежортсткості.

4. Для виділених на кроці 3 точок перевірити достатні умови екстремуму першого або другого порядку.

Для перевірки достатніх умов першого порядку треба:

а) визначити число l активних у точці x^* обмежень;

б) якщо $l = n$ й $\lambda_i^* > 0$ для всіх $i \in I_a$, то в точці x^* – локальний мінімум. Якщо $l = n$ й $\lambda_i^* < 0$ для всіх $i \in I_a$, то в точці x^* – локальний максимум. Якщо $l < n$ або відповідні множники Лагранжа не задовольняють достатнім умовам першого порядку, перевірити достатні умови другого порядку.

Для перевірки достатніх умов другого порядку треба:

а) записати вираз для другого диференціала класичної функції Лагранжа в точці $(\mathrm{x}^*; \lambda^*)$:

$$d^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j ;$$

б) записати умови, що накладаються на перші диференціали активних обмежень:

$$\begin{gathered} dg_i(\mathrm{x}^*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j} dx_j = 0, \ i \in I_a; \ \lambda_i^* > 0 \ \ (\lambda_i^* < 0); \\ dg_i(\mathrm{x}^*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j} dx_j \leq 0, \ i \in I_a; \ \lambda_i^* = 0; \end{gathered} \tag{1.23}$$

в) дослідити знак другого диференціала функції Лагранжа для ненульових $d\mathrm{x}$, що задовольняють системі (1.23). Якщо $d^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) > 0$, то в

точці x^* – умовний локальний мінімум**.** Якщо $d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)<0$, то в точці x^* – умовний локальний максимум.

Якщо достатні умови першого й другого порядку не виконуються, варто перевірити виконання необхідних умов другого порядку (теорема 1.9), діючи аналогічно. Якщо вони виконуються, то потрібні додаткові дослідження, а якщо ні, то в точці x^* немає умовного екстремуму.

5. Обчислити значення функції в точках умовного екстремуму.

Алгоритм зручно застосовувати з урахуванням необхідних і достатніх умов екстремуму наведених у таблицях 1.4 і 1.5.

Необхідні й достатні умови першого порядку в задачі пошуку умовного екстремуму при обмеженнях типу нерівностей

Таблиця 1.4

№	Необхідні умови $\nabla_{\mathrm{x}}L(\mathrm{x}^*,\lambda_0^*,\lambda^*)=0$; $\lambda_i^* g_i(\mathrm{x}^*)=0$, $i=1,...,m$		Достатні умови $\lambda_0^*\neq 0$ число активних обмежень $l=n$	
1	$g_i(\mathrm{x}^*)$ $i=1,...,m$	$\lambda_0^*\geq 0$, λ_i^*, $i=1,...,m$	λ_i^*, $i\in I_a$	Тип умовно стаціонарної точки x^*
2	≤ 0	≥ 0	>0	Умовний локальний мінімум
3	≤ 0	≤ 0	<0	Умовний локальний максимум

Необхідні й достатні умови другого порядку в задачі пошуку умовного екстремуму при обмеженнях типу нерівностей

(за умови $\nabla_{\mathrm{x}}L(\mathrm{x}^*,\lambda_0^*,\lambda^*)=0$, $\lambda_i^* g_i(\mathrm{x}^*)=0$, $i=1,...,m$ *)*

Таблиця 1.5

№	$d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)$	$dg_i(\mathrm{x}^*)$, $i\in I_a$ $\lambda_i^*>0$ $(\lambda_i^*<0)$	$dg_i(\mathrm{x}^*)$, $i\in I_a$, $\lambda_i^*=0$	Тип умовно стаціонарної точки x^*
1	>0 (<0)	0, $d\mathrm{x}\neq 0$	≤ 0	Умовний локальний мінімум (максимум)

Таблиця 1.5 (продовження)

2	≥ 0 (≤ 0)	0	≤ 0	Може бути умовний локальний min (max). Потрібне додаткове дослідження
3	$=0$	0	≤ 0	Потрібне додаткове дослідження
4	$\gtrless 0$	0	≤ 0	Немає екстремуму

Приклад 1.19

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 \to \mathrm{extr}\,; \quad g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\,.$$

Розв'язання

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 (x_1 + x_2) + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1)\,.$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 + 2\lambda_1 x_1 = 0\,,\ \dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 + 2\lambda_1 x_2 = 0\,;$

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\,;$

в) $\lambda_1 \geq 0$ (для мінімуму, $\lambda_1 \leq 0$ (для максимуму);

г) $\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0\,.$

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0 = 0$. Тоді відповідно до теореми 1.7 потрібно, щоб $\lambda_1 \neq 0$. При цьому $x_1 = x_1 = 0$ і не задовольняється умова «г» доповнюючої нежорсткості.

В другому випадку $\lambda_0 \neq 0$. Поділимо рівняння системи, наведеної в п. 2, на λ_0 і замінимо $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\, \lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0\,,\ \dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0\,;$

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\,;$

в) $\lambda_1 \geq 0$ (для мінімуму), $\lambda_1 \leq 0$ (для максимуму);

г) $\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0\,.$

З умови «г» доповнюючої нежорсткості, одержимо два варіанти:

1) $\lambda_1 = 0$. Тоді умова «а» не виконується;

2) $\lambda_1 \neq 0$. Тоді $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ і система має два розв'язки (рис. 1.9):

точка A: $x_1^* = x_2^* = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_1^* = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (в точці A може бути мінімум);

точка B: $x_1^* = x_2^* = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_1^* = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (в точці B може бути максимум).

4. Перевіримо достатні умови екстремуму. В точках A і B обмеження є активними, але $l = 1 < n = 2$. Тому умови першого порядку не виконуються. Перевіримо умови другого порядку:

$d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda_1^*) = 2\lambda_1^* dx_1^2 + 2\lambda_1^* dx_2^2$, $dg_1(\mathrm{x}^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$.

В точках A і B виконується $dx_1 = -dx_2$.

Оскільки $d^2L(A) = 4\lambda_1^* dx_1^2 = 2\sqrt{2}\, dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точці A – регулярний локальний умовний мінімум (рядок 1 у табл. 1.5). Оскільки $d^2L(B) = 4\lambda_1^* dx_2^2 = -2\sqrt{2}\, dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точці B – регулярний локальний умовний максимум (табл. 1.5, рядок 2). З іншого боку, функції $f(\mathrm{x})$ й $-f(\mathrm{x}) = -x_1 - x_2$ – опуклі й обмежені (див. означення 1.7 і 1.8), тому в точках A і B досягається глобальний екстремум (зауваження 1.10). Достатні умови першого й другого порядку перевірялися для демонстрації методики.

5. Обчислимо значення функції в точках умовного екстремуму: $f(A) = -\sqrt{2}$, $f(B) = \sqrt{2}$. Графічний розв'язок задачі подано на рис. 1.9.

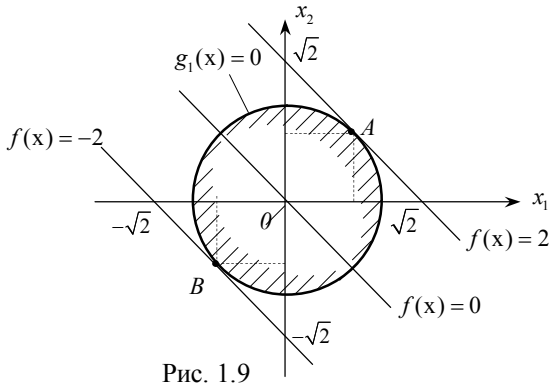


Рис. 1.9

Приклад 1.20

Знайти умовний максимум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1 \to \max;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = -x_2 \le 0,$$

$$g_2(\mathrm{x}) = x_2 - (1-x_1)^3 \le 0.$$

Розв'язання

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(-x_2) + \lambda_2\left[x_2 - (1-x_1)^3\right].$$

2. Запишемо необхідні умови максимуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 + 3\lambda_2(1-x_1)^2 = 0,$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$

б) $-x_2 \le 0,\ x_2 - (1-x_1)^3 \le 0;$

в) $\lambda_1 \le 0,\ \lambda_2 \le 0;$

г) $\lambda_1(-x_2) = 0,\ \lambda_2\left[x_2 - (1-x_1)^3\right] = 0.$

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0 = 0$, тоді $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$. При цьому $\lambda_1 = \lambda_2 \le 0$, наприклад, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = -1$. Одержали умовно стаціонарну точку $\mathrm{x}^* = (1;0)$, $\lambda_0^* = 0$.

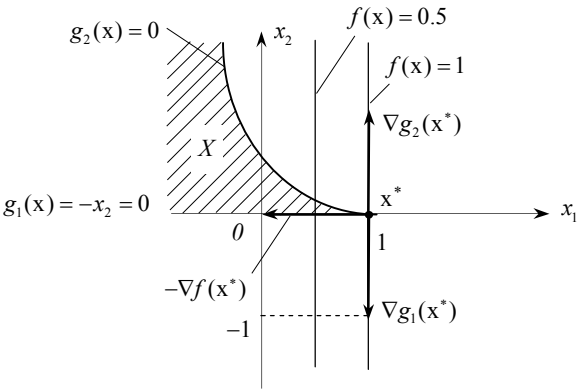


Рис. 1.10

На рис. 1.10 показано, що в точці $\mathrm{x}^* = (1;0)^T$ досягається нерегулярний локальний і глобальний максимум. В цій точці умова лінійної незалежності градієнтів $\nabla g_1(\mathrm{x}^*) = (0;-1)^T$, $\nabla g_2(\mathrm{x}^*) = (0;1)^T$ не виконується, і антиградієнт цільової функції не може бути подано у вигляді недодатної лінійної комбінації градієнтів активних обмежень. Умова «а» виконується тільки при $\lambda_0^* = 0$. Покажемо це.

В другому випадку $\lambda_0^* \neq 0$. Тоді розділимо рівняння системи, наведеної в п. 2, на λ_0 й замінимо $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Маємо:

$$1 + 3\lambda_2(1 - x_1)^2 = 0,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$
$$-x_2 \le 0, \quad x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0;$$
$$\lambda_1 \le 0, \quad \lambda_2 \le 0;$$
$$\lambda_1(-x_2) = 0, \quad \lambda_2\left[x_2 - (1 - x_1)^3\right] = 0.$$

Розглянемо чотири варіанти виконання умови доповнюючої нежорсткості.

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. З першого рівняння отримаємо, що система є несумісною;

2) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. З першого рівняння також отримаємо, що система є несумісною;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Із другого рівняння одержимо, що $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тобто маємо суперечність;

4) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, Тоді $x_2 = 0$, $x_1 = 1$ і перше рівняння не задовольняється.

Нових умовно стаціонарних точок не знайдено. Тому в задачі є тільки одна точка $\mathrm{x}^* = (1;0)^T$ нерегулярного максимуму з $f(\mathrm{x}^*) = 1$.

Приклад 1.21

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \mathrm{extr};$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 52 \le 0.$$

Розв'язання

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0\left[(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\right]+\lambda_1(x_1^2+x_2^2-52).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1}=2\lambda_0(x_1-2)+2\lambda_1x_1=0,$

$\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2}=2\lambda_0(x_2-3)+2\lambda_1x_2=0;$

б) $x_1^2+x_2^2-52\le 0;$

в) $\lambda_1\ge 0$, (для мінімуму), $\lambda_1\le 0$ (для максимуму);

г) $\lambda_1\left(x_1^2+x_2^2-52\right)=0.$

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0=0$. Тоді $\lambda_1\ne 0$ відповідно до теореми 1.7. Тому $x_1=0$, $x_2=0$ і не виконується умова «г» доповнюючої нежорсткості.

В другому випадку $\lambda_0\ne 0$. Поділимо рівняння системи, наведеної в п. 2, на λ_0 із заміною $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_1}=2(x_1-2)+2\lambda_1x_1=0,$

$\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_1)}{\partial x_2}=2(x_2-3)+2\lambda_1x_2=0;$

б) $x_1^2+x_2^2-52\le 0;$

в) $\lambda_1\ge 0$ (для мінімуму), $\lambda_1\le 0$ (для максимуму);

г) $\lambda_1\left(x_1^2+x_2^2-52\right)=0.$

Розглянемо два варіанти виконання умови «г»:

1) $\lambda_1=0$. Тоді $x_1=2$, $x_2=3$ і виконуються необхідні умови й для мінімуму, і для максимуму (табл. 1.4, рядки 1 і 2). Маємо умовно стаціонарну точку A: $x_1^*=2$, $x_2^*=3$, $\lambda_1^*=0$;

2) $\lambda_1\ne 0$. Тоді $x_1^2+x_2^2-52=0$ і система має розв'язок, що визначається точкою B: $x_1^*=4$, $x_2^*=6$, $\lambda_1^*=-\dfrac{1}{2}$ і точкою C: $x_1^*=-4$,

$x_2^* = -6$, $\lambda_1^* = -\frac{3}{2}$. Тому що $\lambda_1^* < 0$ в обох точках, то в них немає мінімуму, але може бути максимум.

4. Перевіримо достатні умови екстремуму. В умовно стаціонарних точках B і C обмеження перетворюється в рівність, тобто є активним. Оскільки число активних обмежень $l = 1 < 2 = n$, то умови першого порядку не виконуються. Оскільки функція $-f(\mathrm{x}) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2$ не є опуклою (див. означення 1.8), то необхідні умови не є достатніми (зауваження 1.10). Перевіримо умови другого порядку:

$$d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = (2 + 2\lambda_1^*)dx_1^2 + (2 + 2\lambda_1^*)dx_2^2 .$$

В точці A обмеження не є активним. Оскільки $\lambda_1^* = 0$, то $d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$ при $dx \neq 0$. Тому в точці A – умовний локальний мінімум (рядок 1 у табл. 1.5). Оскільки цільова функція $f(\mathrm{x})$ опукла й множина припустимих розв'язків опукла (рис. 1.11), то можна вважати, що в цьому випадку необхідна умова мінімуму є достатньою. В точці A – глобальний мінімум (зауваження 1.10). В точках B і C обмеження є активним. Тому $dg_1(\mathrm{x}^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$. В точках B і C виконується $dx_1 = -\frac{3}{2}dx_2$. Оскільки $d^2L(B) = = \left[\left(-\frac{3}{2}\right)dx_2\right]^2 + dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, а $\lambda_1^* = -\frac{1}{2} < 0$, то достатні умови максимуму не виконуються (табл. 1.5, рядок 1). Оскільки $d^2L(B) \geq 0$ при всіх dx_2, та і необхідна умова максимуму другого порядку в точці B не виконується (табл. 1.5, рядок 2). Тому в ній немає екстремуму. Оскільки $d^2L(C) = -\left[\left(-\frac{3}{2}\right)dx_2\right]^2 - dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$, то достатні умови максимуму виконуються. В точці C умовний локальний максимум (рядок 1 у табл. 1.6).

5. Обчислимо значення функції в точках екстремуму $f(A) = 0$, $f(C) = 117$.

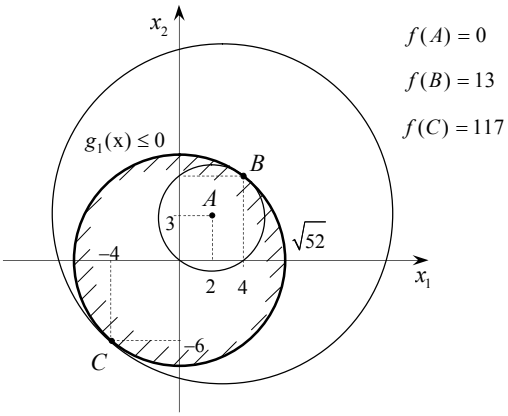


Рис. 1.11

Приклад 1.22

Знайти умовний мінімум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 \to \min\,;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \le 0\,,$$

$$g_2(\mathrm{x}) = -x_1 \le 0\,, \quad g_3(\mathrm{x}) = -x_2 \le 0\,.$$

Розв'язання

Розв'яжемо задачу графічним методом. Геометрична інтерпретація розв'язку подана на рис. 1.12.

З рис. 1.12 маємо, що глобальний мінімум досягається в точці A: $x_1^* = x_2^* = 0$.

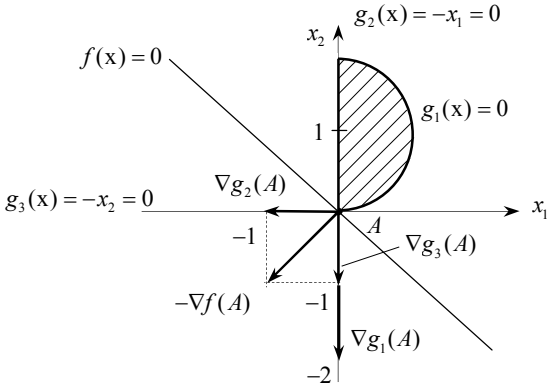


Рис. 1.12

В точці A всі три обмеження активні і їхні градієнти лінійно залежні, оскільки $\nabla g_1(A) = (0; -2)^T$, $\nabla g_2(A) = (-1; 0)^T$, $\nabla g_3(A) = (0; -1)^T$ і

$$rang \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 < m = 3$$

(див. означення 1.19). Умова регулярності в теоремі 1.4 не виконується. Умова (1.21 а) в ній має вигляд

$$-\lambda_0 \nabla f(A) = \lambda_1 \nabla g_1(A) + \lambda_2 \nabla g_2(A) + \lambda_3 \nabla g_3(A) \text{ або}$$

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то не існує таких невід'ємних λ_1, λ_2, λ_3, щоб сума, що знаходиться в правій частині рівності, дорівнювала нулю. У цьому випадку умовно стаціонарних точок немає.

Якщо $\lambda_0 \neq 0$, можна поділити рівність на λ_0, заміняючи $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\frac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. При цьому рівність буде мати місце при $\lambda_1^* = \frac{1}{2}$, $\lambda_2^* = 1$, $\lambda_3^* = 0$. Це свідчить про те, що перше й друге обмеження активні: $g_1(A) = 0$, $g_2(A) = 0$, а третє не є активним. Зауважимо, що третє обмеження в задачі є «зайвим», Оскільки його додавання не змінює множини припустимих розв'язків. Хоча умова регулярності в точці A не виконується, вона є точкою регулярного мінімуму, оскільки $\lambda_0^* \neq 0$.

Наведемо умови оптимальності Куна - Таккера в задачі опуклого програмування (1.20) для недиференційовних функцій.

Означення 1.21. Точка $(\mathrm{x}^*; \lambda^*)$ називається *сідловою точкою* класичної функції Лагранжа задачі (1.20), якщо

$$L(\mathrm{x}^*, \lambda) \le L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) \le L(\mathrm{x}, \lambda^*)$$

для всіх $\mathrm{x} \in U$ і всіх $\lambda_i \ge 0$, $i = 1,...,m$.

Доведено [7], що необхідними й достатніми для сідлової точки функції Лагранжа задачі (1.20) є наступні умови:

$$L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = \min_{\mathrm{x} \in R^n} L(\mathrm{x}, \lambda^*);$$

$$\lambda_i^* g_i(\mathrm{x}^*) = 0, \quad i = 1,...,m.$$

Теорема 1.11. (про сідлову точку класичної функції Лагранжа).

Для того щоб точка $\mathrm{x}^* \in R^n$ *була розв'язком задачі опуклого програмування* (1.20), *припустима множина якої задовольняє умові регулярності, необхідно й достатньо, щоб існував вектор* $\lambda^* \in R^m$, $\lambda_i^* \geq 0$, $i = 1,...,m$, *такий, що* $(\mathrm{x}^*; \lambda^*)$ *– сідлова точка класичної функції Лагранжа цієї задачі.*

1.5. Умовний екстремум при змішаних обмеженнях

Постановка задачі Задані двічі неперервно диференційовні цільова функція $f(\mathrm{x}) = f(x_1,...,x_n)$ й функції обмежень типу рівностей і нерівностей: $g_i(\mathrm{x}) = 0$, $i = 1,...,k$; $g_i(\mathrm{x}) \leq 0$, $i = k+1,...,m$, які визначають множину припустимих розв'язків X.

Потрібно дослідити функцію $f(\mathrm{x})$ на екстремум, тобто визначити точки $\mathrm{x}^* \in X$ її локальних мінімумів (максимумів) на множині X:

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}); \quad \left(f(\mathrm{x}^*) = \max_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}) \right), \tag{1.24}$$

де $X = \left\{ \mathrm{x}: \left| \begin{array}{l} g_i(\mathrm{x}) = 0,\ i = 1,...,k,\ k < n; \\ g_i(\mathrm{x}) \leq 0,\ i = k+1,...,m; \end{array} \right. \right\}$.

Стратегія розв'язання задачі Для розв'язання задачі (1.24) знаходять точки x^* локального екстремуму за допомогою необхідних і достатніх умов мінімуму й максимуму першого й другого порядку при змішаних обмеженнях (порядок умов визначається порядком похідних, які використовуються). Обчислюють значення $f(\mathrm{x}^*)$ функції в знайдених точках локального екстремуму.

Теорема 1.12 (необхідні умови мінімуму (максимуму) першого порядку).

Нехай x^* *– точка локального мінімуму (максимуму) в задачі* (1.24). *Тоді знайдеться таке число* λ_0^* *й вектор* $\lambda = (\lambda_1^*;...;\lambda_m^*)^T$, *які одночасно не дорівнюють нулю й такі, що виконуються наступні умови:*

– умова стаціонарності узагальненої функції Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,...,n \tag{1.25,а}$$

– умова припустимості розв'язку.

$$g_i(\mathrm{x}^*) = 0,\ i = 1,...,k;\ g_i(\mathrm{x}^*) \le 0,\ i = k+1,...,m; \qquad (1.25,\text{б})$$

– умова невід'ємності для умовного мінімуму:

$$\lambda_i^* \ge 0,\ i = k+1,...,m \qquad (1.25,\text{в})$$

(умова недодатності для умовного максимуму:

$$\lambda_i^* \le 0,\ i = k+1,...,m);$$

– умова доповнюючої нежорсткості:

$$\lambda_i^* g_i(\mathrm{x}^*) = 0,\ i = k+1,...,m. \qquad (1.25,\text{г})$$

Якщо при цьому градієнти активних обмежень-нерівностей і обмежень-рівностей в точці x^* лінійно незалежні (виконується *умова регулярності)*, то $\lambda_0^* \ne 0$.

Точки x^*, що задовольняють системі (1.25), називаються *умовно стаціонарними.*

Необхідні умови екстремуму першого порядку формулюються окремо для максимуму і мінімуму.

Якщо в задачі, яка розв'язується обмеження записані у формі $g_i(\mathrm{x}) \ge 0$ то їх необхідно переписати у вигляді $-g_i(\mathrm{x}) \le 0$.

Далі будемо використовувати *множину індексів обмежень, активних в точці* x^*, яку позначимо через I_a.

При розв'язанні задач пошуку умовного максимуму можна використовувати необхідні й достатні умови мінімуму, застосовуючи перетворення, описані в зауваженні 1.1.

Оскільки точка x^* заздалегідь невідома, то перевірка умови регулярності утруднена, тому рекомендується додержуватися алгоритму, описаного в зауваженні 1.2.

Умова (1.25,а) в регулярній точці екстремуму ($\lambda_0^* \ne 0$) відображає той факт, що антиградієнт цільової функції є невід'ємною (недодатною у випадку максимуму) лінійною комбінацією градієнтів функцій, що утворюють активні обмеження-нерівності в точці x^* й обмеження-рівності.

Зауваження 1.13. При $\lambda_0^* \ne 0$ мають місце два важливих твердження:

1) якщо функції $f(\mathrm{x})$, $g_i(\mathrm{x}), i = k+1,...,m$, опуклі, а функції $g_i(\mathrm{x})$, $i = 1,...,k$, лінійні, то умови теореми 1.12 є одночасно й достатніми умовами глобального мінімуму;

2) якщо функції $-f(\mathrm{x})$, $g_i(\mathrm{x})$, $i=k+1,...,m$, опуклі, а функції $g_i(\mathrm{x})$, $i=1,...,k$, лінійні, то умови теореми 1.12 є одночасно й достатніми умовами глобального максимуму.

В обох випадках множина припустимих розв'язків X опукла.

Варто підкреслити, що умови доповнюючої нежорсткості і знаковизначеність множників Лагранжа записуються тільки для обмежень-нерівностей.

Умова припустимості розв'язку, яка є наслідком постановки задачі (1.24), включена в (1.25) для зручності формування алгоритму розв'язання.

З умови доповнюючої нежорсткості (1.25,г) маємо, що якщо обмеження-нерівність у точці x^* пасивне, тобто $g_i(\mathrm{x}^*)<0$, то $\lambda_0^*=0$, а якщо - активне, тобто $g_i(\mathrm{x}^*)=0$, то $\lambda_0^*\geq 0$, (для мінімуму) і $\lambda_0^*\leq 0$ (для максимуму).

Теорема 1.13 (достатні умови мінімуму (максимуму) першого порядку).

Нехай є точка $(\mathrm{x}^*;\lambda^*)$, *яка задовольняє системі* (1.25) *при* $\lambda_0^*\neq 0$, *сумарне число активних обмежень-нерівностей в точці* x^* *й обмежень-рівностей збігається з числом* n *змінних (при цьому умова регулярності виконується). Якщо* $\lambda_i^*>0$ *для всіх* $i\in I_a$, *то точка* x^* *– точка умовного локального мінімуму в задачі* (1.24). *Якщо* $\lambda_i^*<0$ *для всіх* $i\in I_a$, *то* x^* *– точка умовного локального максимуму.*

Теорема 1.14 (необхідні умови мінімуму (максимуму) другого порядку).

Нехай x^* *– регулярна точка мінімуму (максимуму) в задачі* (1.24) *і є розв'язком* $(\mathrm{x}^*;\lambda^*)$ *системи* (1.25). *Тоді другий диференціал класичної функції Лагранжа, обчислений в точці* $(\mathrm{x}^*;\lambda^*)$, *невід'ємний (недодатний):*

$$d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)\geq 0$$

$$\left(d^2L(\mathrm{x}^*,\lambda^*)\leq 0\right)$$

для всіх $d\mathrm{x}\in R^n$ *таких, що*

$$dg_i(\mathrm{x}^*)=0,\ i=1,...,m \text{ і } i\in I_a,$$

$$\lambda_i^*>0 \quad (\lambda_i^*<0);\quad dg_i(\mathrm{x}^*)\leq 0,\ i\in I_a,\ \lambda_i^*=0.$$

Необхідні й достатні умови першого порядку в задачі пошуку умовного екстремуму при змішаних обмеженнях

Таблиця 1.6

Необхідні умови $\nabla_x L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$; $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, $i = m+1,..., p$; $g_i(x^*) = 0$, $i = 1,..., m$			Достатні умови $\lambda_0^* \neq 0$, число обмежень $l = n$	
№	$g_i(x^*)$ $i = m+1,..., p$	$\lambda_0^* \geq 0$, λ_i^*, $i = 1,..., m$	λ_i^*, $i \in I_a$	Тип умовно стаціонарної точки x^*
1	≤ 0	≥ 0	> 0	Умовний локальний мінімум
2	≤ 0	≤ 0	< 0	Умовний локальний максимум

Теорема 1.15 (достатні умови екстремуму другого порядку).

Нехай є точка $(x^*; \lambda^*)$, *яка задовольняє системі* (1.25) *при* $\lambda_0^* \neq 0$. *Якщо в цій точці* $d^2 L(x^*, \lambda^*) > 0$ $\left(d^2 L(x^*, \lambda^*) < 0\right)$ *для всіх ненульових* $dx \in R^n$ *таких, що*

$$dg_i(x^*) = 0,\ i = 1,..., m \text{ і } i \in I_a,\ \lambda_i^* > 0\ (\lambda_i^* < 0);$$

$$dg_i(x^*) \leq 0,\quad i \in I_a,\ \lambda_i^* = 0,$$

те точка x^* *є точкою локального мінімуму (максимуму) у задачі* (1.24).

Необхідні й достатні умови другого порядку в задачі пошуку умовного екстремуму при змішаних обмеженнях

(за умови $\nabla_x L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$, $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, $i = 1,..., m$ *)*

Таблиця 1.7

№	$d^2 L(x^*, \lambda^*)$	$dg_i(x^*)$, $i \in I_a$, $\lambda_i^* > 0$ $(\lambda_i^* < 0)$	$dg_i(x^*)$, $i \in I_a$, $\lambda_i^* = 0$	Тип умовно стаціонарної точки x^*
1	> 0 (< 0)	0, $dx \neq 0$	≤ 0	Умовний локальний мінімум (максимум)

Таблиця 1.7 (продовження)

2	$\geq 0 \quad (\leq 0)$	0	≤ 0	Може бути умовний локальний min (max). Потрібні додаткові дослідження
3	$= 0$	0	≤ 0	Потрібне додаткове дослідження
4	$\gtrless 0$	0	≤ 0	Немає екстремуму

Алгоритм

1. Скласти узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\mathrm{x}) .$$

2. Записати необхідні умови мінімуму (максимуму) першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, ..., n$;

б) $g_i(\mathrm{x}^*) = 0$, $i = 1, ..., k$; $dg_i(\mathrm{x}^*) \leq 0$, $i = k+1, ..., m$;

в) $\lambda_0^* \geq 0$, $i = k+1, ..., m$ (для мінімуму), $\lambda_0^* \leq 0$, $i = k+1, ..., m$ (для максимуму);

г) $\lambda_i^* g_i(\mathrm{x}) = 0, \quad i = k+1, ..., m$.

3. Розв'язати систему для двох випадків:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \neq 0$ (при цьому поділити умови «а», «в», «г» на λ_0^* й замінити $\dfrac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*}$ на λ_i^*).

В результаті знайти умовно стаціонарні точки x^*, виділивши з них ті, які одержані при $\lambda_0^* \neq 0$ (вони можуть бути регулярними точками екстремуму). В кожному з двох випадків варто починати з розгляду 2^{m-k} варіантів виконання умови «г» доповнюючої нежорсткості.

4. Для виділених на кроці 3 точок перевірити достатні умови екстремуму першого або другого порядку.

Для перевірки достатніх умов першого порядку треба:

а) визначити число l обмежень-рівностей і активних обмежень-нерівностей;

б) якщо $l = n$ й $\lambda_i^* > 0$ для всіх $i \in I_a$, тобто для всіх активних обмежень нерівностей, то в точці x^* – локальний мінімум. Якщо $l = n$ й $\lambda_i^* < 0$ для всіх $i \in I_a$, то в точці x^* – локальний максимум. Якщо $l < n$ або відповідні множники Лагранжа не задовольняють достатнім умовам першого порядку, перевірити достатні умови другого порядку.

Для перевірки достатніх умов другого порядку треба:

а) записати вираз для другого диференціалу класичної функції Лагранжа в точці $(\mathrm{x}^*; \lambda^*)$:

$$d^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j ;$$

б) записати умови, які накладають на перші диференціали обмежень рівностей і активних в точці x^* обмежень нерівностей:

$$dg_i(\mathrm{x}^*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j} dx_j = 0 , \; i = 1, ..., k \text{ і } i \in I_a ; \; \lambda_i^* > 0 \; (\lambda_i^* < 0); \quad (1.26)$$

$$dg_i(\mathrm{x}^*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(\mathrm{x}^*)}{\partial x_j} dx_j \le 0 , \; i \in I_a ; \; \lambda_i^* = 0 ;$$

в) дослідити знак другого диференціалу функції Лагранжа для ненульових $d\mathrm{x}$, які задовольняють (1.26). Якщо $d^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) < 0$ то в точці x^* – умовний локальний мінімум. Якщо $d^2 L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) > 0$, то в точці x^* - умовний локальний максимум. Якщо достатні умови екстремуму не виконуються, варто перевірити виконання необхідних умов другого порядку (теорема 1.14), діючи аналогічно. Якщо вони виконуються, то потрібні додаткові дослідженні, а якщо ні, то в точці x^* немає умовного екстремуму.

5. Обчислити значення функції в точках умовного екстремуму.

Умови екстремуму в задачі (1.24) наведені в табл. 1.6, 1.7.

Достатні й необхідні умови екстремуму другого порядку перевіряються в умовно стаціонарних точках, які задовольняють системі (1.25) при $\lambda_0^* \ne 0$, оскільки на практиці безумовно становить інтерес випадок, коли у функції Лагранжа є присутньою цільова функція, екстремум якої шукається.

Розглянемо приклад на ідентифікацію точок за допомогою цих умов.

Приклад 1.23

Зробити висновок про оптимальність наступних точок:

$$\mathrm{x}^{(1)} = (0;\,0)^T,\ \mathrm{x}^{(2)} = \left(1;\,\frac{1}{2}\right)^T \text{ і } \mathrm{x}^{(3)} = \left(\frac{1}{3};\,-\frac{1}{6}\right)^T \text{ для задачі}$$

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 5, \\ 2x_1 - 2x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Складемо класичну функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\,\lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) + \lambda_2(2x_1 - 2x_2 - 1).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку (1.25):

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda)}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0, \quad (2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0, \quad (3)$$

$$2x_1 - 2x_2 - 1 = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_1 \ge 0, \quad (5)$$

$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0. \quad (6)$$

3. Перевіримо точку $\mathrm{x}^{(1)} = (0;\,0)^T$. Умова (4) не задовольняється, тобто точка не належить області припустимих розв'язків (ОПР). Цього досить, щоб зробити висновок про те, що точка $\mathrm{x}^{(1)}$ не є точкою екстремуму.

Точка $\mathrm{x}^{(2)} = \left(1;\,\frac{1}{2}\right)^T$ належить ОПР, оскільки задовольняє умовам (3) і (4). З умови (6) маємо: $\lambda_1 = 0$, оскільки $x_1^2 + x_2^2 - 5 \ne 0$. З умов (1) і (2) знаходимо $\lambda_2 = -1$ й $\lambda_2 = 1$ відповідно (які не є розв'язками). Отже, умови теореми 1.12 не задовольняються, і точка $\mathrm{x}^{(2)}$ не є точкою екстремуму.

Точка $\mathrm{x}^{(3)} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}\right)^T$ належить ОПР, оскільки задовольняє умовам (3) і (4). З умови (6) маємо, що $\lambda_1 = 0$. Тоді з умов і (1), і (2) одержуємо: $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$. Отже, умови теореми 1.12 задовольняються і точка $\mathrm{x}^{(3)}$ є *точкою мінімуму* цільової функції, значення в якій $f_{\min}\left(\mathrm{x}^{(3)}\right) = \frac{1}{6}$.

Приклад 1.24

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 - x_2 \to \mathrm{extr};$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 6 = 0,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = 1 - x_1 \le 0,$$
$$g_3(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0.$$

Розв'язання

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0(x_1^2 - x_2) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 6) + \lambda_2(1 - x_1) + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 26).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$

$\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} = -\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0;$

б) $x_1 + x_2 - 6 = 0$, $1 - x_1 \le 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \ge 0$ (для мінімуму),

$\lambda_2 \le 0$, $\lambda_3 \le 0$ (для максимуму);

г) $\lambda_2(1 - x_1) = 0$, $\lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 26) = 0$.

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0 = 0$. Тоді умова «а» має вигляд

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0, \quad \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Розглянемо два варіанти виконання умови «г» доповнюючої нежорсткості.

1) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тоді $\lambda_1 = 0$ і не задовольняються умови теореми 1.12;

2) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тоді $\lambda_1 = 0$ й $\lambda_2 = 0$, що суперечить умові $\lambda_2 \neq 0$;

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

З двох останніх рівнянь маємо: $2\lambda_3(x_2 - x_1) = 0$. Оскільки $\lambda_3 \neq 0$, то $x_1 = x_2$. З двох перших рівнянь маємо:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5;$$
$$x_1 = 5, \quad x_2 = 1;$$

тобто $x_1 \neq x_2$. Тому система несумісна;

4) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$1 - x_1 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0.$$

Система задовольняється в точці $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Умови «а» приймуть вигляд

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = -10\lambda_3$ і $\lambda_2 = -8\lambda_3$. Оскільки $\lambda_3 \neq 0$, то λ_2 і λ_3 мають різні знаки, що суперечить умові і мінімуму, і максимуму.

В другому випадку $\lambda_0 \neq 0$. Поділимо рівняння системи, наведеної в п. 2, на λ_0 й замінимо $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\frac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. Умови «а» приймуть вигляд

$$2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0, \qquad -1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0;$$

Умови «б» - «г» зберігають свій вигляд. Розглянемо чотири варіанти виконання умови «г» доповнюючої нежорсткості:

1) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тоді $\lambda_1 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, що не задовольняє обмеженням «б»;

2) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тоді $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Одержана умовно стаціонарна точка A: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 5$, $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 3$, в якій задовольняються необхідні умови мінімуму;

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0,$$
$$2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0;$$

Звідси одержимо точки з координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ і $x_1 = 5$, $x_2 = 1$. В першій точці маємо

$$2 + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = -\frac{11}{4}$, $\lambda_3 = \frac{3}{8}$. В другій точці

$$10 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = \frac{15}{4}$, $\lambda_3 = -\frac{11}{8}$. Отримані умовно стаціонарні точка A': $x_1^* = 1$, $x_2^* = 5$, $\lambda_1^* = -\frac{11}{4}$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = \frac{3}{8}$, в якій задовольняються необхідні умови мінімуму, і точка B: $x_1^* = 5$, $x_2^* = 1$, $\lambda_1^* = \frac{15}{4}$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = -\frac{11}{8}$, в якій задовольняються необхідні умови максимуму;

4) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$1 - x_1 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0$$

виконується в точці $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Умови «а» приймають вигляд

$$2 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad -1 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 1 - 10\lambda_3$ і $3 - 8\lambda_3 - \lambda_2 = 0$. Оскільки $\lambda_2 \neq 0$ й $\lambda_3 \neq 0$, а також вони повинні бути одного знака, то остання рівність виконується тільки при $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, зокрема, при $\lambda_3 = 0.1$, $\lambda_2 = 2.2$. При цьому $\lambda_1 = 0$. Одержали ту ж умовно стаціонарну точку A'': $x_1^* = 1$, $x_2^* = 5$, $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = 2.2$, $\lambda_3^* = 0.1$.

4. Перевіримо достатні умови екстремуму першого порядку. Обмеження-рівність в точках A і B виконується. В точці A активним є друге обмеження і, отже, $l = 2 = n$. Оскільки $\lambda_2^* = 3 > 0$, то в точці A' активним є третє обмеження і тому $l = 2 = n$. Оскільки $\lambda_3^* = \frac{3}{8} > 0$, то в точці A' – умовний локальний мінімум. В точці B активним є третє обмеження і, отже, $l = 2 = n$. Оскільки $\lambda_3^* = -\frac{11}{8} < 0$, то в точці B – умовний локальний максимум (табл. 1.6, рядок 2).

Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму другого порядку (з методичних міркувань):

$$d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = (2 + 2\lambda_3^*)dx_1^2 + 2\lambda_3^* dx_2^2.$$

В точці A активним є друге обмеження:

$$dg_1(A) = dx_1 + dx_2 = 0,$$
$$dg_2(A) = -dx_1 = 0.$$

Звідси $dx_1 = dx_2 = 0$ й $d^2L(A) \equiv 0$. Тому потрібні додаткові дослідження (табл. 1.7, рядок 3).

В точці A' активним є третє обмеження:

$$dg_1(A') = dx_1 + dx_2 = 0,$$
$$dg_3(A') = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 2dx_1 + 10dx_2 = 0.$$

Звідси $dx_1 = dx_2 = 0$ і $d^2L(A') \equiv 0$. Тому потрібні додаткові дослідження (табл. 1.7, рядок 3).

В точці B активним є третє обмеження:

$$dg_1(B) = dx_1 + dx_2 = 0,$$
$$dg_3(B) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 10dx_1 + 2dx_2 = 0.$$

Звідси $dx_1 = dx_2 = 0$ і $d^2L(B) \equiv 0$. Тому потрібні додаткові дослідження (табл. 1.7, рядок 3).

В точці A'' активними є друге й третє обмеження:

$$dg_1(A'') = dx_1 + dx_2 = 0,$$
$$dg_2(A'') = -dx_1 = 0,$$
$$dg_3(A'') = 2dx_1 + 10dx_2 = 0.$$

Тому $dx_1 = dx_2 = 0$, $d^2L(A'') \equiv 0$ і потрібні додаткові дослідження (табл. 1.7, рядок 3).

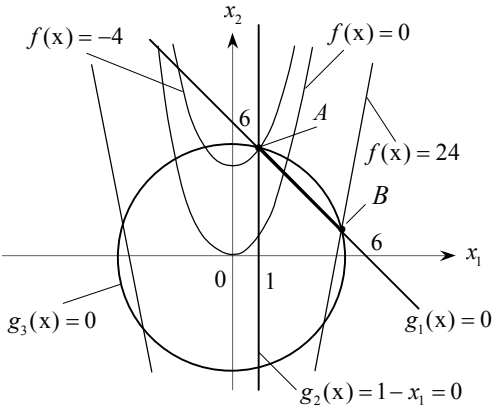


Рис. 1.13

З рис. 1.13 маємо, що в точках A і B – відповідно глобальні мінімум і максимум.

Тепер дослідимо властивості цільової функції і обмежень. Обмеження-рівність - лінійне. Оскільки цільова функція і функції другого й третього обмежень задовольняють умовам

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad H_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad H_{g_3}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

то вони є опуклими (зауваження 1.13).

5. Значення функції в точках умовного екстремуму: $f(A) = -4$, $f(B) = 24$.

Приклад 1.25

Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(x) = (x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 \to \text{extr};$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 \leq 0$$

при $\alpha = 2$ і $\alpha = -1$.

Розв'язання

1. Складемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\left[(x_1-\alpha)^2+x_2^2\right]+\lambda_1(x_1^2+x_2^2-1)+\lambda_2(-x_1).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1}=2\lambda_0(x_1-\alpha)+2\lambda_1x_1-\lambda_2=0,$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2}=2\lambda_0x_2+2\lambda_1x_2=0;$$

б) $x_1^2+x_2^2-1=0,\ -x_1\le 0.$

в) $\lambda_2\ge 0$, (для мінімуму), $\lambda_2\le 0$, (для максимуму);

г) $\lambda_1(-x_1)=0.$

3. Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0=0$. Тоді умова «а» має вигляд

$$2\lambda_1x_1-\lambda_2=0,$$
$$2\lambda_1x_2=0.$$

Розглянемо два варіанти виконання умови «г».

Якщо $\lambda_2=0$, то при $\lambda_1=0$ не задовольняється твердження 1.12, а при $\lambda_1\ne 0$ одержимо: $x_1=x_2=0$. Тоді не задовольняється обмеження-рівність в умові «б».

Якщо $\lambda_2\ne 0$, то $x_1=0$ і $\lambda_2=0$, тобто є суперечність.

В другому випадку $\lambda_0\ne 0$. Поділимо рівняння системи, наведеної в п. 2, на λ_0 із заміною $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Умова «а» приймає форму

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x},\lambda)}{\partial x_1}=2(x_1-\alpha)+2\lambda_1x_1-\lambda_2=0,$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda)}{\partial x_2}=2x_2+2\lambda_1x_2=0;$$

Розглянемо два варіанти виконання умови «г»:

1) $\lambda_2=0$. Тоді

$$2(x_1-\alpha)+2\lambda_1x_1=0,$$
$$2x_2+2\lambda_1x_2=2x_2(1+\lambda_1)=0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 .$$

З другого рівняння маємо: $\lambda_1 = -1$ або $x_2 = 0$. При $\lambda_1 = -1$ перше рівняння несумісне, оскільки $\alpha \neq 0$. При $x_2 = 0$ одержимо $x_1 = \pm 1$. Обмеженню «б» задовольняє $x_1 = 1$. Тоді $\lambda_1 = \alpha - 1$. Одержали умовно стаціонарну точку A: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = \alpha - 1$; $\lambda_2^* = 0$;

2) $\lambda_2 \neq 0$. Тоді $x_1 = 0$, $x_2 = \pm 1$. З умови «а» маємо $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2\alpha$. Одержали дві умовно стаціонарні точки:

$$B: x_1^* = 0,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = -1;\ \lambda_2^* = -2\alpha ;$$

$$C: x_1^* = 0,\ x_2^* = -1,\ \lambda_1^* = -1;\ \lambda_2^* = -2\alpha .$$

При $\alpha > 0$ в точках може бути максимум, оскільки $\lambda_2^* < 0$, а при $\alpha < 0$ – мінімум.

4. Перевіримо достатні умови екстремуму. Почнемо з умов першого порядку. В точці A обмеження-нерівність не є активним, тому $l = 1 < n = 2$ і умови не виконуються. В точках B і C обмеження-нерівність активне: $l = 2 = n$. При $\alpha = 2$ одержимо $\lambda_2^* = -4 < 0$, тому в точках B і C – умовний локальний максимум (табл. 1.6, рядок 2). При $\alpha = -1$ одержимо $\lambda_2^* = 2 > 0$ і тому в точках B і C – умовний локальний мінімум (табл. 1.6, рядок 1).

Перевіримо достатні умови екстремуму другого порядку.

Дослідимо точку A. В ній обмеження-нерівність не є активним:

$$d^2 L(A) = (2 + 2\lambda_1^*)dx_1^2 + (2 + 2\lambda_1^*)dx_2^2 ,$$

$$d^2 g_1(A) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 2dx_1 = 0 .$$

Звідси $dx_1 = 0$ і $d^2 L(A) = (2 + 2\lambda_1^*)dx_2^2$. При $\alpha = 2$ одержимо $\lambda_1^* = 1$ й $d^2 L(A) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, отже, в точці A – умовний локальний мінімум (табл. 1.7, рядок 1). При $\alpha = -1$ одержимо $\lambda_1^* = -2$ і $d^2 L(A) = -2dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Тому в точці A – умовний локальний максимум (табл. 1.7, рядок 1). Дослідимо точки B й C (їх можна було б і не перевіряти, оскільки висновок вже зроблено). В них обмеження-нерівність активне. Оскільки $\lambda_1^* = -1$, то $d^2 L(B) = d^2 L(C) = 0$. Потрібні додаткові дослідження (табл. 1.7, рядок 3). Оскільки обмеження-рівність не є лінійним, не можна зробити висновок про глобальний мінімум і мак-

симум (зауваження 1.3). Графічний розв'язок свідчить про те, що в точках B і C при $\alpha = 2$ досягається глобальний умовний максимум, а при $\alpha = -1$ – глобальний умовний мінімум (рис. 1.14).

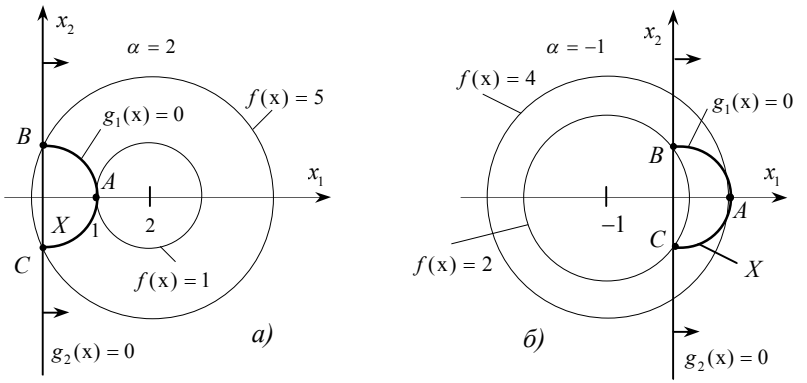


Рис. 1.14

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти точки екстремуму функції $f(\mathrm{x}) = -(x_1 + 1)^2 - \dfrac{(x_2 + 4)^2}{16}$ на множині R^2.

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (-1; -4)^T$ – одночасно локальний і глобальний безумовний максимум.

2. Знайти точки екстремуму функції $f(\mathrm{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ на множині R^2.

Відповідь: оскільки $f(\mathrm{x}) = (x_1 - 2x_2)^2$, то в усіх точках прямої з рівнянням $x_1 = 2x_2$ досягається одночасно локальний і глобальний мінімум.

3. Перевірити знаковизначеність матриці Гессе цільової функції $f(\mathrm{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ в точці $(0;\ 0)$.

Відповідь: матриця Гессе і відповідна їй квадратична форма невизначені.

4. Перевірити знаковизначеність матриці Гессе цільової функції $f(\mathrm{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$. Дослідити її на опуклість.

Відповідь: матриця Гессе додатно напіввизначена, функція опукла.

5. Знайти безумовний екстремум функції

$$f(\mathrm{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (-3/16; -1/8)^T$ – локальний і одночасно глобальний мінімум.

6. Перевірити, чи є точка $\mathrm{x}^* = (0;0;0)^T$ точкою безумовного екстремуму функції $f(\mathrm{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Відповідь: не є, оскільки в цій точці не виконуються необхідні умови екстремуму другого порядку.

7. Знайти безумовний екстремум функції

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2 .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (1; 1)^T$ – локальний мінімум; в точці $\mathrm{x}^* = (0; 0)^T$ немає екстремуму, оскільки не виконуються необхідні умови екстремуму другого порядку.

8. Знайти безумовний екстремум функції

$$f(\mathrm{x}) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4 .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (1/2; -5/4)^T$ – локальний мінімум; в точці $\mathrm{x}^* = (-1/3; -5/3)^T$ немає екстремуму, оскільки не виконуються необхідні умови екстремуму другого порядку.

9. Знайти безумовний екстремум функції

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2 .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (1; 3)^T$ виконується необхідна умова екстремуму другого порядку, тобто $H(\mathrm{x}^*) \geq 0$. Оскільки для будь-яких $\mathrm{x} \in R^2$ має місце: $f(\mathrm{x}^*) = 0 \leq f(\mathrm{x})$, то згідно означення 1.1 точка x^* є точкою глобального мінімуму.

10. Знайти безумовний екстремум функції

$$f(\mathrm{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (1; 1)^T$ – локальний мінімум.

11. Перевірити, чи є точка $\mathrm{x}^* = (1; 1)^T$ точкою безумовного мінімуму функції $f(\mathrm{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - 1)^2$.

Відповідь: є.

12. Знайти безумовний екстремум функції

$$f(\mathrm{x}) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2 .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^{(1)*} = (1;\ 1)^T$ – локальний максимум; в точці $\mathrm{x}^{(2)*} = (0;\ 0)^T$ немає екстремуму.

13. Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 \to \mathrm{extr}\ ;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0\ .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^{(1)*} = (-2;\ -2)^T$ – локальний мінімум; в точці $\mathrm{x}^{(2)*} = (2;\ 2)^T$ – умовний максимум.

14. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min\ ;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0\ .$$

Відповідь: в точках $\mathrm{x}^{(1)*} = (0;\ -2)^T$ і $\mathrm{x}^{(2)*} = (0;\ 2)^T$ – умовний мінімум.

15. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = -4x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 8x_2 - 5 \to \mathrm{extr}\ ;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = 2x_1 - x_2 - 6 = 0\ .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (2.25;\ -1.5)^T$ – умовний максимум.

16. Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \mathrm{extr}\ ;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0\ ,\quad g_2(\mathrm{x}) = -x_1 \le 0\ ,\quad g_3(\mathrm{x}) = x_2 \le 0\ .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^{(1)*} = (0;\ 0)^T$ – умовний мінімум, а в точці $\mathrm{x}^{(2)*} = \left(\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2\right)^T$ – умовний максимум.

17. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min\ ;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \le 4\ ,\quad g_2(\mathrm{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 \ge 4\ .$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (0;\ 2)^T$ – умовний мінімум.

18. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 \to \min\ ;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \le 4\ ,\quad g_2(\mathrm{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 \ge 4\ .$$

Відповідь: в точках $\mathrm{x}^{(1)*} = (1;\ 0)^T$ і $\mathrm{x}^{(2)*} = (-1;\ 0)^T$ – умовний мінімум.

19. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = 6x_1 - x_1^2 + x_2 \to \max;$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 24,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 15,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 24,$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_2 \le 4.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (3;\ 4)^T$ – умовний максимум.

20. Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \mathrm{extr};$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 - 1 = 0,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^{(1)*} = (1;\ 0)^T$ – умовний локальний мінімум; в точці $\mathrm{x}^{(2)*} = (1;\ 1)^T$ – умовний локальний максимум (після додаткового дослідження).

21. Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1 - x_2^2 \to \mathrm{extr};$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 - x_2 - 1 = 0,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^{(1)*} = (3/2;\ 1/2)^T$ – умовний локальний максимум і $f(\mathrm{x}^{(1)*}) = 5/4$; в точці $\mathrm{x}^{(2)*} = (2;\ 1)^T$ – умовний локальний мінімум (після додаткового дослідження) і $f(\mathrm{x}^{(2)*}) = 1$; в точці $\mathrm{x}^{(3)*} = (-1;\ -2)^T$ – умовний глобальний мінімум (після додаткового дослідження) і $f(\mathrm{x}^{(3)*}) = -5$.

Розділ 2

МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задача лінійного програмування є найбільш повно дослідженою серед задач математичного програмування. Основним методом розв'язання задачі лінійного програмування є симплекс-*метод* Данцига і його модифікація – *двоїстий симплекс-метод*.

2.1. Основні поняття і означення

Загальна форма математичної моделі задачі лінійного програмування має вигляд:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad (2.1,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,...,k; \qquad (2.1,\text{б})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = k+1,...,m; \qquad (2.1,\text{в})$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,n. \qquad (2.1,\text{г})$$

Функція (2.1,а) називається *цільовою* функцією. Обмеження (2.1,б) – (2.1,г) утворюють множину *припустимих* розв'язків $X \subset R^n$. Шуканий розв'язок $\mathrm{x}^* = (x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*)^T \subset X$ задачі (2.1) називається *оптимальним* розв'язком.

Зауваження 2.1. Задача пошуку мінімуму функції $f(\mathrm{x})$ зводиться до еквівалентної задачі пошуку максимуму шляхом заміни знака перед функцією на протилежний:

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}) = -\max_{\mathrm{x} \in X} \left[-f(\mathrm{x}) \right].$$

Симплекс-метод можна застосовувати тільки до *канонічної* форми математичної моделі. Математична модель називається канонічною, якщо в (2.1) обмеження (2.1,б) – (2.1,в) є рівностями, тобто $k = m$.

Зауваження 2.2. За допомогою еквівалентних перетворень будь-яку форму математичної моделі можна звести до канонічної:

1. В кожне обмеження-нерівність зі знаком $\le$ вводять додаткову невід'ємну змінну зі знаком «+», а в кожне обмеження-нерівність зі знаком $\ge$ вводять невід'ємну змінну зі знаком «–». І навпаки, для переходу від рівняння до нерівності невід'ємна базисна змінна відкидається, тобто

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \longleftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \\ x_{n+i} \ge 0; \end{cases}$$

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \ge b_i, \longleftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \\ x_{n+i} \ge 0. \end{cases}$$

2. Якщо за умовою задачі яка-небудь змінна необмежена за знаком, наприклад x_n, то її можна подати у вигляді $x_n = x_{n+1} - x_{n+2}$, де додаткові змінні $x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0$.

Таким чином, з урахуванням зауваження 2.2 будь-яка загальна форма математичної моделі може бути перетворена в канонічну форму.

Канонічна форма математичної моделі має вигляд:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad (2.2,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,...,m, \qquad (2.2,\text{б})$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,n, \qquad (2.2,\text{в})$$

де (2.2,а) - цільова функція, (2.2,б) - система обмежень, (2.2,в) - умови невід'ємності.

Система обмежень (2.2,б) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Тому в симплекс-методі для пошуку розв'язків використовується метод Жордана - Гауса розв'язування систем рівнянь.

Означення 2.1. *Розв'язком системи рівнянь* (2.2,б) називається вектор $\mathrm{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$, для якого всі рівняння (2.2,б) є правильними числовими рівностями.

Система рівнянь (2.2,б) - *сумісна*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Сумісна система є визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо має нескінченну множину розв'язків. Дві системи рівнянь *еквівалентні* (*рівносильні*), якщо будь-який розв'язок першої системи є розв'язком другої і будь-який розв'язок другої є розв'язком першої.

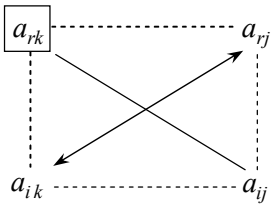
Процес розв'язування системи рівнянь заснований на *еквівалентних перетвореннях* вихідної системи в систему, розв'язки якої є очевидними. У *класичному методі Жордана - Гауса* використовуються наступні формули перетворень:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, \qquad b'_r = \frac{b_r}{a_{rk}}, \quad i = r; \tag{2.3,а}$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}}, \qquad b'_i = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}}, \quad i \neq r, \tag{2.3,б}$$

де $a_{rk} (\neq 0)$ – *розв'язувальний елемент*, відносно змінної x_k для якої виконуються перетворення за формулами (2.3); a'_{ij}, b'_i – нові значення відповідних коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь (2.2).

Формулі (2.3,б) відповідає так зване *правило прямокутника*: на розв'язувальному a_{rk} і перетвореному a_{ij} елементах, як кінцях однієї з діагоналей прямокутника, визначається друга діагональ, що з'єднує елементи a_{ik} й a_{rj}. Далі з поточного значення a_{ij} віднімається добуток елементів a_{ik} і a_{rj}, поділений на розв'язувальний елемент a_{rk} (рис. 2.1). Одержимо нове значення a'_{ij}.



$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}},$$

Рис. 2.1

Алгоритм методу Жордана – Гауса

1. Вибрати в лівій частині системи рівнянь (2.2,б) елемент $a_{rk} \neq 0$, який називається *розв'язувальним елементом*. Рядок і стовпець, на перетині яких знаходиться цей елемент називаються відповідно *розв'язувальними*.

2. Перерахувати елементи розв'язувального рядка за формулами (2.3,а).

3. Перерахувати всі інші елементи системи рівнянь (2.2,б) за формулами (2.3,б). Змінна x_k стає базисною. Обчислення закінчити, якщо побудовано одиничний базис або, якщо система несумісна, інакше перейти до кроку 1.

Зауваження 2.3

1. Система рівнянь *несумісна* (тобто не має розв'язку), якщо в результаті виконання чергової ітерації хоча б в одному рівнянні всі коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю, а вільний член цього рівняння не дорівнює нулю.

2. Сумісна система рівнянь є *лінійно залежною*, якщо в результаті виконання чергової ітерації хоча б в одному рівнянні всі коефіцієнти при змінних і вільний член дорівнюють нулю.

В процесі розв'язання сумісна лінійно незалежна система рівнянь (2.2) за допомогою методу Жордана - Гауса зводиться до наступного вигляду:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = 1,...,m, \tag{2.4}$$

де α_{ij}, β_i – значення перетворених коефіцієнтів системи рівнянь. Змінні $x_1,..., x_m$ називаються *базисними*, змінні $x_{m+1},... \ ...,x_n$ – *небазисними* (або *вільними*).

Частинний розв'язок системи (2.4) називається базисним *розв'язком*, якщо всі вільні змінні приймаються рівними нулю, тобто

$$x_i = \beta_i, \ \ i = 1,...,m; \ \ x_{m+1} = ... = x_n = 0.$$

Означення 2.2. *Опорним планом* задачі лінійного програмування в канонічній формі називається невід'ємний базисний розв'язок системи рівнянь (2.4).

Означення 2.3. *Оптимальним опорним планом* називається опорний план, при якому цільова функція $f(\mathrm{x})$ досягає екстремального значення.

Означення 2.4. Опорний план називається *невиродженим*, якщо всі базисні змінні додатні. Задача при цьому називається *невиродженою.* Якщо хоча б одна базисна змінна дорівнює нулю, то опорний план і відповідно задача називаються *виродженими.*

Приклад 2.1

Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гауса і виконати одне *перетворення однократного заміщення*:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'язання системи рівнянь виконується в таблицях з використанням формул (2.3). В кожній таблиці клітинка з розв'язувальним елементом виділена подвійною лінією. На кожній ітерації з'являється нова базисна змінна. Процес розв'язування подано в таблицях 2.1.

1^1. Виберемо довільно розв'язувальний елемент $a_{rk} \neq 0$. Наприклад, $a_{rk} = a_{21} = 1$.

2^1. Згідно (2.3,а) перерахуємо другий рядок табл. 2.1,а.

3^1. По формулі (2.3,б) (або за правилом прямокутника) перерахуємо першу й третю рядки табл. 2.1,а:

- для першого рядка табл. 2.1,а маємо:

$$a'_{12} = -3 - \frac{1 \cdot 1}{1} = -4, \; a'_{13} = 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0,$$

$$a'_{14} = -4 - \frac{2 \cdot 1}{1} = -6, \; b'_1 = 2 - \frac{6 \cdot 1}{1} = -4.$$

- для третього рядка табл. 2.1,а маємо:

$$a'_{32} = -1 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -3, \; a'_{33} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -1,$$

$$a'_{34} = 1 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -3, \; b'_3 = -3 - \frac{6 \cdot 2}{1} = -15.$$

Таблиця 2.1,а

Баз. змін.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
-	1	–3	1	–4	2
-	1 *	1	1	2	6
-	2	–1	1	1	–3

Результати перерахування подано в табл. 2.1,б. Переходимо до кроку 1.

1^2. Виберемо розв'язувальний елемент у першому або другому рядках табл. 2.1,б $a_{rk} \neq 0$. Наприклад, $a_{rk} = a_{33} = -1$.

Таблиця 2.1,б

Баз. змін.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
-	0	–4	0	–6	–4
x_1	1	1	1	2	6
-	0	–3	–1 *	–3	–15

2^2. і 3^2. Перерахуємо за формулами (2.3) всі елементи табл. 2.1,б.

Таблиця 2.1,в

Баз. змін.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
-	0	–4 *	0	–6	–4
x_1	1	–2	0	–1	–9
x_3	0	3	1	3	15

Результати перерахування подано в табл. 2.1,в. Переходимо до кроку 1.

1^3. Виберемо розв'язувальний елемент у першому рядку табл. 2.1,в. $a_{rk} \neq 0$ Наприклад, $a_{rk} = a_{12} = -4$.

2^3. і 3^3. Перерахуємо по формулах (2.3) всі елементи табл. 2.1,в.

Таблиця 2.1,г

Баз. змін.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	0	1	0	1.5	1
x_1	1	0	0	2 *	–7
x_3	0	0	1	–1.5	12

Результати перерахування подано в табл. 2.1,г. Система розв'язана відносно змінних x_1, x_2, x_3 (базисні змінні), через змінну x_4 (вільна змінна).

Отже, система рівнянь невизначена. *Загальний розв'язок* системи:

$$x_1 = -7 - 2x_4, \quad x_2 = 1 - 1.5x_4, \quad x_3 = 12 + 1.5x_4.$$

Базисний розв'язок системи $\mathrm{x} = (-7; 1; 12; 0)^T$.

Для перевірки правильності розв'язання системи рівнянь *загальний розв'язок* підставимо в ліву частину кожного рівняння системи. Одержимо тотожності:

$$(-7-2x_4)-3(1-1.5x_4)+(12+1.5x_4)-4x_4=2\,,\qquad 2\equiv 2\,;$$

$$(-7-2x_4)\ +(1-1.5x_4)+(12+1.5x_4)+2x_4=6\,,\qquad 6\equiv 6\,;$$

$$2(-7-2x_4)\ -(1-1.5x_4)+(12+1.5x_4)\ +x_4=-3\,,\quad -3\equiv -3\,.$$

Перетворення однократного заміщення є заміною однієї базисної змінної вільною змінною, в результаті чого одержимо новий базисний розв'язок.

У табл. 2.1,г виберемо, наприклад, $a_{rk}=a_{24}=2$. Перерахуємо за формулами (2.3) всі елементи табл. 2.1,г. Результати перерахування представлені в табл. 2.1,д.

Таблиця 2.1,д

Баз. змін.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	–0.75	1	0	0	6.25
x_4	0.5	0	0	1	–3.5
x_3	0.75	0	1	0	6.75

Новий *базисний розв'язок* системи $\mathrm{x}=(0;\,6.25;\,6.75;-3.5)^T$.

Розв'язання задач лінійного програмування здійснюється в евклідовому просторі.

Означення 2.5. Лінійний векторний простір R^n називається *евклідовим простором*, якщо для будь-яких двох векторів $\mathrm{x},\,\mathrm{y}\in R^n$ визначений їхній *скалярний добуток*: $\langle \mathrm{x},\,\mathrm{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$.

Означення скалярного добутку дозволяє ввести означення *довжини вектора*

$$\|\mathrm{x}\|=\sqrt{\langle \mathrm{x},\,\mathrm{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}\,.$$

Означення 2.6. Якщо вектор $\mathrm{x}\in R^n$ виражається через вектори $\mathrm{x}^{(1)},\,\mathrm{x}^{(2)},\,...,\,\mathrm{x}^{(k)}\in R^n$ у вигляді $\mathrm{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathrm{x}^{(i)}$, $\lambda_i\in R$, то говорять, що $\mathrm{x}\in R^n$ є *лінійною комбінацією* векторів $\mathrm{x}^{(1)},\mathrm{x}^{(2)},...,\mathrm{x}^{(k)}\in R^n$.

Далі будемо використовувати наступне позначення i-го вектора: $\mathrm{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}; x_2^{(i)}; ...; x_n^{(i)})^T$, $\mathrm{x}^{(i)} \in R^n$.

Означення 2.7. Вектори $\mathrm{x}^{(1)}, ..., \mathrm{x}^{(k)} \in R^n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність $\lambda_1 \mathrm{x}^{(1)} + \lambda_2 \mathrm{x}^{(2)} + ... + \lambda_k \mathrm{x}^{(k)} = 0,$ виконується лише при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$. Якщо ця рівність виконується і в тому випадку, коли не всі числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ дорівнюють нулю, то вектори $\mathrm{x}^{(1)}, ..., \mathrm{x}^{(k)} \in R^n$ називаються *лінійно залежними*.

Означення 2.8. Простір R^n називається n*- вимірним*, якщо в ньому знайдеться система n лінійно незалежних векторів, але будь-які $(n+1)$ векторів є лінійно залежними.

Означення 2.9. Сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору R^n називається *базисом* цього простору.

Означення 2.10. *Опуклою комбінацією* векторів $\mathrm{x}^{(i)} \in R^n$, $i = 1, ..., k$ називається множина вигляду:

$$X = \left\{ \mathrm{x} \in R^n \mid \mathrm{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathrm{x}^{(i)}, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, ..., k \right\}.$$

Означення 2.11. *Множина* $X \subset R^n$ називається *опуклою*, якщо разом з будь-якими двома точками цієї множини вона містить і відрізок, що з'єднує ці точки, тобто якщо $\mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)} \in X$, $\mathrm{x} = \lambda_1 \mathrm{x}^{(1)} + \lambda_2 \mathrm{x}^{(2)}$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geq 0$ і $\lambda_2 \geq 0$, то $\mathrm{x} \in X$.

Приклад 2.2

Показати, що множина точок $\mathrm{x} = (x_1; x_2)^T \in R^2$ напівплощини $X = \{ (x_1; x_2)^T \mid ax_1 + bx_2 \leq c \}$ є опуклою.

Розв'язання

Нехай $\mathrm{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}; x_2^{(1)})^T \in X$ і $\mathrm{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}; x_2^{(2)})^T \in X$, а $\mathrm{x} = (x_1; x_2)^T = \lambda_1 \mathrm{x}^{(1)} + \lambda_2 \mathrm{x}^{(2)}$ при $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geq 0$ і $\lambda_2 \geq 0$ точки відрізка, що з'єднує точки $\mathrm{x}^{(1)}$ і $\mathrm{x}^{(2)}$ або $x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)}$ і $x_2 = \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)}$. Покажемо, що $\mathrm{x} \in X$. Маємо:

$$ax_1 + bx_2 = a(\lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)}) + b(\lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)}) =$$
$$= \lambda_1 (ax_1^{(1)} + bx_2^{(1)}) + \lambda_2 (ax_1^{(2)} + bx_2^{(2)}).$$

Використовуючи нерівності $ax_1^{(1)} + bx_2^{(1)} \le c$ й $ax_1^{(2)} + bx_2^{(2)} \le c$ (оскільки точки $\mathrm{x}^{(1)}$ і $\mathrm{x}^{(2)}$ належать припустимій напівплощині X), одержимо:

$$ax_1 + bx_2 \le \lambda_1 c + \lambda_2 c = c, \text{ тобто } \mathrm{x} \in X.$$

Аналогічно можна показати, що півпростір $X \subset R^n$ опуклий.

Теорема 2.1. (про перетин опуклих множин).

Перетин скінченного числа опуклих множин є опуклою множиною.

Отже, множина припустимих розв'язків задачі лінійного програмування є опуклою множиною.

Означення 2.12. *Крайньою точкою* $\mathrm{x} \in X \subset R^n$ опуклої множини X називається така точка, яка не може бути подана у вигляді опуклої комбінації інших точок $\mathrm{x}^{(i)} \in X$, $i = 1,...,k$ $\mathrm{x}^{(i)} \ne \mathrm{x}$.

Означення 2.13. Множина $S = \{\mathrm{x} : |\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(0)}| < \varepsilon;\ \mathrm{x}, \mathrm{x}^{(0)} \in R^n\}$ називається ε *- околом точки* $\mathrm{x}^{(0)}$.

Означення 2.14. Точка $\mathrm{x}^{(0)} \in X$ називається *внутрішньою точкою* множини X, якщо існує такий її ε - окіл, всі точки якого належать X.

Означення 2.15. Точка $\mathrm{x}^{(0)} \in X$ називається *граничною точкою* множини X, якщо будь-який її окіл містить як точки, що належать множині X, так і точки, що не належать множині X.

Означення 2.16. Множина $X \subset R^n$ називається *обмеженою*, якщо існує така константа C, що $|\mathrm{x}| \le C$, для кожного $\mathrm{x} \in X$.

Теорема 2.2. (про опорний план)

Опорному *плану* $\mathrm{x} = (\beta_1; \beta_2; ...; b_m; 0; ...; 0)^T$ *системи* (2.2,б) *відповідає крайня (кутова) точка багатогранника розв'язків* $X \subset R^n$ *і при цьому одному опорному плану відповідає одна крайня точка.*

Теорема 2.3. (про екстремальну точку).

Якщо функція $f(\mathrm{x})$ *в задачі* (2.1) *або* (2.2) *досягає максимуму на множині припустимих розв'язків* X*, визначеної обмеженнями і умовами невід'ємності, то вона досягає його принаймні в одній крайній точці цієї множини. Якщо вона досягає його в декількох крайніх точках, то вона досягає його і на будь-якій опуклій комбінації цих крайніх точок* [29].

З урахуванням теорем 2.2 і 2.3 про те, що екстремальний розв'язок досягається в кутовій точці багатогранника розв'язків і опорному плану відповідає кутова точка, можна зробити наступний висновок: *перебором всіх кутових точок багатогранника розв'язків можна визначити оптимальний опорний план*. Симплекс-метод містить процедуру цілеспрямованого перебору опорних планів для пошуку оптимального опорного плану.

Метод знаходження початкового опорного плану

Канонічна форма задачі може не мати опорного плану. Тоді для побудови вихідного опорного плану, як початкових умов для застосування симплекс-методу, здійснюється перехід до так званої *M-задачі*. Для цього використовуються *штучні базисні змінні*, в результаті чого одержимо *допоміжну задачу* або *M-задачу*.

В кожне рівняння канонічної форми математичної моделі, яке не містить елементу опорного плану вводиться нова невід'ємна змінна (див. заув. 2.2), що називається *штучною*. Нехай канонічна форма (2.2) не має жодного елементу опорного плану. Тоді *M-задача* буде мати наступний вигляд:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max ; \qquad (2.5,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i , \;\; b_i \geq 0 , \;\; i = 1,...,m ; \qquad (2.5,\text{б})$$

$$x_j \geq 0 , \;\; j = 1,...,n ; \;\; x_{n+i} \geq 0 , \;\; i = 1,...,m , \qquad (2.5,\text{в})$$

де x_{n+i} – штучні базисні змінні, $M > 0$ – досить велике число. Опорний план задачі (2.5): $\mathrm{x} = (0;...;0;b_{n+1};...;b_{n+m})^T$.

Зауваження 2.4. Призначення доданка $M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$ в (2.5,а) полягає в тому, щоб в ході розв'язування задачі (2.5) вивести штучні змінні x_{n+i} зі складу базисних. Якщо в результаті розв'язування задачі виявиться, що штучні змінні входять до складу базисних змінних оптимального опорного плану і їхні значення не дорівнюють нулю, це означає, що обмеження (2.2,б) несумісні і *область припустимих розв'язків задачі* (2.2) *порожня*.

2.2. Симплекс-метод Данцига

Постановка задачі Потрібно знайти оптимальний розв'язок x^* і максимум лінійної функції в канонічній формі математичної моделі

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max ; \qquad (2.6,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \quad i = 1,...,m , \qquad (2.6,\text{б})$$

$$x_j \geq 0 , \quad j = 1,...,n . \qquad (2.6,\text{в})$$

Стратегія розв'язання задачі Стратегія пошуку розв'язку задачі (2.6) симплекс-методу Данцига (Dantzig G. B.) ґрунтується на властивостях цієї задачі. Множина

$$X = \left\{ \mathrm{x} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , i = 1,...,m; \; x_j \geq 0, \; j = 1,...,n \right\}$$

припустимих розв'язків задачі, яка визначена обмеженнями (2.5,б), (2.5,в), є опуклою множиною, що геометрично являє собою опуклий багатогранник, що має скінченне число крайніх (кутових) точок.

Теореми 2.2 і 2.3 визначають стратегію розв'язання задачі, реалізовану за допомогою симплекс-методу, – це спрямований перебір опорних планів, що визначають крайні точки багатогранника, при якому значення цільової функції $f(\mathrm{x})$ послідовно поліпшується.

Напрямок пошуку оптимального розв'язку і закінчення процесу пошуку (якщо оптимальний розв'язок знайдено) у симплекс-методі визначають *оцінки оптимальності*:

$$\Delta_j = \sum_{j_b \in J_b} c_{j_b} a_{ij} - c_j , \quad j = 1,...,n , \qquad (2.7)$$

де J_b – множина індексів базисних змінних; j_b – індекс базисної змінної, що міститься в i-му рівнянні; c_{j_b} – коефіцієнти цільової функції при поточних базисних змінних; a_{ij} – елементи стовпця коефіцієнтів при змінній x_j у системі рівнянь, що відповідає поточному базису; c_j – коефіцієнт цільової функції при змінній x_j.

При переході від одного опорного плану до іншого в базис вводиться та змінна x_k, для якої $\Delta_k = \min\limits_{j_c \in J_c}\{\Delta_{j_c} < 0\}$, де J_c – множина індексів вільних (небазисних) змінних.

Нова змінна x_k вводиться на місце змінної x_r, яка видаляється з числа базисних, номер r визначається з умови

$$\min_{i \in I}\left[\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0\right] = \frac{b_r}{a_{rk}}, \qquad (2.8)$$

де b_i – значення координати поточного базисного розв'язку, що відповідає i-му рядку; a_{ik} – коефіцієнт при координаті x_k. в i-му рядку. Розглядаються тільки невід'ємні частки.

В результаті обирається розв'язувальний елемент a_{rk}, для якого виконуються перетворення за формулами (2.3) всіх коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь. Виходить новий опорний план з більшим значенням функції $f(\mathrm{x})$.

Теорема 2.4 (основна теорема симплекс-методу).

1. Опорний план x^* *задачі (2.6) є оптимальним, якщо всі оцінки* $\Delta_j \geq 0$, $j = 1,...,n$. *(Ознака оптимальності опорного плану).*

2. Якщо x^* *– оптимальний опорний план і хоча б одна оцінка вільної змінної* $\Delta_j = 0$, *то цей план не єдиний. (Ознака неоднозначності оптимального розв'язку).*

3. Якщо знайдеться такий номер $k \geq m+1$, *для якого оцінка* $\Delta_k < 0$ *і всі* $a_{ik} \leq 0$, $i = 1,...,m$, *то цільова функція* $f_{\max} \to \infty$ *на множині припустимих розв'язків* $X \subset R^n$. *(Ознака необмеженості області припустимих розв'язків).*

4. Якщо для опорного плану x *знайдеться такий номер* $k \geq m+1$, *для якого оцінка* $\Delta_k < 0$ *і хоча б один елемент* $a_{ik} > 0$, $i = 1,...,m$, *то існує такий новий опорний план* x', *якому відповідає* $f(\mathrm{x}') > f(\mathrm{x})$. *(Ознака поліпшуваності опорного плану).*

Процедура обчислень пов'язана з використанням симплекс-таблиць, кожна з яких відповідає поточному опорному плану (табл.2.2).

Таблиця 2.2

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	c_1	c_2	…	$-M$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
			x_1	x_2	…	x_{n+m}	
x_{n+1}	$-M$	b_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	$-M$	b_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	1	
f	–	$f(c)$	Δ_1	Δ_1	…	0	–
$\Delta_1(M)$		$f(M)$	$\Delta_1(M)$	$\Delta_1(M)$	…	0	–

Алгоритм

1. Побудувати канонічну форму (2.2) математичної моделі на підставі зауважень 2.1 і 2.2.

2. Побудувати вихідний опорний план (якщо його немає) за допомогою штучних базисних змінних (*М-задача*) (2.5).

3. Заповнити вихідну симплекс-таблицю (табл.2.2) з оцінками оптимальності, обчисленими за формулою (2.7) і значенням цільової функції $f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + c_0$. Зазначимо, що для базисних змінних оцінки оптимальності дорівнюють нулю (в цьому легко переконатися при безпосередньому їх обчисленні).

4. Вибрати розв'язувальний стовпець k за найменшою невід'ємною оцінкою оптимальності:

$$\Delta_k = \min\{\Delta_j < 0, \quad j = 1,...,n\},$$

- якщо від'ємних оцінок немає, то одержано оптимальний опорний план (теорема 2.4, п.1);

- якщо оптимальний опорний план неоднозначний (теорема 2.4, п.2), то визначити всі оптимальні опорні плани і побудувати множину оптимальних розв'язків у вигляді опуклої комбінації оптимальних опорних планів;

- якщо одержано оптимальний опорний план *М-задачі* і хоча б одна штучна базисна змінна не дорівнює нулю, то вихідна задача не має розв'язків (зауваження 2.4); тоді обчислення закінчити, інакше перейти до кроку 5.

5. Вибрати розв'язувальний рядок r відповідно до умови (2.8):

$$\frac{b_k}{a_{rk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0,\ i = 1,...,m\right\}.$$

Якщо всі $a_{ik} \le 0$, $i = 1,...,m$, то оптимального опорного плану немає, оскільки область припустимих розв'язків необмежена (теорема 2.4, п.3). Тоді обчислення закінчити, інакше перейти до кроку 6.

6. Перетворити симплекс-таблицю за формулами Жордана – Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{rk}. Одержимо новий опорний план x', для якого $f(\mathrm{x}') \ge f(\mathrm{x})$. Перейти до кроку 4.

Зауваження 2.5

1. Якщо в задачі (2.6) в кожному рівнянні є невід'ємна базисна змінна, то на кроці 2 немає необхідності робити лінійні перетворення або вводити штучні базисні змінні.

2. Якщо розв'язується задача пошуку *мінімуму*, то стратегія симплекс-методу аналогічна, тільки в базис вводиться змінна, якій відповідає найбільша додатна оцінка Δ_k. Ітераційний процес закінчується, коли знайдено такий опорний план, що всі оцінки $\Delta_j \le 0$, $j = 1,...,n$.

Збіжність

Теорема 2.5 (про збіжність симплекс-методу).

За умови невиродженості задачі лінійного програмування симплекс-метод збігається за скінченне число кроків [29].

Твердження базується на тому, що число вершин опуклого багатогранника скінченне, а вимога строгого зростання функції при переході від вершини до вершини виключає проходження однієї і тієї ж вершини двічі.

Приклад 2.3

Розв'язати симплекс-методом задачу

$$f(\mathrm{x}) = -4x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$x_1 - x_2 \le 4,$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

1. Побудуємо канонічну форму:

$$f(\mathrm{x}) = -4x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$
$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 2,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,4.$$

2. Побудуємо опорний план. Канонічна форма задачі має опорний план, оскільки в кожному рівнянні є невід'ємна базисна змінна. Початковий опорний план $\mathrm{x} = (0;0;4;2)^T$, де x_1 й x_2 – вільні змінні, x_3 і x_4 – базисні змінні.

3. Заповнюємо табл. 2.3,а згідно п.3 алгоритму з урахуванням п.1 розв'язання.

Обчислимо оцінки оптимальності Δ_j, $j = 1,2,3,4$:

$$\Delta_1 = [0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)] - (-4) = 4,$$
$$\Delta_2 = [0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1] - 2 = -2,$$
$$\Delta_3 = 0, \quad \Delta_4 = 0$$

і значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 = 0$. Занесемо їх у табл. 2.3,а.

Таблиця 2.3,а

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–4	2	0	0	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	4	1	–1	1	0	–
x_4	0	2	–2	1 *	0	1	2
f	–	0	4	–2	0	0	–

4[1]. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Оцінка $\Delta_2 = -2 < 0$ найменша (єдина) від'ємна оцінка. Стовпець з цією оцінкою виберемо розв'язувальним. Вільна змінна x_2 вводиться в базис.

5[1]. Визначимо змінну, що виводиться з базису. Найменше невід'ємне відношення $\frac{b_i}{a_{ik}}$ дорівнює 2 у другому рядку. Тому з базису виводимо змінну x_4. Таким чином, розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{21} = 1$ (табл. 2.3,а).

6[1]. Перераховуємо симплекс-таблицю за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елемента a_{21}. Результати перерахування представлені в табл. 2.3,б.

Таблиця 2.3,б

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–1	4	0	0	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	6	–1	0	1	1	–
x_2	4	2	–2	1	0	1	–
f	–	4	0	0	0	2	–

Одержуємо новий опорний план $\mathrm{x} = (0;2;6;0)^T$ і $f(\mathrm{x}) = 4$.

Переходимо до кроку 4.

4^2. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Від'ємних оцінок немає. Отже, одержано оптимальний розв'язок (див. теорему 2.4(1)): $\mathrm{x}^* = (0;2;6;0)^T$. Оптимальний розв'язок неоднозначний, оскільки оцінка вільної змінної x_1 дорівнює нулю, тобто $\Delta_1 = 0$ (див. теорему 2.4(2)). Ще один оптимальний опорний план одержати неможливо, оскільки в розв'язувальному стовпці немає додатних елементів (див. теорему 2.4(3)). Для одержання множини оптимальних розв'язків введемо вектор $x(\lambda)$ в наступному вигляді:

$$x_i(\lambda) = \begin{cases} b_i - \lambda a_{ik}, & i = 1,...,m; \\ \lambda, & i = k; \\ 0, & i = m+1,...,n,\ i \neq k, \end{cases}$$

де $\Delta_k < 0$ й $a_{ik} \le 0$ для всіх $i = 1,...,m$.

Очевидно, що всі компоненти $x_i(\lambda) \ge 0$, оскільки $\lambda > 0$ й $a_{ik} \le 0$. Підстановка $\mathrm{x}(\lambda)$ в систему обмежень (2.6,б) дає тотожність.

В заданій задачі $\mathrm{x}^*(\lambda) = (\lambda;\ 2+2\lambda;\ 6+\lambda;\ 0)^T$, $\lambda \ge 0$ є множиною оптимальних розв'язків. Легко перевірити, що ці розв'язки задовольняють системі обмежень і $f(\mathrm{x}^*(\lambda)) = 4$. Геометрично це відповідає множині точок променя, початок якого в точці при $\lambda = 0$: $\mathrm{x}^*(\lambda) = (0;\ 2;\ 6;\ 0)^T$.

Приклад 2.4

Знайти максимум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = -x_1 + 4x_2 - 6 \to \max;$$
$$-x_1 + x_2 \le 2,$$

$$x_1 + x_2 \le 4,$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

Розв'язати графічним методом і симплекс-методом.

Розв'язання

Розв'яжемо задачу графічним методом, використовуючи геометричну інтерпретацію елементів математичної моделі.

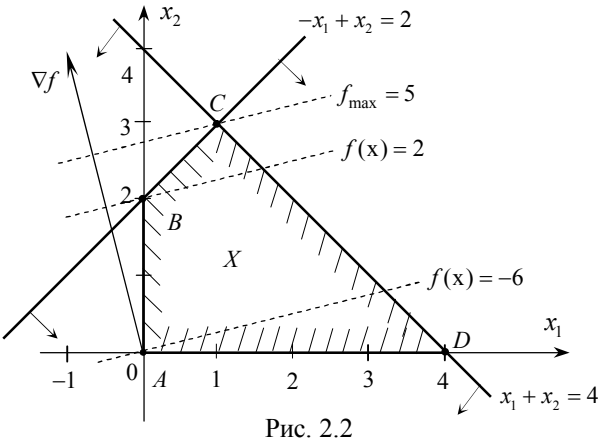


Рис. 2.2

Використовуючи систему обмежень і умови невід'ємності вихідної математичної моделі, побудуємо множину припустимих розв'язків X (чотирикутник $ABCD$ із внутрішнім штрихуванням) (рис.2.2).

Цільова функція $f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ графічно зображується множиною паралельних прямих, які називаються *лініями рівня*, кожній лінії відповідає певне значення цільової функції.

Градієнт цільової функції

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1};\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right)^T = (c_1;\ c_2)^T$$

має наступні властивості:

- напрямок градієнта вказує напрямок зростання цільової функції;
- лінії рівня цільової функції перпендикулярні градієнту;
- модуль градієнта визначає швидкість росту цільової функції в точці його побудови.

Градієнт цільової функції $f(\mathrm{x}) = -x_1 + 4x_2 - 6$ задачі має вигляд: $\nabla f = (-1;4)^T$.

Перпендикулярно градієнту ∇f через початок координат проводимо лінію рівня (пунктирна лінія), якій відповідає значення $f = -6$. Оскільки градієнт направлений в напрямку найшвидшого зростання функції в даній точці, то в точці $C = \mathrm{x}^* = (1;3)^T$ досягається максимум $f_{\max} = f(\mathrm{x}^*) = 5$ (рис. 2.2).

Зауваження 2.6. При пошуку мінімуму функції $f(\mathrm{x})$ лінія рівня переміщається в напрямку протилежному напрямку градієнта до *крайньої точки* області X. В задачі мінімум досягається в точці $D = (4;0)^T$.

Розв'яжемо поставлену задачу симплекс-методом.

1. Побудуємо канонічну форму:

$$f(\mathrm{x}) = -x_1 + 4x_2 - 6 \to \max;$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,4.$$

2. Побудуємо опорний план. Канонічна форма задачі має опорний план, оскільки в кожному рівнянні є невід'ємна базисна змінна. Початковий опорний план $\mathrm{x} = (0;0;2;4)^T$, де x_1 й x_2 – вільні змінні, x_3 і x_4 – базисні змінні. Опорному плану відповідає точка A на рис. 2.2.

3. Заповнюємо табл. 2.4,а згідно п.3 алгоритму з урахуванням п.1.

Обчислимо оцінки оптимальності Δ_j, $j = 1,2,3,4$:

$\Delta_1 = [0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1] - (-1) = 1$, $\Delta_2 = [0 \cdot 1 + 0 \cdot 1] - 4 = -4$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$ і значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_{j_b} b_i + c_0 = -6$ (табл. 2.4,а).

Таблиця 2.4,а

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–1	4	0	0	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	2	–1	1 *	1	0	2
x_4	0	4	1	1	0	1	4
f	–	–6	1	–4	0	0	–

4[1]. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Оцінка $\Delta_2 = -4 < 0$ найменша (єдина) від'ємна оцінка. Стовпець з цією оцінкою виберемо в якості розв'язувального. Вільна змінна x_2 вводиться в базис.

5[1]. Визначимо змінну, що виводиться з базису. Найменше невід'ємне відношення $\frac{b_i}{a_{ik}}$ дорівнює 2 в першому рядку. Тому з базису виводимо змінну x_3. Таким чином, розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{12} = 1$ (табл. 2.3,а).

6[1]. Перераховуємо симплекс-таблицю за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{12}. Результати перерахування представлені в табл. 2.4,б.

Таблиця 2.4,б

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–1	4	0	0	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	4	2	–1	1	1	1	–
x_4	0	4	2 *	0	0	–1	2
f	–	2	–3	0	0	4	–

Одержимо новий опорний план $\mathrm{x} = (0;2;0;4)^T$ і $f(\mathrm{x}) = 2$. Цьому опорному плану відповідає точка B на рис. 2.2.

Переходимо до кроку 4.

4[2]. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Оцінка $\Delta_1 = -3 < 0$ найменша (єдина) від'ємна оцінка. Стовпець з цією оцінкою виберемо в якості розв'язувального. Вільна змінна x_1 вводиться в базис.

5^2. Визначимо змінну, що виводиться з базису. Єдиний позитивний елемент у другому рядку. Тому з базису виводимо змінну x_4. Таким чином, розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{21} = 2$ (табл. 2.4,б).

6^2. Перераховуємо симплекс-таблицю за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{21} (табл. 2.4,в).

Таблиця 2.4,в

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–1	4	0	0	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	4	3	0	1	0.5	0.5	–
x_1	–1	1	1	0	–0.5	0.5	–
f	–	5	0	0	2.5	1.5	–

Від'ємних оцінок немає. Тому одержимо оптимальний опорний план $\mathrm{x}^* = (1;3;0;0)^T$, при якому досягається максимум цільової функції $f_{\max}(\mathrm{x}) = 5$ (теорема 2.4, п.1). Цьому опорному плану відповідає точка C на рис. 2.2.

Таким чином, в процесі застосування процедури симплекс-методу відбувся спрямований перебір вершин множини припустимих розв'язків. Перехід з вершини A в вершину B, а потім в C пов'язаний з послідовним збільшенням значення цільової функції.

Приклад 2.5

Розв'язати задачу симплекс-методом:

$$f(\mathrm{x}) = -16x_1 + 3x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 \geq 8,$$
$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 80,$$
$$x_1 - x_2 \geq 4, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Дати геометричну інтерпретацію.

Розв'язання

Розв'яжемо поставлену задачу симплекс-методом.

1. Побудуємо канонічну форму:

$$f(\mathrm{x}) = -16x_1 + 3x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 - x_4 = 8,$$
$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 80,$$

$$x_1 - x_2 - x_5 = 4,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,5.$$

Базисний розв'язок $\mathrm{x} = (0;0;80;-8;-4)^T$ не є опорним планом, оскільки $x_4 < 0$ й $x_5 < 0$.

2. Будуємо початковий опорний план. Використовуючи штучні базисні змінні, будуємо M - задачу:

$$\overline{f}(\mathrm{x}) = -16x_1 + 3x_2 + 12x_3 - M x_6 - M x_7 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 8,$$
$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 80,$$
$$x_1 - x_2 - x_5 + x_7 = 4,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,7$$

з опорним планом $\mathrm{x} = (0;\ 0;\ 80;\ 0;\ 0;\ 8;\ 4)^T$ і значенням цільової функції $\overline{f} = 960 - 12M$.

3. Заповнюємо табл. 2.5,а згідно п. 3 алгоритму.

Таблиця 2.5,а

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–16	3	12	0	0	-*M*	–*M*
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	-*M*	8	1	1	0	–1	0	1	0
x_3	12	80	4	5	1	0	0	0	0
x_7	-*M*	4	1 *	–1	0	0	–1	0	1
$\overline{f}$	–	960	64	57	0	0	0	0	0
$\Delta(M)$	–	–12*M*	–2*M*	0	0	*M*	*M*	0	0

Обчислимо оцінки оптимальності Δ_j, $j = 1,...,7$:

– оцінки вільних змінних

$$\Delta_1 = \left[(-M)\cdot 1 + 12\cdot 4 + (-M)\cdot 1\right] - (-16) = -2M + 64,$$
$$\Delta_2 = \left[(-M)\cdot 1 + 12\cdot 5 + (-M)\cdot(-1)\right] - (-3) = 57,$$
$$\Delta_4 = M,$$
$$\Delta_5 = M,$$

– оцінки базисних змінних завжди дорівнюють нулю:

$$\Delta_3 = 0,\ \Delta_6 = 0,\ \Delta_7 = 0.$$

Значення цільової функції:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_{j_b} b_i + c_0 = \left[(-M)\cdot 8 + 12\cdot 80 + (-M)\cdot 4\right] + 0 = -12M + 960$$

.

Оцінки і значення цільової функції занесемо в останні два рядки табл. 2.5,а.

4^1. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Оцінка $\Delta_1 < 0$ найменша (єдина) від'ємна оцінка. Стовпець з цією оцінкою виберемо в якості розв'язувального. Вільна змінна x_1 вводиться в базис.

5^1. Визначимо змінну, що виводиться з базису. Найменше невід'ємне відношення $\dfrac{b_i}{a_{ik}}$ дорівнює 4 в третьому рядку. Тому з базису виводимо змінну x_7. Таким чином, розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{31} = 1$ (табл. 2.5,а).

6^1. Перераховуємо симплекс-таблицю за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{31} (табл. 2.5,б).

Таблиця 2.5,б

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–16	3	12	0	0	-M	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	-M	4	0	2 *	0	–1	1	1	–1
x_3	12	64	0	9	1	0	4	0	–4
x_1	–16	4	1	–1	0	0	–1	0	1
$\overline{f}$	-	704	0	121	0	0	64	0	–64
$\Delta(M)$	-	–4M	0	–2M	0	M	–M	0	2M

Поточний розв'язок:

$$\mathrm{x} = (4;\ 0;\ 64;\ 0;\ 0;\ 4;\ 0)^T \quad \text{і} \quad \overline{f} = 704 - 4M\ .$$

Переходимо до кроку 4.

4^2. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Найменша від'ємна оцінка $\Delta_2 = 121 - 2M < 0$. Стовпець з цією оцінкою виберемо в якості розв'язувального. Вільна змінна x_2 вводиться в базис.

5^2. Визначимо змінну, що виводиться з базису. Для цього виберемо $a_{rk} = a_{12} = 2$ з умови $\dfrac{b_1}{a_{12}} = \min\left\{\dfrac{b_1}{a_{12}},\ \dfrac{b_2}{a_{22}}\right\} = \min\left\{\dfrac{4}{2},\ \dfrac{64}{9}\right\}$. В

першому рядку базисна змінна x_6. Вона виводиться з базису. Розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{12} = 2$ (табл. 2.5,б).

6^2. Перераховуємо симплекс-таблицю за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{12} (табл. 2.5,в).

Таблиця 2.5,в

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–16	3	12	0	0	-M	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	3	2	0	1	0	–0.5	0.5	0.5	–0.5
x_3	12	46	0	0	1	4.5	–0.5	–4.5	0.5
x_1	–16	6	1	0	0	–0.5	–0.5	0.5	0.5
$\overline{f} = f$	–	462	0	0	0	60.5	3.5	–60.5	–3.5
$\Delta(M)$	–	0	0	0	0	0	0	M	M

Переходимо до кроку 4.

4^3. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Від'ємних оцінок немає і всі штучні змінні дорівнюють нулю (тобто $x_6 = 0$ й $x_7 = 0$). Відповідно до теореми 2.4 (1) і зауваженню 2.4 одержимо оптимальний розв'язок вихідної задачі: $x_1^* = 6$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 46$ і значення цільової функції $f_{\max} = 462$.

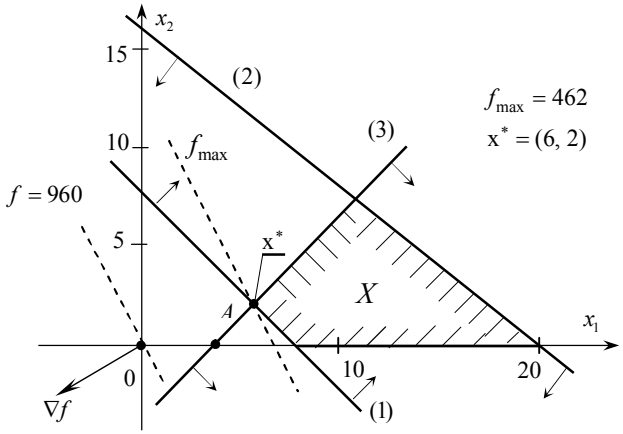


Рис. 2.3

Геометрична інтерпретація розв'язання представлена на рис. 2.3. Підставляючи $x_3 = 80 - 4x_1 - 5x_2$ другого обмеження в цільову

функцію і відкидаючи x_3 з обмеження-рівності, одержимо еквівалентну форму вихідної задачі:

$$f(\mathrm{x}) = -64x_1 - 57x_2 + 960 \to \max;$$

$$x_1 + x_2 \geq 8, \quad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 80, \quad (2)$$

$$x_1 - x_2 \geq 4, \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Використовуючи систему обмежень (1) – (3) і умови невід'ємності, будуємо область припустимих розв'язків X.

Градієнт цільової функції має вигляд: $\nabla f = (-64; -57)^T$. У довільному масштабі він побудований на рис. 2.3.

Перпендикулярно вектору градієнта ∇f через початок координат проводимо лінію рівня (пунктирна лінія), що відповідає значення $f = 960$.

Переміщуючи лінію рівня паралельно самій собі в межах області припустимих розв'язків в напрямку градієнта до крайньої точки області X, одержимо оптимальний розв'язок в точці A (рис. 2.3). Ця точка є точкою перетину прямих (1) і (3). Розв'язуючи систему рівнянь цих прямих:

$$x_1 + x_2 = 8, \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 = 4, \quad (3)$$

знаходимо оптимальний розв'язок:

$$\mathrm{x}^* = (6; 2)^T \quad \text{і} \quad f(\mathrm{x}^*) = f_{\max} = 462.$$

2.3. Двоїстий симплекс-метод

Елементи теорії

Кожній задачі лінійного програмування (назвемо її *прямою*) можна поставити у відповідність *двоїсту* задачу лінійного програмування.

Нехай *пряма* задача має вигляд:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \quad (2.9,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,...,m, \quad (2.9,\text{б})$$

$$x_j \geq 0\,, \quad j = 1,...,n\,. \qquad (2.9,в)$$

Означення 2.17. Наступна задача пошуку мінімального значення цільової функції:

$$g(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min\,; \qquad (2.10,а)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j\,, \quad j = 1,...,n\,, \qquad (2.10,б)$$

$$y_i \geq 0\,, \quad i = 1,...,m\,. \qquad (2.10,в)$$

називається *двоїстою* стосовно прямої (2.9).

Зауваження 2.7

1. Пара двоїстих задач вигляду (2.9) і (2.10) називається *симетричною*. Якщо система обмежень (2.9,б) змішана або (і) умови невід'ємності (2.10,в) поширюються не на всі змінні, то такі задачі називаються *несиметричними.* За допомогою еквівалентних перетворень можна перейти від несиметричних задач до симетричних.

2. З означення 2.17 маємо *правило побудови двоїстих задач*:

а) встановити відповідність між цільовою функцією (2.9,а) і системою обмежень (2.9,б), тобто, якщо $f \to \max$, то всі нерівності зводять до нерівностей зі знаком «$\leq$»; якщо $f \to \min$ – то зводять до нерівностей зі знаком «$\geq$»;

б) кожній нерівності (2.9,б) відповідає двоїста змінна $y_i \geq 0$ ($i = 1,...,m$) і навпаки;

в) коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі; при цьому, якщо цільова функція прямої задачі задається на максимум, то цільова функція двоїстої задачі (2.10,а) - на мінімум, і навпаки;

г) головна матриця системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою матрицею прямої задачі.

Теорема 2.6 (про припустимі розв'язки взаємно двоїстих задач).

Якщо $x_j \geq 0$ ($j = 1,...,n$) *і* $y_i \geq 0$ ($i = 1,...,m$) *– припустимі розв'язки прямої (2.9) і двоїстої (2.10) задач, то значення цільової функції прямої задачі не перевищують значень цільової функції двоїстої задачі, тобто* $f(\mathrm{x}) \leq g(\mathrm{y})$.

Теорема 2.7 (про оптимальний розв'язок двоїстих задач).

1. Якщо x^* *й* y^* *– припустимі розв'язки* взаємодвоїстих *задач і* $f(\mathrm{x}^*) = g(\mathrm{y}^*)$, *то* x^* *й* y^* *– оптимальні розв'язки цих задач.*

2. Якщо цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, тобто $f(\mathrm{x}) \to \infty$ *(*$g(\mathrm{y}) \to -\infty$ *), то область припустимих розв'язків іншої задачі порожня.*

Теорема 2.8 (про доповнюючу нежорсткість).

Для оптимальності опорних планів x^* *і* y^* *пари двоїстих задач необхідно й достатньо, щоб вони задовольняли наступним системам рівнянь (умовам доповнювальної нежорсткості):*

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = 1,...,m; \tag{2.11}$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = 1,...,n. \tag{2.12}$$

На підставі теореми 2.8 можна встановити відповідність між змінними взаємодвоїстих задач (2.9) і (2.10). Для розв'язання цих задач симплекс-методом необхідно кожну з них привести до канонічної форми за допомогою введення відповідних додаткових невід'ємних змінних. Тоді системи обмежень кожної з взаємодвоїстих задач приймають вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1,...,m; \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, \quad y_{m+j} \geq 0, \quad j = 1,...,n. \tag{2.14}$$

Теорема 2.9

Додатним компонентам оптимального розв'язку однієї з взаємодвоїстих *задач відповідають нульові компоненти оптимального розв'язку іншої задачі, тобто для будь-яких* $i = 1,...,m$ *і* $j = 1,...,n$ *: якщо* $x_j^* > 0$, *то* $y_{m+j}^* = 0$ *; якщо* $x_{n+i}^* > 0$, *то* $y_i^* = 0$ *; і аналогічно, якщо* $y_i^* > 0$, *то* $x_{n+i}^* = 0$ *; якщо* $y_{m+j}^* > 0$, *то* $x_j^* = 0$.

З теореми 2.9 маємо відповідність між змінними взаємодвоїстих задач, яка представлена в наступній таблиці:

Змінні вихідної задачі									
Первісні					Додаткові				
x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+i}	$\cdots$	x_{n+m}
$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
y_{m+1}	$\cdots$	y_{m+j}	$\cdots$	y_{m+n}	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m
Додаткові					Первісні				
Змінні двоїстої задачі									

Розглянемо застосування двоїстого симплекс-методу для розв'язання задач лінійного програмування.

Постановка задачі Потрібно знайти оптимальний розв'язок x^* і максимум лінійної функції в канонічній формі математичної моделі, що містить початковий *базисний розв'язок*

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max ; \qquad (2.15,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n-m} a_{ij} x_j + x_{n-m+i} = b_i ,\ i = 1,...,m , \qquad (2.15,\text{б})$$

$$x_j \geq 0 ,\ j = 1,...,n , \qquad (2.15,\text{в})$$

де x_j ($j = 1,...,n-m$) – вільні змінні; x_{n-m+i} ($i = 1,...,m$) – базисні змінні.

Стратегія розв'язання задачі Стратегія двоїстого симплекс-методу принципово не відрізняється від стратегії симплекс-методу Данцига (розділ 2.2). При цьому досить наявності початкового базисного розв'язку в канонічній формі математичної моделі. Опорний план будується *алгоритмічно*. Якщо базисного розв'язку немає, то, використовуючи метод Жордана - Гауса, його можна побудувати.

Алгоритм

1. Побудувати канонічну форму математичної моделі з базисним розв'язком (2.15).

2. Побудувати симплекс-таблицю з відповідними оцінками оптимальності Δ_j (2.7) і значенням цільової функції.

3. Вибрати розв'язувальний рядок r :

– якщо є хоча б один елемент $b_i < 0$, то рядок вибирається за найменшим від'ємним значенням базисної змінної:

$$b_r = \min\{b_i < 0,\ i = 1,...,m\};$$

– якщо всі $b_i \geq 0$, $i = 1,...,m$, то перейти до кроку 6.

4. Вибрати розв'язувальний стовпець k :

– якщо є хоча б один елемент $a_{rj} < 0$, то стовпець вибирається за найбільшим відношенням елементів рядка з оцінками до від'ємних елементів розв'язувального рядка:

$$\frac{\Delta_k}{a_{rk}} = \max\left\{\frac{\Delta_j}{a_{rj}},\ a_{rj} < 0,\ j = 1,...,n\right\};$$

перейти до кроку 5.

– якщо в розв'язувальному рядку немає жодного від'ємного елементу, то задача не має припустимих розв'язків (ознака *порожньої області припустимих розв'язків*). Розв'язання закінчити.

5. Перерахувати симплекс-таблицю за формулами Жордана – Гауса щодо обраного розв'язувального елементу a_{rk} . Перейти до кроку3.

6. Вибрати розв'язувальний стовпець за найменшою від'ємною оцінкою оптимальності:

$$\Delta_k = \min\left\{\Delta_j < 0,\ j = 1,...,n\right\},$$

– якщо від'ємних оцінок немає, то одержано оптимальний опорний план;

– якщо оптимальний опорний план неоднозначний, то визначити всі оптимальні опорні плани і побудувати множину оптимальних розв'язків у вигляді опуклої комбінації оптимальних опорних планів; обчислення закінчити, інакше перейти до кроку 7.

7. Вибрати розв'язувальний рядок відповідно до умови:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0,\ i = 1,...,m\right\}.$$

Якщо всі $a_{ik} \leq 0$, $i = 1,...,m$, то оптимального опорного плану немає, оскільки область припустимих розв'язків необмежена, тобто $f(\mathrm{x}) \to \infty$ (теорема 2.4, п.3), тоді обчислення закінчити. Інакше перейти до кроку 6.

8. Перерахувати симплекс-таблицю за формулами Жордана - Гауса щодо розв'язувального елементу a_{rk} . Перейти до кроку 6.

Зауваження 2.8

Кроки 3 - 5 алгоритму повторюються до одержання опорного плану або процес розв'язання закінчується відповідно до ознаки порожньої області припустимих розв'язків. Кроки 6 - 8 збігаються із кроками 4 - 6 алгоритму симплекс-методу Данцига (розділ 2.2).

Приклад 2.6

Розв'язати задачу двоїстим симплекс-методом: (див. приклад 2.5)

$$f(\mathrm{x}) = -16x_1 + 3x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 \ge 8,$$
$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 80,$$
$$x_1 - x_2 \ge 4,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Розв'язання

1. Побудуємо канонічну форму так, щоб в системі був повний набір базисних змінних:

$$f(\mathrm{x}) = -16x_1 + 3x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$-x_1 - x_2 + x_4 = -8,$$
$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 80,$$
$$-x_1 + x_2 + x_5 = -4,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5.$$

Базисний розв'язок $\mathrm{x} = (0; 0; 80; -8; -4)^T$.

2. Заповнюємо табл. 2.6,а з обчисленими оцінками оптимальності Δ_j , $j = 1, ..., 5$.

Таблиця 2.6,а

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–16	3	12	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	0	–8	–1	–1 *	0	1	0
x_3	12	80	4	5	1	0	0
x_5	0	–4	–1	1	0	0	1
f	–	960	64	57	0	0	0

Оцінки оптимальності вільних змінних

$$\Delta_1 = \left[0 \cdot 1 + 12 \cdot 4 + 0 \cdot 1\right] - (-16) = +64,$$

$$\Delta_2 = \left[0 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + 0 \cdot (-1)\right] - (-3) = 57.$$

Оцінки базисних змінних дорівнюють нулю.

Значення цільової функції:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_{j_b} b_i + c_0 = \left[0 \cdot (-8) + 12 \cdot 80 + 0 \cdot (-4)\right] + 0 = 960.$$

3[1]. Проаналізуємо базисні змінні. Початкового опорного плану немає, оскільки $x_4 = -8 < 0$ й $x_5 = -4 < 0$. За найменшою від'ємною базисною змінною x_4 виберемо розв'язувальний рядок $r = 1$.

4[1]. Виберемо розв'язувальний стовпець згідно п.4 алгоритму: $\dfrac{\Delta_k}{a_{rk}} = \max\left\{\dfrac{64}{-1}; \dfrac{57}{-1}\right\} = \dfrac{\Delta_2}{a_{12}}$. Розв'язувальний стовпець $k = 2$. Таким чином, розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{12} = -1$ (табл. 2.6,а). Змінна x_2 вводиться в базис замість змінної x_4.

5[1]. Перераховуємо симплекс-таблицю за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{12} (див. табл. 2.6,б).

Таблиця 2.6,б

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	–16	3	12	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	8	1	1	0	–1	0
x_3	12	40	–1	0	1	5	0
x_5	0	–12	–2 *	0	0	1	1
f	–	504	7	0	0	57	0

Поточний базисний розв'язок $\mathrm{x} = (0; 8; 40; 0; -12)^T$.

Значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 504$. Переходимо до п.3.

3[2]. Проаналізуємо базисні змінні. Початкового опорного плану немає, оскільки $x_5 = -12 < 0$. За цією базисною змінною x_5 виберемо розв'язувальний рядок $r = 3$.

4^2. Виберемо розв'язувальний стовпець. Єдиний від'ємний елемент $a_{rk} = a_{31} = -2$ стає розв'язувальним (п.4 алгоритму). Розв'язувальний стовпець $k = 1$. Змінна x_1 вводиться в базис замість змінної x_5 (табл. 2.6,б).

5^2. Перераховуємо симплекс-таблицю 2.6,б за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{31}. Результат перетворення - у табл. 2.6,в.

Таблиця 2.6,в

Баз. змін.	c_i	b_i	–16	3	12	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	2	0	1	0	–0.5	0.5
x_3	12	46	0	0	1	4.5	–0.5
x_1	–16	6	1	0	0	–0.5	–0.5
f	–	462	0	0	0	60.5	3.5

Поточний базисний розв'язок $\mathrm{x} = (6;\ 2;\ 46;\ 0;\ 0)^T$.

Значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 462$. Переходимо до п.3.

3^3. Проаналізуємо базисні змінні. Всі базисні змінні невід'ємні. Згідно п.3 алгоритму переходимо до п.6

6^1. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Від'ємних оцінок в таблиці 2.6,в немає. Згідно п.6 алгоритму одержали оптимальний опорний план $\mathrm{x}^* = (6;\ 2;\ 46;\ 0;\ 0)^T$ і $f_{\max}(\mathrm{x}) = 462$.

Приклад 2.7

Розв'язати задачу двоїстим симплекс-методом:

$$f(\mathrm{x}) = 8x_1 + 4x_2 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 \geq 3,$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 12,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2.$$

Розв'язання

1. Побудуємо канонічну форму, вводячи в нерівності додаткові невід'ємні змінні:

$$f(\mathrm{x}) = 6x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = -3,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 12,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,...,4.$$

2. Заповнюємо симплекс-таблицю 2.7,а з обчисленими оцінками оптимальності Δ_j, $j = 1,...,4$.

Таблиця 2.7,а

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	8	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	–3	–1 *	–1	1	0
x_4	0	12	4	2	0	1
f	–	0	–8	–4	0	0

Початковий базисний розв'язок $\mathrm{x} = (0;\ 0; -3;\ 12)^T$. Значення цільової функції: $f(\mathrm{x}) = 0$.

3[1]. Проаналізуємо базисні змінні. Початкового опорного плану немає, оскільки $x_3 = -3 < 0$. Розв'язувальний рядок $r = 1$.

4[1]. Виберемо розв'язувальний стовпець згідно п.4 алгоритму: $\dfrac{\Delta_k}{a_{rk}} = \max\left\{\dfrac{-8}{-1};\ \dfrac{-4}{-1}\right\} = \dfrac{\Delta_1}{a_{11}}$. Розв'язувальний стовпець $k = 1$. Таким чином, розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{11} = -1$ (табл. 2.7,а). Змінна x_1 вводиться в базис замість змінної x_3.

Перераховуємо симплекс-таблицю за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{11}. Результат перетворення представлений в таблиці 2.7,б.

Таблиця 2.7,б

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	8	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	8	3	1	1	–1	0
x_4	0	0	0	–2	4 *	1
f	–	24	0	4	–8	0

Поточний базисний розв'язок $\mathrm{x} = (3;\ 0;\ 0;\ \underline{0})^T$. Розв'язок є виродженим, оскільки базисна змінна $x_4 = 0$ (підкреслена). Значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 24$. Переходимо до п.3.

3^2. Проаналізуємо базисні змінні. Базисний розв'язок є опорним планом, оскільки всі базисні змінні невід'ємні. Переходимо до п.6.

6^1. Проаналізуємо оцінки. Опорний план не оптимальний, оскільки є одна від'ємна оцінка $\Delta_3 = -8 < 0$. Розв'язувальний стовпець $k = 3$.

7^1. Виберемо розв'язувальний рядок згідно п.7 алгоритму. Розв'язувальний рядок $r = 2$. Розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{23} = 4$ (табл. 2.7,б).

8^1. Перераховуємо елементи симплекс-таблиці за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{23}. Результат перетворення представлений в таблиці 2.7,в.

Таблиця 2.7,в

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	8	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	8	3	1	0.5 *	0	0.25
x_3	0	0	0	–0.5	1	0.25
f	–	24	0	0	0	2

Поточний базисний розв'язок $\mathrm{x} = (3;\ 0;\ \underline{0};\ 0)^T$. Розв'язок є виродженим, оскільки базисна змінна $x_3 = 0$ (підкреслена). Значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 24$. Переходимо до п.6.

6^2. Проаналізуємо оцінки. Одержали оптимальний опорний план, оскільки немає від'ємних оцінок. Одна з оцінок вільних змінних $\Delta_2 = 0$. Отже, $\mathrm{x}^{(1)*} = (3;\ 0;\ \underline{0};\ 0)^T$ і $f_{\max}(\mathrm{x}) = 24$. Можна побудувати ще один оптимальний опорний план, вибираючи розв'язувальний стовпець $k = 2$.

7^2. Виберемо розв'язувальний рядок. Розв'язувальний рядок $r = 1$. Розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{12} = 0.5$ (табл. 2.7,в).

8^2. Перетворимо елементи симплекс-таблиці за формулами Жордана - Гауса (2.3) щодо розв'язувального елементу a_{12}. Результат перетворення представлений в таблиці 2.7,г.

Таблиця 2.7,г

Баз. змін.	c_{j_b}	b_i	8	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	4	6	2	1	0	1
x_3	0	3	1	0	1	0.5
f	–	24	0	0	0	2

Оптимальний опорний план $\mathrm{x}^{(2)*} = (3;\ 0;\ \underline{0};\ 0)^T$ і $f_{\max}(\mathrm{x}) = 24$.

Оптимальний розв'язок задачі визначається як опукла комбінація двох опорних планів $\mathrm{x}^{(1)*}$ і $\mathrm{x}^{(2)*}$:

$$\mathrm{x}^* = \lambda_1 \mathrm{x}^{(1)*} + \lambda_2 \mathrm{x}^{(2)*} = (3\lambda_1; 6\lambda_2; 3\lambda_2; 0)^T,$$

$$\lambda_1 \geq 0,\ \ \lambda_2 \geq 0,\ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

2.4. Спеціальні задачі лінійного програмування

До спеціальних задач лінійного програмування відносять задачі, для розв'язання яких крім симплекс-методу застосовують методи, що відрізняються від класичного алгоритму симплекса-методу.

2.4.1. Транспортні задачі

Постановка задачі

Транспортна задача формулюється в термінах класичної транспортної задачі, але подібну математичну модель можуть мати і інші задачі розподільного типу [21].

Нехай деякий однорідний продукт перебуває в m пунктах, його необхідно доставити споживачам у n пунктів. Відомі наступні параметри:

a_i – кількість (од.) продукту в i-м пункті, $a_i > 0$, $i = 1,...,m$;

b_j – потреба (од.) в продукті в j-м пункті, $b_j > 0$, $j = 1,...,n$;

c_{ij} – вартість доставки одиничної кількості продукту з i-го пункту в j-ий пункт, $c_{ij} \geq 0$;

x_{ij} – кількість (од.) продукту, що доставляється з i-го пункту в j-ий пункт.

Припускається, що сумарні запаси дорівнюють сумарним потребам (*умова можливості розв'язання* транспортної задачі):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (2.16)$$

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min \ ; \qquad (2.17,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , \ \ i = 1,...,m \ , \qquad (2.17,\text{б})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \ \ j = 1,...,n \ , \qquad (2.17,\text{в})$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ \ i = 1,...,m \ , \ \ j = 1,...,n \ . \qquad (2.17,\text{г})$$

Потрібно визначити оптимальний опорний план x^* на підставі системи обмежень (2.17,б) – (2.17,в) і умов невід'ємності (2.17,г), якому відповідає мінімальне значення цільової функції (2.17,а).

Стратегія розв'язання задачі Поставлена задача є окремим випадком задачі лінійного програмування, тому стратегія розв'язання аналогічна:

1. Знаходимо початковий опорний план. Для побудови початкового опорного плану найчастіше використовуються *метод північно-західного кута* або *метод мінімальної вартості* (2.17,а).

2. Виконується поліпшення опорного плану, тобто перехід від одного плану до іншого, з послідовним зменшенням значення цільової функції (тобто сумарної вартості перевезень). Для поліпшення початкового плану застосовується *метод потенціалів* (як один з методів розв'язування транспортних задач). При цьому використовується таблична форма математичної моделі (табл. 2.8).

Таблиця 2.8

a_i \ b_j	b_1	. . .	b_n
a_1	x_{11} c_{11}	. . .	x_{1n} c_{1n}
. . .	. . .	. . .	. . .
a_m	x_{m1} c_{m1}	. . .	x_{mn} c_{mn}

Методи побудови початкового опорного плану

Ранг матриці системи обмежень (2.17,б) – (2.17,в) завжди дорівнює $(m+n-1)$. Тому число базисних змінних: $(m+n-1)$.

Метод північно-західного кута

Побудова починається з лівої верхньої клітинки транспортної таблиці, тобто $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ і закінчується в правій нижній клітинці x_{mn}. На кожному кроці остача по рядку (або по стовпцю) поміщається в сусідню клітинку, але так, щоб не порушувались обмеження (2.17,б) і (2.17,в). Якщо на деякому кроці (не на останньому) остача виявилася рівною нулю, то в сусідню клітинку (вниз або праворуч) записується *базисний нуль* і клітинці відповідає базисна змінна, а опорний план є виродженим.

Приклад 2.8

Знайти початковий опорний план методом північно-західного кута в транспортній задачі, що задана таблицею 2.9.

Таблиця 2.9

a_i \ b_j	150	160	200	100	300
210	150 8	60 6	4	1	8
100	2	100 7	0 12	3	7
600	3	5	200 7	100 15	300 1

(Табл. 2.9 містить відповідь поставленої задачі).

Розв'язання

Починаємо з північно-західного кута, тобто $x_{11} = \min\{210, 150\} = 150$. Тоді в пункті b_1 потреби задоволені і, отже, $x_{21} = x_{31} = 0$ (в таблиці 2.9 відповідні клітинки вільні). Перший стовпець виключається з розгляду.

Продовжуємо з північно-західного кута, тобто $x_{12} = \min\{(210-150), 160\} = 60$. Тоді запаси в пункті a_1 вичерпані і $x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$. При цьому перший рядок виключається з розгляду.

Продовжуємо з північно-західного кута:

$$x_{22} = \min\{(160-60), 100\} = 100.$$

Потреби в пункті b_2 задоволені і запаси в пункті a_2 вичерпані. Тому виключаємо з розгляду другий рядок або другий стовпець (не має значення). Наприклад, виключаємо другий стовпець. Тоді $x_{32}=0$.

Продовжуємо з північно-західного кута частини, що залишилась в таблиці. Оскільки запаси a_2 вичерпані, використовуємо *базисний нуль*, тобто $x_{23}=0$. Відповідно вільні змінні $x_{24}=x_{25}=0$.

Заповнюємо останній рядок:

$$x_{33}=\min\{600,\,(200-0)\}=200,$$
$$x_{34}=\min\{(600-200),\,100\}=100,$$
$$x_{35}=\min\{(600-200-100),\,300\}=300.$$

Таким чином, одержали початковий опорний план у вигляді матриці:

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix}150 & 60 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 100 & \underline{0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 200 & 100 & 300\end{pmatrix}.$$

Цьому опорному плану відповідає наступне значення цільової функції:

$$f(\mathrm{x})=8\cdot150+6\cdot60+7\cdot100+12\cdot0+7\cdot200+15\cdot100+1\cdot300=5460.$$

Метод мінімальної вартості

В методі північно-західного кута при побудові початкового опорного плану не враховуються вартості і тому в загальному випадку план далекий від оптимального. В методі мінімальної вартості враховуються витрати на перевезення. Тобто початковий план, як правило, ближче до оптимального.

Побудова починається з клітинки з мінімальною одиничною вартістю c_{ij}. В цю клітинку поміщають менше з двох чисел, пов'язаних з нею, тобто $x_{ij}=\min\{a_i,b_j\}$. Різниця по рядку (або по стовпцю) поміщають в клітинку з мінімальною вартістю без порушення обмежень (2.17,б) і (2.17,в). Ця процедура виконується на кожному кроці до повного розподілу запасів.

Якщо на деякому кроці (не на останньому) остача виявилася рівною нулю, то в клітинку з найменшою вартістю по рядку (або по стовпцю) записується *базисний нуль* і ця клітинка відповідає базисній змінній, а опорний план є виродженим.

Приклад 2.9

Знайти початковий опорний план методом мінімальної вартості в транспортній задачі, яка задана таблицею 2.10 (див. приклад 2.8).

Таблиця 2.10

a_i \ b_j	150	160	200	100	300
210	8	6	4 110	1 100	8
100	2	7 100	12	3	7
600	3 150	5 60	7 90	15	1 300

(Табл.2.10 містить відповідь поставленої задачі).

Розв'язання

Заповнюємо клітинку з найменшою вартістю $c_{14}=1$ (або із клітки (3,5), в якій $c_{35}=1$): $x_{14}=\min\{a_1,b_4\}=\min\{210,100\}=100$. Тоді потреби в пункті b_4 задоволені і $x_{24}=x_{34}=0$ (в табл. 2.10 ці клітинки вільні). Четвертий стовпець виключається з розгляду.

Із клітинок, що залишилися, першого рядка знаходимо клітинку з найменшою вартістю і заповнюємо її $x_{13}=\min\{(210-100),200\}=110$. Тоді запаси в пункті a_1 вичерпані і $x_{11}=x_{12}=x_{15}=0$. При цьому перший рядок виключається з розгляду.

Із клітинок, що залишилися, третього стовпця знаходимо клітинку з найменшою вартістю і заповнюємо її $x_{33}=\min\{(200-110),600\}=90$. Тоді потреби в пункті b_3 задоволені і $x_{23}=0$. Третій стовпець виключається з розгляду.

В третьому рядку послідовно заповнюються

клітинка (3,5): $x_{35}=\min\{(600-90),300\}=300$; і $x_{25}=0$;

клітинка (3,1): $x_{31}=\min\{(600-90-300),150\}=150$; і $x_{21}=0$;

клітинка (3,2): $x_{32}=\min\{(600-90-300-150),160\}=60$.

Запаси в пункті a_3 вичерпані і $x_{34}=0$ (вільна змінна).

І нарешті, $x_{22}=\min\{(160-60),100\}=100$.

Таким чином, одержали початковий опорний план у вигляді матриці:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 110 & 100 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 150 & 60 & 90 & 0 & 300 \end{pmatrix}.$$

Цьому опорному плану відповідає наступне значення цільової функції:

$$f(\mathrm{x}) = 4 \cdot 110 + 1 \cdot 100 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 150 + 5 \cdot 60 + 7 \cdot 90 + 1 \cdot 300 = 2920.$$

Метод потенціалів

Метод ґрунтується на наступній теоремі:

Теорема 2.10 (основна теорема методу потенціалів).

Опорний план транспортної задачі є оптимальним, якщо знайдуться такі m *чисел* u_i, $i = 1,...,m$, *які називаються потенціалами рядків, і такі* n *чисел* v_j, $j = 1,...,n$, *- потенціалами стовпців, що виконуються наступні співвідношення:*

(1) $u_i + v_j = c_{ij}$ *для базисних змінних* x_{ij};

(2) $c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ *для вільних змінних* x_{ij}.

Умова (2) теореми 2.10 є ознакою оптимальності опорного плану. Ця умова використовується для побудови *оцінок оптимальності:* $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Наявність від'ємних оцінок свідчить про те, що опорний план транспортної задачі неоптимальний і його можна покращити, вводячи в базис вільну змінну з невід'ємною оцінкою.

Введемо наступні поняття.

1. *Цикл* – замкнена ламана з вершинами в клітинках і ланками, розташованими вздовж рядків і стовпців матриці перевезень. В кожній вершині зустрічаються дві ланки, причому одна з них розташовується по рядку, а інша - по стовпцю. Число вершин циклу парне. Цикл може бути самоперетинаючою ламаною, але точки її самоперетинання не можуть бути вершинами циклу.

2. *Виділений цикл* – цикл, в якому кожній вершині приписані знаки, що $(+)$ чергуються, $(-)$ або .

3. *Зміщення* на число $\vartheta \geq 0$. При цьому значення x_{ij}, які стоять в вершинах циклу зі знаком $(+)$, збільшуються на число ϑ, а ті що стоять в вершинах зі знаком $(-)$, зменшуються на число ϑ.

Алгоритм

1. Знайти початковий опорний план методом північно-західного кута або методом мінімальної вартості.

2. Визначити потенціали рядків u_i і стовпців v_j. Для кожної базисної клітинки скласти рівняння $u_i + v_j = c_{ij}$. Оскільки ці рівняння утворять систему $(m+n-1)$ рівнянь з $(m+n)$ невідомими (система має нескінченну множину розв'язків), то для визначеності треба покласти $u_1 = 0$. Тоді всі інші потенціали знаходяться однозначно.

3. Обчислити оцінки оптимальності Δ_{ij} вільних змінних (вільних клітинок) за формулами $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

4. Проаналізувати оцінки оптимальності:

а) якщо всі оцінки невід'ємні, тобто $\Delta_{ij} \geq 0$, то одержали оптимальний опорний план;

б) якщо одержано оптимальний опорний план і хоча б одна оцінка вільної змінної дорівнює нулю, то оптимальний розв'язок є неоднозначним. При цьому можна побудувати ще один оптимальний опорний план і визначити оптимальний розв'язок у вигляді опуклої комбінації оптимальних опорних планів, закінчити обчислення;

в) якщо серед оцінок Δ_{ij} вільних змінних є від'ємні, знайти серед них найменшу від'ємну оцінку і позначити її знаком $(+)$. Перейти до кроку 5.

5. Для вільної клітинки (i, j) з обраною оцінкою Δ_{ij}, яка позначена знаком $(+)$, побудувати виділений цикл (або *цикл перерахування*). Всі його вершини, крім розташованої в клітинці (i, j), повинні знаходитись в базисних клітинках.

6. Виконати зміщення циклу, побудованого на кроці 5, на величину ϑ, яка дорівнює найменшому з чисел, розташованих у від'ємних вершинах, При цьому числа, що розташовані в додатних вершинах, збільшити на ϑ, а числа, що розташовані у від'ємних вершинах, зменшити на ϑ.

Якщо найменше значення ϑ в декількох від'ємних вершинах циклу, то при зміщенні треба поставити *базисний нуль* в усіх таких вершинах, крім однієї. Опорний план стає виродженим.

Елементи матриці, що не входять в цикл, залишаються без змін.

Перейти до кроку 2.

Зауваження 2.9

1. При розв'язуванні задач може виникнути ситуація, в якій $\vartheta = 0$. Тоді при зміщенні вільна клітинка стає базисною (ставиться базисний нуль), а базисна з $\vartheta = 0$ стає вільною.

2. Значення сумарної вартості перевезень при переході від одного опорного плану до іншого зв'язані співвідношенням

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + \vartheta \cdot \Delta_{ij},$$

де k – номер ітерації, ϑ і Δ_{ij} знаходяться на кроках 3 і 6 алгоритму.

Приклад 2.10

Розв'язати транспортну задачу з вихідними даними приклада 2.8 (або приклада 2.9) методом потенціалів, побудувавши початковий опорний план методом мінімальної вартості (у табл.. 2.11,а).

Таблиця 2.11,а

a_i \ b_j	150	160	200	100	300	u_i
210	8	6	4 110	1 100	8	0
100	2 (+)	7 100 (–)	12	3	7	5
600	3 150 (–)	5 60 (+)	7 90	15	1 300	3
v_j	0	2	4	1	–2	–

Розв'язання

Розв'язуємо за алгоритмом (стор. 109).

1. Знайдемо початковий опорний план методом мінімальної вартості (табл. 2.11,а). Подробиці побудови в прикладі 2.9 $f(\mathrm{x}) = 2920$.

2[1]. Визначаємо потенціали рядків і стовпців. Для кожної базисної клітинки маємо рівняння $u_i + v_j = c_{ij}$:

$$u_1 + v_3 = 4, \quad u_1 + v_4 = 1, \quad u_3 + v_3 = 7,$$
$$u_3 + v_2 = 5, \quad u_2 + v_2 = 7, \quad u_3 + v_1 = 3.$$

Приймемо $u_1 = 0$, послідовно знаходимо: $v_3 = 4$, $v_4 = 1$, $u_3 = 3$, $v_2 = 2$, $u_2 = 5$, $v_1 = 0$, $v_5 = -2$ (табл. 2.11,а).

3[1]. Для кожної вільної клітинки обчислимо оцінки оптимальності за формулами $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 8 - (0 + 0) = 8,$$
$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 6 - (0 + 2) = 4,$$
$$\Delta_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 8 - (0 - 2) = 10,$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 2 - (5 + 0) = -3,$$
$$\Delta_{23} = c_{ij} - (u_i + v_j) = 12 - (5 + 4) = 3,$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 3 - (5 + 1) = -3,$$
$$\Delta_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 7 - (5 - 2) = 4,$$
$$\Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 15 - (3 + 1) = 11.$$

4[1]. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Умова закінчення не виконується, оскільки $\Delta_{21} = -3 < 0$ і $\Delta_{24} = -3 < 0$. Виберемо найменшу від'ємну оцінку, наприклад Δ_{21} (або Δ_{24}, оскільки $\Delta_{21} = \Delta_{24}$).

5[1]. Для клітинки $(2, 1)$ будуємо виділений цикл. По кутах циклу розставляємо знаки, що чергуються $(+)$ і $(-)$, починаючи з $(+)$ в клітинці $(2, 1)$ (табл. 2.11,а).

6[1]. Знайдемо число $\vartheta = \min\{100, 150\} = 100$, яке дорівнює найменшому із чисел, що знаходяться у від'ємних вершинах циклу. Виконаємо зміщення по циклу на число $\vartheta = 100$: числа, що знаходяться в клітинках з $(+)$, збільшуються на 100, а числа, що знаходяться в клітинках з $(-)$, зменшуються на 100. Елементи матриці, що не входять в цикл, залишаються без змін. Результат перетворення опорного плану подано у табл. 2.11,б.

Таблиця 2.11,б

a_i \ b_j	150	160	200	100	300	u_i
210	8	6	4 110 (+)	1 100 (–)	8	0
100	2 100 (–)	7	12	3 (+)	7	2
600	3 50 (+)	5 160	7 90 (–)	15	1 300	3
v_j	0	2	4	1	–2	–

Значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 2620$. Перейдемо до кроку 2.

2[2]. Визначимо потенціали рядків і стовпців. Для кожної базисної клітинки маємо рівняння $u_i + v_j = c_{ij}$ і, приймаючи $u_1 = 0$, ви-

значаємо всі потенціали: $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $v_1 = 0$, $v_2 = 2$, $v_3 = 4$, $v_4 = 1$, $v_5 = -2$ (табл. 2.11,б).

3^2. Для кожної вільної клітинки обчислимо оцінки оптимальності за формулою $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$: $\Delta_{11} = 8$, $\Delta_{12} = 4$, $\Delta_{15} = 10$, $\Delta_{22} = 3$, $\Delta_{23} = 6$, $\Delta_{24} = 0$, $\Delta_{25} = 7$, $\Delta_{34} = 11$.

4^2. Проаналізуємо оцінки оптимальності. Від'ємних оцінок немає, отже одержали оптимальний опорний план. Значення цільової функції (мінімальна вартість перевезень) $f_{\min} = 2620$.

Одна оцінка вільної змінної $\Delta_{24} = 0$. Згідно п.4 (б) алгоритму опорний план не є єдиним. Побудуємо новий опорний план.

5^2. Для клітинки $(2, 4)$ будуємо виділений цикл. По кутках циклу розставляємо знаки, що чергуються $(+)$ і $(-)$, починаючи з $(+)$ в клітці $(2, 4)$ (табл. 2.11,б).

6^2. Знайдемо число $\vartheta = \min\{100,150\} = 100$, що дорівнює найменшому із чисел, які розташовані у від'ємних вершинах циклу. Виконаємо зміщення по циклу на число $\vartheta = 100 \cdot t$ (де $t \in [0;1]$): числа, що розташовані в клітинках з $(+)$, збільшуються на $100 \cdot t$, а числа, що розташовані в клітках з $(-)$, зменшуються на $100 \cdot t$. Елементи матриці, що не входять в цикл, залишаються без змін. Таким чином, побудовано *загальний оптимальний розв'язок* у вигляді опуклої комбінації:

$$\mathrm{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 110+90t & 100-90t & 0 \\ 100-90t & 0 & 0 & 90t & 0 \\ 50+90t & 160 & 90-90t & 0 & 300 \end{pmatrix}.$$

Задаючи параметру t конкретні значення від 0 до 1, можна одержати частинний оптимальний розв'язок при тому ж значенні цільової функції $f_{\min} = 2620$. При $t = 0$ і $t = 1$ одержимо два оптимальних опорних плани з тим самим значенням цільової функції.

Зауваження 2.10

Задачі з порушеним балансом (2.16) розв'язуються шляхом зведення їх до задач, які задовольняють умові балансу. Далі задача розв'язується як звичайна задача (2.17). Оптимальний опорний план нової задачі містить оптимальний опорний план вихідної задачі.

Можливі два випадки.

Перший випадок. Сумарні запаси більші сумарних потреб:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

В цьому випадку треба:

– ввести фіктивний пункт споживання $n+1$ з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \ ;$$

– прийняти вартості перевезень одиниці вантажу у фіктивний пункт споживання, рівним нулю: $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1,...,m$.

Другий випадок. Сумарні запаси менші сумарних потреб:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

В цьому випадку треба:

– ввести фіктивний пункт зберігання $m+1$ із запасом вантажу, що дорівнює

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \ ;$$

– прийняти вартості перевезень одиниці вантажу з фіктивного пункту зберігання рівним нулю: $c_{m+1,j} = 0$, $j = 1,...,n$.

Приклад 2.11

На двох базах зберігається вантаж у кількості: $a_1 = 200$, $a_2 = 100$.

Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в наступних кількостях: $b_1 = 180$, $b_2 = 80$, $b_3 = 150$.

Вартості перевезень одиниці вантажу c_{ij} задані наступною матрицею: $c = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Початковий опорний план побудувати методом північно-західного кута і розв'язати методом потенціалів.

Розв'язання

Поставлена задача є задачею з порушеним балансом. Оскільки сумарні запаси менші сумарних потреб, то вводиться фіктивний пункт зберігання $a_3 = 410 - 300 = 110$ одиниць. Вартість перевезень

із фіктивного пункту зберігання приймається рівною нулю. Одержуємо задачу, в якій виконується умова балансу (табл. 2.12,а).

Результати розв'язання маємо в табл. 2.12,а - 2.12,в.

Таблиця 2.12,а

a_i \ b_j	180	80	150	u_i
200	6 180 (–)	2 20 (+)	4	0
100	8	6 60 (–)	5 40 (+)	4
110	0 (+)	0	0 110 (–)	–1
v_j	6	2	1	–

Значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 1680$.

Оцінки оптимальності:

$$\Delta_{13} = 4 - (0+1) = 3, \qquad \Delta_{21} = 8 - (4+6) = -2,$$

$$\Delta_{31} = 0 - (-1+6) = -5, \quad \Delta_{32} = 0 - (-1+2) = -1.$$

Відносно клітинки (3,1) з найменшою від'ємною оцінкою виконуємо перетворення опорного плану. Зміщення по циклу здійснюємо на величину $\vartheta = x_{31} = \min\{180, 60, 110\} = 60$. Новий опорний план - в табл. 2.12,б.

Значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 1380$.

Оцінки оптимальності:

$$\Delta_{13} = 4 - (0+6) = -2, \quad \Delta_{21} = 8 - (-1+6) = 3,$$

$$\Delta_{22} = 6 - (-1+2) = 5, \quad \Delta_{32} = 0 - (-6+2) = 4.$$

Зміщення по циклу на величину $\vartheta = x_{13} = \min\{120, 50\} = 50$.

Таблиця 2.12,б

a_i \ b_j	180	80	150	u_i
200	6 120 (–)	2 80	4 (+)	0
100	8	6	5 100	–1
110	0 60 (+)	0	0 50 (–)	–6
v_j	6	2	6	–

Новий опорний план подано у табл.2.12,в.

Таблиця 2.12,в

a_i \ b_j	180	80	150	u_i
200	70 6	80 2	50 4	0
100	8	6	100 5	1
110	110 0	0	0	–6
v_j	6	2	4	–

Значення цільової функції $f(\mathrm{x}) = 1280$.

Оцінки оптимальності:

$$\Delta_{21} = 8 - (1+6) = 1, \qquad \Delta_{22} = 6 - (1+2) = 3,$$
$$\Delta_{32} = 0 - (-6+2) = 4, \qquad \Delta_{33} = 0 - (-6+4) = 2.$$

Від'ємних оцінок немає, обчислення закінчено. Оптимальний опорний план:

$$\mathrm{x}^* = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \text{ і } f(\mathrm{x}^*) = f_{\min}(\mathrm{x}) = 1280.$$

На величини $x_{31} = 60$ і $x_{33} = 50$ в пунктах b_1 і b_3 відповідно не будуть задоволені потреби.

Транспортні задачі, що відповідають другому випадку (див. заув. 2.10), розв'язуються аналогічно першому випадку.

2.4.2. Параметричні задачі

Постановка задачі

Задачі лінійного програмування, в яких коефіцієнти цільової функції і (або) вільні члени системи обмежень залежать від деякого параметру, називаються *задачами параметричного програмування.*

Математичну модель такої задачі можна подати в наступному вигляді:

$$f(\mathrm{x}, t) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + c_j' t) x_j \to \max; \qquad (2.18,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (b_i + b_i' t)\,,\ \ i = 1,...,m\,; \qquad (2.18,б)$$

$$x_j \geq 0\,,\ \ j = 1,...,n\,, \qquad (2.18,в)$$

$$t \in [t_1; t_2]\,. \qquad (2.18,г)$$

Стратегія розв'язання задачі Розв'язання параметричної задачі полягає в тому, щоб при кожному значенні параметру $t_l \in [t_1; t_2]$ був визначений розв'язок задачі. Це може бути оптимальний розв'язок, порожня або необмежена область припустимих розв'язків. Практично, розв'язання задачі зводиться до виділення підінтервалів зміни $t_l \in T_l = [t_{l-1}; t_{l+1}] \subset [t_1; t_2]$, на яких одержаний розв'язок є *стійким*. Для розв'язання параметричних задач використовується двоїстий симплекс-метод.

Алгоритм

1. Побудувати симплекс-таблицю з урахуванням параметру t відповідно до алгоритму двоїстого симплекс-методу (див. розд. 2.3).

2. Вибрати значення $t = t_l \in [t_1; t_2]$. При цьому параметр в таблиці залишається в загальному виді.

3. Розв'язати задачу двоїстим симплекс-методом, аналізуючи результати з урахуванням значення t_l і всіх ознак типу розв'язку.

4. Визначити множину T_l значень параметра, яка містить t_l. Для виділення цієї множини (підінтервалу) розв'язати систему нерівностей, що складається з *умов оптимальності* і *умов допустимості* опорного плану. Одержати $T_l = [t_{l-1}; t_{l+1}] \subset [t_1; t_2]$.

5. Задати нове значення параметра $t_l = t_{l+1} + \varepsilon$ (або $t_l = t_{l-1} - \varepsilon$). Перейти до кроку 3.

Процес розв'язання (кроки 3 – 5) триває доти, поки не будуть досліджені розв'язки задачі при всіх значеннях параметра $t \in [t_1; t_2]$.

Зауваження 2.11

1. Множина підінтервалів T_l, $l = 1,...,k$ повинна задовольняти умовам $\bigcup_{l=1}^{k} T_l = [t_1; t_2]$ і $\bigcap_{l=1}^{k} T_l = \varnothing$.

2. Для розв'язання параметричної задачі на кроці 3 можна використовувати симплекс-метод зі штучним базисом. При цьому на кожній ітерації необхідно будувати нову *М-задачу*.

Приклад 2.12

Розв'язати параметричну задачу

$$f(\mathrm{x},t)=(-8+t)x_1+(2+t)x_2\to\max;$$
$$-3x_1+2x_2\le 6,$$
$$x_1-x_2\le 2,$$
$$x_1+2x_2\ge 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;\quad t\in(-\infty;+\infty).$$

Розв'язання

1. Відповідно до двоїстого симплекс-методу будуємо канонічну форму математичної моделі:

$$f(\mathrm{x},t)=(-8+t)x_1+(2+t)x_2\to\max;$$
$$-3x_1+2x_2+x_3=6,$$
$$x_1-x_2+x_5=2,$$
$$-x_1-2x_2+x_4=-4,$$
$$x_j\ge 0,\ j=1,...,5;\quad t\in(-\infty;+\infty).$$

Будуємо симплекс-таблицю 2.13,а. Всі дії виконуємо відповідно до алгоритму двоїстого симплекс-методу (див. розд. 2.3).

Таблиця 2.13,а

Баз. змін.	c_i	b_i	$-8+t$	$2+t$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	6	–3	2	1	0	0
x_4	0	–4	–1	–2 *	0	1	0
x_5	0	2	1	1	0	0	1
f	-	0	$8-t$	$-2-t$	0	0	0

Початковий базисний розв'язок: $\mathrm{x}=(0;\ 0;\ 6;\ -4;\ 2)^T$.

2. Виберемо значення $t=-10$. Фіксоване значення параметра можна вибирати досить довільно в межах вихідного заданого інтервалу.

3[1]. Розв'язуємо задачу двоїстим симплекс-методом з урахуванням, що $t=-10$. При $t=-10$ в табл. 2.13,а розв'язувальний елемент $a_{rk}=a_{22}=-2$. Результат перетворень подано в табл. 2.13,б.

Таблиця 2.13,б

Баз. змін.	c_i	b_i	$-8+t$	$2+t$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	2	–4	0	1	1 *	0
x_2	$2+t$	2	0.5	1	0	–0.5	0
x_5	0	4	1.5	0	0	–0.5	1
f	-	$4+2t$	$9-0.5t$	0	0	$-1-0.5t$	0

При $t=-10$ в табл. 2.13,б одержимо оптимальний опорний план:

$$\mathrm{x}^{(1)*}=(0;\ 2;\ 2;\ 0;\ 4)^T;\quad f_{\max 1}=4+2t.$$

4[1]. Визначаємо інтервал T_1 зміни параметра t, в якому оптимальний розв'язок $\mathrm{x}^{(1)*}$ є стійким. Використаємо умову оптимальності опорного плану:

$$\begin{cases}\Delta_1=9-0.5t\geq 0,\\ \Delta_4=-1-0.5t\geq 0.\end{cases}.$$

Звідки маємо, що $t\in T_1=(-\infty;\ -2]$.

5[1]. Задамо нове значення параметру так, щоб порушилась одна умова (табл. 2.13,б). В цьому випадку кінець інтервалу T_1 збігається з початком наступного інтервалу. Нехай $t=0$. Перейдемо до кроку 3.

3[2]. Розв'язуємо двоїстим симплекс-методом з урахуванням, що $t=0$. Тоді в табл. 2.13,б від'ємна оцінка $\Delta_4=-1$. Розв'язувальний елемент $a_{14}=1$. Результат перетворень подано в табл. 2.13,в. При $t=0$ в табл. 2.13,в одержимо оптимальний розв'язок:

$$\mathrm{x}^{(2)*}=(0;\ 3;\ 0;\ 2;\ 5)^T;\quad f_{\max 2}=6+3t.$$

4[2]. Визначаємо інтервал T_2 зміни параметра t, в якому оптимальний розв'язок $\mathrm{x}^{(2)*}$ є стійким. Використовуємо умову оптимальності опорного плану:

$$\begin{cases}5-2.5t\geq 0,\\ 1+0.5t\geq 0.\end{cases}.$$

Звідси маємо, що $t\in T_2=[-2;\ +2]$.

Таблиця 2.13,в

Баз. змін.	c_i	b_i	$-8+t$	$2+t$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	0	2	–4	0	1	1	0
x_2	$2+t$	3	–1.5	1	0.5	0	0
x_5	0	5	–0.5	0	0.5	0	1
f	-	$6+3t$	$5-2.5t$	0	$1+0.5t$	0	0

5^2. Задамо нове значення параметра. Нехай $t=3$. Порушується одна умова оптимальності $\Delta_1 = 5-2.5\cdot 3 = -2.5 < 0$. Перейдемо до кроку 3.

3^3. При всіх значеннях $t>2$ оцінка $\Delta_1 < 0$ і розв'язувальний стовпець з цією оцінкою не містить додатних елементів: $a_{i1} \le 0$, $i=1,2,3$, що відповідає необмеженому росту цільової функції (теорема 2.4, п.3). Отже, при $t \in T_3 = [2;\ +\infty)$ задача не має оптимального розв'язку через те, що $f_{\max} \to \infty$. Розв'язання закінчено.

Таким чином, отриманий розв'язок задачі:

$$t \in (-\infty; -2]: \quad \mathrm{x}^{(1)*} = (0;\ 2;\ 2;\ 0;\ 4)^T, \quad f_{\max 1} = 4+2t;$$

$$t \in [-2; +2]: \quad \mathrm{x}^{(2)*} = (0;\ 3;\ 0;\ 2;\ 5)^T, \quad f_{\max 2} = 6+3t;$$

$$t \in [+2; +\infty): \quad f_{\max} \to \infty.$$

Приклад 2.13

Розв'язати параметричну задачу

$$f(\mathrm{x}) = 3x_1 + 6x_2 \to \max;$$

$$-x_1 + x_2 \le (8+t),$$

$$x_1 - x_2 \ge (2-t),$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \quad t \in [-20;\ 20].$$

Розв'язання

1. Відповідно до двоїстого симплекс-методу будуємо канонічну форму математичної моделі:

$$f(\mathrm{x}) = 3x_1 + 6x_2 \to \max;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = (8+2t),$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = (-2+t);$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,\ldots,4; \quad t \in [-20;\ 20].$$

Будуємо симплекс-таблицю 2.14,а. Всі побудови виконуємо відповідно до алгоритму двоїстого симплекс-методу (див. розд. 2.3).

Таблиця 2.14,а

Баз. Змін.	c_i	b_i	3	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	$8+2t$	1	1	1	0
x_4	0	$-2+t$	–1 *	1	0	1
f	-	0	–3	–6	0	0

2. Виберемо значення $t=0$. У табл. 2.14,а не можна вибирати $t<-4$, оскільки це відповідає ознаці порожньої області, але наявність від'ємних оцінок $\Delta_1=-3$ і $\Delta_2=-6$ не дозволяє встановити дійсний інтервал T_1 існування порожньої області.

3[1]. Розв'язуємо двоїстим симплекс-методом. При $t=0$ в табл. 2.14,а розв'язувальний елемент: $a_{rk}=a_{21}=-1$. Результат перетворень подано у табл. 2.14,б.

Таблиця 2.14,б

Баз. змін.	c_i	b_i	3	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	$6+3t$	0	2 *	1	1
x_1	3	$2-t$	1	–1	0	–1
f	-	$6-3t$	0	–9	0	–3

При $t=0$ в табл. 2.14,а розв'язувальний елемент: $a_{rk}=a_{12}=2$. Результат перетворень подано в табл. 2.14,в.

Таблиця 2.14,в

Баз. змін.	c_i	b_i	3	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	6	$3+1.5t$	0	1	0.5	0.5
x_1	3	$5+0.5t$	1	0	0.5	–0.5
f	-	$33+10.5t$	0	0	4.5	1.5

В табл.2.14,в одержали оптимальний опорний план: $\mathrm{x}^{(1)*}=(5+0.5t;\ 3+1.5t;0;0)^T$ и. $f_{\max 1}=33+10.5t$. Переходимо до кроку 4.

4[1]. Визначаємо інтервал T_1 зміни параметра t, в якому оптимальний розв'язок $\mathrm{x}^{(1)*}$ є стійким. Використовуємо умову допустимості опорного плану:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 0.5t \geq 0, \\ x_2 = 3 + 1.5t \geq 0. \end{cases}.$$

Звідки маємо, що $t \in T_1 = [-2; \infty)$.

5[1]. Задаємо нове значення параметра так, щоб порушилася одна умова (табл. 2.14,в). У цьому випадку кінець інтервалу T_1 співпадає з початком наступного інтервалу. Нехай $t = -3$. Перейдемо до кроку 3.

3[2]. Виберемо розв'язувальний рядок за від'ємною базисною змінною $r = 1$, оскільки $x_2^{(1)*} = 3 + 1.5t < 0$ при $t < -2$. Розв'язувальний рядок не містить від'ємних елементів, це відповідає ознаці порожньої області (див. алгоритм двоїстого симплекс-методу). Ознака зберігається при всіх $t < -2$. Розв'язання закінчено. При $t \in T_2 = (-\infty; -2)$ область припустимих рішень порожня.

Таким чином, одержаний наступний розв'язок задачі по інтервалах:

$t \in T_1 = [-2; \infty)$: $\mathrm{x}^{(1)*} = (5 + 0.5t;\ 3 + 1.5t; 0; 0)^T$ і $f_{\max 1} = 33 + 10.5t$;

$t \in T_2 = (-\infty; -2)$: $ОДР = \varnothing$.

Приклад 2.14

Розв'язати параметричну задачу

$$f(\mathrm{x}, t) = (6 - t)x_1 + (3 + t)x_2 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 \leq (8 + t),$$
$$x_1 - x_2 \geq (2 - t),$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$
$$t \in (-\infty; +\infty).$$

Розв'язання

1. Відповідно до двоїстого симплекс-методу будуємо канонічну форму математичної моделі:

$$f(\mathrm{x}, t) = (6 - t)x_1 + (3 + t)x_2 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \quad = (8 + t),$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = -(2-t),$$
$$-x_1 + x_2 + x_5 = 4,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5;$$
$$t \in (-\infty; +\infty).$$

Заповнюємо симплекс-таблицю 2.15,а. Всі побудови виконуємо відповідно до алгоритму двоїстого симплекс-методу (див. розд. 2.3).

Таблиця 2.15,а

Баз. змін.	c_i	b_i	$6-t$	$3+t$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	$8+t$	1	1	1	0	0
x_4	0	$-2+t$	-1 *	1	0	1	0
x_5	0	4	-1	1	0	0	1
f	-	0	$-6+t$	$-3-t$	0	0	0

2. Виберемо значення $t = 0$.

3[1]. Розв'язуємо двоїстим симплекс-методом. При $t = 0$ в табл. 2.15,а розв'язувальний елемент: $a_{rk} = a_{21} = -1$. Результат перетворень подано в табл. 2.15,б.

Таблиця 2.15,б

Баз. змін.	c_i	b_i	$6-t$	$3+t$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	$6+2t$	0	2 *	1	1	0
x_1	$6-t$	$2-t$	1	-1	0	-1	0
x_5	0	$6-t$	0	0	0	-1	1
f	-	$12-8t+t^2$	0	-9	0	$-6+t$	0

В табл. 15,б виберемо розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{12} = 2$ за найменшою від'ємною оцінкою $\Delta_2 = -9$ і єдиним додатним елементом в розв'язувальному стовпці. Результат перетворень подано в табл. 2.15,в.

Таблиця 2.15,в

Баз. змін.	c_i	b_i	$6-t$	$3+t$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$3+t$	$3+t$	0	1	0.5	0.5 *	0
x_1	$6-t$	5	1	0	0.5	–0.5	0
x_5	0	$6-t$	0	0	0	–1 *	1
f	-	$39+t+t^2$	0	0	4.5	$-1.5+t$	0

В табл. 2.15,в виберемо розв'язувальний елемент $a_{rk}=a_{14}=0.5$ за від'ємною оцінкою $\Delta_4=-1.5+t$ і єдиному додатному елементу в розв'язувальному стовпці. Результат перетворень - у табл. 2.15,м.

Таблиця 2.15,г

Баз. змін.	c_i	b_i	$6-t$	$3+t$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	0	$6+2t$	0	2 *	1	1	0
x_1	$6-t$	$8+t$	1	1	1	0	0
x_5	0	$12+t$	0	2	1	0	1
f	-	$48-2t-t^2$	0	$3-2t$	$6-t$	0	0

В табл.2.15,г одержано опорний план:

$\mathrm{x}^{(1)*}=(8+t;\ 0;\ 0;\ 6+2t;\ 12+t)^T$ и. $f_{\max 1}=48-2t-t^2$.

Переходимо до кроку 4.

4[1]. Визначаємо інтервал T_1 зміни параметру t, в якому оптимальний розв'язок $\mathrm{x}^{(1)*}$ є стійким. Використовуємо умови допустимості і оптимальності опорного плану: $\begin{cases} 6+2t\ge 0, & 3-2t\ge 0, \\ 8+t\ge 0, & 6-t\ge 0, \\ 12+t\ge 0. \end{cases}$

Звідки маємо, що $t\in T_1=[-3;\ 1.5]$.

5[1]. Задамо нове значення параметру ліворуч (або праворуч) від T_1 так, щоб порушилася одна з умов (табл. 2.15,г). Нехай $t=2$. Перейдемо до кроку 3.

3^2. Розв'язуємо двоїстим симплекс-методом. При $t=2$ в табл. 2.15,г розв'язувальний елемент: $a_{rk}=a_{12}=2$. В результаті перетворень табл. 2.15,г одержимо табл.2.15,в, в якій при $t=2$ одержано оптимальний опорний план:

$$\mathrm{x}^{(2)*}=(5;\ 3+t;\ 0;\ 0;\ 6-t)^T,\ f_{\max 2}=39+t+t^2.$$

Переходимо до кроку 4.

4^2. Визначаємо інтервал T_2 зміни параметра t, в якому оптимальний розв'язок $\mathrm{x}^{(2)*}$ є стійким. Використовуємо умови допустимості і оптимальності опорного плану: $\begin{cases}5>0, & 4.5>0,\\ 3+t\ge 0, & -1.5+t\ge 0.\\ 6-t\ge 0,\end{cases}$

Звідки маємо, що $t\in T_2=[1.5;\ 6]$.

5^2. Задамо нове значення параметру $t>6$ так, щоб порушилася одна з умов (табл. 2.15,в). Нехай $t=7$. Перейдемо до кроку 3.

3^3. Розв'язуємо двоїстим симплекс-методом. При $t=7$ в табл. 2.15,у розв'язувальний елемент: $a_{rk}=a_{34}=-1$. В результаті перетворень табл. 2.15,в одержимо табл.2.15,д, в якій при $t=7$ одержимо оптимальний опорний план:

$$\mathrm{x}^{(3)*}=(2+0.5t;\ 6+0.5t;\ 0;\ -6+t;\ 0)^T;\ f_{\max 3}=30+8.5t.$$

Таблиця 2.15,д

Баз. змін.	c_i	b_i	$6-t$	$3+t$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$3+t$	$6+0.5t$	0	1	0.5	0	0.5
x_1	$6-t$	$2+0.5t$	1	0	0.5	0	–0.5
x_4	0	$-6+t$	0	0	0	1	–1
f	-	30+8.5t	0	0	4.5	0	$-1.5+t$

Переходимо до кроку 4.

4^3. Визначаємо інтервал T_3 зміни параметра t, в якому оптимальний розв'язок $\mathrm{x}^{(3)*}$ є стійким. Використовуємо умови допустимості і оптимальності опорного плану:

$$\begin{cases}2+0.5t\ge 0, & 6+0.5t\ge 0,\\ -1.5+t\ge 0, & -6+t\ge 0.\end{cases}$$

Звідки маємо, що $t \in T_3 = [6; \infty)$.

5^3. Задаємо нове значення параметра ліворуч від T_1 (табл. 2.15,г). Нехай $t = -4$. Перейдемо до кроку 3.

3^4. При $t = -4$ значення $x_4 < 0$. Тоді, в розв'язувальному рядку $r = 1$ немає від'ємних елементів, тому, відповідно до ознаки порожньої області припустимих розв'язків двоїстого симплекс-методу, при всіх $t < -3$ задача не має розв'язків. Розв'язання закінчено.

Таким чином, одержали наступний розв'язок задачі:

$t \in (-\infty; -3)$: $ОДР = \varnothing$.

$t \in [-3; 1.5]$: $\mathrm{x}^{(1)*} = (8 + t; 0; 0; 6 + 2t; 12 + t)^T$;

$f_{\max 1} = 48 - 2t - t^2$.

$t \in [1.5; 6]$: $\mathrm{x}^{(2)*} = (5;\ 3 + t;\ 0;\ 0;\ 6 - t)^T$;

$f_{\max 2} = 39 + t + t^2$.

$t \in [6; \infty)$: $\mathrm{x}^{(3)*} = (2 + 0.5t; 6 + 0.5t; 0; -6 + t; 0)^T$;

$f_{\max 3} = 30 + 8.5t$.

Зауваження 2.12.

Значення параметру t на кінцях підінтервалів називаються *критичними точками*. Значення цільової функції в критичних точках суміжних підінтервалів повинні бути рівним:

$t = 1.5$: $\mathrm{x}^{(1)*} = (9.5;\ 0;\ 0;\ 9;\ 13.5)$, $f_{\max 1} = 42.75$;

$\mathrm{x}^{(2)*} = (5;\ 4.5;\ 0;\ 0;\ 4.5)$, $f_{\max 2} = 42.75$;

- розв'язок в цій точці альтернативний (неоднозначний);

$t = 6$: $\mathrm{x}^{(2)*} = (5;\ 9;\ 0;\ 0;\ \underline{0})^T$, $f_{\max 2} = 81$;

$\mathrm{x}^{(3)*} = (5;\ 9;\ 0;\ \underline{0};\ 0)^T$, $f_{\max 3} = 81$;

- розв'язок в цій точці вироджений. Базисні змінні, які дорівнюють нулю, підкреслені.

2.4.3. Дробово-лінійні задачі

Постановка задачі

Задача, в якій цільова функція дробово-лінійна, а множина припустимих розв'язків X визначається лінійними обмеженнями і умовами невід'ємності змінних, називається *задачею дробово-лінійного програмування*:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \to \max ; \qquad (2.19,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \quad i = 1,...,k ; \qquad (2.19,\text{б})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i , \quad i = k+1,...,m ; \qquad (2.19,\text{в})$$

$$x_j \ge 0 , \quad j = 1,...,n , \qquad (2.19,\text{г})$$

де $\mathrm{c} = (c_1;...;c_n) \in R^n$ і $\mathrm{d} = (d_1;...;d_n) \in R^n$ – фіксовані вектори; c_0, d_0 – вільні члени цільової функції. Вважається, що знаменник цільової функції в X: $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 > 0$. Така умова не порушує загальний випадок задачі, оскільки в тому випадку, коли ця величина від'ємна, знак мінус можна віднести до чисельника. Випадок, коли знаменник $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = 0$ в межах області припустимих розв'язків, потребує додаткового дослідження. Система обмежень (2.19,б) - (2.19,в) і умови невід'ємності (2.19,г) такі ж, як і в загальній задачі лінійного програмування (2.1).

Стратегія розв'язання задачі

Задача (2.19) зводиться до задачі лінійного програмування за допомогою введення нових змінних.

Необхідно переконатися, що на припустимій множині X знаменник цільової функції (2.19,а) зберігає знак, тобто $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 > 0$ для всіх $\mathrm{x} \in X$. Вводиться нова змінна

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} . \qquad (2.20)$$

Очевидно, що $y_0 > 0$ при всіх $\mathrm{x} \in X$. Вводяться нові змінні: $y_j = y_0 x_j$, $j = 1,...,n$.

З новими змінними задача (2.19) приймає наступний вигляд:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=0}^{n} c_j y_j \to \max; \qquad (2.21,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = 1,...,k; \qquad (2.21,\text{б})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i y_0 \le 0, \quad i = k+1,...,m; \qquad (2.21,\text{в})$$

$$\sum_{j=0}^{n} d_j y_j = 1; \qquad (2.21,\text{г})$$

$$y_j \ge 0, \quad j = 0,1,...,n. \qquad (2.21,\text{д})$$

Задача (2.21) є задачею лінійного програмування, яка еквівалентна дробово-лінійній задачі (2.19), і розв'язується симплекс-методом.

Алгоритм

1. Ввести нову змінну $y_0 > 0$ (2.20) і відповідно ввести нові змінні $y_j = y_0 x_j$, $j = 1,...,n$, переходячи від дробово-лінійної задачі (2.19) до лінійної задачі (2.21).

2. Побудувати канонічну форму математичної моделі і початковий базисний розв'язок.

3. Розв'язати двоїстим симплекс-методом, визначивши оптимальний розв'язок $\mathrm{y}^* = (y_0^*;...;y_n^*)^T$ і $f_{\max}(\mathrm{y}^*)$.

4. Перейти до розв'язання вихідної дробово-лінійної задачі за допомогою рівностей $x_j^* = \dfrac{y_j^*}{y_0^*}$, $j = 1,...,n$ і $f_{\max}(\mathrm{x}^*) = f_{\max}(\mathrm{y}^*)$.

Приклад 2.15

Розв'язати наступну задачу дробово-лінійного програмування:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max;$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,4.$$

Розв'язання

1. Вводимо додаткову змінну $y_0 = \dfrac{1}{(x_1 + 2x_2 + 1)}$ і переходимо до нових змінних $y_j = y_0 x_j$, $j = 1,...,4$. Одержимо задачу лінійного програмування:

$$
\begin{aligned}
& f(\mathrm{y}) = 2y_1 - y_2 \to \max; \\
& y_1 - 2y_2 + y_3 \ - 2y_0 = 0, \\
& 2y_1 + y_2 \ + y_4 - 6y_0 = 0, \\
& y_1 + 2y_2 \ + \ y_0 = 1, \\
& y_j \ge 0, \quad j = 0,1,...,4 .
\end{aligned}
$$

2. Задача п. 1 – в канонічній формі, але не має базисного розв'язку. Для застосування симплекс-методу побудуємо базисний розв'язок, розв'яжемо систему обмежень відносно змінної y_0, вилучаючи цю змінну з першого і другого рівнянь. Це доцільно зробити, оскільки $y_0 > 0$ за означенням:

$$
\begin{aligned}
& f(\mathrm{y}) = 2y_1 - y_2 \ \to \max; \\
& 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ = 2, \\
& 8y_1 + 13y_2 + y_4 = 6, \\
& y_1 + 2y_2 \ + \ y_0 = 1, \\
& y_j \ge 0, \quad j = 0,1,...,4 .
\end{aligned}
$$

3. Розв'язуємо задачу симплекс-методом. Заповнюємо симплекс-таблицю і виконуємо необхідні перетворення для одержання результату.

Таблиця 2.16,а

Баз. змін.	c_i	b_i	2	–1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_0
y_3	0	2	3 *	2	1	1	0
y_4	0	6	8	13	0	0	0
y_0	0	1	1	2	0	0	1
f	-	0	–2	1	0	0	0

Розв'язувальний елемент: $a_{rk} = a_{11} = 3$ (див. розд. 2.3). Результат перетворення подано в табл. 2.16,б.

Таблиця 2.16,б

Баз. змін.	c_i	b_i	2	−1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_0
y_1	2	2/3	1	2/3	1/3	0	0
y_4	0	2/3	0	23/3	−8/3	1	0
y_0	0	1/3	0	4/3	−1/3	0	1
f	-	4/3	0	7/3	2/3	0	0

В табл. 2.16,б одержали опорний план:

$$y_0^* = \frac{1}{3},\ y_1^* = \frac{2}{3},\ y_2^* = 0,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = \frac{2}{3} \text{ і } f_{\max} = \frac{4}{3}.$$

4. Переходимо до розв'язання вихідної задачі згідно п. 4 алгоритму: $\mathrm{x}^* = (2;\ 0;\ 0;\ 2)^T$, $f_{\max} = \frac{4}{3}$.

Зауваження 2.13

Задачу (2.21) можна розв'язувати симплекс-методом зі штучним базисом (*М-задача*) (див. розд. 2.2).

2.4.4. Цілочисельні задачі. Метод Ґоморі

Постановка задачі

Знайти оптимальний цілочисельний опорний план задачі лінійного програмування, поданої в канонічній формі:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad (2.22,\text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,...,m; \qquad (2.22,\text{б})$$

$$x_j \ge 0,\quad j = 1,...,n; \qquad (2.22,\text{в})$$

$$x_j - \text{цілі},\ \ j = 1,...,n. \qquad (2.22,\text{г})$$

Зауваження 2.14

Вимога цілочисельності (2.22,г) може бути накладена не на всі змінні x_j, а лише на частину.

Стратегія розв'язання задачі

Задача (2.22) розв'язується двоїстим симплекс-методом без врахування цілочисельності змінних. Якщо отриманий оптимальний опорний план

$x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ є цілочисельним, то розв'язання задачі закінчено. В протилежному випадку подальші дії заключаються у формуванні шляхом побудови додаткових обмежень нової множини припустимих розв'язків, яка:

- містила б всі цілочисельні точки вихідної задачі (2.22);

- не містила б оптимального нецілочисельного розв'язку x^*.

Таким вимогам задовольняє *відтинання Ґоморі*:

$$\sum_{j=1}^{n} \{\alpha_{rj}\} x_j \geq \{\beta_r\}, \qquad (2.23)$$

де $\{\alpha_{rj}\}$ і $\{\beta_r\}$ – дробові частини відповідних коефіцієнтів r-го рівняння.

Теорема 2.11 (теорема Ґоморі про правильне відтинання).

Нехай задача лінійного програмування (2.22) *має розв'язок* x^*, *причому його* r*-а координата не є цілою, а припустима множина цілочисельної задачі* (2.22) *не порожня. Тоді обмеження* (2.23*) є правильним відтинанням припустимої множини* X *задачі* (2.22,а) – (2.22,в) [22].

Зауваження 2.15

Цілою частиною будь-якого дробового числа β_r є найбільше ціле число, що не перевершує цього числа, тоді дробова частина числа β_r: $\{\beta_r\} = \beta_r - [\beta_r]$, де $[\beta_r]$ – ціла частина числа. Отже, дробова частина будь-якого дробового числа завжди додатна, тобто $\{\beta_r\} > 0$. Наприклад, $\beta_r = -3.2$. Тоді $[\beta_r] = -4$ і $\{\beta_r\} = \beta_r - [\beta_r] = -3.2 - (-4) = 0.8$.

Таким чином, при реалізації методу Ґоморі в умову нецілочисельності задачі лінійного програмування послідовно додаються нові обмеження вигляду (2.23) доти, поки її розв'язок не стане цілочисельним або не буде виявлено, що цілочисельний розв'язок відсутній.

Алгоритм

1. Звести вихідні обмеження задачі (2.22) до цілочисельного вигляду, тобто до цілочисельних коефіцієнтів.

2. Визначити двоїстим симплекс-методом оптимальний опорний план задачі (2.22) без врахування цілочисельності змінних. Якщо розв'язання задачі є цілочисельним або задача не має розв'язку, то обчислення закінчено. В протилежному випадку перейти до кроку 3.

3. Вибрати в таблиці з оптимальним розв'язком нецілочисельну змінну з максимальною дробовою частиною $\{\beta_r\}$. Взяти дробові частини всіх коефіцієнтів $\{\alpha_{rj}\}$ і записати нове обмеження (2.23):

$$\sum_{j=1}^{n}\{\alpha_{rj}\}x_j \geq \{\beta_r\}.$$

4. Записати нове обмеження у вигляді рівності

$$-\sum_{j=1}^{n}\{\alpha_{rj}\}x_j + x_{n+1} = -\{\beta_r\}. \qquad (2.24)$$

Розширити останню симплекс-таблицю на один рядок і один стовпець і записати в неї додаткове обмеження (2.24). Перейти до кроку 2.

Зауваження 2.16

Алгоритм методу Ґоморі є скінченним, якщо множина припустимих розв'язків задачі (2.22) є обмеженою.

Приклад 2.16

Розв'язати цілочисельну задачу методом Ґоморі

$$f(\mathrm{x}) = -4x_1 - 5x_2 \to \max;$$
$$3x_1 + 5x_2 \geq 6,$$
$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$
$$x_1,\ x_2 - \text{цілі}.$$

Розв'язання

1. Вихідна задача містить цілочисельні коефіцієнти. Перейдемо до кроку 2.

2[1]. Розв'язуємо задачу двоїстим симплекс-методом. Для цього у відповідність алгоритму (див. розд. 2.3) будуємо канонічну форму математичної моделі:

$$f(\mathrm{x}) = -4x_1 - 5x_2 \to \max;$$
$$-3x_1 - 5x_2 + x_3 = -6,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 5,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,...,4.$$

Розв'язання подано в табл. 2.17,а і 2.17,б.

Таблиця 2.17,а

Баз. змін	c_i	b_i	–4	–5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	–6	–3	–5 *	1	0
x_4	0	5	1	1	0	1
	f	0	4	5	0	0

Таблиця 2.17,б

Баз. змін.	c_i	b_i	–4	–5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	–5	1.2	0.6	1	–0.2	0
x_4	0	3.8	0.4	0	0.2	1
	f	–6	1	0	1	0

В табл. 2.17,б одержали оптимальний опорний план $\mathrm{x}^* = (0; 1.2; 0; 3.8)^T$, який не є цілочисельним. Перейдемо до кроку 3.

3[1]. Виберемо другий рядок, оскільки змінна x_4 має найбільшу дробову частину $\{b_4\} = 0.8$. На підставі другого рядка будуємо додаткове обмеження (2.23):

$$0.4x_1 + 0.2x_3 \geq 0.8 .$$

4[1]. Будуємо нове обмеження у вигляді рівності (2.24)

$$-0.4x_1 - 0.2x_3 + x_5 = -0.8$$

і дописуємо в симплекс-таблицю (табл. 2.18,а).

Таблиця 2.18,а

Баз. змін.	c_i	b_i	–4	–5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	–5	1.2	0.6	1	–0.2	0	0
x_4	0	3.8	0.4	0	0.2	1	0
x_5	0	–0.8	–0.4 *	0	–0.2	0	1
f	–	–6	1	0	1	0	0

Переходимо до кроку 2.

2^2. Розв'язуємо задачу двоїстим симплекс-методом. Виберемо розв'язувальний елемент $a_{rk} = a_{31} = -0.4$. Результат перетворення подано у табл. 2.18,б.

Таблиця 2.18,б

Баз. змін.	c_i	b_i	–4	–5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	–5	0	0	1	–1	0	1.5
x_4	0	3	0	0	0	1	1
x_1	–4	2	1	0	0.5	0	–2.5
f	–	–8	0	0	0.5	0	2.5

Одержали оптимальний цілочисельний розв'язок $x_1^* = 2$, $x_2^* = 0$, $f_{\max} = -8$.

Зауваження 2.17

В методі Ґоморі ознакою порожньої області припустимих розв'язків задачі (2.22) є порушення умови $\sum_{j=1}^{n} \{\alpha_{rj}\} x_j \geq \{\beta_r\}$, тобто при $\{\beta_r\} > 0$ всі $\{\alpha_{rj}\} = 0$, $j = 1,...,n$.

2.4.5. Цілочисельні задачі. Метод розгалужень та границь

Стратегія розв'язання задачі

В *методі розгалужень та границь*, як і в методі Гоморі, процес розв'язання цілочисельної задачі (2.22) починається з розв'язання неперервної задачі лінійного програмування (2.22,а) – (2.22,в) двоїстим симплекс-методом. Якщо отриманий при цьому оптимальний опорний план x^0 не задовольняє умові цілочисельності (2.22,г), то для продовження розв'язання вихідна множина припустимих розв'язків X^0 розбивається на дві взаємно непересічні підмножини X_1^1 і X_2^1 за допомогою додаткових обмежень. Нехай деяка змінна x_r $(1 \leq r \leq n)$ в опорному плані x^0 не є цілочисельною, тоді значення x_r^0 варто зменшити до найближчого цілого значення і в задачу (2.22) ввести одне із двох додаткових обмежень, що утворять області припустимих розв'язків Y^1 і Y^2:

$$Y^1 = \left\{ \mathrm{x} : x_r \le [x_r^0] \right\}; \qquad Y^2 = \left\{ \mathrm{x} : x_r \ge [x_r^0] + 1 \right\}.$$

Маємо дві підзадачі із цільовою функцією (2.22,а) і множинами припустимих розв'язків відповідно:

$$X_1^1 = \left\{ \mathrm{x} : \mathrm{x} \in \left(X^0 \bigcap Y^1 \right) \right\}, \quad X_2^2 = \left\{ \mathrm{x} : \mathrm{x} \in \left(X^0 \bigcap Y^2 \right) \right\};$$

$$X_1^1 \bigcup X_2^2 = X^0, \quad X_1^1 \bigcap X_2^2 = \varnothing.$$

Кожна з підзадач розв'язується двоїстим симплекс-методом. Якщо їхні оптимальні розв'язки нецілочисельні, то кожна з підзадач аналогічним способом розбивається на дві підзадачі, що задовольняють наступним умовам:

$$X_1^1 = X_{1,1}^3 \bigcup X_{1,2}^4, \quad X_{1,1}^3 \bigcap X_{1,2}^4 = \varnothing;$$

$$X_2^2 = X_{2,1}^5 \bigcup X_{2,2}^6, \quad X_{2,1}^5 \bigcap X_{2,2}^6 = \varnothing \text{ і т.д.}$$

Процес побудови підзадач, що називається *розгалуженням*, можна подати у вигляді деякого *бінарного дерева* (наприклад, рис. 2.4), що складається із множини *вершин* і з'єднуючих їх віток. Кожній вітці дерева, що з'єднує дві вершини, відповідає додаткове обмеження. Множину припустимих розв'язків X_ν^k визначено k-ю вершиною дерева $(k = 0,1,2,...)$. Нумерація вершин залежить від способу побудови дерева. Масив ν – упорядкована множина індексів, що визначають послідовність віток дерева від початкової вершини до однієї з кінцевих вершин, при цьому числа 1 (ліва вітка) або 2 (права вітка) відповідають певному виду обмежень.

Розгалуження з деякої вершини закінчується (проводиться *межа*), якщо виконується одна з наступних умов:

1. В вершині s отримано цілочисельний розв'язок x^s на множині X_ν^s і значення $f_s = \max f(\mathrm{x})$, $\forall \mathrm{x} \in X_\nu^s$.

2. Одержано такий нецілочисельний розв'язок x^s на множині X_ν^s, що $f_s = \max f(\mathrm{x})$, $\forall \mathrm{x} \in X_\nu^s$ не перевершує значення поточної оцінки f^*, одержаної для попередніх цілочисельних розв'язків. В цьому випадку подальший пошук розв'язання вихідної задачі на підмножині X_ν^s не має сенсу, оскільки введення додаткових обмежень не може поліпшити розв'язок.

3. Множина X_ν^s є порожньою.

Вершини, що задовольняють одній з умов 1-3, називаються *кінцевими* (вершини 3, 4, 5, 6, рис. 2.4). Вершини, з яких може бути зроблене розгалуження, називаються *активними* (вершини 0, 1, 2, рис. 2.4).

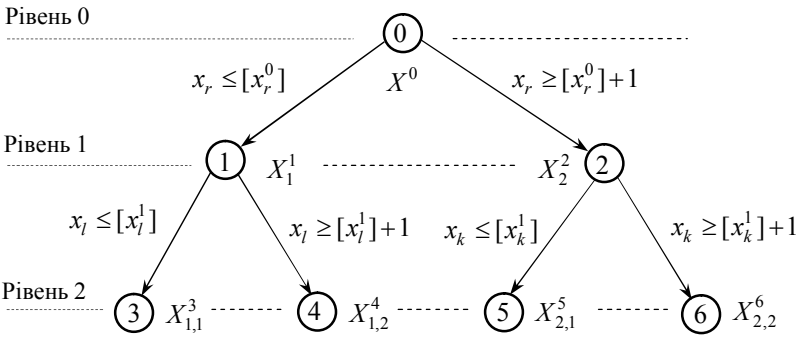


Рис. 2.4

Процес розгалуження триває доти, поки залишається хоча б одна активна вершина. По закінченні процедури розгалуження можна вказати розв'язок вихідної задачі (2.22) – це те зі знайдених цілочисельних розв'язків $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^{k*}$, $f_{\max} = f(\mathrm{x}^{k*})$, для якого значення цільової функції є максимальним.

Один зі способів побудови бінарного дерева розв'язків припускає використання так званої *процедури повернення* з кінцевих вершин. Ця процедура дозволяє перейти з кінцевої вершини в іншу вершину того ж рівня або до одного з попередніх рівнів.

***Процедура повернення*:**

1) Якщо останній елемент масиву ν в кінцевій вершині k є «1», то цей елемент заміняється елементом «2», що означає перехід у вершину $k = k+1$ суміжної (правої) вітки вершини $k-1$ із заміною останнього обмеження першого виду на обмеження другого виду. Наприклад (рис. 2.5), при переході з кінцевої вершини $X_{1,2,1}^6$ в вершину $X_{1,2,2}^7$ масив $\nu = \{1;2;1\}$ перетвориться в масив $\nu = \{1;2;2\}$.

2) Якщо масив ν закінчується одним або декількома елементами «2», то ці елементи відкидаються до першого праворуч елемента «1», який заміняється елементом «2», що визначає видалення із системи обмежень відповідних доповнених обмежень і заміну обмеження першого виду на обмеження другого виду. Це відповідає переходу

з вершини k в вершину $k+1$. Наприклад (рис. 2.5), при переході з кінцевої вершини третього рівня $X^7_{1,2,2}$ в вершину першого рівня X^8_2, а масив $\nu = \{1;2;2\}$ перетвориться в масив $\nu = \{2\}$.

3) Якщо масив ν містить тільки елементи «2», то дерево не має активних вершин. Отже, дерево побудоване і розв'язок задачі визначено. Наприклад (рис. 2.5), кінцева вершина $X^{14}_{2,2,2}$ завершує побудову бінарного дерева розв'язків, оскільки $\nu = \{2;2;2\}$.

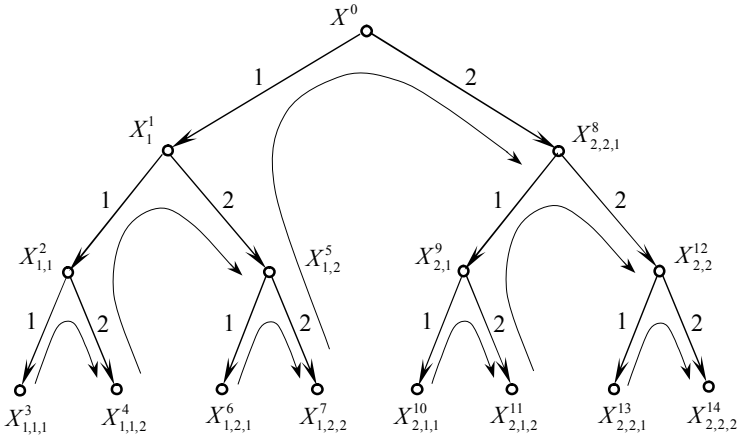


Рис. 2.5

В наступному алгоритмі методу розгалужень та границь використовується процедура повернення.

Алгоритм

1. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу (2.22) не враховуючи вимоги цілочисельності.

Якщо задача не має розв'язків (область припустимих розв'язків порожня або необмежена), то *обчислення закінчити*.

Якщо розв'язок x^0 – цілочисельний оптимальний опорний план, то *обчислення закінчити.* Вважати $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^0$, $f_{\max} = f(\mathrm{x}^*)$.

Якщо розв'язок x^0 – не є цілочисельним оптимальним опорним планом, то перейти до кроку 2.

2. Вибрати змінну x_j $(1 \le j \le n)$ з не цілочисельним значенням, додати обмеження першого виду $x_j \le [x_j^0]$. Вважати $k = 1$,

$\mathrm{x}^k = \mathrm{x}^0$, $f^* = -M$ (верхня границя, M – як завгодно велике число). Перейти до кроку 3.

3. Розв'язати підзадачу двоїстим симплекс-методом (в звичайній або модифікованій формі). Перейти до кроку 4.

4. Проаналізувати розв'язок. Якщо x^k не є цілочисельним, то перейти до кроку 5, інакше – до кроку 6.

5. Побудувати нову підзадачу:

– якщо $f(\mathrm{x}^k) \geq f^*$ (вершина *активна*), то вибрати x_j $(1 \leq j \leq n)$ з нецілочисельним значенням, додати обмеження першого виду і елемент «1» в кінець масиву v. Вважати $k = k + 1$ і перейти до кроку 3;

– якщо $f(\mathrm{x}^k) \leq f^*$ (вершина *кінцева*, оскільки додаткове обмеження не поліпшить розв'язок x^k), то виконати *процедуру повернення*. Якщо побудовано *повне* дерево, то перейти до кроку 7, інакше – до кроку 3.

6. Проаналізувати кінцеву вершину:

– якщо розв'язок x^k є цілочисельним (вершина *кінцева*) і $f(\mathrm{x}^k) \geq f^*$, то вважати $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$ і $f^* = f(\mathrm{x}^k)$. Виконати *процедуру повернення*. Якщо побудовано *повне* дерево, то перейти до кроку 7, інакше перейти до кроку 3;

– якщо задача не має розв'язків (область припустимих розв'язків порожня або необмежена), то виконати *процедуру повернення*. Якщо побудовано *повне* дерево, то перейти до кроку 7, інакше – до кроку 3.

7. Отримано оптимальний розв'язок x^* задачі (2.22) і $f_{\max} = f(\mathrm{x}^*)$.

Зауваження 2.18

1. Процедура повернення розглянута окремо для того, щоб виклад алгоритму зробити більш компактним.

2. В пункті 2 алгоритму можна використовувати різні правила вибору (пріоритет) нецілочисельної змінної x_j, щодо якої виконується розгалуження. Наприклад, вибір змінної або з мінімальним індексом j, або з максимальною дробовою частиною, або з урахуванням вагового коефіцієнта c_j в цільовій функції і т.д.

В тому випадку, коли задача містить тільки дві змінні, то для наочності розв'язання можна використовувати графічний метод.

В процесі побудови дерева розв'язків число нерівностей в системі обмежень може істотно збільшуватись. Це призводить до збільшення розмірів симплекс-таблиць. Тому доцільно використовувати ***модифіковану форму перетворень методу Жордана-Гауса***, зменшивши тим самим кількість обчислень і розміри таблиць. В цьому методі з таблиці вилучаються стовпці базисних змінних і перетворення виконуються відповідно до наступного алгоритму.

Алгоритм (перерахування таблиць за допомогою модифікованого методу Жордана-Гауса):

1. Перетворення розв'язувального стовпця:

– всі елементи розв'язувального стовпця діляться на розв'язувальний елемент $a_{rk} \neq 0$ із протилежним знаком, тобто

$$a'_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{rk}},\ i \neq r;$$

– розв'язувальний елемент перераховується за формулою: $a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}}$.

2. Перетворення інших елементів таблиці:

– розв'язувальний рядок перераховується за формулами (2.3,а):

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}},\ (j \neq k),\quad b'_r = \frac{b_r}{a_{rk}};$$

– інші рядки перераховуються за формулами (2.3,б):

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}},\ (j \neq k),\quad b'_i = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}},\ (i \neq r).$$

Приклад 2.17

Дано наступну систему рівнянь, яка розв'язана відносно невідомих $x_1,\ x_3,\ x_4$:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_5 = -6, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 12, \\ x_1 + 4x_2 - x_5 = 4. \end{cases}$$

Виконати перетворення однократного заміщення.

Розв'язання

Заповнимо вихідну таблицю 2.19,а в модифікованій формі і виберемо розв'язувальний елемент (довільно) $a_{rk} = a_{11} = 2$.

Таблиця 2.19,а

Баз. змін.	x_2	x_5	b_i
x_3	2 *	1	–6
x_4	3	1	12
x_1	4	–1	4

Таблиця 2.19,б

Баз. змін.	x_3	x_5	b_i
x_2	0.5	0.5	–3
x_4	–1.5	–0.5	21
x_1	–2	–3	16

Результат перетворення за формулами модифікованого методу Жордана-Гауса подано в таблиці 2.19,б.

Приклад 2.18

Розв'язати методом розгалужень та границь наступну цілочисельну задачу лінійного програмування:

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max\ ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_2 \le 9, \quad x_1, x_2 \ge 0\ ;\ x_1, x_2 \in Z\ . \\ x_1 \le 3; \end{cases}$$

Розв'язання

1. Розв'язуємо вихідну задачу двоїстим симплекс-методом в модифікованій формі без обліку умови цілочисельності.

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max\ ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\ ,\quad j = 1,...,5\ .$$

Розв'язання подано в таблицях 2.20.

Таблиця 2.20,а

Баз. змін.	x_1	x_2	b_i
x_3	2	2	7
x_4	0	4 *	9
x_5	1	0	3
f	–1	–3	0

Таблиця 2.20,б

Баз. змін.	x_1	x_4	b_i
x_3	2 *	–0.5	2.5
x_2	0	0.25	2.25
x_5	1	0	3
f	–1	0.75	6.75

Таблиця 2.20,в

Баз. змін.	x_3	x_4	b_i
x_1	0.5	-0.25	1.25
x_2	0	0.25	2.25
x_5	–0.5	0.25	1.75
f	0.5	0.5	8

В таблиці 2.20,в одержано нецілочисельний оптимальний опорний план $\mathrm{x}^0 = (1.25;\ 2.25;\ 0;\ 0;\ 1.75)^T$. Переходимо до кроку 2.

2. Вибираємо змінну $x_1 = 1.25$ і будуємо додаткове обмеження $x_1 \le [1.25] = 1$, що відповідає лівої вітці початкової вершини дерева. В вихідну задачу додаємо обмеження $x_1 \le 1$. Вважаємо $k = 1$, $\nu = \{1\}$, $f^* = -10^{10}$. Переходимо до кроку 3.

3[1]. Розв'язуємо нову задачу 1 (рис. 2.6) двоїстим симплекс-методом з додатковим обмеженням $x_1 + x_6 = 1$, $x_6 \ge 0$:

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_6 = 1; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = 1,...,6.$$

Розв'язання цієї задачі подано в таблицях 2.21.

Таблиця 2.21,а

Баз. змін.	x_1	x_2	b_i
x_3	2	2	7
x_4	0	4 *	9
x_5	1	0	3
x_6	1	0	1
f	–1	–3	0

Таблиця 2.21,б

Баз. змін.	x_1	x_4	b_i
x_3	2	–0.5	2.5
x_2	0	0.25	2.25
x_5	1	0	3
x_6	1 *	0	1
f	–1	0.75	6.75

Таблиця 2.21,в

Баз. змін.	x_6	x_4	b_i
x_3	–2	–0.5	0.5
x_2	0	0.25	2.25
x_5	–1	0	2
x_1	1	0	1
f	1	0.75	7.75

В таблиці 2.21,в отримано нецілочисельний оптимальний опорний план $\mathrm{x}^1 = (1;\ 2.25;\ 0.5;\ 0;\ 2;\ 0)^T$. Переходимо до кроку 4.

4[1]. Розв'язок $\mathrm{x}^1 = (1;\ 2.25;\ 0.5;\ 0;\ 2;\ 0)^T$ не є цілочисельним, тому переходимо до кроку 5.

5[1]. Умова $f(\mathrm{x}^k) \ge f^*$ $(f(\mathrm{x}^1) = 7.75 \ge f^*)$ виконується. Вибираємо змінну $x_2 = 2.25$ і будуємо додаткове обмеження, що відповідає лівої вітці вершини 1 дерева (рис. 2.6). В поточну підзадачу

додаємо обмеження $x_2 \le [2.25] = 2$, тобто $x_2 \le 2$ або в канонічній формі $x_2 + x_7 = 2$, $x_7 \ge 0$ і вважаємо $k = k + 1 = 2$, $\nu = \{1;1\}$:

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_6 = 1, \\ x_2 + x_7 = 2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,7.$$

Переходимо до кроку 3.

3^2. Розв'язуємо задачу 2 двоїстим симплекс-методом. Розв'язання цієї задачі подано в таблицях 2.22.

Таблиця 2.22,а

Баз. змін.	x_1	x_2	b_i
x_3	2	2	7
x_4	0	4	9
x_5	1	0	3
x_6	1	0	1
x_7	0	1 *	2
f	–1	–3	0

Таблиця 2.22,б

Баз. змін.	x_6	x_7	b_i
x_3	2	–2	3
x_4	0	–4	1
x_5	1	0	3
x_1	1 *	0	1
x_2	0	1	2
f	–1	3	6

Таблиця 2.22,в

Баз. змін.	x_6	x_7	b_i
x_3	–2	–2	1
x_4	0	–4	1
x_5	–1	0	2
x_1	1	0	1
x_2	0	1	2
f	1	3	7

В таблиці 2.22,в отримано оптимальний розв'язок $\mathrm{x}^2 = (1;2;1;1;2;0;0)^T$. Переходимо до кроку 4.

4^2. Розв'язок $\mathrm{x}^2 = (1;2;1;1;2;0;0)^T$ – оптимальний цілочисельний (кінцева вершина), тому переходимо до кроку 6.

6^2. Одержали оптимальний цілочисельний опорний план $\mathrm{x}^2 = (1;2;1;1;2;0;0)^T$ і $f(\mathrm{x}^k) \ge f^*$. Отже, вершина 2 – кінцева (рис. 2.6), проводимо межу. Вважаємо $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^2$, $f^* = f(\mathrm{x}^2) = 7$. Виконуємо процедуру повернення: з лівої вітки з вершини 2 переходимо на

праву вітку в вершину 3, вводячи обмеження $x_2 \geq [2.25]+1=3$ замість обмеження $x_2 \leq 2$. Вважаємо $k=k+1=3$, $\nu=\{1;2\}$. Переходимо до кроку 3.

3^3. Розв'язуємо отриману задачу з додатковим обмеженням $x_2 \geq 3$ в канонічній формі $x_2 - x_7 = 3$, $x_7 \geq 0$:

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_6 = 2, \\ -x_2 + x_7 = -3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,...,7.$$

Розв'язання цієї задачі подано в таблицях 2.23.

Таблиця 2.23,а

Баз. змін.	x_1	x_2	b_i
x_3	2	2	7
x_4	0	4	9
x_5	1	0	3
x_6	1	0	1
x_7	0	–1 *	–3
f	–1	–3	0

Таблиця 2.23,б

Баз. змін.	x_6	x_7	b_i
x_3	2	2	1
x_4	0	4	–3
x_5	1	0	3
x_1	1	0	1
x_2	0	–1	3
f	–1	–3	9

Переходимо до кроку 4.

4^3. Задача 3 (рис. 2.6) не має розв'язку, оскільки таблиця 2.23,б містить ознаку порожньої області припустимих розв'язків: другому рядку таблиці відповідає рівняння $x_4 + 4x_7 = -3$, яке не має розв'язку при $x_4 \geq 0$ і $x_7 \geq 0$. Вершина 3 (рис. 2.6) – кінцева вершина (проводимо межу). Виконуємо процедуру повернення: відкидаємо друге додаткове обмеження, перше додаткове обмеження $x_1 \leq 1$ заміняємо обмеженням $x_1 \geq 2$, вважаємо $k=k+1=4$, $\nu=\{2\}$. Переходимо до кроку 3.

3[4]. Розв'язуємо отриману задачу двоїстим симплекс-методом. Розв'язання цієї задачі подано в таблицях 2.24.

$$f(\mathrm{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_5 = 3, \\ -x_1 + x_6 = -2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,...,6.$$

Таблиця 2.24,а

Баз. змін.	x_1	x_2	b_i
x_3	2	2	7
x_4	0	4	9
x_5	1	0	3
x_6	–1 *	0	–2
f	–1	–3	0

Таблиця 2.24,б

Баз. змін.	x_6	x_2	b_i
x_3	2	2 *	3
x_4	0	4	9
x_5	1	0	1
x_1	–1	0	2
f	–1	–3	2

Таблиця 2.24,в

Баз. змін.	x_6	x_3	b_i
x_2	1	0.5	1.5
x_4	–4	–2	3
x_5	1	0	1
x_1	–1	0	2
f	2	1.5	6.5

В таблиці 2.24,в одержано нецілочисельний оптимальний опорний план $\mathrm{x}^4 = (2;\ 1.5;\ 0;\ 3;\ 1;\ 0)^T$ і $f(\mathrm{x}^4) = 6.5$. Переходимо до кроку 4.

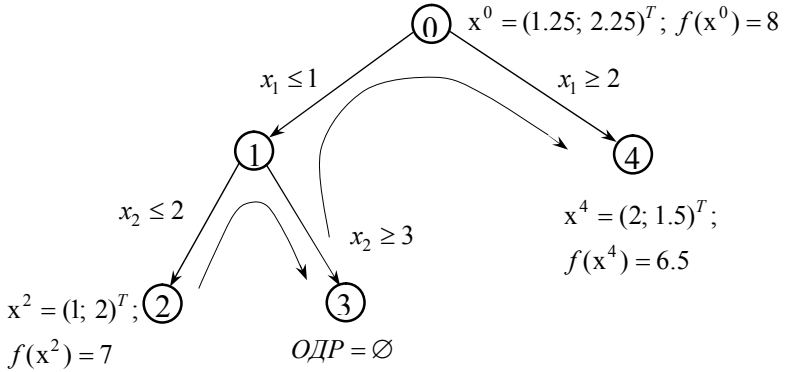


Рис. 2.6

4^4. Розв'язок не є цілочисельним, переходимо до кроку 5.

5^4. Оскільки розв'язок не є цілочисельним і $f(\mathrm{x}^4) = 6.5 < f^* = 7$, то вершина 4 є кінцевою (проводимо межу), оскільки задача 4 не може мати цілочисельний розв'язок із кращим значенням цільової функції, ніж f^*. Дерево повністю побудовано, оскільки відповідно до процедури повернення масив $\nu = \{2\}$ не містить елементів 1. Переходимо до кроку 7.

7. Одержано оптимальний цілочисельний опорний план:

$\mathrm{x}^* = (1;2)^T$, $f_{\max} = f(\mathrm{x}^*) = 7$.

Вихідна задача має дві змінні. Тому можна розв'язку симплекс-методом дати геометричну інтерпретацію, тобто розв'язати задачу графічним методом.

Введемо наступні позначення області припустимих розв'язків вихідної задачі:

$$X^0 = \{\, \mathrm{x} :\ 2x_1 + 2x_2 \le 7;\ 4x_2 \le 9;\ x_1 \le 3;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \in Z \,\}.$$

Тоді вихідну задачу можна записати так:

$$f(\mathrm{x}^*) = \max_{\mathrm{x} \in X^0} (x_1 + 3x_2).$$

Розв'яжемо цю задачу графічним методом без врахування умови цілочисельності, одержимо: $\mathrm{x}^0 = (1.25;\ 2.25)^T$, $f(\mathrm{x}^0) = 8$ (рис. 2.7, а).

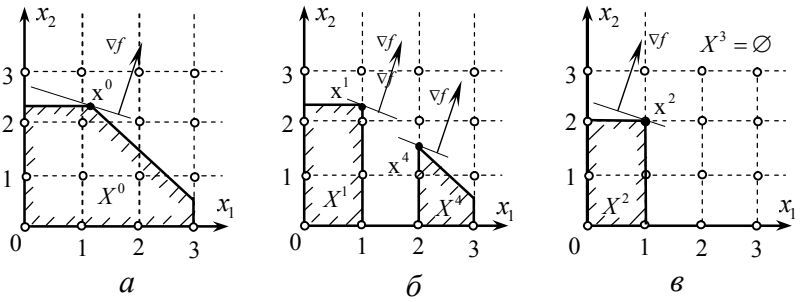


Рис. 2.7

Відповідно до алгоритму методу розгалужень та границь вводимо додаткові обмеження відносно нецілочисельної змінної $x_1 = 1.25$:

– обмеження $x_1 \le [1.25] = 1$, якому відповідає область припустимих розв'язків $Y^1 = \{\mathrm{x} : x_1 \le 1\}$;

– обмеження $x_1 \ge [1.25] + 1 = 2$, якому відповідає область припустимих розв'язків $Y^4 = \{\mathrm{x} : x_1 \ge 2\}$ (збережемо одержану нумерацію вершин дерева (рис. 2.6)).

Таким чином, одержуємо дві підзадачі:

– задачу 1 $f(\mathrm{x}^*) = \max\limits_{\mathrm{x} \in X^1}(x_1 + 3x_2)$, де $X^1 = \{\mathrm{x} : X^0 \cap Y^1\}$.

Розв'язання цієї задачі зображено на рис. 2.7,б: $\mathrm{x}^1 = (1;\ 2.25)^T$, $f(\mathrm{x}^1) = 7.75$;

– задачу 4 $f(\mathrm{x}^*) = \max\limits_{\mathrm{x} \in X^4}(x_1 + 3x_2)$, де $X^1 = \{\mathrm{x} : X^0 \cap Y^1\}$.

Розв'язання цієї задачі зображено на рис. 2.7,б: $\mathrm{x}^4 = (1.5;\ 2)^T$, $f(\mathrm{x}^4) = 6.5$.

Розв'язання задач 1 і 4 не є цілочисельним. Тому задачу 1 розбиваємо на дві підзадачі відносно змінної $x_2 = 2.25$, вводячи додаткові обмеження:

– обмеження $x_2 \le [2.25] = 2$, якому відповідає область припустимих розв'язків $Y^2 = \{\mathrm{x} : x_2 \le 2\}$;

– обмеження $x_2 \ge [2.25] + 1 = 3$, якому відповідає область припустимих розв'язків $Y^3 = \{\mathrm{x} : x_2 \ge 3\}$.

Одержуємо дві підзадачі:

– задачу 2: $f(\mathrm{x}^*) = \max\limits_{\mathrm{x} \in X^2}(x_1 + 3x_2)$, де $X^2 = \{\mathrm{x} : X^1 \cap Y^2\}$.

Розв'язання цієї задачі зображено на рис. 2.7,в: $\mathrm{x}^2 = (1;\ 2)^T$, $f(\mathrm{x}^2) = 7$;

– задачу 3: $f(\mathrm{x}^*) = \max\limits_{\mathrm{x} \in X^3}(x_1 + 3x_2)$, де $X^3 = \{\mathrm{x} : X^1 \cap Y^3\}$. Ця задача не має розв'язків, оскільки область припустимих значень порожня (рис. 2.7,б).

Задачі 2 і 3 відповідають кінцевим вершинам дерева (рис. 2.6).

Задача 4 має нецілочисельний розв'язок (рис. 2.7,б): $\mathrm{x}^4 = (1.5;\ 2)^T$, $f(\mathrm{x}^4) = 6.5$. Цій задачі відповідає кінцева вершина, оскільки в задачі 2 одержано цілочисельний розв'язок і $f(\mathrm{x}^2) > f(\mathrm{x}^4)$, тому розбиття задачі 4 на підзадачі не може поліпшити розв'язок. Таким чином, в задачі 2 отримано оптимальний розв'язок: $\mathrm{x}^* = (1;\ 2)^T$, $f_{\max} = f(\mathrm{x}^*) = 7$.

Задачі для самостійного розв'язування

Задачі лінійного програмування 1-5 розв'язати
- *графічним методом;*
- *симплекс-методом Данцига;*
- *двоїстим симплекс-методом.*

1. $f(\mathrm{x}) = -3x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$;

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 6, \\ x_1 + x_3 &= 4, \\ x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_j \ge 0, &\quad j = 1,2,3. \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1^* = 2.4$, $x_2^* = 3.6$, $x_3^* = 1.6$; $f_{\max}(\mathrm{x}) = 23.2$.

2. $f(\mathrm{x}) = 9x_1 + x_2 - x_3 \to \min$;

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 8, \\ x_1 + 2x_2 &\ge 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,&\quad x_1 - \text{довільна змінна.} \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1^* = -2$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 0$; $f_{\min}(\mathrm{x}) = -15$.

3. $f(\mathrm{x}) = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$;

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 &\le 2, \\ x_j \ge 0, &\quad j = 1,2,3. \end{aligned}$$

Відповідь: $\mathrm{x}^{(1)*} = (0;\ 10;\ 24)^T$; $\mathrm{x}^{(2)*} = (4;\ 2;\ 12)^T$;

$f_{\max}(\mathrm{x}) = 38$.

Загальний розв'язок у вигляді опуклої комбінації точок $\mathrm{x}^{(1)*}$ і $\mathrm{x}^{(2)*}$:

$$\mathrm{x}^{*} = (4\lambda_2;\ 10\lambda_1 + 2\lambda_2;\ 24\lambda_1 + 12\lambda_2)^{T},\ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_1 \geq 0,\ \ \lambda_2 \geq 0.$$

4. $f(\mathrm{x}) = -x_1 + 6x_2 + x_3 \to \max$;

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 &\geq 8, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &= 6, \\ x_j \geq 0,\ \ j &= 1,2,3. \end{aligned}$$

Відповідь: задача не має розв'язку, оскільки область припустимих розв'язків порожня.

5. $f(\mathrm{x}) = -3x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$;

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4, \\ x_j \geq 0,\ \ j &= 1,2,3. \end{aligned}$$

Відповідь: задача не має розв'язку, оскільки область припустимих розв'язків не обмежена і $f_{\max}(\mathrm{x}) \to \infty$.

Транспортні задачі 6-8 розв'язати методом потенціалів. Початковий опорний план побудувати

- методом північно-західного кута;

- методом мінімальної вартості.

6. Дано запаси вантажу $a_1 = 100$, $a_2 = 200$, $a_3 = 150$ і потреби $b_1 = 150$, $b_2 = 100$, $b_3 = 150$, $b_4 = 50$. Знайти оптимальний план x^{*} доставки вантажу від постачальників споживачам при мінімальній сумарній вартості витрат. Відома матриця $\mathrm{C} = \{c_{ij}\}_{j=1,\ldots,4}^{i=1,2,3}$ вартості перевезення одиниці вантажу з пункту a_i, $i = 1,2,3$ до пункту b_j, $j = 1,2,3,4$: $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\mathrm{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 50 \\ 100 & 0 & 100 & 0 \\ 50 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f_{\min}(\mathrm{x}) = 1750$.

7. Дано запаси вантажу $a_1 = 100$, $a_2 = 60$, $a_3 = 150$ і потреби $b_1 = 50$, $b_2 = 120$, $b_3 = 80$. Знайти оптимальний план x^* доставки вантажу від постачальників споживачам при мінімальній сумарній вартості витрат. Відома матриця $\mathrm{C} = \{c_{ij}\}_{j=1,2,3}^{i=1,2,3}$ вартості перевезення одиниці вантажу c_{ij} з пункту a_i, $i = 1,2,3$ у пункт b_j, $j = 1,2,3$:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\mathrm{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 \\ 50 & 100 & 0 \end{pmatrix}$;

Запаси п. a_2 не використані. $f_{\min}(\mathrm{x}) = 500$.

8. Дано запаси вантажу $a_1 = 160$, $a_2 = 160$ і потреби $b_1 = 80$, $b_2 = 120$, $b_3 = 180$, $b_3 = 40$. Знайти оптимальний план x^* доставки вантажу від постачальників споживачам при мінімальній сумарній вартості витрат. Відома матриця $\mathrm{C} = \{c_{ij}\}_{j=1,..,4}^{i=1,2}$ вартості перевезення одиниці вантажу з пункту a_i, $i = 1,2$ у пункт b_j, $j = 1,2,3,4$:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\mathrm{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 140 & 20 & 0 \\ 80 & 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}$;

Пункти b_3 й b_4 не одержать 60 і 40 (од.); $f_{\min}(\mathrm{x}) = 820$.

Параметричні задачі 9-12 розв'язати з використанням двоїстого симплекса-методу.

9. $f(\mathrm{x},t) = (-6+t)x_1 + (8+t)x_2 \to \max$;

$$2x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$x_1 + x_2 \le 20,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;\quad t \in (-\infty;\infty).$$

Відповідь:

$t \in (-\infty;-22]:\ \mathrm{x}^{(1)*} = (2;\ 0)^T;\ f_{\max(1)}(\mathrm{x}) = -12 + 2t;$

$t \in [-22;-8]:\ \mathrm{x}^{(2)*} = (0;\ 4)^T;\ f_{\max(2)}(\mathrm{x}) = 32 + 4t;$

$t \in [-8;\ 1.33]:\ \mathrm{x}^{(3)*} = (0;\ 5)^T;\ f_{\max(3)}(\mathrm{x}) = 40 + 5t;$

$t \in [1.33;\ \infty):\ \mathrm{x}^{(4)*} = (0;\ 5)^T;\ f_{\max(4)}(\mathrm{x}) = 20 + 20t.$

10. $f(\mathrm{x},t) = 8x_1 + (4+t)x_2 + (12-t)x_4 \to \max;$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 28,$$
$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 20,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,...,4;\quad t \in [-20;\ 20].$$

Відповідь: $t \in [-20;\ 4]:\ \mathrm{x}^{(1)*} = (28;\ 0;\ 0;\ 48)^T;$

$$f_{\max(1)}(\mathrm{x}) = 800 - 48t;$$

$t \in [4;\ 20]:\ \mathrm{x}^{(2)*} = (52;\ 24;\ 0;\ 0)^T;\ f_{\max(2)}(\mathrm{x}) = 512 + 24t.$

11. $f(\mathrm{x}) = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$x_1 + x_2 + x_3 = (10 - 2t),$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = (4 + t),$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,...,4;\quad t \in (-\infty;\ \infty).$$

Відповідь:

$t \in (-\infty;\ -4]:\ \mathrm{x}^{(1)*} = (0;\ -4-t;\ 14-t;\ 0)^T;\ f_{\max(1)}(\mathrm{x}) = 10 - 2t;$

$t \in [-4;\ 5]:\quad \mathrm{x}^{(2)*} = (0;\ 0;\ 10-2t;\ 4+t)^T;\ f_{\max(2)}(\mathrm{x}) = 6 - 3t;$

$t \in [5;\ \infty):$ область припустимих розв'язків - порожня множина.

12. $f(\mathrm{x},t) = (4+t)x_1 + (-8+t)x_2 + x_3 \to \max;$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = (24 + t),$$
$$-x_1 - x_2 + x_4 = (-4 + t),$$
$$-x_1 + x_2 + x_5 = 6;$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,...,5;\quad t \in (-\infty;\ \infty).$$

Відповідь: $t \in (-\infty; -5.33)$: область припустимих розв'язків – порожня;

$t \in [-5.33; -2]$ $\mathrm{x}^{(1)*} = (4-t;\ 0;\ 16+3t;\ 0;\ 10-t)^T$,

$$f_{\max(1)}(\mathrm{x}) = 32 + 3t - t^2;$$

$t \in [-2; \infty)$: $\mathrm{x}^{(2)*} = (12+0.5t;\ 0;\ 0;\ 8+1.5t;\ 18+0.5t)^T$,

$$f_{\max(2)}(\mathrm{x}) = 48 + 14t + 0.5t^2;$$

Дробово-лінійні задачі 13-15 розв'язати методом заміни змінної з використанням двоїстого симплекса-методу.

13. $f(\mathrm{x}) = \dfrac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max$;

$$x_1 + 2x_2 \le 7,$$
$$2x_1 + x_2 \le 7,$$
$$x_1 \ge 1,\ \ x_2 \ge 1.$$

Відповідь: $x_1^* = 3.5$, $x_2^* = 0$; $f_{\max}(\mathrm{x}) = 3.5$.

14. $f(\mathrm{x}) = \dfrac{-3x_1 + x_2}{-x_1 - x_2 - 2} \to \max$;

$$x_1 + x_2 \ge 3,$$
$$2x_1 + x_2 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: $x_1^* = 5$, $x_2^* = 0$; $f_{\max}(\mathrm{x}) = \dfrac{15}{7}$.

15. $f(\mathrm{x}) = \dfrac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max$;

$$x_1 + 2x_2 \ge 11,$$
$$x_1 - x_2 \le 8,$$
$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 9,$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0.$$

Відповідь: $x_1^* = 9$, $x_2^* = 1$; $x_3^* = 15$; $f_{\max}(\mathrm{x}) = \dfrac{19}{10}$.

Цілочисельні задачі 16-18 розв'язати методом Ґоморі з використанням двоїстого симплекс-методу і методом розгалужень та границь.

16. $f(\mathrm{x}) = 4x_1 - x_2 \to \max$;

$$x_1 - 2x_2 \le 0\,,$$
$$x_1 - x_2 \ge -1\,,$$
$$x_1 + x_2 \le 3.2$$
$$x_1 \ge 0\,,\ \ x_2 \ge 0\,;\ x_1\,,\ x_2\ -\text{цілі.}$$

Відповідь: $x_1^* = 2\,,\ \ x_2^* = 1\,;\ \ f_{\max}(\mathrm{x}) = 7$.

17. $f(\mathrm{x}) = 2x_1 - 2x_2 \to \max$;

$$-x_1 + 2x_2 \ge 4\,,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 14\,,$$
$$x_1 \ge 0\,,\ \ x_2 \ge 0\,;\ x_1\,,\ x_2\ -\text{цілі.}$$

Відповідь: $x_1^* = 2\,,\ \ x_2^* = 3\,;\ \ f_{\max}(\mathrm{x}) = -2$.

18. $f(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 \to \max$;

$$-4x_1 + 3x_2 \le 6\,,$$
$$2x_1 + x_2 \le 6\,,$$
$$x_1 \ge 0\,,\ \ x_2 \ge 0\,;\ x_1\,,\ x_2\ -\text{цілі.}$$

Відповідь: $x^{(1)*} = (1;\,3)^T$ і $x^{(2)*} = (2;\,2)^T\,;\ \ f_{\max}(\mathrm{x}) = 4$.

Розділ 3

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОДНОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

3.1. Постановка задачі і принципи одновимірної оптимізації

Потрібно знайти безумовний мінімум функції $f(x)$ однієї змінної, тобто таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Поставлена задача одновимірної мінімізації може бути розв'язана за допомогою необхідних і достатніх умов безумовного екстремуму (див. розд. 1.2). Однак проблема одержання розв'язку рівняння $\dfrac{df(x)}{dx} = 0$ може виявитися досить складною. Більше того, в практичних задачах функція $f(x)$ може бути не задана в аналітичному вигляді або часто невідомо, чи є вона диференційовною. Тому одержання розв'язку поставленої задачі чисельним методом є актуальним.

Зауваження 3.1.

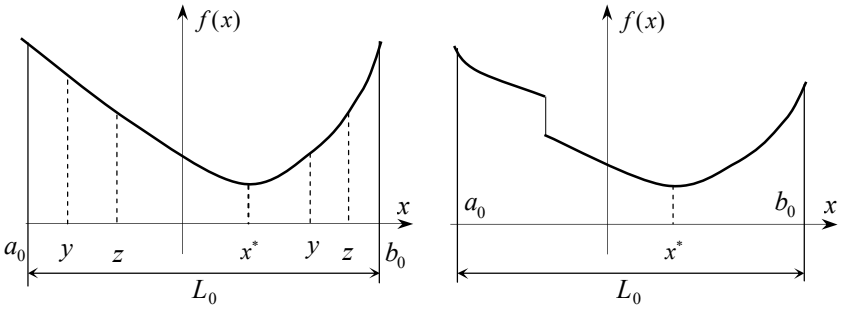
1. Для методів одновимірної мінімізації типовим є задання апріорної інформації про положення точки мінімуму за допомогою початкового інтервалу невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$ (рис. 3.1). Вважається, що точка мінімуму x^* належить інтервалу L_0, тобто $x^* \in L_0 \subset R$.

2. Більшість відомих методів одновимірної мінімізації застосовується для класу унімодальних функцій.

Означення 3.1. Функція $f(x)$ називається *унімодальною на інтервалі* $L_0 = [a_0; b_0]$, якщо вона досягає глобального мінімуму на $[a_0; b_0]$ в єдиній точці x^*, причому ліворуч від x^* ця функція строго спадає, а праворуч від x^* строго зростає. Якщо $a_0 \le y < z < x^*$, то $f(y) > f(z)$, а якщо $x^* < y < z \le b_0$, то $f(y) < f(z)$ (рис. 3.1).

Зазначимо, що неперервна строго опукла функція є унімодальною. Однак означенню 3.1 можуть задовольняти і функції, що не є неперервними і опуклими (рис. 3.1,б).

3. Методи одновимірної мінімізації широко застосовуються в чисельних методах багатовимірної оптимізації.



а) *б)*

Рис. 3.1

Стратегія пошуку

Існують дві принципово різні стратегії вибору точок, в яких обчислюються значення функції. Якщо всі точки задаються заздалегідь, до початку обчислень, – це *паралельна (пасивна)* стратегія. Якщо ці точки вибираються послідовно в процесі пошуку з урахуванням результатів попередніх обчислень, – це *послідовна* стратегія. Прикладом реалізації пасивної стратегії є метод рівномірного пошуку.

Послідовну стратегію можна реалізувати такими способами:

а) застосуванням квадратичної і кубічної інтерполяції, де за декількома обчисленими значеннями функції будується інтерполяційний поліном, а його мінімум вказує на чергове наближення шуканої точки екстремуму;

б) побудовою послідовності вкладених один в одного інтервалів, кожний з яких містить точку мінімуму.

Стратегія пошуку містить в собі три етапи:

1. Вибір початкового інтервалу невизначеності. Границі a_0, b_0 інтервалу повинні бути такими, щоб функція $f(x)$ була унімодальною.

2. Зменшення інтервалу невизначеності.

3. Перевірку умови закінчення. Пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності $[a_k; b_k]$ виявляється меншою встановленої величини.

Відповіддю є множина точок, що належать останньому інтервалу невизначеності, серед яких вибирається розв'язок задачі x^*.

Зауваження 3.2.

В деяких методах заздалегідь задається або знаходиться кількість n обчислень функції. В цьому випадку тривалість пошуку обмежена.

Для евристичного вибору початкового інтервалу невизначеності можна застосувати **алгоритм Свенна** (Swann W. H.):

1) задати довільно наступні параметри: x_0 – деяку точку, $t > 0$ – величину кроку. Прийняти $k = 0$.

2) обчислити значення функції в трьох точках: $x_0 - t$, x_0, $x_0 + t$;

3) перевірити умова закінчення:

а) якщо $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$, то початковий інтервал невизначеності знайдено: $[a_0; b_0] = [x_0 - t;\ x_0 + t]$;

б) якщо $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$, то функція не є унімодальною (див. означення 3.1), а необхідний інтервал невизначеності не може бути знайдено. Обчислення при цьому припиняються (рекомендується задати іншу початкову точку x_0);

в) якщо умова закінчення не виконується, то перейти до кроку 4;

4) визначити величину Δ:

а) якщо $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$, то $\Delta = t$, $a_0 = x_0$, $x_1 = x_0 + t$, $k = 1$;

б) якщо $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$, то $\Delta = -t$, $b_0 = x_0$, $x_1 = x_0 - t$, $k = 1$;

5) знайти наступну точку $x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$;

6) перевірити умови спадання функції:

а) якщо $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ і $\Delta = t$, то $a_0 = x_k$;

якщо $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ і $\Delta = -t$, то $b_0 = x_k$;

в обох випадках прийняти $k = k + 1$ і перейти до кроку 5;

б) якщо $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$, процедура завершується. При $\Delta = t$ прийняти $b_0 = x_{k+1}$, а при $\Delta = -t$ прийняти $a_0 = x_{k+1}$. В результаті маємо $[a_0; b_0]$ – шуканий початковий інтервал невизначеності.

Зменшення інтервалу невизначеності, що здійснюється при використанні послідовної стратегії, виконується на підставі обчислення функції в

двох точках поточного інтервалу. Властивість одновершинності дозволяє визначити який з можливих підінтервалів містить точку мінімуму.

Нехай в точках y і z інтервалу $[a;b]$ обчислено значення функції: $f(y)$ і $f(z)$. Якщо $f(y) > f(z)$, то $x^* \notin [a;y]$ і тому $x^* \in [y;b]$ (рис. 3.2,а). Якщо $f(y) < f(z)$, то $x^* \notin [z;b]$ і тому $x^* \in [a;z]$ (рис. 3.2,б). Іншими словами, в якості нового інтервалу береться "гарантуючий інтервал", в якому, напевно, знаходиться точка мінімуму. Якщо $f(y) = f(z)$, в якості нового інтервалу береться інтервал $[y;z]$.

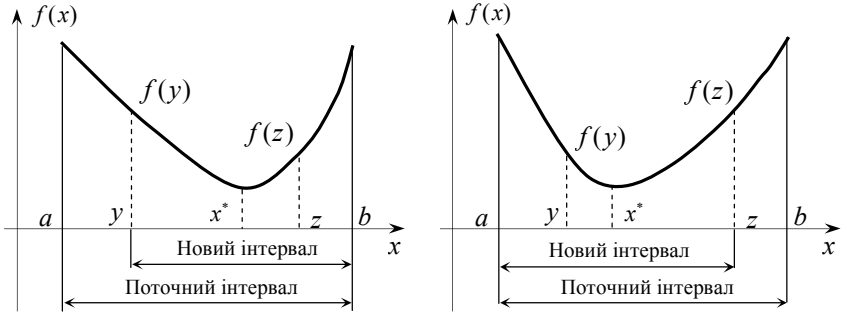


Рис. 3.2

Для оцінки ефективності алгоритмів зменшення інтервалу невизначеності при заданому числі n обчислень функції введемо критерій.

Означення 3.2. *Характеристикою* $R(n)$ *відносного зменшення початкового інтервалу невизначеності* називається відношення довжини інтервалу, одержуваного в результаті n обчислень функції, до довжини початкового інтервалу невизначеності: $R(n) = \dfrac{|L_n|}{|L_0|}$.

Приклад 3.1

Знайти початковий інтервал невизначеності для пошуку мінімуму функції $f(x) = (x-5)^2$.

Розв'язання

Скористаємося алгоритмом Свенна.

1^0. Задамо $x_0 = 1$ і $t = 1$. Приймемо $k = 0$.

2^0. Обчислимо значення функції в точках $x_0 - t = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 + t = 2$: $f(0) = 25$, $f(1) = 16$, $f(2) = 9$.

3^0. Умови закінчення не виконуються.

4^0. Оскільки $f(0) > f(1) > f(2)$, то $\Delta = t = 1$, $a_0 = 1$, $x_1 = x_0 + t = 2$, $k = 1$.

5^0. Знайдемо наступну точку $x_2 = x_1 + 2\Delta = 4$.

6^0. Оскільки $f(x_2) = 1 < f(x_1) = 9$ і $\Delta = 1$, то $a_0 = x_1 = 2$. Приймемо $k = 2$ і перейдемо до кроку 5.

5^1. Знайдемо наступну точку $x_3 = x_2 + 4\Delta = 8$.

6^1. Оскільки $f(x_3) = 9 > f(x_2) = 1$ і $\Delta = t = 1$, то пошук завершено і права границя $b_0 = x_3 = 8$. Тому початковий інтервал невизначеності має вигляд $[a_0; b_0] = [2; 8]$.

3.2. Методи нульового порядку

Методи, що використовують тільки значення функції $f(x)$ в заданих точках, називаються *методами нульового порядку* (або *прямими методами*) мінімізації. Перевагою методів нульового порядку є те, що від цільової функції не треба вимагати диференційовності і, більше того, вона може бути не задана в аналітичному вигляді.

3.2.1. Метод рівномірного пошуку

Метод рівномірного пошуку (або метод перебору) є найпростішим з методів нульового порядку мінімізації.

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум унімодальної функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Стратегія розв'язання задачі Метод можна віднести до методів з пасивною стратегією. Задається початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$ і кількість обчислень функції n. Обчислення здійснюються в n рівновіддалених одна від одної точках (при цьому інтервал L_0 ділиться на $n+1$ рівних інтервалів). Шляхом

порівняння величин $f(x_i)$, $i=1,...,n$ знаходиться точка x_k, в якій значення функції найменше. Шукана точка мінімуму x^* належить інтервалу $[x_{k-1};x_{k+1}]$ (рис. 3.3).

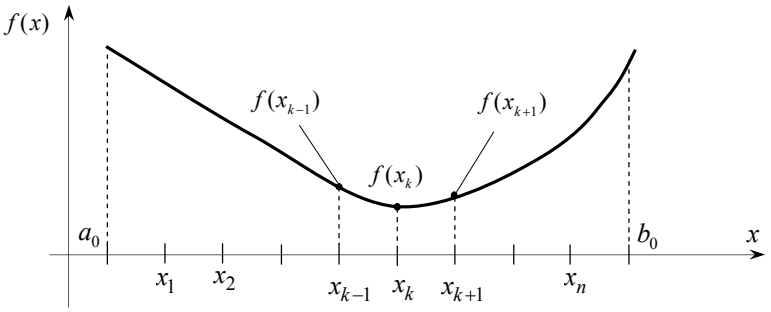


Рис. 3.3

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0=[a_0;b_0]$, n – кількість обчислень функції.

2. Обчислити точки $x_i=a_0+i\dfrac{(b_0-a_0)}{n+1}$, $i=1,...,n$ рівновіддалені одна від одної.

3. Обчислити значення функції в n знайдених точках: $f(x_i)$, $i=1,...,n$.

4. Серед точок x_i, $i=1,...,n$ знайти таку, в якій функція приймає найменше значення: $f(x_k)=\min\limits_{1\le i\le n} f(x_i)$.

5. Точка мінімуму x^* належить інтервалу $x^*\in[x_{k-1};\,x_{k+1}]=L_n$, на якому, в якості наближеного розв'язку може бути обрана точка $x^*\cong x_k$.

Збіжність

Для методу рівномірного пошуку характеристика відносного зменшення початкового інтервалу невизначеності знаходиться за формулою $R(n)=\dfrac{2}{n+1}$, де n – кількість обчислень функції.

Зауваження 3.3. *Похибка* знаходження точки мінімуму x^* функції $f(x)$ методом рівномірного пошуку не перевершує величини $\varepsilon_n = \dfrac{(b-a)}{n}$.

Дійсно, припустимо, що x_k є внутрішньою точкою розбиття відрізка $[a;b]$, тобто $1 \le k \le n-1$. Тоді з урахуванням властивості унімодальних функцій маємо:

а) $f(x_{k-1}) \ge f(x_k)$, тобто $x^* \in [x_{k-1}; b]$;

б) $f(x_k) \le f(x_{k+1})$, тобто $x^* \in [a; x_{k+1}]$.

Звідси одержимо, що $x^* \in [x_{k-1}; b] \cap [a; x_{k+1}] = [x_{k-1}; x_{k+1}]$. Довжина останнього відрізка дорівнює $\dfrac{2(b-a)}{n}$, а точка x_k є його серединою. Тому $|x_k - x^*| \le \dfrac{(b-a)}{n} = \varepsilon_n$.

Таким чином, щоб забезпечити необхідну точність ε знаходження точки x^*, число відрізків розбиття n необхідно вибрати згідно з умовою $\varepsilon_n = \dfrac{(b-a)}{n} \le \varepsilon$, тобто $n \ge \dfrac{(b-a)}{\varepsilon}$.

Приклад 3.2

Знайти мінімум функції $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом рівномірного пошуку.

Розв'язання

Скористаємося алгоритмом методу рівномірного пошуку.

1. Знайдемо початковий інтервал невизначеності методом Свенна (див. стор. 140):

а) задамо початкову точку $x_0 = 5$, крок $t = 5$. Приймемо $k = 0$;

б) обчислимо значення функції в трьох точках: $x_0 - t = 0$; $x_0 = 5$; $x_0 + t = 10$: $f(x_0 - t) = 0$; $f(x_0) = -10$; $f(x_0 + t) = 80$;

в) оскільки $f(x_0 - t) > f(x_0) < f(x_0 + t)$ то початковий інтервал невизначеності знайдено: $L_0 = [0; 10]$. Задамо $n = 9$ так, щоб L_0 містив $n + 1 = 10$ рівних підінтервалів.

2. Визначимо точки обчислення функції: $x_i = 0 + i\dfrac{(10-0)}{10} = i$, $i = 1,...,9$.

3. Обчислимо значення функції в дев'яти точках: $f(1) = -10$, $f(2) = -16$, $f(3) = -18$, $f(4) = -16$, $f(5) = -10$, $f(6) = 0$, $f(7) = 14$, $f(8) = 32$, $f(9) = 54$.

4. В точці $x_3 = 3$ функція приймає найменше значення: $f(x_3) = -18$.

5. Шукана точка мінімуму після дев'яти обчислень належить інтервалу: $x^* \in [2; 4] = L_9$, в якому вибирається точка $x^* \cong x_3 = 3$.

Зазначимо, що характеристика відносного зменшення початкового інтервалу невизначеності $R(n) = \dfrac{|L_9|}{|L_0|} = \dfrac{4-2}{10-0} = 0.2$.

3.2.2. Метод ділення відрізка навпіл

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум унімодальної функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Стратегія розв'язання задачі Метод відноситься до послідовних стратегій і дозволяє виключити з подальшого розгляду на кожній ітерації половину поточного інтервалу невизначеності. Задається початковий інтервал невизначеності, а алгоритм зменшення інтервалу, будучи, як і в загальному випадку, "гарантуючим" (див. рис. 3.2), ґрунтується на аналізі величин функції в трьох точках, рівномірно розподілених на поточному інтервалі (які ділять його на чотири рівні частини). Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності виявляється меншою за встановлену величину.

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$ й ε – необхідну точність.

2. Прийняти $k = 0$.

3. Обчислити середню точку $x_k^c = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, $|L_{2k}| = b_k - a_k$, $f(x_k^c)$.

4. Обчислити точки: $y_k = a_k + \frac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k - \frac{|L_{2k}|}{4}$ і $f(y_k)$, $f(z_k)$. Зазначимо, що точки y_k, x_k^c, z_k ділять інтервал на чотири рівні частини.

5. Порівняти значення $f(y_k)$ й $f(x_k^c)$:

а) якщо $f(y_k) < f(x_k^c)$, виключити інтервал $(x_k^c; b_k]$, прийнявши $b_{k+1} = x_k^c$, $a_{k+1} = a_k$. Середньою точкою нового інтервалу стає точка y_k: $x_{k+1}^c = y_k$ (рис. 3.4, а). Перейти до кроку 7;

б) якщо $f(y_k) \geq f(x_k^c)$, перейти до кроку 6.

6. Порівняти значення $f(z_k)$ й $f(x_k^c)$:

а) якщо $f(z_k) < f(x_k^c)$, виключити інтервал $[a_k; x_k^c)$, прийнявши $a_{k+1} = x_k^c$, $b_{k+1} = b_k$. Середньою точкою нового інтервалу стає точка z_k: $x_{k+1}^c = z_k$ (рис. 3.4, б). Перейти до кроку 7;

б) якщо $f(z_k) \geq f(x_k^c)$, виключити інтервали $[a_k; y_k)$, $(z_k; b_k]$, прийнявши $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$. Середньою точкою нового інтервалу стає точка x_k^c: $x_{k+1}^c = x_k^c$.

7. Обчислити $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ і перевірити умову закінчення:

а) якщо $|L_{2(k+1)}| \leq \varepsilon$, процес пошуку завершується і $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}; b_{k+1}]$. В якості наближеного розв'язку можна взяти середину останнього інтервалу: $x^* \cong x_{k+1}^c$;

б) якщо $|L_{2(k+1)}| > \varepsilon$, то прийняти $k = k+1$ і перейти до кроку 4.

Збіжність

Для методу ділення інтервалу навпіл характеристика відносного зменшення початкового інтервалу невизначеності знаходиться за формулою $R(n) = \frac{1}{2^{n/2}}$, де n – кількість обчислень функції.

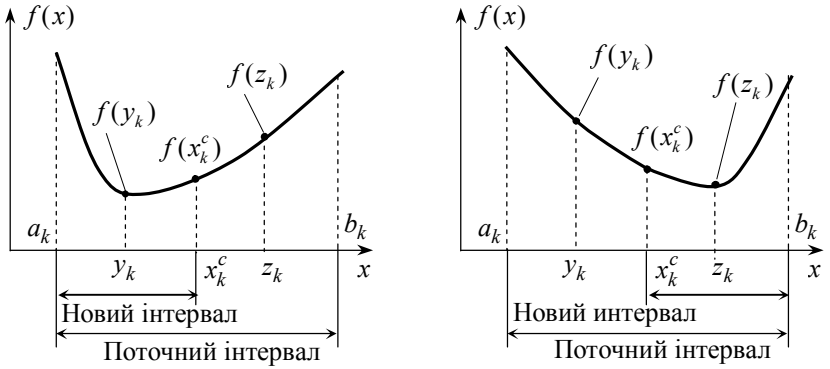


Рис. 3.4

Зауваження 3.4

1. Середня точка послідовно одержуваних інтервалів завжди збігається з однією із трьох пробних точок, знайдених на попередній ітерації. Отже, на кожній ітерації потрібні два нових обчислення функції.

2. Якщо задано величину $R(n)$, то необхідна для досягнення бажаної точності кількість обчислень функції знаходиться як найменше ціле, що задовольняє умові $n \geq \dfrac{2\ln R(n)}{\ln 0.5}$.

3. Поточні інтервали мають парні номери L_0, L_2, L_4,…, де індекс вказує на зроблену кількість обчислень функції.

Приклад 3.3

Знайти мінімум функції $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом ділення відрізка навпіл.

Розв'язання

1^0. Задамо початковий інтервал невизначеності $L_0 = [0; 10]$ (див. п.1 приклада 3.2). Нехай $\varepsilon = 1$.

2^0. Приймемо $k = 1$.

3^0. Обчислимо $x_0^c = \dfrac{0+10}{2} = 5$, $|L_0| = |10 - 0| = 10$, $f(x_0^c) = -10$.

4^0. Обчислимо $y_0 = a_0 + \dfrac{|L_0|}{4} = 2.5$, $z_0 = b_0 - \dfrac{|L_0|}{4} = 7.5$ і

$$f(y_0) = -17.5, \qquad f(z_0) = 22.5.$$

5^0. Порівняємо $f(y_0)$ і $f(x_0^c)$.

Оскільки $f(y_0) = -17.5 < f(x_0^c) = -10$, то приймемо $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = x_0^c = 5$, $x_1^c = y_0 = 2.5$. Переходимо до кроку 7.

7^0. Одержимо $L_2 = [0; 5]$, $|L_2| = 5 > \varepsilon = 1$ Переходимо до кроку 4.

4^1. Обчислимо $y_1 = a_1 + \frac{|L_2|}{4} = 1.25$, $z_1 = b_1 - \frac{|L_2|}{4} = 3.75$;

$$f(y_1) = -11.875, \quad f(z_1) = -16.875.$$

5^1. Порівняємо $f(y_1)$ і $f(x_1^c) = f(y_0)$.

Оскільки $f(y_1) = -11.875 > f(x_1^c) = -17.5$, то перейдемо до кроку 6.

6^1. Порівняємо $f(z_1)$ і $f(x_1^c)$.

Оскільки $f(z_1) = -16.875 > f(x_1^c) = -17.5$, то приймемо: $a_2 = y_1 = 1.25$, $b_2 = z_1 = 3.75$, $x_2^c = x_1^c = 2.5$.

7^1. Одержимо $L_4 = [1.25; 3.75]$, $|L_4| = 2.5 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 2$ й переходимо до кроку 4.

4^2. Обчислимо $y_2 = a_2 + \frac{|L_4|}{4} = 1.875$, $z_2 = b_2 - \frac{|L_4|}{4} = 3.125$;

$$f(y_2) = -15.47, \quad f(z_2) = -17.97.$$

5^2. Порівняємо $f(y_2)$ с. $f(x_2^c) = f(x_1^c)$.

Оскільки $f(y_2) = -15.47 > \quad > f(x_2^c) = -17.5$, то переходимо до кроку 6.

6^2. Порівняємо $f(z_2)$ і $f(x_2^c)$.

Оскільки $f(z_2) = -17.97 < f(x_2^c) = -17.5$; то приймемо $a_3 = x_2^c = 2.5$, $b_3 = b_2 = 3.75$, $x_3^c = z_2 = 3.125$.

7^2. Одержимо $L_6 = [2.5; 3.75]$, $|L_6| = 1.25 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 3$ і переходимо до кроку 4.

4^3. Обчислимо $y_3 = a_3 + \frac{|L_6|}{4} = 2.81$, $z_3 = b_3 - \frac{|L_6|}{4} = 3.43$;

$$f(y_3) = -17.93, \quad f(z_3) = -17.62.$$

5^3. Порівняємо $f(y_3)$ і $f(x_3^c) = f(z_2)$.

Оскільки $f(y_3) = -17.93 > f(x_3^c) = -17.97$, то перейдемо до кроку 6.

6^3. Порівняємо $f(z_3)$ і $f(x_3^c)$.

Оскільки $f(z_3) = -17.63 > f(x_3^c) = -17.97$, то приймемо $a_4 = y_3 = 2.81$, $b_4 = z_3 = 3.43$, $x_4^c = x_3^c = 3.125$.

7^3. Одержимо $L_8 = [2.81; 3.43]$, $|L_8| = 0.62 < \varepsilon = 1$; $x^* \in L_8$, $n = 8$. В якості розв'язку можна взяти середню точку останнього інтервалу $x^* \cong x_3^c = 3.125$, $f_{\min} \cong f(x^*) = -17.97$.

3.2.3. Метод дихотомії

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум унімодальної функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Стратегія розв'язання задачі Метод дихотомії можна віднести до послідовних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності і необхідна точність. Алгоритм ґрунтується на аналізі значень функції в двох точках (див. рис. 3.2). Для їхнього знаходження поточний інтервал невизначеності ділиться навпіл і в обидва боки від середини відкладається по $\delta/2$, де δ – мале додатне число. Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності виявляється меншою за встановлену величину.

Зауваження 3.5

Число ітерацій n методу дихотомії, необхідне для знаходження точки x^* з точністю ε, визначається нерівністю $n \geq \log_2 \dfrac{b_0 - a_0 - \delta}{2\varepsilon - \delta}$. Тому число δ вибирається з умови $\delta < 2\varepsilon$.

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$, $\delta > 0$ мале число, $\varepsilon > 0$ – необхідну точність.

2. Прийняти $k = 0$.

3. Обчислити $y_k = \dfrac{a_k + b_k - \delta}{2}$, $f(y_k)$; $z_k = \dfrac{a_k + b_k + \delta}{2}$, $f(z_k)$.

4. Порівняти $f(y_k)$ з $f(z_k)$:

а) якщо $f(y_k) \le f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ і перейти до кроку 5;

б) якщо $f(y_k) > f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$.

5. Обчислити $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ і перевірити умови закінчення:

а) якщо $|L_{2(k+1)}| \le \varepsilon$ процес пошуку завершується і $x^* \in L_{2(k+1)} = [b_{k+1}; a_{k+1}]$. В якості наближеного розв'язку можна взяти середину останнього інтервалу: $x^* \cong \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$;

б) якщо $|L_{2(k+1)}| > \varepsilon$, прийняти $k = k+1$ і перейти до кроку 3.

Збіжність

Для методу дихотомії характеристика відносного зменшення початкового інтервалу невизначеності знаходиться за формулою $R(n) = \dfrac{1}{2^{n/2}}$, де n – кількість обчислень функції.

Зауваження 3.6

1. Поточні інтервали невизначеності L_0, L_2, L_4, … мають парні номери, що вказують на кількість зроблених обчислень функції, як і в методі ділення інтервалу навпіл.

2. Ефективність методу дихотомії при малих δ і методу ділення інтервалу навпіл можна вважати однаковою.

Приклад 3.4

Знайти мінімум функції $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом дихотомії.

Розв'язання

1. Задамо початковий інтервал невизначеності $L_0 = [0; 10]$ (див. п. 1 приклада 3.2). Приймемо $\delta = 0.2$, $\varepsilon = 1$.

2. Приймемо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $y_0 = \dfrac{a_0 + b_0 - \delta}{2} = 4.9$, $z_0 = \dfrac{a_0 + b_0 + \delta}{2} = 5.1$;

$$f(y_0) = -10.78, \quad f(z_0) = -9.18.$$

4^0. Оскільки $f(y_0) < f(z_0)$, то $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = z_0 = 5.1$.

5^0. Одержимо $L_2 = [0; 5.1]$, $|L_2| = 5.1 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 1$ і перейдемо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $y_1 = \dfrac{a_1 + b_1 - \delta}{2} = 2.45$, $z_1 = \dfrac{a_1 + b_1 + \delta}{2} = 2.65$;

$$f(y_1) = -17.395, \quad f(z_1) = -17.755.$$

4^1. Оскільки $f(y_1) > f(z_1)$, то $a_2 = y_1 = 2.45$, $b_2 = b_1 = 5.1$.

5^1. Одержимо $L_4 = [2.45; 5.1]$, $|L_4| = 2.65 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 2$ і перейдемо до кроку 3.

3^2. Обчислимо $y_2 = \dfrac{a_2 + b_2 - \delta}{2} = 3.675$, $z_2 = \dfrac{a_2 + b_2 + \delta}{2} = 3.875$;

$$f(y_2) = -17.089, \quad f(z_2) = -16.469.$$

4^2. Оскільки $f(y_2) < f(z_2)$, то $a_3 = a_2 = 2.45$, $b_3 = z_2 = 3.875$.

5^2. Одержимо $L_6 = [2.45; 3.875]$, $|L_6| = 1.425 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 3$ і перейдемо до кроку 3.

3^3. Обчислимо $y_3 = \dfrac{a_3 + b_3 - \delta}{2} = 3.06$, $z_3 = \dfrac{a_3 + b_3 + \delta}{2} = 3.26$;

$$f(y_3) = -17.99, \quad f(z_3) = -17.86.$$

4^3. Оскільки $f(y_3) < f(z_3)$, то $a_4 = a_3 = 2.45$, $b_4 = z_3 = 3.26$.

5^3. Одержимо $L_8 = [2.45; 3.26]$, $|L_8| = 0.81 < \varepsilon = 1$. Таким чином, $x^* \in L_8 = [2.45; 3.26]$, $n = 8$ і як розв'язок приймаємо:

$$x^* \cong \frac{2.45 + 3.26}{2} = 2.855, \quad f(x^*) = f_{\min} = -17.958.$$

3.2.4. Метод золотого перерізу

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум унімодальної функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Для побудови конкретного методу одновимірної мінімізації, що працює за принципом послідовного скорочення інтервалу невизначеності, треба задати правило вибору на кожному кроці двох внутрішніх точок (див. рис. 3.2). Число обчислень нових точок і значень функції повинне бути мінімальним. В методі золотого перерізу в якості двох внутрішніх точок вибираються точки так званого золотого перерізу.

Означення 3.3. Точка здійснює *«золотий переріз» відрізка,* якщо відношення довжини всього відрізка до більшої частини дорівнює відношенню більшої частини до меншого.

На відрізку $[a_0;b_0]$ є дві симетричні відносно його кінців точки y_0 і z_0:

$$\frac{b_0-a_0}{b_0-y_0}=\frac{b_0-y_0}{y_0-a_0}=\frac{b_0-a_0}{z_0-a_0}=\frac{z_0-a_0}{b_0-z_0}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1.618\,.$$

Крім того, точка y_0 здійснює золотий переріз відрізка $[a_0;z_0]$, а точка z_0 – відрізка $[y_0;b_0]$ (рис. 3.5).

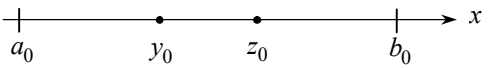


Рис. 3.5

Стратегія розв'язання задачі

Метод можна віднести до послідовних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності і необхідна точність. Алгоритм зменшення інтервалу ґрунтується на аналізі значень функції в двох точках (див. рис. 3.5). В якості точок обчислення функції вибираються точки золотого перерізу. Тоді з урахуванням властивостей золотого перерізу на кожній ітерації, крім першої, потрібно тільки одне нове обчислення функції. Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності виявляється меншою за встановлену величину.

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0=[a_0;b_0]$, точність $\varepsilon>0$.

2. Прийняти $k=0$.

3. Обчислити:

$$y_0=a_0+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0-a_0)\,,\ z_0=a_0+b_0-y_0\,,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}=0.38196\,.$$

4. Обчислити $f(y_k)$, $f(z_k)$.

5. Порівняти значення $f(y_k)$ і $f(z_k)$:

а) якщо $f(y_k) \le f(z_k)$, то прийняти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ і $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$. Перейти до кроку до кроку 6;

б) якщо $f(y_k) > f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$ і $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$.

6. Обчислити $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$ і перевірити умови закінчення:

а) якщо $\Delta \le \varepsilon$, процес пошуку завершується і $x^* \in [a_{k+1}; b_{k+1}]$. В якості наближеного розв'язку можна взяти середину останнього інтервалу: $x^* \cong \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$;

б) якщо $\Delta > \varepsilon$, прийняти $k = k + 1$ і перейти до кроку 4.

Збіжність

Для методу золотого перерізу характеристика відносного зменшення початкового інтервалу невизначеності знаходиться за формулою $R(n) = (0.618)^{n-1}$, де n – кількість обчислень функції.

Зауваження 3.7.

1. Поточні інтервали невизначеності мають такий вигляд: L_0, L_2, L_3, L_4,… Вони відображають той факт, що на першій ітерації знаходяться два обчислення функції, а на наступних - по одному.

2. Скорочення довжини інтервалу невизначеності стале:

$$\frac{|L_0|}{|L_2|} = \frac{|L_2|}{|L_3|} = \frac{|L_3|}{|L_4|} = \ldots = 1.618.$$

3. Якщо задано величину $R(n)$, то необхідна для досягнення бажаної точності кількість обчислень функції знаходиться як найменше ціле число, що задовольняє умові $n \ge 1 + \dfrac{\ln R(n)}{\ln 0.618}$.

Приклад 3.5

Знайти мінімум функції $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом золотого перетину.

Розв'язання

1. Задамо початковий інтервал невизначеності: $L_0 = [0; 10]$ (див. п. 1 приклада 3.2). Приймемо $\varepsilon = 1$.

2. Приймемо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $y_0 = a_0 + 0.382(b_0 - a_0) = 0 + 0.382 \cdot 10 = 3.82$;

$$z_0 = a_0 + b_0 - y_0 = 0 + 10 - 3.82 = 6.18.$$

4^0. Обчислимо $f(y_0) = -16.65$; $f(z_0) = 2.22$.

5^0. Порівняємо $f(y_0)$ і $f(z_0)$.

Оскільки $f(y_0) < f(z_0)$, то $a_1 = a_0 = 0$; $b_1 = z_0 = 6.18$; $y_1 = a_1 + b_1 - y_0 = 0 + 6.18 - 3.82 = 2.36$; $z_1 = y_0 = 3.82$.

6^0. Одержимо $L_2 = [0; 6.18]$; $|L_2| = 6.18 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 1$ і перейдемо до кроку 4.

4^1. Обчислимо $f(y_1) = -17.18$ (нове значення); $f(z_1) = f(z_1) = -16.65$ (вже було обчислено на кроці 4^0).

5^1. Порівняємо $f(y_1)$ і $f(z_1)$.

Оскільки $f(y_1) < f(z_1)$, то $a_2 = a_1 = 0$; $b_2 = z_1 = 3.82$; $y_2 = a_2 + b_2 - y_1 = 0 + 3.82 - 2.36 = 1.46$; $z_2 = y_1 = 2.36$.

6^1. Одержимо $L_3 = [0; 3.82]$; $|L_3| = 3.82 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 2$ і перейдемо до кроку 4.

4^2. Обчислимо $f(y_2) = -13.25$ (нове обчислення); $f(z_2) = f(y_1) = -17.18$ (вже було обчислено на кроці 4^1).

5^2. Порівняємо $f(y_2)$ і $f(z_2)$.

Оскільки $f(y_2) > f(z_2)$, то $a_3 = y_2 = 1.46$; $b_3 = b_2 = 3.82$; $y_3 = z_2 = 2.36$; $z_3 = a_3 + b_3 - z_2 = 1.46 + 3.82 - 2.362 = 2.92$.

6^2. Одержимо $L_4 = [1.46; 3.82]$; $|L_4| = 3.82 - 1.46 = 2.36 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 3$ і перейдемо до кроку 4.

4^3. Обчислимо $f(y_3) = f(z_2) = -17.18$ (вже було обчислено на кроці 4^2); $f(z_3) = -17.99$.

5^3. Порівняємо $f(y_3)$ і $f(z_3)$.

Оскільки $f(y_3) > f(z_3)$, то $a_4 = y_3 = 2.36$; $b_4 = b_3 = 3.82$; $y_4 = z_3 = 2.92$; $z_4 = a_4 + b_4 - z_3 = 2.36 + 3.82 - 2.92 = 3.26$.

6^3. Одержимо $L_5 = [2.36; 3.82]$; $|L_5| = 3.82 - 2.36 = 1.46 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 4$ і перейдемо до кроку 4.

4^4. Обчислимо $f(y_4) = f(z_3) = -17.99$ (було відомо на кроці 4^3); $f(z_4) = -17.86$.

5^4. Порівняємо $f(y_4)$ і $f(z_4)$.

Оскільки $f(y_4) < f(z_4)$, то $a_5 = a_4 = 2.36$; $b_5 = z_4 = 3.26$; $y_5 = a_5 + b_5 - y_4 = 2.36 + 3.26 - 2.92 = 2.7$; $z_5 = y_4 = 2.92$.

6^4. Одержимо $L_6 = [2.36; 3.26]$; $|L_6| = 3.26 - 2.36 = 0.9 < \varepsilon = 1$.

Обчислення закінчено: $x^* \in L_6$, $n = 6$.

Розв'язок: $x^* \cong \dfrac{3.26 + 2.36}{2} = 2.81$, $f_{\min} = f(x^*) = -17.93$.

3.2.5. Метод Фібоначі

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум унімодальної функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Для побудови ефективного методу одновимірної мінімізації, що працює за принципом послідовного скорочення інтервалу невизначеності, треба задати правило вибору на кожному кроці двох внутрішніх точок. Бажано, щоб одна з них завжди використовувалася в якості внутрішньої і для наступного інтервалу. Тоді кількість обчислень функції скоротиться вдвічі. В методі Фібоначі (L. Fibonacci) реалізована стратегія, що забезпечує максимальне гарантоване скорочення інтервалу невизначеності при заданій кількості обчислень функції і претендує на оптимальність. Ця стратегія опирається на числа Фібоначі.

Означення 5.4. *Числа Фібоначі* визначаються за формулою

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots .$$

Послідовність чисел Фібоначі має вигляд 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Стратегія розв'язання задачі Метод Фібоначі можна віднести до послідовних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності і кількість n обчислень функції. Алгоритм зменшення інтервалу ґрунтується на аналізі значень функції в двох точках (див. рис. 3.2). Точки обчислення функції знаходяться з використанням послідовності із $n+1$ чисел

Фібоначі. Як і в методі золотого перерізу, на першій ітерації потрібні два обчислення функції, а на кожній наступній - тільки по одному. Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності виявляється меншою за встановлену величину.

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$, $\varepsilon > 0$ – припустиму довжину кінцевого інтервалу, $\delta > 0$ – (константа визначення меж інтервалу).

2. Знайти кількість n обчислень функції як найменше ціле число, при якому задовольняється умова $F_n \geq \frac{|L_0|}{\varepsilon}$, і числа Фібоначі F_0, F_1, …, F_n … .

3. Прийняти $k = 0$.

4. Обчислити $y_0 = a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_0 - a_0)$; $z_0 = a_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0 - a_0)$.

5. Обчислити $f(y_k)$ і $f(z_k)$.

6. Порівняти $f(y_k)$ і $f(z_k)$:

а) якщо $f(y_k) \leq f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = z_k$; $z_{k+1} = y_k$; $y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-3}}{F_n}(b_{k+1} - a_{k+1})$. Перейти до кроку 7;

б) якщо $f(y_k) > f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = y_k$; $b_{k+1} = b_k$; $y_{k+1} = z_k$; $z_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$.

7. Перевірити умови закінчення і, якщо треба, зробити заключне n-е обчислення функції для одержання розв'язку:

а) якщо $k \neq n-3$, прийняти $k = k+1$ і перейти до кроку 5;

б) якщо $k = n-3$, то завжди $y_{n-2} = z_{n-2} = \frac{(a_{n-2} + b_{n-2})}{2}$, тобто відсутня точка нового обчислення функції. Треба прийняти: $y_{n-1} = y_{n-2} = z_{n-2}$; $z_{n-1} = y_{n-1} + \delta$. В точках y_{n-1} і z_{n-1} обчислюються значення функції і знаходяться границі кінцевого інтервалу невизначеності:

– якщо $f(y_{n-1}) \leq f(z_{n-1})$, прийняти $a_{n-1} = a_{n-2}$, $b_{n-1} = z_{n-1}$;

– якщо $f(y_{n-1}) > f(z_{n-1})$, прийняти $a_{n-1} = y_{n-1}$, $b_{n-1} = b_{n-2}$.

Процес пошуку завершується і $x^* \in [a_{n-1}; b_{n-1}]$. В якості наближеного розв'язку можна взяти будь-яку точку останнього інтервалу, наприклад, його середину $x^* \cong \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$.

Збіжність

Для методу Фібоначі характеристика відносного зменшення початкового інтервалу невизначеності знаходиться за формулою $R(n) = \dfrac{1}{F_n}$, де n – кількість обчислень функції.

Зауваження 3.8

1. При заданій кількості n обчислень функції метод Фибоначчі забезпечує мінімальну величину кінцевого інтервалу невизначеності в порівнянні з методами, викладеними в розділах 3.2.1 - 3.2.4.

2. Нумерація інтервалів невизначеності така ж, як в методі золотого перерізу: L_0, L_2, L_3, L_4,…(див. п.1 зауваження 3.6).

3. На k - ой ітерації довжина інтервалу невизначеності скорочується за правилом $\dfrac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}$.

Приклад 3.6

Знайти мінімум функції $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом Фібоначі.

Розв'язання

1. Задамо початковий інтервал невизначеності: $L_0 = [0; 10]$ (див. п.1 приклада 3.2). Нехай $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.01$; $F_6 = 13 > \dfrac{|L_0|}{\varepsilon} = \dfrac{10}{1} = 10$, тому $n = 6$.

2. Знайдемо числа Фібоначі: $F_0 = F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$.

3. Приймемо $k = 0$.

4^0. Обчислимо $y_0 = a_0 + \dfrac{F_4}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \dfrac{5}{13} \cdot 10 = 3.846$;

$$z_0 = a_0 + \frac{F_5}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{8}{13} \cdot 10 = 6.154.$$

5^0. Обчислимо $f(y_0) = -16.57$, $f(z_0) = 1.893$.

6^0. Порівняємо $f(y_0)$ і $f(z_0)$.

Оскільки $f(y_0) < f(z_0)$, то $a_1 = a_0 = 0$; $b_1 = z_0 = 6.154$; $z_1 = y_0 = 3.846$; $y_1 = a_1 + \frac{F_{6-3}}{F_{6-1}}(b_1 - a_1) = 0 + \frac{3}{8} \cdot 6.154 = 2.308$.

7^0. Перевіримо умову закінчення: $k = 0 \neq n - 3 = 3$; $L_2 = [0; 6.154]$. Приймемо $k = 1$ і перейдемо до кроку 5.

5^1. Обчислимо значення $f(y_1) = -17.04$, $f(z_1) = -16.57$ (вже було обчислено на кроці 5^0).

6^1. Порівняємо $f(y_1)$ і $f(z_1)$.

Оскільки $f(y_1) < f(z_1)$, то $a_2 = a_1 = 0$; $b_2 = z_1 = 3.846$; $z_2 = y_1 = 2.308$; $y_2 = a_2 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-2}}(b_2 - a_2) = 0 + \frac{2}{5} \cdot 3.846 = 1.538$.

7^1. Перевіримо умову закінчення: $k = 1 \neq n - 3 = 3$; $L_2 = [0; 3.846]$. Приймемо $k = 2$ і перейдемо до кроку 5.

5^2. Обчислимо значення $f(y_2) = -13.73$, $f(z_2) = -17.04$ (вже було обчислено на кроці 5^1).

6^2. Порівняємо $f(y_2)$ і $f(z_2)$.

Оскільки $f(y_2) > f(z_2)$, то $a_3 = y_2 = 1.538$; $b_3 = b_2 = 3.846$; $y_3 = z_2 = 2.308$;

$$z_3 = a_3 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-3}}(b_3 - a_3) = 1.538 + \frac{2}{3} \cdot (3.846 - 1.538) = 3.077.$$

7^2. Перевіримо умову закінчення: $k = 2 \neq N - 3 = 3$; $L_4 = [1.538; 3.846]$. Приймемо $k = 3$ і перейдемо до кроку 5.

5^3. Обчислимо значення $f(y_3) = f(z_2) = -17.04$ (вже було відомо); $f(z_3) = -17.9884$.

6^3. Порівняємо $f(y_3)$ і $f(z_3)$.

Оскільки $f(y_3) > f(z_3)$, то $a_4 = y_3 = 2.308$; $b_4 = b_3 = 3.846$; $y_4 = z_3 = 3.077$;

$$z_4 = a_4 + \frac{F_{6-5}}{F_{6-4}}(b_4 - a_4) = 2.308 + \frac{1}{2}\cdot(3.846 - 2.308) = 3.077.$$

7^3. Перевіримо умову закінчення: $k = 3 = n - 3 = 3$; $L_5 = [2.308;\ 3.846]$.

Приймемо $y_5 = y_4 = z_4 = 3.077$; $z_5 = y_5 + \delta = 3.077 + 0.01 = 3.087$. Обчислимо $f(y_5) = -17.9884$ (було обчислено на кроці 5^3); $f(z_5) = -17.985$.

Оскільки $f(y_5) < f(z_5)$, то $a_5 = a_4 = 2.308$; $b_5 = z_5 = 3.087$. Тому $x^* \in L_6 = [2.308;\ 3.087]$; $|L_6| = 3.087 - 2.308 = 0.78 < \varepsilon = 1$. Зазначимо, що $\frac{|L_6|}{|L_0|} = 0.078 \cong \frac{1}{F_6} = \frac{1}{13} = 0.077$.

В якості наближеного розв'язку візьмемо середину інтервалу L_6: $x^* \cong \frac{2.308 + 3.087}{2} = 2.697$ і $f_{\min} = f(x^*) = -17.816$.

3.2.6. Метод квадратичної апроксимації

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум унімодальної функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Стратегія розв'язання задачі Метод квадратичної інтерполяції, або метод Пауелла (Powell M. J. D.), можна віднести до послідовних стратегій. Задається початкова точка і за допомогою пробного кроку знаходяться три точки так, щоб вони були якнайближче до шуканої точки мінімуму. В одержаних точках обчислюються значення функції. Потім будується інтерполяційний поліном другого степеню, що проходить через ці три точки. Як наближення точки мінімуму береться точка мінімуму полінома. Процес пошуку закінчується, коли одержана точка відрізняється від найкращої з трьох опорних точок не більше ніж на задану величину.

Алгоритм

1. Задати початкову точку x_1, величину кроку $\Delta x > 0$, ε_1 і ε_2 – малі додатні числа, які характеризують точність.

2. Обчислити $x_2 = x_1 + \Delta x$.

3. Обчислити $f(x_1) = f_1$ і $f(x_2) = f_2$.

4. Порівняти $f(x_1)$ з $f(x_2)$:

а) якщо $f(x_1) > f(x_2)$, прийняти $x_3 = x_1 + 2\Delta x$ (рис. 3.6,а);

б) якщо $f(x_1) \le f(x_2)$ прийняти $x_3 = x_1 - \Delta x$ (рис. 3.6,б).

5. Обчислити $f(x_3) = f_3$.

6. Знайти $F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$, $x_{\min} = x_i$: $f(x_i) = F_{\min}$.

7. Обчислити точку мінімуму інтерполяційного полінома, побудованого по трьох точках: $\overline{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2^2 - x_3^2) f_1 + (x_3^2 - x_1^2) f_2 + (x_1^2 - x_2^2) f_3}{(x_2 - x_3) f_1 + (x_3 - x_1) f_2 + (x_1 - x_2) f_3}$, і величину функції $f(\overline{x})$ (рис. 3.6).

Якщо знаменник в формулі для $\overline{x}$ на деякій ітерації перетворюються на нуль, то результатом інтерполяції є пряма. В цьому випадку рекомендується позначити $x_1 = x_{\min}$ і перейти до кроку 2.

8. Перевірити виконання умов закінчення:

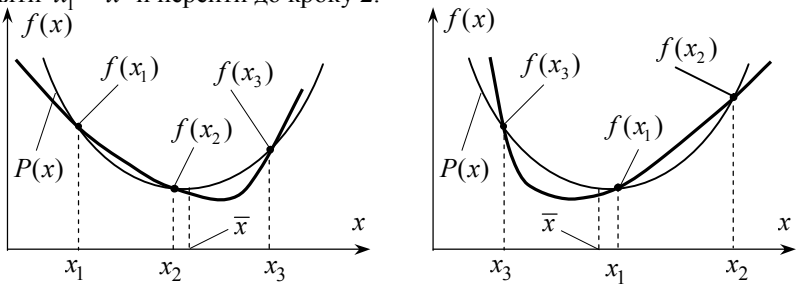
$$\left| \frac{F_{\min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})} \right| < \varepsilon_1, \quad \left| \frac{x_{\min} - \overline{x}}{\overline{x}} \right| < \varepsilon_2 .$$

Тоді:

а) якщо обидві умови виконані, процедура закінчена і $x^* \cong \overline{x}$;

б) якщо хоча б одна з умов не виконується і $\overline{x} \in [x_1; x_3]$, вибрати найкращу точку ($x_{\min}$ або $\overline{x}$) і дві точки по обидві боки від неї. Позначити ці точки в природному порядку і перейти до кроку 6;

в) якщо хоча б одна з умов не виконується і $\overline{x} \notin [x_1; x_3]$, то прийняти $x_1 = \overline{x}$ й перейти до кроку 2.



а) Рис. 3.6 *б)*

Зауваження 3.9

Кроки 1 - 4 алгоритму дозволяють з'ясувати напрямок спадання функції, а в деяких випадках визначити інтервал, на якому функція є унімодальною.

Приклад 3.7

Знайти мінімум функції $f(x)=2x^2+\dfrac{16}{x}$ методом квадратичної інтерполяції.

Розв'язання

1^0. Задамо початкову точку $x_1=1$, величину кроку $\Delta x=1$, $\varepsilon_1=0.003$ і $\varepsilon_2=0.03$.

2^0. Обчислимо $x_2=x_1+\Delta x=2$.

3^0. Обчислимо $f(x_1)=f_1=18$; $f(x_2)=f_2=16$.

4^0. Оскільки $f(x_1)>f(x_2)$, приймемо $x_3=x_1+2\Delta x=1+2=3$ (рис. 3.6).

5^0. Обчислимо $f(x_3)=f_3=23.33$.

6^0. Знайдемо $F_{\min}=\min\{18;\,16;\,23.33\}=16$; $x_{\min}=x_2=2.$

7^0. Обчислимо точку мінімуму інтерполяційного полінома:

$$\overline{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(4-9)18+(9-1)16+(1-4)23.33}{(2-3)18+(3-1)16+(1-2)23.33}=1.714;\quad f(\overline{x})=15.21.$$

8^0. Перевіримо умови закінчення:

$$\left|\frac{16-15.21}{15.21}\right|=0.052>\varepsilon_1=0.003 \text{ (не виконується)},$$

$\overline{x}$ – найкраща точка, ліворуч від неї точка $x_1=1$, а праворуч $x_2=2$. Позначимо їх в природному порядку $x_1=1$; $x_2=\overline{x}=1.714$; $x_3=2$. Цим точкам відповідають наступні значення функції: $f_1=18$; $f_2=15.21$; $f_3=16$. Перейдемо до кроку 6.

6^1. Знайдемо $F_{\min}=\min\{18;\,15.21;\,16\}=15.21$; $x_{\min}=x_2=1.714$.

7^1. Обчислимо точку мінімуму інтерполяційного полінома:

$$\overline{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1.714^2-4)18+(4-1)15.21+(1-1.714^2)16}{(1.714-2)18+(2-1)15.21+(1-1.714)16}=1.65;\quad f(\overline{x})=15.142.$$

8^1. Перевіримо умови закінчення:

$$\left|\frac{15.21-15.142}{15.142}\right| = 0.0045 > \varepsilon_1 = 0.003 \text{ (не виконується);}$$

$\overline{x}$ – найкраща точка, ліворуч від неї точка $x_1 = 1$, а праворуч $x_2 = 1.714$. Позначимо їх в природному порядку $x_1 = 1$; $x_2 = 1.65$; $x_3 = 1.714$. Цим точкам відповідають наступні значення функції: $f_1 = 18$; $f_2 = 15.142$; $f_3 = 15.21$. Перейдемо до кроку 6.

6^2. Знайдемо

$$F_{\min} = \min\{18; 15.142; 15.21\} = 15.142; \quad x_{\min} = x_2 = 1.65.$$

7^2. Обчислимо точку мінімуму інтерполяційного полінома:

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1.65^2 - 1.714^2)18 + (1.714^2 - 1)15.142 + (1 - 1.65^2)15.21}{(1.65 - 1.714)18 + (1.714 - 1)15.142 + (1 - 1.65)15.21} = 1.6125;$$

$$f(\overline{x}) = 15.123.$$

8^2. Перевіримо умови закінчення:

$$\left|\frac{15.142-15.123}{15.123}\right| = 0.0013 < \varepsilon_1 = 0.003 \text{ (виконується);}$$

$$\left|\frac{1.65-1.6125}{1.6125}\right| = 0.023 < \varepsilon_2 = 0.03 \text{ (виконується).}$$

Пошук закінчений. Розв'язок $x^* \cong \overline{x} = 1.6125$.

Знайдемо аналітично координату точки мінімуму за допомогою необхідних умов безумовного екстремуму:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x - \frac{16}{x^2} = 0$$

Звідси $x^* = \sqrt[3]{4} = 1.5874$. В цій точці достатні умови безумовного мінімуму виконуються, тобто

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 4 + \frac{32}{x^3}\bigg|_{x=x^*} = 12 > 0.$$

3.3. Методи першого й другого порядку

Прямі методи (див. розд. 3.2) використовуються при мінімальних вимогах до функції $f(x)$ – вона вважається унімодальною і обчисленню

доступні значення функції. Ці вимоги можна підсилити, припустивши, що $f(x)$ є диференційовною в довільно обраних точках.

Методи *першого порядку* припускають використання значень функції і її перших похідних, а методи *другого порядку* – можливість використання значень і других похідних функції $f(x)$.

Для опуклої диференційовної функції рівність $f'(x)=0$ є не тільки необхідною, але й достатньою умовою глобального мінімуму. Тому якщо відомо, що x^* є внутрішньою точкою відрізка $[a;\ b]$, то наближена рівність $f'(x)\approx 0$ або $|f'(x)|\le\varepsilon$, де $\varepsilon>0$ – досить мале число, може слугувати умовою закінчення обчислень.

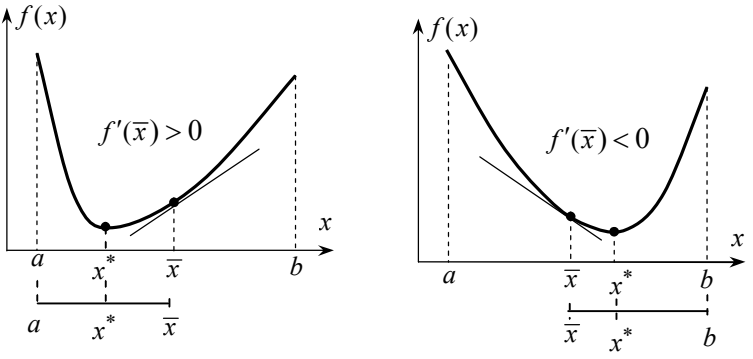
3.3.1. Метод середньої точки

Постановка задачі Задано неперервну диференційовну унімодальну функцію $f(\mathrm{x})$, визначену на множині припустимих розв'язків $X=[a;b]\in R$.

Потрібно знайти локальний мінімум функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^*\in X$, що $f(x^*)=\min\limits_{x\in X} f(x)$.

Стратегія розв'язання задачі Задається початковий інтервал невизначеності $L=[a;b]$.

Обчислюється значення $\dfrac{df(x)}{dx}$ в середній точці інтервалу $\overline{x}=\dfrac{(a+b)}{2}$. Якщо $\dfrac{df(\overline{x})}{dx}>0$, то точка $\overline{x}$ лежить на ділянці монотонного зростання $f(x)$, тому $x^*<\overline{x}$, і точку мінімуму треба шукати на відрізку $[a;\ \overline{x}]$, відрізок $[\overline{x};\ b]$ виключається. При $\dfrac{df(\overline{x})}{dx}<0$ точку мінімуму шукають на відрізку $[\overline{x};\ b]$, відрізок $[a;\ \overline{x}]$ виключається (рис. 3.7). Таке виключення відрізків вимагає на кожній ітерації тільки одного обчислення похідної і зменшує відрізок пошуку точки x^* вдвічі. Рівність $\dfrac{df(\overline{x})}{dx}=0$ означає, що точка мінімуму знайдена точно: $x^*=\overline{x}$.



а *б*

Рис. 3.7

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$ і точність $\varepsilon = |f'(x)| > 0$. Визначити вираз $f'(x)$.

2. Прийняти $k = 0$.

3. Обчислити середню точку $\overline{x}_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ і значення похідної $f'(\overline{x}_k)$.

4. Перевірити закінчення пошуку:

а) якщо $|f'(\overline{x}_k)| \le \varepsilon$, то процес пошуку завершити і $x^* \cong \overline{x}_k$, $f_{\min} = f(x^*)$;

б) якщо $|f'(\overline{x}_k)| > \varepsilon$, то перейти до кроку 5.

5. Порівняти $f'(\overline{x}_k)$ з нулем:

а) якщо $f'(\overline{x}_k) > 0$, то прийняти $b_{k+1} = \overline{x}_k$, $a_{k+1} = a_k$, $k = k+1$ і перейти до кроку 3;

б) якщо $f'(\overline{x}_k) < 0$, то прийняти $a_{k+1} = \overline{x}_k$, $b_{k+1} = b_k$, $k = k+1$ і перейти до кроку 3.

Приклад 3.8

Знайти мінімум функції $f(x) = x^4 + e^{-x}$ методом середньої точки.

Розв'язання

1. Задамо початковий інтервал невизначеності $L_0 = [0;1]$. Нехай точність $\varepsilon = 0.02$. Визначимо $f'(x) = 4x^3 - e^{-x}$.

2. Приймемо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $\overline{x}_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{0+1}{2} = 0.5$ і

$$f'(0.5) = 4 \cdot 0.5^3 - e^{-0.5} = -0.107 .$$

4^0. Перевіримо закінчення пошуку точки мінімуму: $|f'(0.5)| = 0.107 > \varepsilon = 0.02$. Переходимо до кроку 5.

5^0. Порівняємо $f'(\overline{x}_0)$ з нулем. Оскільки $f'(\overline{x}_0) = -0.107 < 0$, то $a_1 = \overline{x}_0 = 0.5$, $b_1 = b_0 = 1$, $k = 1$. Переходимо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $\overline{x}_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 0.75$ і $f'(\overline{x}_1) = f'(0.75) = 1.215$.

4^1. Оскільки $|f'(\overline{x}_1)| = 1.215 > \varepsilon = 0.02$, то переходимо до кроку 5.

5^1. Порівняємо $f'(\overline{x}_1)$ з нулем. Оскільки $f'(\overline{x}_1) = 1.215 > 0$, то $a_2 = a_1 = 0.5$, $b_2 = \overline{x}_1 = 0.75$, $k = 2$. Переходимо до кроку 3.

3^2. Обчислимо $\overline{x}_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 0.625$ і $f'(\overline{x}_2) = 0.441$.

4^2. Оскільки $|f'(\overline{x}_2)| = 0.441 > \varepsilon = 0.02$, то переходимо до кроку 5.

5^2. Порівняємо $f'(\overline{x}_2)$ з нулем. Оскільки $f'(\overline{x}_2) > 0$, то $a_3 = a_2 = 0.5$, $b_3 = \overline{x}_2 = 0.625$, $k = 3$. Переходимо до кроку 3.

3^3. Обчислимо $\overline{x}_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = 0.563$ і $f'(\overline{x}_3) = 0.142$.

4^3. Оскільки $|f'(\overline{x}_3)| = 0.142 > \varepsilon = 0.02$, то переходимо до кроку 5.

5^3. Порівняємо $f'(\overline{x}_3)$ з нулем. Оскільки $f'(\overline{x}_3) > 0$, то $a_4 = a_3 = 0.5$, $b_4 = \overline{x}_3 = 0.563$, $k = 4$. Переходимо до кроку 3.

3^4. Обчислимо $\overline{x}_4 = \dfrac{a_4 + b_4}{2} = 0.531$ і $f'(\overline{x}_4) = 0.012$.

4^4. Оскільки $|f'(\overline{x}_4)| = 0.012 < \varepsilon = 0.02$, то процес пошуку точки мінімального значення функції закінчено і $x^* \cong 0.531$, $f(x^*) = f_{\min} = 0.6675$.

3.3.2. Метод хорд

Постановка задачі Задано неперервну диференційовну унімодальну функцію $f(\mathrm{x})$, визначену на множині припустимих розв'язків $X=[a;b]\in R$. Потрібно знайти локальний мінімум функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^*\in X$, що $f(x^*)=\min\limits_{x\in X} f(x)$.

Стратегія розв'язання задачі Рівність $f'(x)=0$ є необхідною й достатньою умовою глобального мінімуму опуклої диференційовної функції $f(x)$ (див. розд. 1.2). Тому якщо на кінцях відрізка $[a;\,b]$ похідна $f'(x)$ має різні знаки, тобто $f'(a)f'(b)<0$, то на інтервалі $[a;\,b]$ знайдеться точка, в якій $f'(x)$ обертається в нуль, і пошук точки мінімуму $f(x)$ на $[a;\,b]$ є еквівалентним розв'язанню рівняння $f'(x)=0$, $x\in(a;\,b)$. Будь-який наближений метод розв'язання рівняння $f'(x)=0$ можна розглядати як метод мінімізації опуклої диференційвної функції $f(x)$ на відрізку $[a;\,b]$. Таким методом є метод хорд наближеного розв'язання рівняння $f'(x)=0$ на відрізку $[a;\,b]$ при $f'(a)f'(b)<0$. Цей метод ґрунтується на виключенні відрізків шляхом знаходження точки $\tilde{x}$ перетинання з віссю $0x$ хорди графіка функції $F(x)$ на черговому відрізку (рис. 3.8).

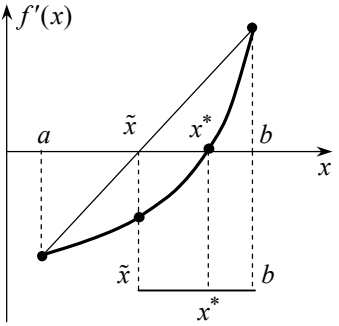


Рис. 3.8

На підставі рівняння відрізка прямой, що з'єднує дві точки $\big(a;\,f'(a)\big)$ і $\big(b;\,f'(b)\big)$, записуємо координату точки $\tilde{x}$, в якій $f'(\tilde{x})=0$:

$$\tilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b). \qquad (*)$$

Відрізок подальшого пошуку точки x^* $[a; \tilde{x}]$ або $[\tilde{x}; b]$ обирається залежно від знака $f'(\tilde{x})$ (див. розд. 3.3.1). На кожній ітерації, крім першої, треба обчислювати одне нове значення $f'(x)$.

Алгоритм

1. Визначити вираз $f'(x)$. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$ так, щоб $f'(a_0) f'(b_0) < 0$, і точність $\varepsilon = |f'(x)| > 0$.

2. Прийняти $k = 0$.

3. Знайти $\tilde{x}_k$ за формулою (*): $\tilde{x}_k = a_k - \frac{f'(a_k)}{f'(a_k) - f'(b_k)}(a_k - b_k)$.

4. Обчислити значення $f'(\tilde{x}_k)$.

5. Перевірити закінчення процесу пошуку: якщо $|f'(\tilde{x}_k)| \le \varepsilon$, то прийняти $x^* \cong \tilde{x}_k$, $f_{\min} = f(x^*)$ і пошук завершити, інакше – перейти до кроку 6.

6. Перейти до нового відрізка:

а) якщо $f'(\tilde{x}_k) > 0$, прийняти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \tilde{x}_k$, $f'(b_{k+1}) = f'(\tilde{x}_k)$, $k = k+1$; перейти до кроку 3;

б) якщо $f'(\tilde{x}_k) < 0$, прийняти $a_{k+1} = \tilde{x}_k$, $b_{k+1} = b_k$, $f'(a_{k+1}) = f'(\tilde{x}_k)$, $k = k+1$; перейти до кроку 3.

Зауваження 3.10

При заданому інтервалі $[a; b]$ і порушенні умови $f'(a) f'(b) < 0$ точку x^* можна вказати відразу. Так, якщо $f'(a) > 0$ і $f(b) > 0$, то $f(x)$ зростає на $[a; b]$, отже, $x^* = a$, а при $f'(a) < 0$ і $f(b) < 0$ вона спадає й $x^* = b$. У випадку $f'(a) \cdot f'(b) = 0$, $x^* = a$ або $x^* = b$ залежно від того, на якому з кінців інтервалу $[a; b]$ $f'(x) = 0$.

Приклад 3.9

Знайти мінімум функції $f(x) = x^4 + e^{-x}$ методом середньої точки на інтервалі $[0;1]$ з точністю $|f'(x)| \le \varepsilon = 0.05$.

Розв'язання

1. Визначимо $f'(x) = 4x^3 - e^{-x}$. Задано: $x \in [0;1]$ і $\varepsilon = 0.05$.

2. Приймемо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $\tilde{x}_0 = a_0 - \dfrac{f'(a_0)}{f'(a_0) - f'(b_0)}(a_0 - b_0) =$

$$= 0 - \frac{-1}{-1-(4-e^{-1})}(0-1) = 0.216 .$$

4^0. Обчислимо $f'(\tilde{x}_0) = 4 \cdot 0.216^3 - e^{-0.216} = -0.766$

5^0. Перевіримо закінчення пошуку мінімуму. Оскільки $|f'(\tilde{x}_0)| > \varepsilon$, переходимо до кроку 6.

6^0. Перейдемо до нового відрізка. Оскільки $f'(\tilde{x}_0) < 0$, приймемо $a_1 = \tilde{x}_0 = 0.216$, $b_1 = b_0 = 1$; $f'(a_1) = f'(\tilde{x}_0) = -0.766$, $k = 1$. Переходимо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $\tilde{x}_1 = a_1 - \dfrac{f'(a_1)}{f'(a_1) - f'(b_1)}(a_1 - b_1) = 0.352$.

4^1. Обчислимо $f'(\tilde{x}_1) = 4 \cdot 0.352^3 - e^{-0.352} = -0.528$.

5^1. Перевіримо закінчення пошуку. Оскільки $|f'(\tilde{x}_0)| > \varepsilon$, переходимо до кроку 6.

6^1. Перейдемо до нового відрізка. Оскільки $f'(\tilde{x}_0) < 0$, приймемо $a_2 = \tilde{x}_1 = 0.352$, $b_2 = b_1 = 1$, $f'(a_1) = f'(\tilde{x}_0) = -0.766$, $k = 1$. Переходимо до кроку 3.

Результати обчислень на інших ітераціях - в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Номер ітерації	a_k	b_k	$\tilde{x}_k$	$f'(\tilde{x}_k)$	Знак $f'(\tilde{x}_k)$
2	0.352	1	0.435	–0.319	(–)
3	0.435	1	0.480	–0.175	(–)
4	0.480	1	0.504	–0.091	(–)
5	0.504	1	0.516	–0.046	$\lvert f'(\tilde{x}_0)\rvert < \varepsilon$

Таким чином, $x^* \cong 0.516$, $f_{\min} = f(x^*) = 0.6678$.

3.3.3. Метод Ньютона

Постановка задачі Задано двічі неперервну диференційовну опуклу функцію $f(x)$, визначену на множині припустимих розв'язків $X = [a;b] \in R$.

Потрібно знайти мінімум функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in X \subset R$, що $f(x^*) = \min\limits_{x \in X} f(x)$.

Стратегія розв'язання задачі

За умовою функція $f(x)$ двічі диференційовна, причому $f''(x) > 0$ (це гарантує опуклість $f(x)$). Тоді корінь рівняння $f'(x) = 0$ можна шукати наближено, використовуючи *метод дотичних*. Цей метод розв'язання рівняння $f'(x) = 0$ заключається у побудові послідовних наближень x_k, $k = 0, 1, ...$ наступним чином. В точці x_k будується лінійна апроксимація $f'(x) = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k)$ функції $f'(x)$ (тобто дотична до лінії $f'(x)$) і точка, в якій лінійна апроксимуюча функція обертається в нуль, використовується як наступне наближення x_{k+1} (рис. 3.9). В процедурі розв'язання не потрібен інтервал $[a; b]$, тому для задачі безумовної оптимізації передбачається $X = R$.

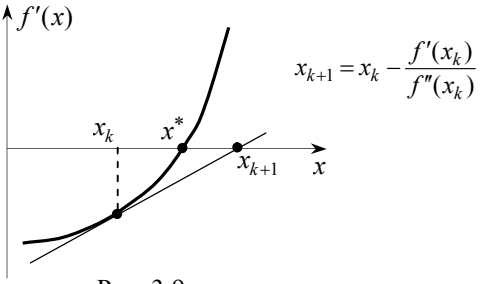


Рис. 3.9.

Описана стратегія пошуку точки мінімуму називається *методом Ньютона.*

Зауваження 3.11

1. Для квадратичних функцій $f(x)$ метод Ньютона гарантує високу швидкість збіжності до точки мінімуму.

2. В загальному випадку, збіжність методу Ньютона залежить від початкового наближення x_0 (послідовність x_k, $k = 0, 1, 2, 3, ...$ може виявитися розбіжною). Тому x_0 повинна бути обрана досить близькою до x^* за допомогою якого-небудь іншого методу.

Алгоритм

1. Визначити вираз $f'(x)$ і $f''(x)$. Задати початкову точку x_0 і точність розв'язання $\varepsilon = |f'(x)| > 0$, як умову закінчення пошуку екстремальної точки.

2. Обчислити значення $f'(x_0)$.

3. Перевірити чи є x_0 розв'язком задачі: якщо $|f'(x_0)| \le \varepsilon$, то прийняти $x^* \cong x_0$, $f_{\min} = f(x^*)$ і закінчити пошук, інакше перейти до кроку 4.

4. Прийняти $k = 0$.

5. Обчислити значення $f''(x_k)$. Значення $f'(x_k)$ вже відомо.

6. Знайти x_{k+1} за формулою $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$.

7. Обчислити значення $f'(x_{k+1})$.

8. Перевірити закінчення пошуку екстремальної точки: якщо виконується умова $|f'(x_{k+1})| \le \varepsilon$, то прийняти $x^* \cong x_{k+1}$, $f_{\min} = f(x^*)$ і пошук завершити, інакше $k = k+1$ і перейти до кроку 5.

Приклад 3.10

Знайти точку мінімуму функції $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - 0.5 \cdot \ln(1 + x^2)$ методом Ньютона з точністю $|f'(x)| \le \varepsilon = 10^{-7}$.

Розв'язання

1. Визначимо $f'(x) = \operatorname{arctg} x$ і $f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ($f''(x) > 0$). Виберемо початкове наближення $x_0 = 1$. Точність $\varepsilon = 10^{-7}$ задано умовою задачі.

2. Обчислимо $f'(x_0) = \operatorname{arctg} 1 = 0.785$.

3. Оскільки $|f'(x_0)| = 0.785 > \varepsilon$, то перейдемо до кроку 4.

4. Приймемо $k = 0$.

5^0. Обчислимо $f''(x_0) = 0.5$; $f'(x_0) = 0.785$.

6^0. Обчислимо $x_1 = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 1 - \dfrac{0.785}{0.5} = -0.570$.

7^0. Обчислимо $f'(x_1) = \operatorname{arctg}(-0.570) = -0.519$.

8^0. Оскільки $|f'(x_1)| = 0.519 > \varepsilon$, то $k = k+1 = 1$ і перейдемо до кроку 5.

5^1. Обчислимо $f''(x_1) = \dfrac{1}{1+(-0.570)^2} = 0.755$; $f'(x_1) = -0.519$.

6^1. Обчислимо $x_2 = x_1 - \dfrac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = -0.570 - \dfrac{-0.519}{0.755} = 0.117$.

7^1. Обчислимо $f'(x_2) = \operatorname{arctg}(0.117) = 0.116$.

8^1. Оскільки $|f'(x_2)| = 0.116 > \varepsilon$, то $k = k+1 = 2$ і перейдемо до кроку 5.

Результати обчислень на інших ітераціях - в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Номер ітерації	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	Точність розв'язку
2	0.117	0.116	0.435	$\|f'(x_2)\| > \varepsilon$
3	$-1.061\cdot10^{-3}$	$-1.061\cdot10^{-3}$	1	$\|f'(x_3)\| > \varepsilon$
4	$9\cdot10^{-8}$	$9\cdot10^{-8}$	1	$\|f'(\tilde{x}_4)\| < \varepsilon$

Таким чином, $x^* \cong 9\cdot10^{-8} \cong 0$, $f_{\min} = f(x^*) = 0$.

Зауваження 5.11

Якщо в прикладі 3.4 прийняти початкове наближення $x_0 = 3$, то одержимо розбіжну послідовність: $x_1 = -9.5$, $x_2 = 124$, $x_3 = -23906$, $x_4 = 8.97\cdot10^8$, $x_5 = -1.27\cdot10^{18}$,…

Задачі для самостійного розв'язування

1. Методом Свенна знайти початковий інтервал невизначеності для розв'язання задачі

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \to \min$$

при $x^0 = 0$ і різних t: $t = 1$; $t = 0.1$; $t = 0.01$.

***Відповідь*:** $L_0 = [1;7]$ при $t = 1$;

$L_0 = [1.5;6.3]$ при $t = 0.1$; $L_0 = [1.27;\ 5.11]$ при $t = 0.01$.

2. Методом Свенна знайти початковий інтервал невизначеності для розв'язання задачі

$$f(x) = x^2 + 6x + 12 \to \min .$$

Відповідь:

$L_0 = [-8; 4]$ при $x_0 = -10$, $t = 2$; $L_0 = [-5; 1]$ при $x_0 = 1$, $t = 2$;

$L_0 = [-6; 0]$ при $x_0 = 1$, $t = 1$; $L_0 = [-7; -1]$ при $x_0 = 0$, $t = 1$.

3. Методами рівномірного пошуку, ділення інтервалу навпіл, дихотомії розв'язати задачу

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \to \min ,\ L_0 = [-2; 4] .$$

Відповідь:

метод рівномірного пошуку: при $n = 10$ $x^* \in [2.364; 3.455]$;

метод ділення інтервалу навпіл: при $\varepsilon = 1$ $x^* \in [2.50; 3.25]$,

при $\varepsilon = 0.1$ $x^* \in [2.969; 3.063]$;

метод дихотомії: при $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.1$, $x^* \in L_6 = [2.425; 3.263]$;

при $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.01$, $x^* \in L_{14} = [2.960; 3.017]$.

Точний розв'язок $x^* = 3$ і $f(x^*) = 5$.

4. Методами рівномірного пошуку, ділення інтервалу навпіл, дихотомії, золотого перерізу, Фібоначі розв'язати задачу

$$f(x) = x^2 + 6x + 12 \to \min ,\ L_0 = [-4; 1] .$$

Відповідь:

– метод рівномірного пошуку: при $n = 10$ $x^* \in L = [-3.545; -2.636]$;

– метод ділення інтервалу навпіл: при $\varepsilon = 1$ $x^* \in L_6 = [-3.375; -2.750]$;

– метод дихотомії: при $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.2$ $x^* \in L_6 = [-3.4; -2.6]$;

– метод золотого перерізу: при $\varepsilon = 0.1$ $x^* \in L_{10} = [-3.033; -2.967]$;

– метод Фібоначі: при $n = 5$ $\delta = 0.01$, $x^* \in L_5 = [-3.375; -2.740]$.

Точний розв'язок $x^* = -3$ і $f(x^*) = 39$.

5. Методом рівномірного пошуку розв'язати задачу

$$f(x) = x^4 + e^{-x} \to \min ,\ x \in [0; 1] \text{ з точністю } \varepsilon = 0.1 .$$

Перевірити унімодальність функції на відрізку $[0; 1]$.

Відповідь: $n = 10$, $x^* = 0.5$, $f(x^*) = 0.67$.

6. Методом дихотомії розв'язати задачу

$$f(x) = x^4 + e^{-x} \to \min,\ x \in [0;1] \text{ з точністю } \varepsilon = 0.1.$$

Відповідь: $\delta = 0.02$, $x^* \in L_{10} = [0.49;\ 0.633]$; $x^* = 0.56$,

$$f(x^*) = 0.67.$$

7. Методом золотого перерізу розв'язати задачу

$$f(x) = x^4 + e^{-x} \to \min,\ x \in [0;1] \text{ з точністю } \varepsilon = 0.1.$$

Відповідь: $x^* \in L_5 = [0.472;\ 0.618]$, $x^* = 0.55$, $f(x^*) = 0.67$.

8. Методом золотого перерізу розв'язати задачу

$$f(x) = \frac{127}{4}x^2 - \frac{61}{4}x + 2 \to \min,$$

при точності $\varepsilon = 0.15$. Інтервал невизначеності визначити методом Свенна при початковій точці $x_0 = 0.25$ і величині кроку $\Delta x = 0.25$.

Відповідь: $x^* \cong 0.25$ і $f(x^*) = 0.1719$.

9. Методом квадратичної інтерполяції розв'язати задачі

а) $f(x) = \frac{127}{4}x^2 - \frac{61}{4}x + 2 \to \min$, $x_1 = 0.25$, $\Delta x = 0.25$, $\varepsilon_1 = 0.02$;

б) $f(x) = x^4 + e^{-x} \to \min$, $x_0 = 0.5$, $\Delta x = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.02$

Відповідь: а) $x^* \cong 0.2402$ і $f(x^*) = 0.1688$;

б) $x^* = 0.5224$ і $f(x^*) = 0.667$.

10. Скласти програми мінімізації функції методами рівномірного пошуку, ділення відрізка навпіл, дихотомії, золотого перерізу, Фібоначі, використовуючи яку-небудь мову програмування. Перевірити роботу цих програм, розв'язавши наступні задачі з точністю, обраною самостійно, і порівняти з відповіддю

а) $f(x) = x^3 - 3\sin x \to \min$, $x \in [0;\ 1]$;

б) $f(x) = e^x + \frac{1}{x} \to \min$, $x \in [0.5;\ 1.5]$.

Відповідь: а) $x^* = 0.8241$ і $f(x^*) = -1.6421$;

б) $x^* = 0.7035$ і $f(x^*) = 3.4423$.

11. Методами середньої точки, хорд і Ньютона розв'язати задачу

$$f(x) = x^2 + e^{-x} \to \min$$

при заданому $L_0 = [0; 1]$. Скористатися комп'ютером, склавши програму (на будь-якій мові), порівняти отримані результати з відповіддю.

Відповідь: $x^* \cong 0.3517$ і $f(x^*) = 0.8272$.

12. Методами середньої точки, хорд і Ньютона розв'язати задачу

$$f(x) = x^2 + x + \sin x \to \min$$

при заданому $L_0 = [-1; 0]$. Скористатися комп'ютером, склавши програму (на будь-якій мові), порівняти отримані результати з відповіддю.

Відповідь: $x^* \cong -0.8354$ і $f(x^*) = -0.8791$.

Розділ 4

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ БЕЗУМОВНОЇ БАГАТОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

4.1. Загальні принципи побудови чисельних методів багатовимірної оптимізації

Застосування необхідних і достатніх умов безумовного екстремуму, викладених в першому розділі, ефективне для розв'язання обмеженого числа прикладів. Для розв'язання більшості практичних задач вони не можуть бути рекомендовані з наступних причин:

1. Цільова функція $f(\mathrm{x})$ може не мати неперервних похідних до другого порядку включно.

2. Використання необхідної умови першого порядку (1.3) пов'язане з розв'язанням системи n в загальному випадку нелінійних алгебраїчних рівнянь, що являє собою самостійну задачу, трудомісткість розв'язання якої порівняння із трудомісткістю чисельного розв'язання поставленої задачі пошуку екстремуму.

3. Можливі випадки, коли про цільову функцію відомо лише те, що її значення може бути обчислене з потрібною точністю, а сама функція задана неявно.

Чисельні методи оптимізації відносяться до класу *ітераційних,* тобто точок, що породжують послідовність, відповідно до запропонованого набору правил, що включають критерій закінчення. При заданій початковій точці x^0 методи генерують послідовність x^0, x^1, x^2,..... Перетворення точки x^k в x^{k+1} є *ітерацію.*

Для чисельного розв'язання задач безумовної мінімізації:

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x}) \tag{4.1}$$

розроблено безліч алгоритмів, що використовують ітераційні процедури вигляду

$$\mathrm{x}^{k+1} = \Phi(\mathrm{x}^0, \mathrm{x}^1, \ldots, \mathrm{x}^{k-1}, \mathrm{x}^k), \quad \mathrm{x}^0 \in R^n, \tag{4.2}$$

які дозволяють при певних умовах побудувати послідовність $\{x^k\}$ таку, що

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f^* = \inf_{R^n} f(x) . \qquad (4.3)$$

Означення 4.1. Послідовність $\{x^k\}$ називається мінімізуючою, якщо $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f^*$, тобто послідовність збігається до точної нижньої межі $f^* = \inf_{x\in R^n} f(x)$.

Означення 4.2. Послідовність $\{x^k\}$ називається *збіжною до точки мінімуму* x^*, якщо $|x^k - x^*| \to 0$ при $k \to \infty$.

Основне правило побудови послідовності $\{x^k\}$ має вигляд

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k , \quad k = 0, 1, 2, \ldots , \qquad (4.4)$$

де точка x^0 – *початкова точка* пошуку; α_k – *величина кроку*, p^k – прийнятний напрямок переходу із точки x^k в точку x^{k+1}, що забезпечує виконання умови

$$f(x^{k+1}) < f(x^k) , \quad k = 0,1,2,... \qquad (4.5)$$

і називається *напрямком спуску (пошуку).*

Початкова точка пошуку x^0 задається, виходячи з фізичного змісту розв'язуваної задачі й наявності апріорної інформації про положення точок екстремуму.

Прийнятний напрямок спуску p^k повинен задовольняти умові

$$\left\langle \nabla f(x^k), p^k \right\rangle < 0 , \quad k = 0, 1, 2, \ldots , \qquad (4.6)$$

що забезпечує спадання функції $f(x)$. Прикладом прийнятного напрямку є напрямок вектора антиградієнту: $p^k = -\nabla f(x^k)$.

Величина кроку $\alpha_k > 0$ вибирається або з умови (4.5), або з умови мінімуму функції вздовж напрямку спуску:

$$f(x^k + \alpha_k p^k) \to \min_{\alpha_k} . \qquad (4.7)$$

Вибір кроку α_k з умови (4.7) робить спуск у напрямку p^k *найшвидшим.*

Має місце наступна властивість *вичерпного спуску*.

Теорема 4.1. *Для диференційовної в* R^n *функції* $f(\mathrm{x})$ *в ітераційному процесі (4.4) з вибором кроку* α_k *відповідно до (4.7) для всіх* $k \geq 1$ *виконується умова*

$$\langle \nabla f(\mathrm{x}^{k+1}), \mathrm{p}^k \rangle = 0 . \tag{4.8}$$

Співвідношення (4.8) можна проілюструвати геометрично в просторі R^n. При переміщенні із точки x^k вздовж прямої, що задається вектором p^k, в напрямку спадання функції, відбувається перетинання ліній рівня функції $f(\mathrm{x})$ доти, поки або не буде досягнута стаціонарна точка ($\nabla f(\mathrm{x}^{k+1}) = 0$), або пряма не торкнеться в точці x^{k+1} деякої лінії рівня функції $f(\mathrm{x})$. Рівність (4.8) і є умовою дотику (рис. 4.1).

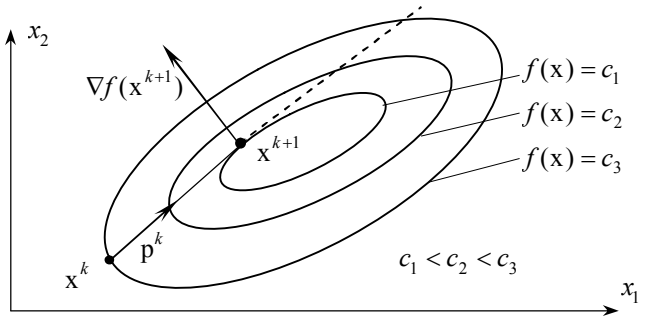


Рис. 4.1

Збіжність послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ при виборі прийнятного напрямку p^k і величини кроку α_k з умови (4.5) або (4.7) залежить від характеру функції $f(\mathrm{x})$ і від вибору початкової точки x^0.

Залежно від найвищого порядку частинних похідних функції $f(\mathrm{x})$, які використовуються для формування p^k і α_k, чисельні методи розв'язання задачі безумовної мінімізації (4.1) прийнято ділити на три групи.

1. *Методи нульового порядку*, які використовують тільки інформацію про значення функції $f(\mathrm{x})$.

2. *Методи першого порядку*, які використовують інформацію про перші похідні функції $f(\mathrm{x})$.

3. *Методи другого порядку*, які вимагають для своєї реалізації знання других похідні функції $f(\mathrm{x})$.

Працездатність методу ще не гарантована доведенням збіжності відповідної послідовності – потрібна певна *швидкість збіжності*. Зазначимо, однак, що на практиці результати загальної теорії збіжності повинні використовуватися з великою обережністю. Так, наприклад, не можна оцінювати алгоритми тільки за величинами теоретичних швидкостей збіжності генеруємих ними послідовностей - хоча ці швидкості деякою мірою визначають ефективність методів, умови, при яких вони досяжні, реалізуються рідко. Точно так само не можна зневажати алгоритмом лише з тієї причини, що теореми про швидкість його збіжності не доведені: не виключено, що доведення немає просто тому, що провести його дуже складно.

Проте швидкість збіжності є важливою характеристикою збіжних послідовностей.

Розглянемо послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$, що збігається до x^*.

Найбільш ефективний спосіб оцінювання швидкості збіжності заключається в зіставленні відстані між x^k і x^*, тобто $\| \mathrm{x}^k - \mathrm{x}^* \|$, і відстані між x^{k+1} і x^*, тобто $\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^* \|$.

Означення 4.3. Послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$ називається *збіжною з порядком* r, якщо r – максимальне число, для якого

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \frac{\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^* \|}{\| \mathrm{x}^k - \mathrm{x}^* \|^r} < \infty .$$

Оскільки величина r визначається граничними властивостями $\{\mathrm{x}^k\}$, вона називається асимптотичною *швидкістю збіжності.*

Означення 4.4. Якщо послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$ збігається з порядком r, то число

$$c = \lim_{k\to\infty} \frac{\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^* \|}{\| \mathrm{x}^k - \mathrm{x}^* \|^r}$$

називається асимптотичним *параметром помилки.*

Означення 4.5. Якщо $r = 1$, $c < 1$, то збіжність *лінійна,* якщо $r = 2$, то збіжність *квадратична*; якщо $r > 1$ або $r = 1$, $c = 0$, то збіжність надлінійна.

Лінійна збіжність є синонімом збіжності зі швидкістю геометричної прогресії.

Приклад 4.1

Визначити порядок збіжності послідовності:

$$x^k = 1 + 2^{-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Розв'язання

Послідовність $\{x^k\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \ldots\right\}$ збігається до $x^* = 1$, причому $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x^k - 1} = \frac{1}{2}$ і $r = 1$. Збіжність лінійна.

Зауваження 4.1. Одним із критеріїв збіжності, який часто використовується при порівнянні алгоритмів, є їхня здатність ефективно мінімізувати *квадратичні функції*. Це пояснюється тим, що поблизу мінімуму квадратична функція може бути досить гарною апроксимацією досліджуваної функції. Таким чином, алгоритм, що не дає гарних результатів при мінімізації квадратичної функції, навряд чи може бути з успіхом використаний у випадку загальної нелінійної функції, коли поточна точка перебуває в околі мінімуму.

Встановлення факту збіжності послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ і оцінка швидкості збіжності дають суттєву інформацію про ітераційний процес (4.4).

Конкретний обчислювальний алгоритм на основі (4.4), в якому може виходити, загалом кажучи, нескінченна послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$, необхідно доповнювати *умовою зупинки* обчислень (критерієм закінчення рахунку). На практиці часто користуються наступними умовами:

$$\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k \| < \varepsilon_1, \quad |f(\mathrm{x}^{k+1}) - f(\mathrm{x}^k)| < \varepsilon_2, \quad \| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| < \varepsilon_3,$$

де ε_1, ε_2, ε_3 – заздалегідь задані параметри точності.

Алгоритми, побудовані на підставі процедури (4.4), тобто

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \alpha_k \mathrm{p}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

розрізняються способом побудови вектора p^k і вибору кроку α_k.

4.2. Методи нульового порядку

Методи розв'язання задачі безумовної мінімізації $f(\mathrm{x}) \to \min$, $\mathrm{x} \in R^n$, які спираються тільки на обчислення значень функції $f(\mathrm{x})$, називаються методами *нульового порядку* (*прямими методами) мінімізації*. Важливо відзначити, що для їхнього застосування не потрібно не тільки диференційовності цільової функції, але навіть аналітичного її завдання.

Потрібно лише мати можливість обчислювати або вимірювати значення $f(\mathrm{x})$ в довільних точках. Такі ситуації часто зустрічаються в практично важливих задачах оптимізації.

4.2.1. Метод конфігурацій

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний локальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ багатьох змінних, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x})$.

Стратегія розв'язання задачі Метод конфігурацій є модифікацією методу циклічного покоординатного пошуку [5]. Цей метод відомий як метод Хука-Дживса (R. Hooke, T. A. Jeeves) являє собою комбінацію *пошуку, що досліджує*, із циклічною зміною змінних і *прискорювального пошуку за зразком.* Досліджувальний пошук, орієнтований на виявлення локального поводження цільової функції і визначення напрямку її спадання вздовж "ярів". Отримана інформація використовується при пошуку за зразком при русі вздовж "ярів".

Досліджувальний пошук, починається в деякій початковій точці x^0, яка *називається старим базисом.* Як множина напрямків пошуку вибирається множина *координатних* напрямків e^i, $i = 1,...,n$. Задається величина кроку, яка може бути різною для різних координатних напрямків і змінною в процесі пошуку. Фіксується перший координатний напрямок і робиться крок вбік збільшення відповідної змінної. Якщо значення функції в пробній точці менше значення функції у вихідній точці, крок вважається вдалим. В противному випадку необхідно повернутися в попередню точку і зробити крок в протилежному напрямку з наступною перевіркою поводження функції. Після перебору всіх координат пошук, що досліджує, завершується. Отримана точка називається *новим базисом* x^1. Якщо досліджувальний пошук з даною величиною кроку невдалий, то вона зменшується і процедура триває. Пошук закінчується, коли поточна величина кроку стане менше деякої величини.

Пошук за зразком полягає в русі за напрямком від старого базису до нового (від точки x^0 через точку x^1, із точки x^1 через точку x^2, із x^2 через x^3 і т.д.). Величина прискорювального кроку задається прискорювальним множником λ. Успіх пошуку за зразком визначається за допомогою досліджувального пошуку з отриманої точки. Якщо при цьому зна-

чення в найкращій точці менше, ніж у точці попереднього базису, то пошук за зразком вдалий, інакше пошук невдалий. Якщо пошук за зразком невдалий, відбувається повернення в новий базис, де продовжується досліджувальний пошук зі зменшеним кроком.

При пошуку за напрямком e^i змінюється тільки змінна x_i, а інші змінні залишаються фіксованими.

Алгоритм

1. Задати початкову точку x^0, число $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму, початкові величини кроків по координатних напрямках Δ_1, …, $\Delta_n \geq \varepsilon$, множник $\lambda > 0$, коефіцієнт зменшення кроку $\alpha > 1$. Вважати $\mathrm{y}^1 = \mathrm{x}^0$, $i = 1$, $k = 0$.

2. Здійснити досліджувальний пошук по обраному координатному напрямку:

а) якщо $f(\mathrm{y}^i + \Delta_i e^i) < f(\mathrm{y}^i)$, тобто $f(y_1^i,...,y_i^i + \Delta_i,...,y_n^i) < f(y_1^i,...,y_i^i,...,y_n^i)$, то крок вважається вдалим. У цьому випадку варто вважати $\mathrm{y}^{i+1} = \mathrm{y}^i + \Delta_i e^i$ і перейти до кроку 3;

б) якщо в п. «а» крок невдалий, то робиться крок в протилежному напрямку. Якщо $f(\mathrm{y}^i - \Delta_i e^i) < f(\mathrm{y}^i)$, тобто $f(y_1^i,...,y_i^i - \Delta_i,...,y_n^i) < f(y_1^i,...,y_i^i,...,y_n^i)$, то крок вважається вдалим. В цьому випадку варто вважати $\mathrm{y}^{i+1} = \mathrm{y}^i - \Delta_i e^i$ і перейти до кроку 3;

в) якщо в пп. «а» і «б» кроки невдалі, вважати $\mathrm{y}^{i+1} = \mathrm{y}^i$.

3. Перевірити умови:

а) якщо $i < n$, то вважаємо $i = i + 1$ і переходимо до кроку 2 (продовжити досліджувальний пошук по напрямках, що залишилися);

б) якщо $i = n$, перевірити успішність досліджувального пошуку, що досліджує:

– якщо $f(\mathrm{y}^{k+1}) < f(\mathrm{y}^k)$, перейти до кроку 4;

– якщо $f(\mathrm{y}^{k+1}) \geq f(\mathrm{y}^k)$, перейти до кроку 5.

4. Провести пошук за зразком. Вважати $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{y}^{n+1}$, $\mathrm{y}^1 = \mathrm{x}^{k+1} + \lambda(\mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k)$, $i = k$, $k = k + 1$ і перейти до кроку 2.

5. Перевірити умови закінчення:

а) якщо всі $\Delta_i > \varepsilon$, то пошук закінчити: $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{x}^k$;

б) для тих i, для яких $\Delta_i > \varepsilon$, зменшити величину кроку: $\Delta_i = \dfrac{\Delta_i}{\alpha}$.

Вважати $\mathrm{y}^1 = \mathrm{x}^k$, $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k$, $k = k+1$, $i = 1$ і перейти до кроку 2.

Зауваження 4.2.

1. В алгоритмі можна використовувати однакову величину кроку по координатних напрямках, тобто замість Δ_1, Δ_2,…, Δ_n застосовувати Δ.

2. Існує модифікація методу, де при досліджувальному пошуку і пошуку за зразком використовується одновимірна мінімізація. Тоді, якщо функція $f(\mathrm{x})$ диференційовна, метод збігається до стаціонарної точки.

Приклад 4.2

Знайти мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$$

методом конфігурацій (методом Хука-Дживса).

Розв'язання

I^0. Задамо $\mathrm{x}^0 = (8;9)$ – старий базис, $\varepsilon = 0.3$; $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$, $\alpha = 2$, $\lambda = 1$. Вважаємо $k = 0$, $i = 1$, $\mathrm{y}^1 = (8;9)^T$. На рис. 4.2 зображені точки пошуку розв'язку перших двох ітерацій. Точка 1: x^0.

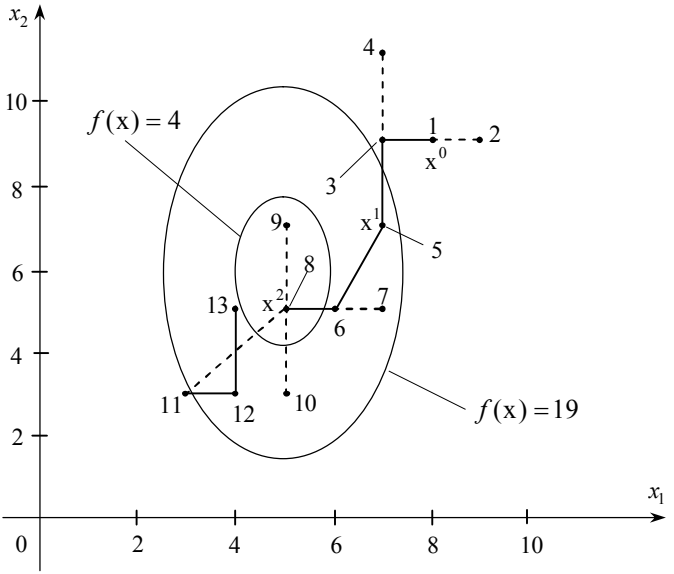


Рис. 4.2

2^0. Оскільки $f(\mathrm{y}^1 + \Delta_1 e^1) = f(9,9) = 73 > f(\mathrm{y}^1) = f(\mathrm{x}^0) = 45$, то цей крок невдалий. Точка 2: $(9; 9)$.

Того, що $f(\mathrm{y}^1 - \Delta_1 e^1) = f(7,9) = 25 < f(\mathrm{y}^1) = f(\mathrm{x}^0) = 45$, то цей крок вдалий: $\mathrm{y}^2 = \mathrm{y}^1 - \Delta_1 e^1 = (7;9)^T$. Точка 3: $(7; 9)$.

3^0. Оскільки $i = 1 < 2 = n$, то вважаємо $i = i + 1 = 2$ і переходимо до кроку 2.

2^1. Того, що $f(\mathrm{y}^2 + \Delta_2 e^2) = f(7,11) = 41 > f(\mathrm{y}^2) = 25$, то крок невдалий. Точка 4: $(7; 11)$.

Того що $f(\mathrm{y}^2 - \Delta_2 e^2) = f(7,7) = 17 < f(\mathrm{y}^2) = 25$, то цей крок вдалий: $\mathrm{y}^3 = \mathrm{y}^2 - \Delta_2 e^2 = (7;7)^T$. Точка 5: $(7; 7)$.

3^1. Оскільки $i = 2 = 2 = n$ й $f(\mathrm{y}^3) = 17 < f(\mathrm{x}^0) = 45$, то перейдемо до кроку 4.

4^0. Вважаємо $\mathrm{x}^1 = \mathrm{y}^3 = (7;7)^T$ – новий базис, $i = 1$, $k = k + 1 = 1$, знайдемо $\mathrm{y}^1 = \mathrm{x}^1 + 1 \cdot (\mathrm{x}^1 - \mathrm{x}^0) = (7;7)^T + \left[(7;7)^T - (8;9)^T\right] = (6;5)^T$. Точка 6: y^1. Виконано пошук за зразком. Перейдемо до кроку 2.

2^2. Оскільки $f(\mathrm{y}^1 + \Delta_1 e^1) = f(7;5) = 17 > f(\mathrm{y}^1) = 5$, то крок невдалий. Точка 7: $(7;5)$. Того, що $f(\mathrm{y}^1 - \Delta_1 e^1) = f(5,5) = 1 < f(\mathrm{y}^1) = 5$, то крок вдалий: $\mathrm{y}^2 = \mathrm{y}^1 - \Delta_1 e^1 = (5;5)^T$. Точка 8: $(5; 5)$.

3^2. Оскільки $i = 1 < 2 = n$, то вважаємо $i = 2$ і переходимо до кроку 2.

2^3. Оскільки $f(\mathrm{y}^2 + \Delta_2 e^2) = f(5,7) = 1 > f(\mathrm{y}^2) = f(5,5) = 1$, то крок невдалий. Точка 9: $(5, 7)$.

Того, що $f(\mathrm{y}^2 - \Delta_2 e^2) = f(5,3) = 9 > f(\mathrm{y}^2) = 1$, то крок невдалий, тому $\mathrm{y}^3 = \mathrm{y}^2 = (5;5)^T$. Точка 10: $(5; 3)$.

3^3. Оскільки $i = 2 = 2 = n$ і $f(\mathrm{y}^3) = 1 < f(\mathrm{x}^1) = 17$, то пошук за зразком на кроці 4^0 успішний. Точка $\mathrm{y}^3 = (5;5)^T$ стає новим базисом, а точка $\mathrm{x}^1 = (7;7)^T$ – старим базисом. Перейдемо до кроку 4.

4[1]. Вважаємо $x^2 = y^3 = (5;5)^T$ – новий базис, $i = 1$, $k = k + 1 = 2$, знайдемо $y^1 = x^2 + (x^2 - x^1) = (5;5)^T + \left[(5;5)^T - (7;7)^T\right] = (3;3)^T$. Виконано пошук за зразком. Точка 11: $(3;\ 3)$. Перейдемо до кроку 2.

2[4]. Того, що $f(y^1 + \Delta_1 e^1) = f(4,3) = 13 < f(y^1) = f(3,3) = 25$, то крок вдалий: $y^2 = y^1 - \Delta_1 e^1 = (4;3)^T$. Точка 12: $(4;\ 3)$.

3[4]. Оскільки $i = 1 < 2 = n$, то вважаємо $i = 2$ і переходимо до кроку 2.

2[5]. Того, що $f(y^2 + \Delta_2 e^2) = f(4,5) = 5 < f(y^2) = 13$, то крок вдалий: $y^3 = y^2 + \Delta_2 e^2 = (4;5)^T$. Точка 13: $(4;\ 5)$.

3[5]. Оскільки $i = n$ і $f(y^3) = 5 > f(x^2) = 1$, то пошук за зразком на кроці 4^1 невдалий. Переходимо до кроку 5.

5[0]. Того, що $\Delta_1 = 1 > \varepsilon$, $\Delta_2 = 2 > \varepsilon$, то зменшимо крок: $\Delta_1 = \dfrac{\Delta_1}{2} = 0.5$, $\Delta_2 = \dfrac{\Delta_2}{2} = 1$.

Вважаємо $y^1 = x^2 = (5;5)^T$, $x^3 = x^2 = (5;5)^T$, $i = 1$, $k = k + 1 = 3$ і переходимо до кроку 2 (кінець другої ітерації, рис. 4.2).

2[6]. Оскільки $f(y^1 + \Delta_1 e^1) = f(5.5,\ 5) = 2 > f(y^1) = 1$, то крок невдалий. Того, що $f(y^1 - \Delta_1 e^1) = f(4.5,\ 5) = 2 > f(y^1) = 1$, то крок невдалий, тому $y^2 = y^1 = (5;5)^T$.

3[6]. Оскільки $i = 1 < 2 = n$, то вважаємо $i = 2$ і переходимо до кроку 2.

2[7]. Того, що $f(y^2 + \Delta_2 e^2) = f(5,6) = 0 < f(y^2) = f(5,5) = 1$, то крок вдалий: $y^3 = y^2 + \Delta_2 e^2 = (5;6)^T$.

3[7]. Того, що $f(y^3) = 0 \le f(x^3) = 1$, то переходимо до кроку 4. Точка y^3 стає новим базисом, а точка x^3 – старим. Перейдемо до кроку 4.

4^2. Вважаємо $x^4 = y^3 = (5;6)^T$ – новий базис, $i = 1$, $k = k + 1 = 4$, знайдемо $y^1 = x^4 + (x^4 - x^3) = (5;6)^T + \left[(5;6)^T - (5;5)^T\right] = (5;7)^T$. Виконано пошук за зразком. Перейдемо до кроку 2.

2^8. Оскільки $f(y^1 + \Delta_1 e^1) = f(5.5, 7) = 2 > f(y^1) = f(5,7) = 1$, то крок невдалий. Того, що $f(y^1 - \Delta_1 e^1) = f(4.5,7) = 2 > f(y^1) = 1$, то крок невдалий. Тоді $y^2 = y^1 = (5;7)^T$.

3^8. Оскільки $i = 1 < 2 = n$, то вважаємо $i = i + 1 = 2$ і переходимо до кроку 2.

2^9. Оскільки $f(y^2 + \Delta_2 e^2) = f(5,8) = 4 > f(y^1) = 1$, то крок невдалий. Того, що $f(y^2 - \Delta_2 e^2) = f(5,6) = 0 < f(y^1) = 1$, то крок вдалий. Тоді $y^3 = y^2 - \Delta_2 e^2 = (5;6)^T$.

3^9. Оскільки $i = 2 = 2 = n$ і $f(y^3) = f(x^4) = f(5;6) = 0$, то пошук за зразком невдалий. Переходимо до кроку 5.

5^1. Того, що $\Delta_1 > \varepsilon$, $\Delta_2 > \varepsilon$, то зменшимо крок: $\Delta_1 = 0.25$, $\Delta_2 = 0.5$. Вважаємо $y^1 = x^4 = (5;6)^T$, $x^5 = x^4$, $i = 1$, $k = k + 1 = 5$ і переходимо до кроку 2.

2^{10}. Оскільки $f(y^1 + \Delta_1 e^1) = f(5.25, 6) = 0.25 > f(y^1) = 0$, то крок невдалий. Того, що $f(y^1 - \Delta_1 e^1) = f(4.75, 6) = 0.25 > f(y^1) = 0$, то крок невдалий і $y^2 = y^1 = (5;6)^T$.

3^{10}. Оскільки $i = 1 < 2 = n$, то $i = i + 1 = 2$ і перейдемо до кроку 2.

2^{11}. Оскільки $f(y^2 + \Delta_2 e^2) = f(5, 6.5) = 0.25 > f(y^2) = 0$, то крок невдалий. Того, що $f(y^2 - \Delta_2 e^2) = f(5, 5.5) = 0.25 > f(y^2) = 0$, то крок невдалий і $y^3 = y^2 = (5;6)^T$.

3^{11}. Оскільки $i = 2 = 2 = n$ і $f(y^3) = 0 = f(x^5) = 0$, то досліджувальний пошук невдалий. Переходимо до кроку 5.

5^2. Того, що $\Delta_1 = 0.25 < \varepsilon = 0.3$, $\Delta_2 = 0.5 > \varepsilon$, то зменшимо крок Δ_2: $\Delta_1 = 0.25$, $\Delta_2 = 0.25$. Вважаємо $y^1 = x^5 = (5;6)^T$, $x^6 = x^5$, $k = k + 1 = 6$, $i = 1$ і переходимо до кроку 2.

2^{12}. Оскільки $f(\mathrm{y}^1 + \Delta_1 e^1) = f(5.25, 6) = 0.25 > f(\mathrm{y}^1) = 0$, то крок невдалий. Того, що $f(\mathrm{y}^1 - \Delta_1 e^1) = f(4.75, 6) = 0.25 > f(\mathrm{y}^1) = 0$, то крок невдалий і $\mathrm{y}^2 = \mathrm{y}^1 = (5;6)^T$.

3^{12}. Оскільки $i = 1 < 2 = n$, то $i = i + 1 = 2$ і перейдемо до кроку 2.

2^{13}. Того, що $f(\mathrm{y}^2 + \Delta_2 e^2) = f(5, 6.25) = 0.0625 > f(\mathrm{y}^2) = 0$, то крок невдалий.

Того, що $f(\mathrm{y}^2 - \Delta_2 e^2) = f(5, 5.875) = 0.0625 > f(\mathrm{y}^2) = 0$, то крок невдалий і $\mathrm{y}^3 = \mathrm{y}^2 = (5;6)^T$.

3^{13}. Оскільки $i = 2 = 2 = n$ і $f(\mathrm{y}^3) = 0 = f(\mathrm{x}^6) = 0$, то переходимо до кроку 5.

5^3. Того, що $\Delta_1 = 0.25 < \varepsilon = 0.3$ й $\Delta_2 = 0.25 < \varepsilon = 0.3$, то пошук завершений: $\mathrm{x}^* = (5;6)^T$, $f(\mathrm{x}^*) = f_{\min} = 0$.

4.2.2. Метод деформуючого многогранника

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний локальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ багатьох змінних, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x})$.

Стратегія розв'язання задачі В основу методу деформуючого многогранника покладено побудову послідовності систем $n+1$ точок $\mathrm{x}^i, i = 1, ..., n+1$, які є вершинами опуклого многогранника (симплекса). Точки системи на $(k+1)$-ій ітерації збігаються із точками системи на k-ій ітерації, крім $i = h$, де точка x^h – найгірша в системі точок на k-ій ітерації, тобто $f(\mathrm{x}^h) = \max\limits_{1 \le i \le n+1} f(\mathrm{x}^i)$. Точка x^h заміняється на іншу точку за спеціальними правилами, описаними нижче в алгоритмі. В результаті многогранники деформуються залежно від структури ліній рівня цільової функції, *витягаючись* вздовж довгих похилих площин, змінюючи напрямок у вигнутих западинах і *стискуючись* в околі мінімуму. Побудова послідовності многогранників закінчується, коли значення функції у вершинах поточного многогранника

відрізняються від значення функції в *центрі ваги* системи x^i, $i=1,...,n+1$, $i \neq h$ не більше ніж на $\varepsilon > 0$.

Алгоритм

1. Задати координати вершин многогранника $\mathrm{x}^1,\ldots,\mathrm{x}^{n+1}$; параметри відбиття α, стиску β, розтягання γ; число $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму. Вважаємо $k=0$ (наступні кроки 2-6 відповідають поточному номеру системи точок k -ої ітерації).

2. Серед вершин знайти "найкращу" x^l і "найгіршу" x^h, що відповідають мінімальному і максимальному значенням функції:

$$f(\mathrm{x}^l) = \min_{i=1,\ldots n+1} f(\mathrm{x}^i); \quad f(\mathrm{x}^h) = \max_{i=1,\ldots n+1} f(\mathrm{x}^i),$$

а також точку x^s, в якій досягається друге за величиною після максимального значення функції $f(\mathrm{x}^s)$.

3. Знайти "центр ваги" всіх вершин многогранника за винятком найгіршої x^h:

$$\mathrm{x}^{n+2} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{x}^i - \mathrm{x}^h\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1, j\neq h}^{n+1} \mathrm{x}^i.$$

4. Перевірити умову закінчення

а) якщо $\sigma = \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left[f(\mathrm{x}^i) - f(\mathrm{x}^{n+2})\right]^2\right\}^{1/2} \leq \varepsilon$, процес пошуку можна завершити і як наближений розв'язок взяти найкращу точку поточного многогранника $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{x}^l$;

б) якщо $\sigma \geq \varepsilon$, продовжувати процес.

5. Виконати операцію *відбиття* найгіршої вершини через центр ваги x^{n+2} (рис. 4.3):

$$\mathrm{x}^{n+3} = \mathrm{x}^{n+2} + \alpha(\mathrm{x}^{n+2} - \mathrm{x}^h).$$

6. Перевірити виконання умов:

а) якщо $f(\mathrm{x}^{n+3}) \leq f(\mathrm{x}^l)$, то виконати операцію *розтягання* (рис. 4.3, б):

$$\mathrm{x}^{n+4} = \mathrm{x}^{n+2} + \gamma(\mathrm{x}^{n+3} - \mathrm{x}^{n+2}).$$

Знайти вершини нового многогранника:

– якщо $f(\mathrm{x}^{n+4}) < f(\mathrm{x}^l)$, то вершина x^h заміняється на x^{n+4} (при $n=2$ многогранник буде містити вершини x^1, x^3, x^6). Потім варто вважати $k = k+1$ і перейти до кроку 2;

– якщо $f(\mathrm{x}^{n+4}) \geq f(\mathrm{x}^{l})$, то вершина x^{h} заміняється на x^{n+3} (при $n=2$ многогранник буде містити вершини x^{1}, x^{3}, x^{5}). Далі варто вважати $k=k+1$ й перейти до кроку 2;

б) якщо $f(\mathrm{x}^{s}) < f(\mathrm{x}^{n+3}) \leq f(\mathrm{x}^{h})$, то виконати операцію *стиску* (рис. 4.3, в):

$$\mathrm{x}^{n+5} = \mathrm{x}^{n+2} + \beta(\mathrm{x}^{h} - \mathrm{x}^{n+2}).$$

Варто замінити вершину x^{h} на x^{n+5}, вважати $k=k+1$ і перейти до кроку 2 (при $n=2$ многогранник буде містити вершини x^{1}, x^{3}, x^{7});

в) якщо $f(\mathrm{x}^{l}) < f(\mathrm{x}^{n+3}) \leq f(\mathrm{x}^{s})$ вершину x^{h} замінити на x^{n+3}. При цьому варто вважати $k=k+1$ і перейти до кроку 2;

г) якщо $f(\mathrm{x}^{n+3}) > f(\mathrm{x}^{h})$ виконати операцію *редукції* (рис. 4.3, г). Формується новий многогранник зі зменшеними вдвічі сторонами і вершиною x^{l}:

$$\mathrm{x}^{i} = \mathrm{x}^{l} + 0.5(\mathrm{x}^{i} - \mathrm{x}^{l}), \quad i = 1,...,n+1.$$

При цьому варто вважати $k=k+1$ й перейти до кроку 2.

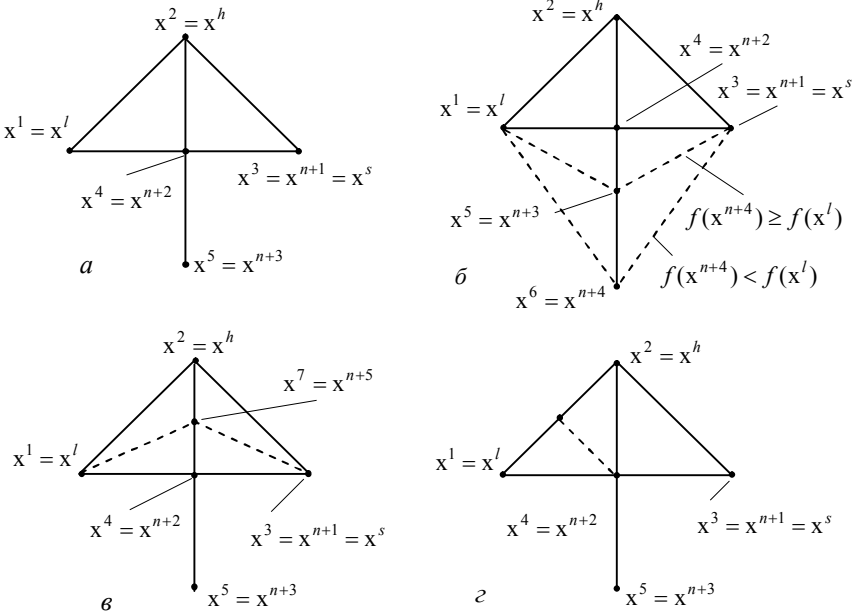


Рис. 4.3

Зауваження 4.3. Нілдер і Мід (J.A. Nelder, R. Mead) рекомендують використовувати параметри $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 2$; Павіані (D. Paviani) – $\alpha = 1$, $0.4 \le \beta \le 0.6$, $2.8 \le \gamma < 3$; Паркінсон і Хатчінсон (J.M. Parkinson, D. Hutchinson) – $\alpha = 2$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 2.5$. В останньому випадку в рамках операції відбиття фактично виконується розтягання.

Приклад 4.3

Знайти мінімум наступної функції

$$f(\mathrm{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$$

методом деформуючого симплексу (методом Нілдера-Міда).

Розв'язання

1^0. Оскільки $n = 2$, задамо початковий трикутник з вершинами $\mathrm{x}^1 = (8;9)^T$, $\mathrm{x}^2 = (10;11)^T$. $\mathrm{x}^3 = (8;11)^T$. Вважаємо $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 2$; $\varepsilon = 0.2$, $k = 0$.

2^0. Того, що $f(\mathrm{x}^1) = 45$, $f(\mathrm{x}^2) = 125$, $f(\mathrm{x}^3) = 61$, то $\mathrm{x}^l = \mathrm{x}^1$, $\mathrm{x}^h = \mathrm{x}^2$, $\mathrm{x}^s = \mathrm{x}^3$.

3^0. Знайдемо центр ваги вершин x^1 і x^3 (середину сторони, що протистоїть вершині x^h):

$$\mathrm{x}^4 = \frac{1}{2}(\mathrm{x}^1 + \mathrm{x}^3) = \frac{1}{2}\left[(8;9)^T + (8;11)^T\right] = (8;10)^T, \quad f(\mathrm{x}^4) = 52.$$

4^0. Оскільки $\sigma = \left[\frac{1}{3}\left(7^2 + 73^2 + 9^2\right)\right]^{1/2} = 42.66 > \varepsilon$, то процес триває.

5^0. Виконаємо відбиття:

$$\mathrm{x}^5 = \mathrm{x}^4 + 2(\mathrm{x}^4 - \mathrm{x}^2) = (8;10)^T + \left[(8;10)^T - (10;11)^T\right] = (6;9)^T; \; f(\mathrm{x}^5) = 13.$$

6^0. Оскільки $f(\mathrm{x}^5) = 13 < f(\mathrm{x}^l) = f(\mathrm{x}^1) = 45$, виконаємо розтягання:

$$\mathrm{x}^6 = \mathrm{x}^4 + 2(\mathrm{x}^5 - \mathrm{x}^4) = (8;10)^T + 2\left[(6;9)^T - (8;10)^T\right] = (4;8)^T, \; f(\mathrm{x}^6) = 8.$$

Так як $f(\mathrm{x}^6) = 8 < f(\mathrm{x}^l) = f(\mathrm{x}^1) = 45$, то вершина x^2 заміняється на x^6. Новий многогранник містить вершини x^2, x^3, x^6. Вважаємо $k = k + 1 = 1$ і переходимо до кроку 2.

2^1. Маємо вершини $x^1=(8;9)^T$, $x^2=(4;8)^T$, $x^3=(8;11)^T$; $f(x^1)=45$, $f(x^2)=8$, $f(x^3)=61$; $x^l=x^2$, $x^h=x^3$, $x^s=x^1$.

3^1. Знайдемо центр ваги вершин x^2 і x^1:

$$x^4=\frac{1}{2}(x^1+x^2)=\frac{1}{2}\left[(8;9)^T+(4;8)^T\right]=(6;\,8.5)^T,\ f(x^4)=10.25.$$

4^1. Оскільки $\sigma=\left[\frac{1}{3}(34.75^2+(-2.25)^2+50.75^2)\right]^{1/2}=35.53>\varepsilon$,

то процес триває.

5^1. Виконаємо відбиття:

$$x^5=x^4+1\cdot(x^4-x^3)=(6;8.5)^T+\left[(6;8.5)^T-(8;11)^T\right]=(4;6)^T;\ f(x^5)=4.$$

6^1. Того, що $f(x^5)=4<f(x^l)=f(x^2)=8$, виконаємо розтягання:

$$x^6=x^4+2(x^5-x^4)=(6;8.5)^T+2\left[(4;6)^T-(6;8.5)^T\right]=(2;3.5)^T,\ f(x^6)=42.25.$$

Оскільки $f(x^6)=42.25>f(x^l)=f(x^2)=8$, то вершина $x^h=x^3$ замінюється на x^5. Новий многогранник містить вершини x^1, x^2, x^5. Вважаємо $k=k+1=2$ і переходимо до кроку 2.

2^2. Маємо вершини $x^1=(8;9)^T$, $x^2=(4;8)^T$, $x^3=(4;6)^T$;

$f(x^1)=45$, $f(x^2)=8$, $f(x^3)=4$; $x^l=x^3$, $x^h=x^1$ $x^s=x^2$.

3^2. Знайдемо центр ваги вершин x^2 і x^3:

$$x^4=\frac{1}{2}(x^2+x^3)=\frac{1}{2}\left[(4;8)^T+(4;6)^T\right]=(4;7)^T,\ f(x^4)=5.$$

4^2. Оскільки $\sigma=\left[\frac{1}{3}\left(40^2+3^2+1^2\right)\right]^{1/2}=23.2>\varepsilon$, то процес триває.

5^2. Виконаємо відбиття:

$$x^5=x^4+(x^4-x^1)=(4;7)^T+\left[(4;7)^T-(8;9)^T\right]=(0;5)^T;\ f(x^5)=101.$$

6^2. Того, що $f(x^5)=101>f(x^h)=45$, виконаємо редукцію:

$$x^1=x^l+0.5(x^1-x^l)=(4;6)^T+0.5\left[(8;9)^T-(4;6)^T\right]=(6;7.5)^T,$$

$$x^2=x^l+0.5(x^2-x^l)=(4;6)^T+0.5\left[(4;8)^T-(4;6)^T\right]=(4;7)^T;$$

$$x^3 = x^l + 0.5(x^3 - x^l) = x^l = (4;\ 6)^T .$$

Вважаємо $k = k + 1 = 3$ і переходимо до кроку 2.

2^3. Обчислимо значення функції: $f(x^1) = 6.25$, $f(x^2) = 5$, $f(x^3) = 4$. Тому $x^l = x^3$, $x^h = x^1$, $x^s = x^2$.

3^3. Знайдемо центр ваги вершин x^2 і x^3:

$$x^4 = \frac{1}{2}(x^2 + x^3) = \frac{1}{2}\left[(4;7)^T + (4;6)^T\right] = (4;\ 6.5)^T,\ f(x^4) = 4.25 .$$

4^3. Оскільки $\sigma = \left[\frac{1}{3}(2^2 + 0.75^2 + (-1/25)^2)\right]^{1/2} = 1.24 > \varepsilon$, то процес триває.

5^3. Виконаємо відбиття:

$$x^5 = x^4 + (x^4 - x^3) = (4;6.5)^T + \left[(4;6.5)^T - (6;7.5)^T\right] = (2;5.5)^T;\ f(x^5) = 36.25 .$$

6^3. Того, що $f(x^5) = 36.25 > f(x^l) = f(x^1) = 6.25$, то виконаємо редукцію:

$$x^1 = x^l + 0.5(x^1 - x^l) = (4;6)^T + 0.5\left[(6;7.5)^T - (4;6)^T\right] = (5;\ 6.75)^T,$$

$$x^2 = x^l + 0.5(x^2 - x^l) = (4;6)^T + 0.5\left[(4;7)^T - (4;6)^T\right] = (4;\ 6.5)^T;$$

$$x^3 = x^l = (4;6)^T .$$

Вважаємо $k = k + 1 = 4$ і переходимо до кроку 2.

2^4. Обчислимо значення функції: $f(x^1) = 0.5625$, $f(x^2) = 4.25$, $f(x^3) = 4$. Тому $x^l = x^1$, $x^h = x^2$, $x^s = x^3$.

3^4. Знайдемо центр ваги вершин x^1 і x^3:

$$x^4 = \frac{1}{2}(x^1 + x^3) = \frac{1}{2}\left[(5;\ 6.75)^T + (4;6)^T\right] = (4.5;\ 6.375)^T,\ f(x^4) = 1.14 .$$

4^4. Оскільки $\sigma = \left[\frac{1}{3}(0.34 + 9.67 + 8.18)\right]^{1/2} = 2.46 > \varepsilon$, то процес триває.

5^4. Виконаємо відбиття:

$$x^5 = x^4 + (x^4 - x^2) = (4.5;\ 6.375)^T + \left[(4.5;\ 6.375)^T - (4;6.5)^T\right] = (5;\ 6.25)^T;$$

$$f(x^5) = 0.0625 .$$

6^4. Оскільки $f(\mathrm{x}^5)=0.0625<f(\mathrm{x}^l)=0.5625$, то виконаємо розтягання:

$$\mathrm{x}^6=\mathrm{x}^4+2(\mathrm{x}^5-\mathrm{x}^4)=(4.5;\ 6.375)^T+2\left[(5;6.25)^T-(4.5;\ 6.375)^T\right]=$$

$$=(5.5;\ 6.125)^T,\ f(\mathrm{x}^6)=1.015.$$

Того, що $f(\mathrm{x}^6)=1.015>f(\mathrm{x}^l)=f(\mathrm{x}^1)=0.5625$, то вершина $\mathrm{x}^h=\mathrm{x}^2$ заміняється на x^5.

Вважаємо $k=k+1=5$ і переходимо до кроку 2.

2^5. Маємо вершини $\mathrm{x}^1=(5;\ 6.75)^T$, $\mathrm{x}^2=(5;\ 6.25)^T$, $\mathrm{x}^3=(4;\ 6)^T$;

$f(\mathrm{x}^1)=0.5625$, $f(\mathrm{x}^2)=0.0625$, $f(\mathrm{x}^3)=4$;

$\mathrm{x}^l=\mathrm{x}^2$, $\mathrm{x}^h=\mathrm{x}^3$, $\mathrm{x}^s=\mathrm{x}^1$.

3^5. Знайдемо центр ваги вершин x^1 і x^2:

$$\mathrm{x}^4=\frac{1}{2}(\mathrm{x}^1+\mathrm{x}^2)=\frac{1}{2}\left[(5;\ 6.25)^T+(5;\ 6.25)^T\right]=(5;\ 6.5)^T,\ f(\mathrm{x}^4)=0.25.$$

4^5. Оскільки $\sigma=\left[\frac{1}{3}\left(0.098+0.035+14.06\right)\right]^{1/2}=2.17>\varepsilon$, то процес триває.

5^5. Виконаємо відбиття:

$$\mathrm{x}^5=\mathrm{x}^4+(\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^2)=(5;\ 6.5)^T+\left[(5;\ 6.5)^T-(4;6)^T\right]=(6;7)^T;\ f(\mathrm{x}^5)=5.$$

6^5. Того, що $f(\mathrm{x}^5)=5>f(\mathrm{x}^l)=f(\mathrm{x}^3)=4$, то виконаємо редукцію:

$$\mathrm{x}^1=\mathrm{x}^l+0.5(\mathrm{x}^1-\mathrm{x}^l)=(5;\ 6.25)+0.5\left[(5;\ 6.75)^T-(5;\ 6.25)^T\right]=(5;\ 6.5)^T,$$

$$\mathrm{x}^2=\mathrm{x}^l=(5;\ 6.25)^T,$$

$$\mathrm{x}^3=\mathrm{x}^l+0.5(\mathrm{x}^3-\mathrm{x}^l)=(5;\ 6.25)^T+0.5\left[(4;6)^T-(5;\ 6.25)^T\right]=(4.5;\ 6.125)^T$$

Вважаємо $k=k+1=6$ й переходимо до кроку 2.

2^6. Маємо вершини $f(\mathrm{x}^1)=0.25$, $f(\mathrm{x}^2)=0.0625$, $f(\mathrm{x}^3)=1.015$. Тому $\mathrm{x}^l=\mathrm{x}^2$, $\mathrm{x}^h=\mathrm{x}^3$, $\mathrm{x}^s=\mathrm{x}^1$.

3^6. Знайдемо центр ваги вершин x^1 і x^2:

$$\mathrm{x}^4=\frac{1}{2}(\mathrm{x}^1+\mathrm{x}^2)=\frac{1}{2}\left[(5;\ 6.5)^T+(5;\ 6.25)^T\right]=(5;\ 6.375)^T,\ f(\mathrm{x}^4)=0.14.$$

4^6. Оскільки $\sigma = \left[\frac{1}{3}\left(0.01 + 0.006 + 0.765\right)\right]^{1/2} = 0.5 > \varepsilon$, то процес триває.

5^6. Виконаємо відбиття:

$$x^5 = x^4 + (x^4 - x^1) = (5;\ 6.375) + \left[(5;\ 6.375)^T - (4.5;\ 6.125)^T\right] =$$

$$= (5.5;\ 6.625)^T,\ f(x^5) = 1.39.$$

6^6. Оскільки $f(x^5) > f(x^h) = 1.015$, то виконаємо редукцію:

$$x^1 = x^l + 0.5(x^1 - x^l) = (5;\ 6.25)^T + 0.5\left[(5;\ 6.5)^T - (5;\ 6.25)^T\right] = (5;\ 6.375)^T;$$

$$x^2 = x^l = (5;\ 6.25);$$

$$x^3 = x^l + 0.5(x^3 - x^l) = (5;\ 6.25)^T + 0.5\left[(4.5;\ 6.125)^T - (5;\ 6.25)^T\right] = (4.75;\ 6.18)^T.$$

Вважаємо $k = k + 1 = 7$ і переходимо до кроку 2.

2^7. Оскільки $f(x^1) = 0.14$, $f(x^2) = 0.0625$, $f(x^3) = 0.28$, то одержимо $x^l = x^2$, $x^h = x^3$, $x^s = x^1$.

3^7. Знайдемо центр ваги вершин x^1 і x^2:

$$x^4 = \frac{1}{2}(x^1 + x^2) = \frac{1}{2}\left[(5;\ 6.375)^T + (5;\ 6.25)^T\right] = (5;\ 6.31)^T,\ f(x^4) = 0.09.$$

4^7. Того, що $\sigma = \left[\frac{1}{3}\left(0.025 + 0.0007 + 0.036\right)\right]^{1/2} = 0.14 < \varepsilon = 0.2$,

то процес розв'язання закінчений: $x^* = x^l = (5,\ 6.25)$; $f(x^*) = 0.0625$.

Результати розрахунків початкових трьох ітерацій (до кроку 6^2) наведені на рис. 4.4. При цьому прийняті наступні позначення $x^i(k)$, де i – номер точки, k – номер ітерації.

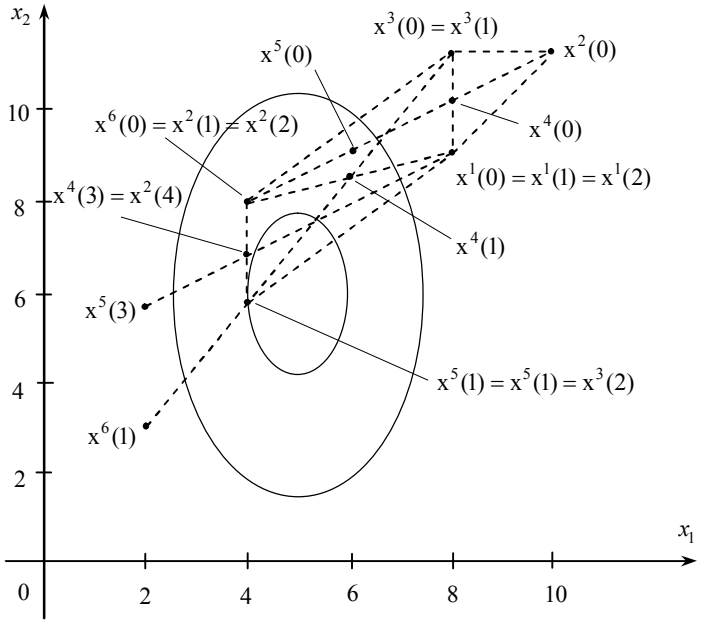


Рис. 4.4

4.2.3. Метод спряжених напрямків

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ багатьох змінних, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x})$.

Означення 4.6. Ненульові вектори $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^k$ називаються *спряженими щодо матриці* H розміру $(n \times n)$ (H *– ортогональними),* якщо скалярний добуток $\left\langle H\,\mathrm{p}^i, \mathrm{p}^j \right\rangle = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$.

Матриця H (матриця Гессе) є симетричною матрицею других похідних, визначеною в заданій точці.

Спряжений напрямок може бути побудований алгоритмічно. Виберемо деякий напрямок p^1 і дві точки x^0 і y^0 такі, щоб вектори $(\mathrm{x}^0 - \mathrm{y}^0)$ і p^1 були не колінеарні (рис. 4.5).

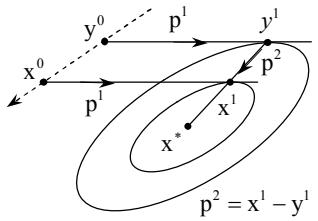


Рис. 4.5

Виконавши вичерпний спуск із точок x^0 і y^0 в напрямку p^1, одержимо точки x^1 й y^1. За властивостями вичерпного спуску в точках x^1 і y^1 має місце дотик відповідними прямими (напрямками спадання) ліній рівня цільової функції. Напрямок $p^2 = x^1 - y^1$ і напрямок p^1 є H - спряженими.

Стратегія розв'язання задачі В методі спряжених напрямків або методі Пауєла (Powell M.J.D.) використовується той факт, що мінімум квадратичної функції може бути знайдений не більш ніж за n кроків за умови, що пошук ведеться уздовж спряжених щодо матриці Гессе напрямків. Так як досить великий клас цільових функцій може бути представлений в околі точки мінімуму своєю квадратичною апроксимацією, описана ідея застосовується і для не квадратичних функцій. Задається початкова точка і напрямки, які співпадають з координатними. Знаходиться мінімум $f(x)$ при послідовному русі по $(n+1)$ напрямках за допомогою одного з методів одновимірної мінімізації. При цьому отримана раніше точка мінімуму береться в якості вихідної для пошуку по наступному напрямку, а напрямок p^n використовується як при першому $(p^0 = p^n)$, так і останньому пошуку. Знаходиться новий напрямок пошуку, спряжений p^n. Він проходить через точки, отримані при першому і останньому пошуку. Заміняється p^1 на p^2, p^2 на p^3 і т.д. Напрямок p^n заміняється спряженим напрямком, після чого повторюється пошук по $(n+1)$ напрямках, що вже не містить старого напрямку p^1. Для квадратичних функцій послідовність n^2 одномірних пошуків приводить до точки мінімуму (якщо всі операції виконані точно). Побудову спряженого напрямку для квадратичної функції при $n = 2$ зображено на рис. 4.5. Він проходить через точки x^1 і y^1, а також точку мінімуму x^*.

Алгоритм

1. Задати початкову точку x^0, число $\varepsilon > 0$ для закінчення обчислювального процесу, початкові напрямки пошуку

$\mathrm{p}^1 = (1;0;...;0)^T$, $\mathrm{p}^2 = (0;1;0;...;0)^T$, …, $\mathrm{p}^n = (0;...;0;1)^T$ ...

Вважаємо $\mathrm{p}^0 = \mathrm{p}^n$, $i = 0$, $\mathrm{y}^0 = \mathrm{x}^0$, $k = 0$.

2. Знайти $\mathrm{y}^{i+1} = \mathrm{x}^i + \alpha_i \mathrm{p}^i$, де крок α_i знаходиться в результаті пошуку мінімуму функції $f(\mathrm{x}^i + \alpha_i \mathrm{p}^i)$ по α_i одним з методів одновимірної мінімізації.

3. Перевірити виконання умов:

а) якщо $i < n-1$, вважати $i = i+1$ і перейти до кроку 2;

б) якщо $i = n-1$, перевірити успішність пошуку по n перших напрямках. Якщо $\mathrm{y}^n = \mathrm{y}^0$, то пошук завершити: $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{y}^n$, інакше вважати $i = i+1$ і перейти до кроку 2;

в) якщо $i = n$, перевірити успішність пошуку по n останніх напрямках. Якщо $\mathrm{y}^{n+1} = \mathrm{y}^1$, пошук завершити: $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{y}^{n+1}$, інакше перейти до кроку 4 для побудови спряженого напрямку.

4. Вважати $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{y}^{n+1}$ і перевірити умова закінчення:

а) якщо $\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k \| < \varepsilon$, то пошук завершити: $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{x}^{k+1}$;

б) інакше вважати: $\overline{\mathrm{p}}^0 = \overline{\mathrm{p}}^n = \mathrm{y}^{n+1} - \mathrm{y}^1$ (новий напрямок);

$\overline{\mathrm{p}}^i = \mathrm{p}^{i+1}$, $i = 1,...,n-1$ (виключається старий напрямок).

Якщо при цьому $\mathrm{rang}(\overline{\mathrm{p}}^1,...,\overline{\mathrm{p}}^n) = n$, то нова система напрямків лінійно незалежна. В цьому випадку вважати: $\overline{\mathrm{p}}^i = \mathrm{p}^i$, $i = 0,1,...,n$; $k = k+1$, $i = 0$, $\mathrm{y}^0 = \mathrm{x}^{k+1}$ і перейти до кроку 2.

Якщо $\mathrm{rang}(\overline{\mathrm{p}}^1;...;\overline{\mathrm{p}}^n) < n$, то нова система напрямків лінійно залежна. Тоді варто продовжувати пошук в старих напрямках. Для цього вважати: $\mathrm{p}^i = \mathrm{p}^i$, $i = 0,1,...,n$; $\mathrm{y}^0 = \mathrm{x}^{k+1}$, $k = k+1$, $i = 0$ і перейти до кроку 2.

Зауваження 4.4. В [5] викладена модифікація алгоритму Пауєла, запропонована Зангвіллом (Zangwill W.I.). Ця модифікація гарантує лінійну незалежність напрямків пошуку і збіжність за кінцеве число кроків.

Приклад 4.3

Знайти мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$$

методом спряжених напрямків (методом Пауєла).

Розв'язання

1^0. Задамо початкову точку $\mathrm{x}^0 = (8;9)^T$, $\mathrm{p}^1 = (1;0)^T$, $\mathrm{p}^2 = (0;1)^T$, $\varepsilon = 0.1$. Вважаємо $\mathrm{p}^0 = \mathrm{p}^n = \mathrm{p}^2$; $\mathrm{y}^0 = \mathrm{x}^0$, $i = 0$, $k = 0$.

2^0. Одержимо $\mathrm{y}^1 = \mathrm{y}^0 + \alpha_0 \mathrm{p}^0 = (8;9)^T + \alpha_0 (0;1)^T = (8;\, 9 + \alpha_0)^T$. Знайдемо мінімум функції $f(8,\, 9 + \alpha_0) = 36 + (3 + \alpha_0)^2$ по α_0. Очевидно, $\alpha_0 = -3$, $\mathrm{y}^1 = (8;\, 6)^T$.

3^0. Маємо $i = 0 < 2 = n$ тому $i = i + 1$ і перейдемо до кроку 2.

2^1. Одержимо $\mathrm{y}^2 = \mathrm{y}^1 + \alpha_1 \mathrm{p}^1 = (8;6)^T + \alpha_1 (1;0)^T = (8 + \alpha_1;\, 6)^T$. Знайдемо мінімум функції $f(8 + \alpha_1,\, 6) = 4(3 + \alpha_1)^2$ по α_1. Очевидно, він досягається при $\alpha_1 = -3$, $\mathrm{y}^2 = (5;\, 6)^T$.

3^1. Маємо $i = 1 = n - 1$, $\mathrm{y}^n = \mathrm{y}^2 \neq \mathrm{y}^0$ тому $i = i + 1 = 2$ і переходимо до кроку 2.

2^2. Одержимо $\mathrm{y}^3 = \mathrm{y}^2 + \alpha_2 \mathrm{p}^2 = (5;6)^T + \alpha_2 (0;1)^T = (5;\, 6 + \alpha_2)^T$. Знайдемо мінімум функції $f(5;\, 6 + \alpha_2) = \alpha_2^2$ по α_2. Очевидно, $\alpha_2 = 0$, $\mathrm{y}^3 = \mathrm{y}^2 = (5;\, 6)^T$.

3^2. Маємо $i = 2 = n$, $\mathrm{y}^3 \neq \mathrm{y}^1$. Переходимо до кроку 4.

4^0. Знаходимо $\mathrm{x}^1 = \mathrm{y}^3 = (5;6)^T$, $\|\mathrm{x}^1 - \mathrm{x}^0\| = \sqrt{(8-5)^2 + (9-6)^2} = 4.24 > \varepsilon$.

Вважаємо

$$\overline{\mathrm{p}}^0 = \overline{\mathrm{p}}^n = \overline{\mathrm{p}}^2 = \mathrm{y}^3 - \mathrm{y}^1 = (5;6)^T - (8;6)^T = (-3;0)^T,\ \overline{\mathrm{p}}^1 = \mathrm{p}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = n$, то система векторів лінійно незалежна. Вважаємо $\mathrm{p}^2 = \overline{\mathrm{p}}^2 = (-3;0)^T$, $\mathrm{p}^1 = \overline{\mathrm{p}}^1 = (0;1)^T$, $\mathrm{p}^0 = \overline{\mathrm{p}}^0 = \ = (-3;0)^T$, $k = k + 1$, $i = 0$ $\mathrm{y}^0 = \mathrm{x}^1 = (5;6)^T$ і переходимо до кроку 2.

2^3. Одержимо $\mathrm{y}^1 = \mathrm{y}^0 + \alpha_0 \mathrm{p}^0 = (5;6)^T + \alpha_0 (-3;0)^T = (5 - 3\alpha_0;\, 6)^T$. Знайдемо мінімум функції $f(5 - 3\alpha_0,\, 6) = 36\alpha_0^2$ по α_0. Оскільки $\alpha_0 = 0$, то, $\mathrm{y}^1 = (5;\, 6)^T = \mathrm{y}^0$.

3^3. Маємо $i = 0 < n - 1 = 1$ тому $i = i + 1 = 1$ і перейдемо до кроку 2.

2^4. Одержимо $\mathrm{y}^2 = \mathrm{y}^1 + \alpha_1 \mathrm{p}^1 = (5;6)^T + \alpha_1 (0;1)^T = (5;\ 6 + \alpha_1)^T$. Мінімум функції $f(5, 6 + \alpha_1) = \alpha_1^2$ по α_1 досягається при $\alpha_1 = 0$. Тоді при $\mathrm{y}^2 = (5;\ 6)^T = \mathrm{y}^1 = \mathrm{y}^0$.

3^4. Маємо $i = 1 = n - 1$, $\mathrm{y}^2 = \mathrm{y}^0$ тому пошук завершується:

$$\mathrm{x}^* \cong \mathrm{y}^2 = (5;\ 6)^T,\ f_{\min} = f(\mathrm{x}^*) = 0.$$

4.2.4. Адаптивний метод випадкового пошуку

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ багатьох змінних, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x})$.

Стратегія розв'язання задачі Задається початкова точка x^0. Кожна наступна точка знаходиться за формулою $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + t_k \xi^k$, де $t_k > 0$ – величина кроку; ξ^k – випадковий вектор одиничної довжини, що визначає напрямок пошуку; k – номер ітерації. На наступній ітерації за допомогою генерування випадкових векторів ξ^k одержимо точки, що лежать на гіперсфері радіуса ξ^k із центром в точці x^k (рис. 4.6).

Якщо значення функції в отриманій точці не менше, ніж в центрі, крок вважається невдалим (точки y^1, y^2 при пошуку з x^0; y^1, y^3 при пошуку з x^1). Якщо число невдалих кроків з поточної точки досягає деякого числа M, подальший пошук триває з тієї ж точки, але з меншим кроком доти, поки він не стане менше заздалегідь заданої величини R. Якщо ж значення функції в отриманій точці менше, ніж в центрі, крок вважається вдалим і в знайденому напрямку робиться збільшений крок, що грає роль прискорювального кроку (як при пошуку за зразком в методі конфігурацій). Якщо при цьому значення функції знову менше, ніж в центрі, напрямок вважається вдалим і подальший пошук продовжується з цієї точки (точки $\mathrm{z}^3 = \mathrm{x}^1$ при пошуку з x^0, $\mathrm{z}^4 = \mathrm{x}^2$ при пошуку з x^1). Якщо ж значення функції стало не менше, ніж в центрі, напрямок вважається невдалим і пошук триває зі старого центра (в точці y^2 при пошуку з

x^1 функція менше, ніж в x^1, а в точці z^2 вже не менше, тому напрямок $(z^2 - x^1)$ невдалий).

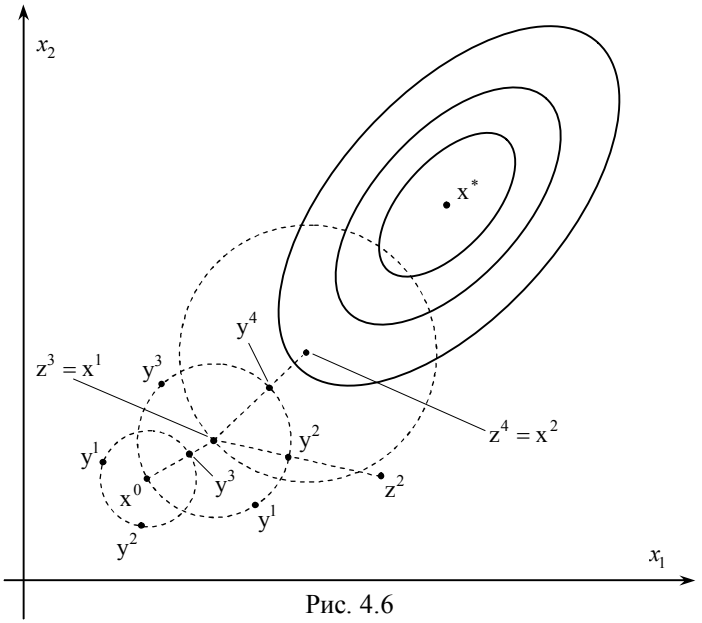


Рис. 4.6

Алгоритм

1. Задати початкову точку x^0, коефіцієнти розширення $\alpha \geq 1$ і $0 < \beta < 1$, M – максимальне число невдало виконаних випробувань на поточній ітерації, $t_0 = 1$ – початкову величину кроку, R – мінімальну величину кроку, N – максимальне число ітерацій. Вважати $k = 0$, $j = 1$.

2. Одержати випадковий вектор $\xi^j = (\xi_1^j; ...; \xi_n^j)^T$, де ξ_i^j – випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі $[-1;1]$.

3. Обчислити $y^j = x^k + t_k \dfrac{\xi^j}{\| \xi^j \|}$, де $\| \xi^j \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^j)^2}$.

4. Перевірити виконання умов:

а) якщо $f(y^j) < f(x^k)$, крок вдалий. Вважати $z^j = x^k + \alpha(y^j - x^k)$. Визначити, чи є поточний напрямок $(y^j - x^k)$ вдалим:

– якщо $f(\mathrm{z}^j) < f(\mathrm{x}^k)$, напрямок пошуку вдалий. Вважати $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{z}^j$, $t_{k+1} = \alpha t_k$, $k = k+1$ і перевірити умову закінчення. Якщо $k < N$, вважати $j = 1$ і перейти до кроку 2. Якщо $k = N$, пошук завершити: $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{x}^k$;

– якщо $f(\mathrm{z}^j) \geq f(\mathrm{x}^k)$, напрямок пошуку невдалий, перейти до кроку 5;

б) якщо $f(\mathrm{y}^j) \geq f(\mathrm{x}^k)$, крок невдалий і перейти до кроку 5.

5. Оцінити число невдалих кроків з поточної точки:

а) якщо $j < M$, варто вважати $j = j+1$ й перейти до кроку 2;

б) якщо $j = M$, перевірити умова закінчення:

– якщо $t_k \leq R$, процес закінчити: $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{x}^k$, $f(\mathrm{x}^*) \cong f(\mathrm{x}^k)$;

– якщо $t_k > R$, вважати $t_k = \beta t_k$, $j = 1$ і перейти до кроку 2.

Зауваження 4.5

1. Величина ξ_i^j, рівномірно розподілена на інтервалі $[-1;1]$, генерується звичайно за допомогою датчиків псевдовипадкових чисел на комп'ютері. Генерується випадкова величина η_i^j, рівномірно розподілена на $[0;1]$, а потім використовується лінійне перетворення: $\xi_i^j = 2\eta_i^j - 1$.

2. Якщо виконано умову закінчення $t_k \leq R$, то як відповідь можна використовувати будь-яку точку всередині кулі з радіусом t_k і центром в точці x^k.

3. Існують численні варіанти методу випадкового пошуку [9]. Наприклад, варіант методу з елементами навчання, при якому напрямки спадання функції стають більше ймовірними, а інші напрямки - менш ймовірними.

Приклад 4.4

Знайти мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

методом адаптивного випадкового пошуку.

Розв'язання

I^0. Задамо початкову точку $\mathrm{x}^0 = (0.5; 1)^T$; $\alpha = 1$; $\beta = 0.5$; $M = 3$; $N = 100$; $R = 0.5$; $t_0 = 1$. Покладемо; $k = 0$, $j = 0$. При $\alpha = 1$ точка z^j

не обчислюється на кроці 4 алгоритму, оскільки вона збігається з точкою y^j.

2^0. Одержимо $\xi^1 = (-0.875; -0.436)^T$.

3^0. Обчислюємо

$$y^1 = x^0 + t_0 \frac{\xi^1}{\|\xi^1\|} = (0.5; 1)^T + 1 \cdot \frac{(-0.875; -0.436)^T}{0.977} = (-0.395; 0.553)^T.$$

4^0. Того, що $f(y^1) = 0.399 < f(x^0) = 2$, крок вдалий. Оскільки $\alpha = 1$, то $z^1 = y^1$, $f(z^1) < f(x^0)$.

Вважаємо $x^1 = z^1 = y^1 = (-0.395; 0.553)^T$, $k = k + 1 = 1$, $t_1 = \alpha t_0 = t_0 = 1$, $j = 1$ і переходимо до кроку 2.

2^1. Одержимо $\xi^1 = (0.199; 0.396)^T$.

3^1. Обчислюємо

$$y^1 = x^1 + t_1 \frac{\xi^1}{\|\xi^1\|} = (-0.395; 0.553)^T + 1 \cdot \frac{(0.199; 0.369)^T}{0.419} = (0.08; 1.43)^T.$$

4^1. Оскільки $f(y^1) = 2.17 > f(x^1) = 0.399$, крок невдалий.

5^0. Маємо $j = 1 < M = 3$, тому $j = j + 1 = 2$ і перейдемо до кроку 2.

2^2. Одержимо $\xi^2 = (0.287; -0.763)^T$.

3^2. Обчислюємо $y^2 = x^1 + t_1 \frac{\xi^2}{\|\xi^2\|} =$

$$= (-0.395; 0.553)^T + 1 \cdot \frac{(0.287; -0.763)^T}{0.815} = (-0.04; -0.38)^T.$$

4^2. Того, що $f(y^2) = 0.16 < f(x^1) = 0.399$, крок вдалий. Оскільки $\alpha = 1$, то $z^2 = y^2$, $f(z^2) < f(x^1)$. Вважаємо $x^2 = z^2 = (-0.04; -0.38)^T$, $k = k + 1 = 2$, $t_2 = \alpha t_1 = t_1 = 1$, $j = 1$ і переходимо до кроку 2.

2^3. Одержимо $\xi^1 = (-0.937; 0.831)^T$.

3^3. Обчислюємо

$$y^1 = x^2 + t_2 \frac{\xi^1}{\|\xi^1\|} = (-0.04; -0.38)^T + 1 \cdot \frac{(-0.937; 0.831)^T}{0.815} = (-0.79; 0.28)^T.$$

4^3. Оскільки $f(\mathrm{y}^1)=1.1>f(\mathrm{x}^2)=0.16$, крок невдалий.

5^1. Маємо $j=1<M=3$, тому $j=j+1=2$ і перейдемо до кроку 2.

2^4. Одержимо $\xi^2=(0.692;-0.178)^T$.

3^4. Обчислюємо

$$\mathrm{y}^2=\mathrm{x}^2+t_2\frac{\xi^2}{\|\xi^2\|}=(-0.04;-0.38)^T+1\cdot\frac{(0.692;-0.178)^T}{0.714}=(0.929;-0.63)^T.$$

4^4. Оскільки $f(\mathrm{y}^2)=1.54>f(\mathrm{x}^2)=0.16$, крок невдалий.

5^2. Маємо $j=2<M=3$, тому $j=j+1=3$ і перейдемо до кроку 2.

2^5. Одержимо $\xi^3=(0.596;-0.05)^T$.

3^5. Обчислюємо

$$\mathrm{y}^3=\mathrm{x}^2+t_2\frac{\xi^3}{\|\xi^3\|}=(-0.04;-0.38)^T+1\cdot\frac{(0.596;-0.05)^T}{0.598}=(0.956;\,0.463)^T.$$

4^5. Оскільки $f(\mathrm{y}^3)=2.48>f(\mathrm{x}^2)=0.16$, крок невдалий.

5^3. Маємо $j=3=M$, але $t_2=1>R=0.5$. Вважаємо $t_2=\beta t_2=0.5$, $j=1$ і переходимо до кроку 2.

2^6. Одержимо $\xi^1=(0.08;\,0.971)^T$.

3^6. Обчислюємо

$$\mathrm{y}^1=\mathrm{x}^2+t_2\frac{\xi^1}{\|\xi^1\|}=(-0.04;-0.38)^T+1\cdot\frac{(0.08;\,0.971)^T}{0.974}=(0.08;\,0.118)^T.$$

4^6. Того, що $f(\mathrm{y}^1)=0.036<f(\mathrm{x}^2)=0.16$, крок вдалий. Оскільки $\alpha=1$, то $\mathrm{z}^1=\mathrm{y}^1$, $f(\mathrm{z}^1)<f(\mathrm{x}^2)$.

Вважаємо $\mathrm{x}^3=\mathrm{z}^1=\mathrm{y}^1=(0.08;\,0.118)^T$, $k=k+1=3$, $t_3=\alpha t_2=0.5$, $j=1$ і переходимо до кроку 2.

2^7. Одержимо $\xi^1=(0.343;\,0.512)^T$.

3^7. Обчислюємо

$$\mathrm{y}^1=\mathrm{x}^3+t_3\frac{\xi^1}{\|\xi^1\|}=(0.08;\,0.118)^T+0.5\cdot\frac{(0.343;\,0.512)^T}{0.616}=(0.358;\,0.53)^T.$$

4^7. Оскільки $f(\mathrm{y}^1)=0.727>f(\mathrm{x}^3)=0.036$, крок невдалий.

5^4. Маємо $j = 1 < M = 3$, тому $j = j + 1 = 2$ і перейдемо до кроку 2.

2^8. Одержимо $\xi^2 = (-0.218;\ -0.491)^T$.

3^8. Обчислюємо $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}^3 + t_3 \dfrac{\xi^2}{\| \xi^2 \|} =$

$$= (0.08;\ 0.118)^T + 0.5 \cdot \frac{(-0.218;\ -0.491)^T}{0.537} = (-0.123;\ -0.34)^T.$$

4^8. Оскільки $f(\mathrm{y}^2) = 0.187 > f(\mathrm{x}^3) = 0.036$, крок невдалий.

5^5. Маємо $j = 2 < M = 3$, тому $j = j + 1 = 3$ і перейдемо до кроку 2.

2^9. Одержимо $\xi^3 = (-0.715;\ 0.252)^T$.

3^9. Обчислюємо $\mathrm{y}^3 = \mathrm{x}^3 + t_3 \dfrac{\xi^3}{\| \xi^3 \|} =$

$$= (0.08;\ 0.118)^T + 0.5 \cdot \frac{(-0.715;\ 0.252)^T}{0.758} = (-0.391;\ 0.284)^T.$$

4^9. Оскільки $f(\mathrm{y}^3) = 0.275 > f(\mathrm{x}^3) = 0.036$, крок невдалий.

5^6. Маємо $j = 3 = M$, $t_3 = 0.5 = R$. Тому процес завершується:

$$\mathrm{x}^* \cong \mathrm{x}^3 = (0.08;\ 0.118)^T, \quad f(\mathrm{x}^*) \cong 0.036.$$

4.3. Методи першого порядку

Методи розв'язання задачі мінімізації $f(\mathrm{x}) \to \min$, $\mathrm{x} \in R^n$, які використовують інформацію про перші похідні функції $f(\mathrm{x})$, називаються методами *першого порядку*. В цьому розділі розглянуті методи першого порядку, які ґрунтуються на ітераційній процедурі мінімізації вигляду:

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \alpha_k \mathrm{p}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad \mathrm{x}^0 \in R^n, \tag{4.8}$$

де напрямок спадання p^k визначається тим або іншим способом з урахуванням інформації про перші частинні похідні функції $f(\mathrm{x})$, а величина кроку $\alpha_k > 0$ така, що:

$$f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.9}$$

Так як функція передбачається диференційовною, то як критерій закінчення обчислень у випадку нескінченної ітераційної послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$, як правило, вибирається умова $\|\nabla f(\mathrm{x}^k)\| < \varepsilon$, де - $\nabla f(\mathrm{x}^k) = \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_n} \right)^T_{\mathrm{x}^k}$ градієнт в точці x^k. Зрозуміло, можуть бути використані і інші критерії.

4.3.1. Метод найшвидшого градієнтного спуску

Постановка задачі

Нехай дано функцію $f(\mathrm{x})$, яка обмежена знизу на множині R^n і має неперервні частинні похідні у всіх її точках.

Потрібно знайти локальний безумовний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині припустимих розв'язків $X = R^n$, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x})$.

Стратегія розв'язання задачі

Стратегія розв'язання задачі включається в побудові послідовності точок $\{\mathrm{x}^k\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ таких, що $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Точки послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ обчислюються за правилом

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k),$$

де точка x^0 задається користувачем; величина кроку α_k визначається для кожного значення k з умови

$$\varphi(\alpha_k) = f\left(\mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k)\right) \to \min_{\alpha_k}. \qquad (4.10)$$

Розв'язання задачі (4.10) може здійснюватися з використанням необхідної умови мінімуму $\frac{d\varphi}{d\alpha_k} = 0$ з наступною перевіркою достатньої умови мінімуму $\frac{d^2\varphi}{d\alpha_k^2} > 0$. Такий шлях може бути використаний або при досить простій функції $\varphi(\alpha_k)$, або при попередній апроксимації досить складної функції $\varphi(\alpha_k) = f\left(\mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k)\right)$ поліномом $P(\alpha_k)$ (як пра-

вило, другого або третього степеня), і тоді умова $\frac{d\varphi}{d\alpha_k}=0$ замінюється умовою $\frac{dP}{d\alpha_k}=0$, а умова $\frac{d^2\varphi}{d\alpha_k^2}>0$ – умовою $\frac{d^2P}{d\alpha_k^2}>0$.

Інший шлях розв'язання задачі (4.10) пов'язаний з використанням чисельних методів одновимірної оптимізації, коли шукається $\min\limits_{\alpha_k}\varphi(\alpha_k)=\min\limits_{\alpha_k} f\left(\mathrm{x}^k-\alpha_k\nabla f(\mathrm{x}^k)\right)$. При цьому міра близькості знайденого значення α_k до оптимального значення α_k^*, що задовольняє умовам $\frac{d\varphi}{d\alpha_k}=0$, $\frac{d^2\varphi}{d\alpha_k^2}>0$, залежить від точності обраного методу одновимірної мінімізації [19].

Побудова послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$, $k=0,1,2,...$ закінчується в точці x^k, для якої $\|\nabla f(\mathrm{x}^k)\|<\varepsilon_1$, де ε_1 – задане число, або, якщо $k\ge M$, M – граничне число ітерацій, або при дворазовому одночасному виконанні нерівностей $\|\mathrm{x}^{k+1}-\mathrm{x}^k\|<\varepsilon_2$, $|f(\mathrm{x}^{k+1})-f(\mathrm{x}^k)|<\varepsilon_2$, де ε_2 – мале додатне число. Питання про те, чи може точка x^k розглядатися як знайдене наближення шуканої точки локального мінімуму x^*, вирішується шляхом додаткового дослідження.

Алгоритм

1. Задати x^0, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, граничне число ітерацій M. Знайти градієнт функції в довільній точці $\nabla f(\mathrm{x})=\left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1};...;\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_n}\right)^T$.

2. Вважати $k=0$.

3. Обчислити $\nabla f(\mathrm{x}^k)$.

4. Перевірити виконання критерію закінчення $\|\nabla f(\mathrm{x}^k)\|<\varepsilon_1$, де $\|\nabla f(\mathrm{x}^k)\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_i}\right)^2}$:

а) якщо критерій виконаний, то розрахунок закінчений і $\mathrm{x}^*=\mathrm{x}^k$;
б) якщо критерій не виконаний, то перейти до кроку 5.

5. Перевірити виконання нерівності $k \geq M$:

а) якщо нерівність виконана, то розрахунок закінчений і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;

б) якщо ні, те перейти до кроку 6.

6. Обчислити величину кроку α_k^* з умови

$$\varphi(\alpha_k) = f\left(\mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k)\right) \to \min_{\alpha_k}$$

7. Обчислити $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - \alpha_k^* \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

8. Перевірити виконання умов

$$\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k \| < \varepsilon_2, \quad | f(\mathrm{x}^{k+1}) - f(\mathrm{x}^k) | < \varepsilon_2 ;$$

а) якщо обидві умови виконані при поточному значенні k і $k = k - 1$, то розрахунок закінчений і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^{k+1}$;

б) якщо хоча б одна з умов не виконується, то вважати $k = k + 1$ і перейти до кроку 3.

Геометрична інтерпретація методу для $n = 2$ наведена на рис. 4.7.

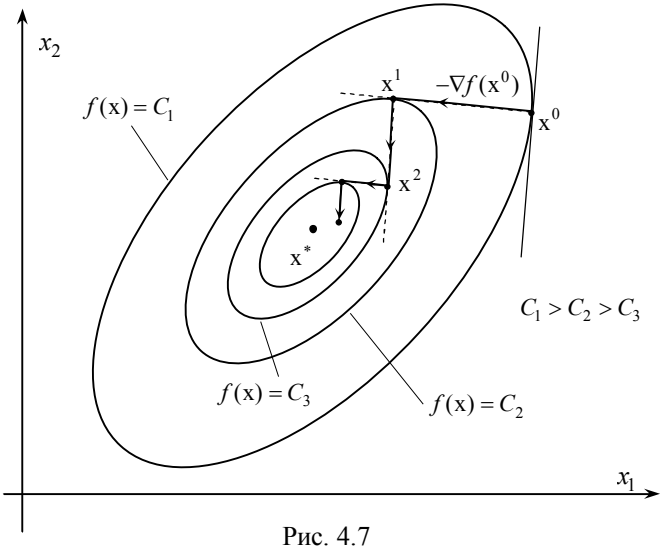


Рис. 4.7

Збіжність

Теорема 4.2. *Нехай функція* $f(\mathrm{x})$ *диференційовна* і *обмежена знизу на* R^n, *а її градієнт задовольняє умові Ліпшица*

$\| \nabla f(\mathrm{x}) - \nabla f(\mathrm{y}) \| \le L \| \mathrm{x} - \mathrm{y} \|$, $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in R^n$, *де* $L > 0$. *Тоді при довільній початковій точці* $\mathrm{x}^0 \in R^n$ *для методу градієнтного спуску маємо*

$$\lim_{k \to \infty} \| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| = 0 .$$

Теорема 4.3. *Нехай функція* $f(\mathrm{x})$ *задовольняє умовам теореми 4.2. Тоді при довільній початковій точці* $\mathrm{x}^0 \in R^n$ *для методу найшвидшого градієнтного спуску маємо* $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| = 0$ *при* $k \to \infty$ [20].

Зауваження 4.6

1. Теорема 4.3 гарантує збіжність послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ до стаціонарної точки x^*, де $\nabla f(\mathrm{x}^*) = 0$. Отже, знайдена в результаті застосування методу точка x^k треба додатково дослідити з метою її класифікації.

2. Метод найшвидшого спуску гарантує збіжність послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ до точки мінімуму для сильно опуклих функцій [20].

Швидкість збіжності

Оцінки швидкості збіжності отримані тільки для сильно опуклих функцій, коли послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$ збігається до точки мінімуму функції $f(\mathrm{x})$ зі швидкістю геометричної прогресії (лінійна збіжність): $\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k \| \le \dfrac{M - m}{M + m} \cdot \| \mathrm{x}^k - \mathrm{x}^* \|$, де M і m – оцінки найбільших і найменшого власних значень матриці других похідних $H(\mathrm{x})$ функції $f(\mathrm{x})$ [20].

Зауваження 4.7

1. Точку x^k необхідно проаналізувати для того, щоб встановити, чи є точка x^k знайденим наближенням розв'язком задачі. Варто провести перевірку функції $f(\mathrm{x})$ на опуклість в ε - околі точки x^k, використовуючи критерій опуклості для функцій $f(\mathrm{x}) \in C^1$: *функція* $f(\mathrm{x})$ *опукла (строго опукла) в тому і тільки в тому випадку, якщо*

$f(\mathrm{x} + \mathrm{y}) \ge f(\mathrm{x}) + \langle \nabla f(\mathrm{x}), \mathrm{y} \rangle$, $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in R^n$ $\left(f(\mathrm{x} + \mathrm{y}) > f(\mathrm{x}) + \langle \nabla f(\mathrm{x}), \mathrm{y} \rangle \right)$.

Якщо функція $f(\mathrm{x})$ опукла (строго опукла), то x^k - знайдене наближення точки x^*.

2. Якщо потрібно знайти глобальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$, то для строго опуклої $f(\mathrm{x})$ розв'язування цієї задачі аналогічно пошуку локаль-

ного мінімуму функції. У випадку, коли $f(\mathrm{x})$ має кілька локальних мінімумів, пошук глобального мінімуму здійснюється в результаті перебору всіх локальних мінімумів.

Приклад 4.5

Знайти локальний мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

методом найшвидшого спуску. Проаналізувати знайдений розв'язок.

Розв'язання

1. Задамо x^0, ε_1, ε_2, M: $\mathrm{x}^0 = (0.5; 1)^T$; $\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = 0.15$; $M = 10$. Знайдемо градієнт функції в довільній точці:

$$\nabla f(\mathrm{x}) = (4x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2)^T.$$

2. Вважаємо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^0) = (3; 2.5)^T$.

4^0. Обчислимо $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| = 3.9 > 0.1$. Переходимо до кроку 5.

5^0. Перевіримо умову $k \geq M$: $k = 0 < 10 = M$, переходимо до кроку 6.

6^0. Наступна точка знаходиться за формулою

$$\mathrm{x}^1 = \mathrm{x}^0 - \alpha_0 \nabla f(\mathrm{x}^0) = (0.5;1)^T - \alpha_0 (3;2.5)^T = (0.5 - 3\alpha_0;\ 1 - 2.5\alpha_0)^T.$$

Підставимо отримані вирази $x_1^1 = 0.5 - 3\alpha_0$, $x_2^1 = 1 - 2.5\alpha_0$ для координат точки x^1 в $f(\mathrm{x})$: $\varphi(\alpha_0) = 2(0.5 - 3\alpha_0)^2 + (0.5 - 3\alpha_0)\cdot(1 - 2.5\alpha_0) + +(1 - 2.5\alpha_0)^2$. Знайдемо мінімум функції $f(\mathrm{x})$ по α_0 за допомогою необхідних умов безумовного екстремуму:

$$\frac{d\varphi(\alpha_0)}{d\alpha_0} = -12(0.5 - 3\alpha_0) - 3(1 - 2.5\alpha_0) - 2.5(0.5 - 3\alpha_0) - 5(1 - 2.5\alpha_0) =$$

$= -15.25 + 63.25\alpha_0 = 0$. Звідси $\alpha_0^* \cong 0.24$. Оскільки $\dfrac{d^2\varphi(\alpha_0)}{d\alpha_0^2} = 63.25 > 0$, то знайдене значення кроку забезпечує мінімум функції $\varphi(\alpha_0)$ по α_0.

Зазначимо, що можна одержати формулу для обчислення найкращої величини кроку α_0 на будь-якій ітерації з умови

$$\varphi(\alpha_k) = f\left(\mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k)\right) \to \min_{\alpha_k}.$$

Маємо

$$\nabla f(\mathrm{x}^k) = (4x_1^k + x_2^k;\ x_1^k + 2x_2^k)^T;$$

$$\mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k) = \left[x_1^k - \alpha_k(4x_1^k + x_2^k);\ x_2^k - \alpha_k(x_1^k + x_2^k) \right]^T;$$

$$\varphi(\alpha_k) = 2\left(x_1^k - \alpha_k(4x_1^k + x_2^k)\right)^2 + \left(x_1^k - \alpha_k(4x_1^k + x_2^k)\right)\left(x_2^k - \alpha_k(x_1^k + x_2^k)\right) +$$

$$+\left(x_2^k - \alpha_k(x_1^k + x_2^k)\right)^2.$$

З умови $\dfrac{d\varphi(\alpha_k)}{d\alpha_k} = 0$. Одержимо

$$\alpha_k^* = \frac{(4x_1^k + x_2^k)^2 + (x_1^k + 2x_2^k)^2}{4(4x_1^k + x_2^k)^2 + 2(4x_1^k + x_2^k)(x_1^k + 2x_2^k) + 2(x_1^k + 2x_2^k)^2}.$$

Визначимо α_0^*: $\alpha_0^* = 0.24$.

7^0. Знайдемо $\mathrm{x}^1 = \mathrm{x}^0 - \alpha_0^* \nabla f(\mathrm{x}^0) =$

$$= (0.5;\ 1)^T - 0.24(3;\ 2.5)^T = (-0.22;\ 0.4)^T.$$

8^0. Обчислимо $\| \mathrm{x}^1 - \mathrm{x}^0 \| = 0.937 > 0.15$:

Обчислимо $| f(\mathrm{x}^1) - f(\mathrm{x}^0) | = 1.83 > 0.15$.

Висновок: вважаємо $k = 1$ і переходимо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^1) = (-0.48; 0.58)^T$.

4^1. Обчислимо $\| \nabla f(\mathrm{x}^1) \| = 0.752 > 0.1$.

5^1. Перевіримо умову $k \geq M$: $k = 1 < 10 = M$.

6^1. Визначимо $\alpha_1^* = 0.546$ (див. п. 6^0).

7^1. Знайдемо $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^1 - \alpha_1^* \nabla f(\mathrm{x}^1) =$

$$= (-0.22;\ 0.4)^T - 0.546(-0.48;\ 0.58)^T = (0.04;\ 0.08)^T.$$

8^1. Обчислимо $\| \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^1 \|$, $| f(\mathrm{x}^2) - f(\mathrm{x}^1) |$:

$\| \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^1 \| = 0.41 > 0.15$, $| f(\mathrm{x}^2) - f(\mathrm{x}^1) | = 0.156 > 0.15$

Вважаємо $k = 2$ і переходимо до кроку 3.

3^2. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^2) = (0.24; 0.2)^T$.

4^2. Обчислимо $\| \nabla f(\mathrm{x}^2) \| = 0.312 > 0.1$.

5^2. Перевіримо умову $k \geq M$: $k = 2 < 10 = M$.

6^2. Визначимо $\alpha_1^* = 0.24$ (див. п. 6^0).

7^2. Знайдемо $\mathrm{x}^3 = \mathrm{x}^2 - \alpha_2^* \nabla f(\mathrm{x}^2)$

$\mathrm{x}^3 = (0.04; 0.08)^T - 0.24(0.24; 0.2)^T = (-0.0176; 0.032)^T$.

8^2. Обчислимо $\| \mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^2 \|$, $| f(\mathrm{x}^3) - f(\mathrm{x}^2) |$:

$\| \mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^2 \| = 0.0749 < 0.15$, $| f(\mathrm{x}^3) - f(\mathrm{x}^2) | = 0.0116 < 0.15$.

Вважаємо $k = 3$ і переходимо до кроку 3.

3^3. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^3) = (-0.012; -0.0816)^T$.

4^3. Обчислимо $\| \nabla f(\mathrm{x}^3) \| = 0.082 < 0.1$. Розрахунок закінчений. Знайдено точку $\mathrm{x}^3 = (-0.0176; 0.032)^T$, $f(\mathrm{x}^3) = 0.00127$.

Аналіз точки x^3. Функція $f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ є двічі диференційовною, тому проведемо перевірку достатніх умов мінімуму в точці x^3. Для цього проаналізуємо матрицю Гессе $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Матриця постійна і є додатно визначеною (тобто $H > 0$), оскільки обидва її кутових мінора $\Delta_1 = 4$ і $\Delta_2 = 7$ додатні, а функція $f(\mathrm{x})$ – строго опукла. Отже, точка $\mathrm{x}^3 = (-0.0176;\ 0.032)^T$ є знайдене наближення точки $\mathrm{x}^* = (0; 0)^T$ глобального мінімуму функції $f(\mathrm{x})$, тобто $f(\mathrm{x}^*) = f_{\min} = 0$.

4.3.2. Метод Гауса - Зейделя

Постановка задачі Нехай дано функцію $f(\mathrm{x})$, яка обмежена знизу на множині R^n і має неперервні частинні похідні у всіх її точках.

Стратегія розв'язання задачі Потрібно знайти локальний безумовний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині припустимих розв'язків $X = R^n$, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x})$.

Стратегія методу Гауса - Зейделя (Gauss – Seidel) заключається в побудові послідовності точок $\{\mathrm{x}^k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ таких, що

$f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^{k})$, $k = 0,1,2,...$ Точки послідовності $\{\mathrm{x}^{k}\}$ обчислюються за правилом

$$\mathrm{x}^{j\,k+1} = \mathrm{x}^{jk} - \alpha_k \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_{k+1}} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{jk}} \cdot e_{k+1},$$

де j – номер циклу обчислень, $j = 0,1,2,...$; k – номер ітерації всередині циклу, $k = 0,1,...,n-1$; e_{k+1} – одиничний вектор, $(k+1)$-а проекція якого дорівнює 1; точка x^{00} задається користувачем, величина кроку α_k вибирається з умови

$$\varphi(\alpha_k) = f\left(\mathrm{x}^{jk} - \alpha_k \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_{k+1}} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{jk}} \cdot e_{k+1} \right) \to \min_{\alpha_k}.$$

Ця задача є задачею одновимірної мінімізації функції $\varphi(\alpha_k)$ і може бути розв'язана або з використанням умов $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_k^2} > 0$, або чисельно з використанням методів одновимірної мінімізації, як задача $\varphi(\alpha_k) \to \min\limits_{\alpha_k \in [a,b]}$.

Якщо рівняння $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = 0$ має високий степінь і корінь його важко визначити, можна апроксимувати функцію $\varphi(\alpha_k)$ поліномом $P(\alpha_k)$ другого або третього степеня і визначити α_k^* з умов $\frac{\partial P}{\partial \alpha_k} = 0$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_k^2} > 0$.

При чисельному розв'язанні задачі визначення величини кроку міра близькості знайденого значення α_k до оптимального значення α_k^*, що задовольняє умовам $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_k^2} > 0$, залежить від точності методу одновимірної мінімізації [19].

Очевидно, що при фіксованому j за одну ітерацію з номером k змінюється тільки одна проекція точки x^{jk}, що має номер $k+1$, а протягом усього циклу з номером j, тобто починаючи з $k = 0$ і закінчуючи $k = n-1$, змінюються всі n проекцій точки x^{j0}. Після цього точці x^{jn}

надається номер $\mathrm{x}^{j+1,0}$ і вона вибирається як початкова точка для обчислень в $(j+1)$-му циклі.

Розрахунок закінчується в точці x^{jk} при виконанні принаймні одного із трьох критеріїв закінчення рахунку: $\|\nabla f(\mathrm{x}^{jk})\| < \varepsilon_1$, або $k \geq M$, або виконання нерівностей $\|\mathrm{x}^{jk+1} - \mathrm{x}^{jk}\| < \varepsilon_2$, $|f(\mathrm{x}^{jk+1}) - f(\mathrm{x}^{jk})| < \varepsilon_2$. Тут ε_1, ε_2 – малі додатні числа, M – граничне число циклів ітерацій. Питання про те, чи є точка x^{jk} знайденим наближенням шуканої точки, вирішується шляхом проведення додаткового дослідження.

Алгоритм

1. Задати x^{00}, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$; граничне число M циклів рахунку, кратне n, де n – розмірність вектора x. Знайти градієнт $\nabla f(\mathrm{x})$.

2. Задати номер циклу $j = 0$.

3. Перевірити умову $j \geq M$:

а) якщо $j \geq M$, то розрахунок закінчений і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^{jk}$;

б) якщо $j < M$, то перейти до кроку 4.

4. Задати $k = 0$.

5. Перевірити умову $k \leq n-1$:

а) якщо $k \leq n-1$, то перейти до кроку 6;

б) якщо $k = n$, то вважати $j = j+1$ і перейти до кроку 3.

6. Обчислити $\nabla f(\mathrm{x}^{jk})$.

7. Перевірити виконання умови $\|\nabla f(\mathrm{x}^{jk})\| < \varepsilon_1$:

а) якщо умова виконана, то розрахунок закінчений і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^{jk}$;

б) якщо ні, то перейти до кроку 8.

8. Обчислити α_k^* з умови

$$\varphi(\alpha_k) = f\left(\mathrm{x}^{jk} - \alpha_k \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_{k+1}}\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{jk}} \cdot e_{k+1}\right) \to \min_{\alpha_k}.$$

9. Обчислити

$$\mathrm{x}^{j\,k+1} = \mathrm{x}^{jk} - \alpha_k \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_{k+1}}\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{jk}} \cdot e_{k+1}.$$

10. Перевірити виконання умов

$$\| \mathrm{x}^{jk+1} - \mathrm{x}^{jk} \| < \varepsilon_2, \quad | f(\mathrm{x}^{jk+1}) - f(\mathrm{x}^{jk}) | < \varepsilon_2 :$$

а) якщо обидві умови виконані у двох послідовних циклах з номерами j й $j-1$, то розрахунок закінчений, знайдена точка $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^{jk+1}$;

б) якщо не виконується хоча б одна умова, вважати $k = k+1$ і перейти до кроку 5.

Приклад 4.6

Знайти локальний мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

методом Гауса – Зейделя. Визначити точку x^{jk}, в якій виконується хоча б один критерій закінчення розрахунків.

Розв'язання

1. Задамо x^{00}, ε_1, ε_2, M: $\mathrm{x}^{00} = (0.5; 1)^T$; $\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = 0.15$; $M = 10$. Знайдемо градієнт функції в довільній точці:

$$\nabla f(\mathrm{x}) = (4x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2)^T .$$

2. Задамо $j = 0$.

3^0. Перевіримо виконання умови $j \ge M$: $j = 0 < 10 = M$.

4^0. Задамо $k = 0$.

5^0. Перевіримо виконання умови $k \le n-1$: $k = 0 < 1 = n-1$.

6^0. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^{00}) = (3; 2.5)^T$.

7^0. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^{00}) \| < \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^{00}) \| = 3.9 > 0.1$.

8^0. Визначимо величину кроку α_0^* з умови

$$\varphi(\alpha_0) = f\left(\mathrm{x}^{j0} - \alpha_0 \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{j0}} \cdot e_1 \right) \to \min_{\alpha_0} .$$

При $k = 0$, $j = 0$: $\mathrm{x}^{01} = \mathrm{x}^{00} - \alpha_0 \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{00}} \cdot e_1$.

Оскільки $\left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1}\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{00}} = \left(4x_1 + x_2\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{00}} = 2+1=3$, $e_1 = (1;0)^T$, то $\mathrm{x}^{01} = (0.5;1)^T - \alpha_0 \cdot 3 \cdot (1;0)^T = (0.5-3\alpha_0;1)^T$ або $x_1^{01} = 0.5-3\alpha_0$, $x_2^{01} = 1$. Підставляючи отримані вирази в $f(\mathrm{x})$, маємо

$$\varphi(\alpha_0) = 2(0.5-3\alpha_0)^2 + (0.5-3\alpha_0)\cdot 1 + 1.$$

З необхідної умови екстремуму $\frac{d\varphi(\alpha_0)}{d\alpha_0} = 36\alpha_0 - 9 = 0$ знаходимо $\alpha_0^* = 0.25$. Оскільки $\frac{d^2\varphi(\alpha_0)}{d\alpha_0^2} = 36 > 0$, то знайдене значення кроку забезпечує мінімум функції $\varphi(\alpha_0)$ по α_0.

9^0. Визначимо $\mathrm{x}^{01} = \mathrm{x}^{00} - \alpha_0^*\left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1}\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{00}} \cdot e_1 = (-0.25;1)^T$.

10^0. Перевіримо умови $\| \mathrm{x}^{01} - \mathrm{x}^{00} \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{01}) - f(\mathrm{x}^{00}) | < \varepsilon_2$: $\| \mathrm{x}^{01} - \mathrm{x}^{00} \| = 0.25 > 0.15$, $| f(\mathrm{x}^{01}) - f(\mathrm{x}^{00}) | = | 0.875 - 2 | = 1.125 > 0.15$. Вважаємо $k = 1$, переходимо до кроку 5.

5^1. Перевіримо умови $k \le n-1$: $k = 1 = n-1$.

6^1. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^{01}) = (0; 1.75)^T$.

7^1. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^{01}) \| < \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^{00}) \| = 1.75 > 0.1$.

8^1. Визначимо величину кроку α_1^* з умови

$$\varphi(\alpha_1) = f\left(\mathrm{x}^{j1} - \alpha_1\left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2}\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{j1}} \cdot e_2\right) \to \min_{\alpha_1}.$$

При $k = 1$, $j = 0$: $\mathrm{x}^{02} = \mathrm{x}^{01} - \alpha_1\left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2}\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{01}} \cdot e_2$.

Оскільки $\left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2}\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{01}} = \left(x_1 + 2x_2\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{01}} = -0.25 + 2 = 1.75$, $e_2 = (0;1)^T$, то $\mathrm{x}^{02} = (-0.25;1)^T - \alpha_1 \cdot 1.75 \cdot (0;1)^T = (-0.25;\, 1-1.75\alpha_1)^T$ або $x_1^{02} = -0.25$, $x_2^{02} = 1 - 1.75\alpha_1$. Підставляючи отримані вирази в $f(\mathrm{x})$, маємо

$$\varphi(\alpha_1) = 2(-0.25)^2 + (-0.25)(1-1.75\alpha_1) + (1-1.75\alpha_1)^2 .$$

З необхідної умови екстремуму $\dfrac{d\varphi(\alpha_1)}{d\alpha_1} = 2\cdot 1.75^2\alpha_1 - 1.75^2 = 0$ знаходимо $\alpha_1^* = 0.5$. Оскільки $\dfrac{d^2\varphi(\alpha_0)}{d\alpha_0^2} = 2\cdot 1.75^2 > 0$, то знайдене значення кроку забезпечує мінімум функції $\varphi(\alpha_1)$ по α_1.

9[1]. Визначимо $\mathrm{x}^{02} = \mathrm{x}^{01} - \alpha_1^* \left(\dfrac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{01}} \cdot e_2 = (-0.25;\ 0.125)^T$.

10[1]. Перевіримо умови $\| \mathrm{x}^{02} - \mathrm{x}^{01} \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{02}) - f(\mathrm{x}^{01}) | < \varepsilon_2$: $\| \mathrm{x}^{02} - \mathrm{x}^{01} \| = 0.875 > 0.15$, $| f(\mathrm{x}^{02}) - f(\mathrm{x}^{01}) | = | 0.12 - 0.875 | = 0.755 > 0.15$. Вважаємо $k = 2$, переходимо до кроку 5.

5[2]. Перевіримо умову $k \le n-1$: $k = 2 = n$. Вважаємо $j = 1$, $\mathrm{x}^{10} = \mathrm{x}^{02}$, переходимо до кроку 3.

3[1]. Перевіримо умову $j \ge M$: $j = 1 < 10 = M$.

4[1]. Задамо $k = 0$.

5[3]. Перевіримо умову $k \le n-1$: $k = 0 < 1 = n-1$.

6[3]. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^{10}) = \nabla f(\mathrm{x}^{02}) = (-0.875;\ 0.00)^T$.

7[3]. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^{10}) \| < \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^{10}) \| = 0.875 > 0.1$.

8[3]. Вважаємо $\alpha_0^* = 0.25$. (див. п. *8*[0]).

9[3]. Обчислимо $\mathrm{x}^{11} = \mathrm{x}^{10} - \alpha_0^* \left(\dfrac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{10}} \cdot e_1 = (-0.03;\ 0.125)^T$.

10[3]. Перевіримо умови $\| \mathrm{x}^{11} - \mathrm{x}^{10} \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{11}) - f(\mathrm{x}^{10}) | < \varepsilon_2$: $\| \mathrm{x}^{11} - \mathrm{x}^{10} \| = 0.22 > 0.15$,
$| f(\mathrm{x}^{11}) - f(\mathrm{x}^{10}) | = | 0.013 - 0.137 | = 1.124 > 0.15$. Вважаємо $k = 1$, переходимо до кроку 5.

5[4]. Перевіримо умову $k \le n-1$: $k = 1 = n-1$.

6[4]. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^{11}) = (-0.005;\ 0.22)^T$.

7[4]. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^{11}) \| < \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^{11}) \| = 0.22 > 0.1$.

8^4. Задамо $\alpha_1^* = 0.5$. (див. п. 8^1).

9^4. Обчислимо $\mathrm{x}^{12} = \mathrm{x}^{11} - \alpha_1^* \left(\dfrac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{11}} \cdot e_2 = (-0.03;\ 0.015)^T$.

10^4. Перевіримо умови $\| \mathrm{x}^{12} - \mathrm{x}^{11} \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{12}) - f(\mathrm{x}^{11}) | < \varepsilon_2$:
$\| \mathrm{x}^{12} - \mathrm{x}^{11} \| = 0.11 < 0.15$,
$| f(\mathrm{x}^{12}) - f(\mathrm{x}^{11}) | = | 0.0015 - 0.013 | = 0.0115 < 0.15$. Вважаємо $k = 2$, переходимо до кроку 5.

5^5. Перевіримо умову $k \le n-1$: $k = 2 = n$. Вважаємо $j = 2$, $\mathrm{x}^{20} = \mathrm{x}^{12}$, переходимо до кроку 3.

3^2. Перевіримо умову $j \ge M$: $j = 2 < 10 = M$.

4^2. Задамо $k = 0$.

5^6. Перевіримо умову $k \le n-1$: $k = 0 < 1 = n-1$.

6^5. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^{20}) = (-0.105;\ 0)^T$.

7^5. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^{20}) \| < \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^{20}) \| = 0.105 > 0.1$.

8^5. Задамо $\alpha_0^* = 0.25$. (див. п. 8^0).

9^5. Обчислимо $\mathrm{x}^{21} = \mathrm{x}^{20} - \alpha_0^* \left(\dfrac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^{20}} \cdot e_1 = (-0.004;\ 0.015)^T$.

10^5. Перевіримо умови $\| \mathrm{x}^{21} - \mathrm{x}^{20} \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{21}) - f(\mathrm{x}^{20}) | < \varepsilon_2$:
$\| \mathrm{x}^{21} - \mathrm{x}^{20} \| = 0.026 < 0.15$, $| f(\mathrm{x}^{21}) - f(\mathrm{x}^{20}) | = | 0.0002 - 0.0015 | < 0.15$.

Умови $\| \mathrm{x}^{jk+1} - \mathrm{x}^{jk} \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{jk+1}) - f(\mathrm{x}^{jk}) | < \varepsilon_2$ виконані у двох послідовних циклах з номерами $j = 2$ і $j - 1 = 1$. Розрахунок закінчений, знайдена точка $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{x}^{21} = (-0.004;\ 0.015)^T$; $f(\mathrm{x}^*) = 0.000197$.

Точка x^{21} є знайденим наближенням точки глобального мінімуму $f(\mathrm{x})$, оскільки функція $f(\mathrm{x})$ строго опукла.

4.3.3. Метод спряжених градієнтів

Постановка задачі

Нехай дано функцію $f(\mathrm{x})$, обмежену знизу на множині R^n, яка має неперервні частинні похідні у всіх її точках.

Потрібно знайти локальний безумовний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині припустимих розв'язків $X = R^n$, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x}\in R^n} f(\mathrm{x})$.

Стратегія розв'язання задачі Стратегія методу спряжених градієнтів заключається в побудові послідовності точок $\{\mathrm{x}^k\}$, $k = 0,1,2,...$ таких, що $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$, $k = 0,1,2,...$ Тут розглядається *алгоритм методу Флетчера – Рівса* (Fletcher R., Reeves M.) Точки послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ обчислюються за правилом

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \alpha_k \mathrm{p}^k, \quad k = 0,1,2,...; \tag{4.11}$$

$$\mathrm{p}^k = -\nabla f(\mathrm{x}^k) + \beta_{k-1}\mathrm{p}^{k-1}; \tag{4.12}$$

$$\mathrm{p}^0 = -\nabla f(\mathrm{x}^0); \tag{4.13}$$

$$\beta_{k-1} = \frac{\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \|^2}{\| \nabla f(\mathrm{x}^{k-1}) \|^2}. \tag{4.14}$$

Точка x^0 задається користувачем, величина кроку α_k визначається для кожного значення k з умови

$$\varphi(\alpha_k) = f(\mathrm{x}^k + \alpha_k \mathrm{p}^k) \to \min_{\alpha_k}. \tag{4.15}$$

Розв'язання задачі одновимірної мінімізації (4.15) може здійснюватися або з умови $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = 0$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_k^2} > 0$, або чисельно, з використанням методів одновимірної мінімізації, коли розв'язується задача $\varphi(\alpha_k) \to \min\limits_{\alpha_k}$.

При чисельному розв'язанні задачі визначення величини кроку, міра близькості знайденого значення α_k до оптимального значення α_k^*, що задовольняє умовам $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = 0$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_k^2} > 0$, залежить від точності використовуваного методу одновимірної мінімізації.

Обчислення величини β_{k-1} за формулою (4.14) забезпечує для квадратичної форми $f(\mathrm{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ побудову послідовності A- спряжених напрямків p^0, $\mathrm{p}^1, \ldots, \mathrm{p}^k, ...$, для яких $\langle \mathrm{p}^i, A\mathrm{p}^j \rangle = 0$,

$\forall i, j = 0,1,...,k$, $i \neq j$. При цьому в точках послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ вектори - градієнти функції $f(\mathrm{x})$ взаємно перпендикулярні, тобто $\langle \nabla f(\mathrm{x}^{k+1}), \nabla f(\mathrm{x}^k) \rangle = 0$, $k = 0,1,...$.

Для квадратичних функцій $f(\mathrm{x})$ з матрицею $H > 0$ метод спряжених градієнтів є скінченним і збігається за число кроків, що не перевищує n – розмірність вектора x .

Зауваження 4.8. При мінімізації неквадратичних функцій метод Флетчера-Рівса не є скінченним, при цьому слід зазначити, що похибки в розв'язуванні задачі (4.15) приводять до порушення не тільки перпендикулярності градієнтів, але і H - спряженості напрямків. Для неквадратичних функцій, як правило, використовується *алгоритм Полака-Рібьера* (Polak E., Ribiere G.), коли у формулах (4.11) – (4.14) величина β_{k-1} обчислюється наступним чином:

$$\beta_{k-1} = \begin{cases} \dfrac{\left\langle \nabla f(\mathrm{x}^k), \left[\nabla f(\mathrm{x}^k) - \nabla f(\mathrm{x}^{k-1}) \right] \right\rangle}{\| \nabla f(\mathrm{x}^{k-1}) \|^2}, & k \notin J, \\ 0, \quad k \in J, \end{cases}$$

де $J = \{0, n, 2n, ...\}$. На відміну від алгоритму Флетчера-Рівса алгоритм Полака-Рібьера передбачає використання ітерації найшвидшого градієнтного спуску через кожні n кроків. Побудова послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ закінчується в точці, для якої $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| < \varepsilon_1$, де ε_1 – задане число, або при $k \geq M$, M – граничне число ітерацій, або при дворазовому виконанні двох нерівностей $\| \mathrm{x}^{jk+1} - \mathrm{x}^{jk} \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{jk+1}) - f(\mathrm{x}^{jk}) | < \varepsilon_2$, де ε_2 – мале додатне число.

Алгоритм (Флетчера – Рівса)

1. Задати x^0, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$; M – граничне число ітерацій. Знайти градієнт $\nabla f(\mathrm{x})$.

2. Вважати $k = 0$.

3. Обчислити $\nabla f(\mathrm{x}^k)$.

4. Перевірити виконання критерію закінчення $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| < \varepsilon_1$:

а) якщо критерій виконується, то $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$, розрахунок закінчено;
б) якщо ні, то перейти до кроку 5.

5. Перевірити умову $k \geq M$:

а) якщо нерівність виконується, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;

б) якщо ні, то при $k = 0$ перейти до кроку 6, а при $k \geq 1$ перейти до кроку 7.

6. Визначити за (4.13) $\mathrm{p}^0 = -\nabla f(\mathrm{x}^0)$.

7. Визначити за (4.14) $\beta_{k-1} = \dfrac{\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \|^2}{\| \nabla f(\mathrm{x}^{k-1}) \|^2}$.

8. Визначити за (4.12) $\mathrm{p}^k = -\nabla f(\mathrm{x}^k) + \beta_{k-1}\mathrm{p}^{k-1}$.

9. Знайти α_k^* з умови $\varphi(\alpha_k) = f(\mathrm{x}^k + \alpha_k \mathrm{p}^k) \to \min\limits_{\alpha_k}$.

10. Обчислити $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \alpha_k^* \mathrm{p}^k$ за формулою (4.11).

11. Перевірити виконання умов

$$\| \mathrm{x}^{j\,k+1} - \mathrm{x}^{jk} \| < \varepsilon_2, \quad | f(\mathrm{x}^{j\,k+1}) - f(\mathrm{x}^{jk}) | < \varepsilon_2 :$$

а) у випадку виконання обох умов в двох послідовних ітераціях з номерами $k-1$ і k розрахунок закінчено, знайдена точка x^k;

б) якщо не виконується хоча б одна з умов, вважаємо $k = k+1$ і переходимо до кроку 3.

Геометрична інтерпретація методу для $n = 2$ зображена на рис. 4.8.

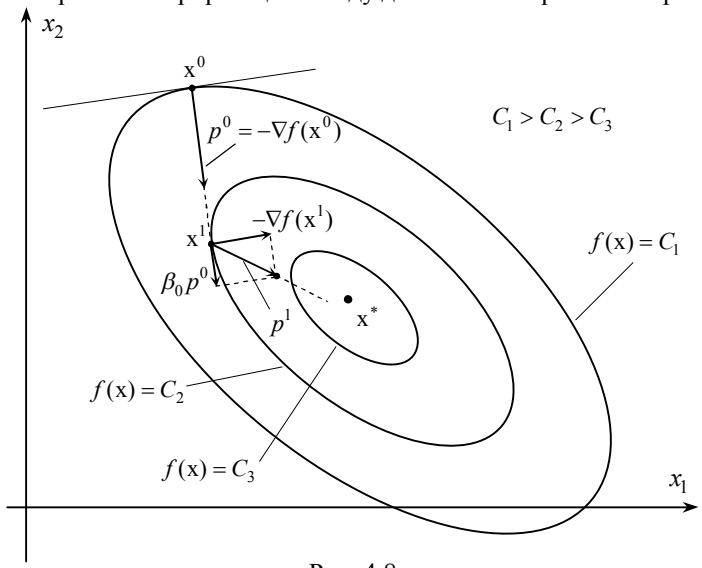


Рис. 4.8

Збіжність

Збіжність методів Флетчера-Рівса і Полака-Рібьера визначається відповідно наступними теоремами.

Теорема 4.4. *Якщо квадратична функція* $f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ *з невід'ємно визначеною матрицею* H *досягає свого мінімального значення на* R^n*, то метод Флетчера-Рівса забезпечує відшукання точки мінімуму не більш ніж за* n *кроків* [29].

Теорема 4.5. *Якщо функція* $f(\mathrm{x})$ *обмежена знизу, а її градієнт задовольняє умові Ліпшица* $\| \nabla f(\mathrm{x}) - \nabla f(\mathrm{y}) \| \le L \| \mathrm{x} - \mathrm{y} \|$, $\forall \mathrm{x},\mathrm{y} \in R^n$, *то в методі Полака-Рібьера* $\lim\limits_{k\to\infty} \| \nabla f(\mathrm{x})^k \| = 0$ [20].

Зауваження 4.9

1. Теорема 4.5 гарантує збіжність послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ до стаціонарної точки x^*, де $\nabla f(\mathrm{x}^*) = 0$. Отже, знайдена в результаті застосування методу точка x^k потребує додаткового дослідження з метою класифікації цієї точки.

2. Метод Полака-Рібьера гарантує збіжність послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ до точки мінімуму для сильно опуклих функцій.

Швидкість збіжності

Оцінки швидкості збіжності отримані тільки для сильно опуклих функцій, коли послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$ збігається до точки мінімуму функції $f(\mathrm{x})$ зі швидкістю $\| \mathrm{x}^{k+n} - \mathrm{x}^* \| \le C \| \mathrm{x}^k - \mathrm{x}^* \|^2$, $k \in \{0, n, 2n, \ldots\}$ [29].

Приклад 4.7

Знайти локальний мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

методом Флетчера-Рівса. Визначити точку x^k, в якій виконується хоча б один критерій закінчення розрахунків.

Розв'язання

1. Задамо x^0, ε_1, ε_2, M: $\mathrm{x}^0 = (0.5;1)^T$; $\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = 0.15$; $M = 10$. Знайдемо градієнт функції в довільній точці:

$$\nabla f(\mathrm{x}) = (4x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2)^T.$$

2. Вважаємо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^0)=(3;\,2.5)^T$.

4^0. Перевіримо умову $\|\nabla f(\mathrm{x}^0)\|<\varepsilon_1$: $\|\nabla f(\mathrm{x}^0)\|=3.9>0.1$.

5^0. Перевіримо умову $k\ge M$: $k=0<10=M$.

6^0. Визначимо $\mathrm{p}^0=-\nabla f(\mathrm{x}^0)=-(3;\,2.5)^T$.

9^0. Визначимо величину кроку α_0^* з умови $f(\mathrm{x}^0+\alpha_0\mathrm{p}^0)\to\min\limits_{\alpha_0}$:

$\alpha_0^*=0.24$ (перша ітерація виконується методом найшвидшого спуску, див. приклад 4.5).

10^0. Обчислимо $\mathrm{x}^1=\mathrm{x}^0+\alpha_0^*\mathrm{p}^0=(-0.22;0.4)^T$.

11^0. Перевіримо умови $\|\mathrm{x}^1-\mathrm{x}^0\|<\varepsilon_2$, $|f(\mathrm{x}^1)-f(\mathrm{x}^0)|<\varepsilon_2$:

$\|\mathrm{x}^1-\mathrm{x}^0\|=0.937>0.15$, $|f(\mathrm{x}^1)-f(\mathrm{x}^0)|=|0.17-2|=1.83>0.15$.

Вважаємо $k=1$, переходимо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^1)=(-0.48;\,0.58)^T$.

4^1. Перевіримо умову $\|\nabla f(\mathrm{x}^1)\|<\varepsilon_1$: $\|\nabla f(\mathrm{x}^1)\|=0.752>0.1$.

5^1. Перевіримо умову $k\ge M$: $k=1<10=M$.

7^1. Визначимо $\beta_0=\dfrac{\|\nabla f(\mathrm{x}^1)\|^2}{\|\nabla f(\mathrm{x}^0)\|^2}=0.0373$.

8^1. Визначимо $\mathrm{p}^1=-\nabla f(\mathrm{x}^0)+\beta_0\mathrm{p}^0=:$

$$=-(-0.48;0.58)^T-0.0373\,(3;2.5)^T=(0.368;-0.673)^T.$$

9^1. Визначимо величину кроку α_1^* з умови $f(\mathrm{x}^1+\alpha_1\mathrm{p}^1)\to\min\limits_{\alpha_1}$.

Скористаємося формулою

$$\mathrm{x}^2=\mathrm{x}^1+\alpha_1\mathrm{p}^1=(-0.22;0.4)^T+\alpha_1(0.368;-0.673)^T=$$
$$=(-0.22+0.368\alpha_1;\,0.4-0.673\alpha_1)^T.$$

Підставляючи отримані вирази в $f(\mathrm{x})$, маємо

$$\varphi(\alpha_1)=2(-0.22+0.368\alpha_1)^2+(-0.22+0.368\alpha_1)(0.4-0.673\alpha_1)+$$
$$+(0.4-0.673\alpha_1)^2.$$

Застосовуючи необхідну умову безумовного екстремуму

$$\frac{d\varphi(\alpha_1)}{d\alpha_1}=4\cdot(-0.22+0.368\alpha_1)\cdot0.368+0.368\cdot(0.4-0.673\alpha_1)+$$

$$+(-0.22+0.368\alpha_1)\cdot(-0.673)+2\cdot(0.4-0.673\alpha_1)\cdot(-0.673)=0,$$

знаходимо $\alpha_1^* = 0.595$. Оскільки $\dfrac{d^2\varphi(\alpha_1)}{d\alpha_1^2} = 0.952 > 0$, знайдене значення кроку забезпечує мінімум функції $\varphi(\alpha_1)$ по α_1.

10[1]. Обчислимо $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^1 + \alpha_1^* \mathrm{p}^1 = (0.001;\ 0.000)^T$.

11[1]. Перевіримо умови $\|\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^1\| < \varepsilon_2$, $|f(\mathrm{x}^2) - f(\mathrm{x}^1)| < \varepsilon_2$:

$$\|\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^1\| = 0.456 > 0.15, \quad |f(\mathrm{x}^2) - f(\mathrm{x}^1)| = 0.17 > 0.15.$$

Вважаємо $k = 2$, переходимо до кроку 3.

3[2]. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^2)$: $\nabla f(\mathrm{x}^2) = (0.003;\ 0.006)^T$.

4[2]. Перевіримо умову $\|\nabla f(\mathrm{x}^2)\| < \varepsilon_1$: $\|\nabla f(\mathrm{x}^2)\| = 0.0067 < 0.1$.

Розрахунок закінчено. Знайдено точку $\mathrm{x}^2 = (0.001;0)^T$; $f(\mathrm{x}^2) = 2\cdot 10^{-6}$.

З врахуванням того, що функція $f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ строго опукла, вона має єдиний мінімум, наближення якого $\mathrm{x}^* \cong \mathrm{x}^2 = (0.001;\ 0)^T$ знайдено за дві ітерації.

4.4. Методи другого порядку

Методи розв'язання задачі мінімізації $f(\mathrm{x}) \to \min$, $\mathrm{x} \in R^n$, які використовують інформацію про перші і другі похідні функції $f(\mathrm{x})$, називаються методами *другого порядку*. В цьому розділі розглянуто методи другого порядку, які засновані на ітераційній процедурі мінімізації вигляду:

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \alpha_k \mathrm{p}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad \mathrm{x}^0 \in R^n, \tag{4.16}$$

де напрямок спадання p^k визначається тим або іншим способом з використанням перших і других частинних похідних функції $f(\mathrm{x})$, а величина кроку $\alpha_k > 0$ така, що:

$$f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k), \ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.17}$$

Як критерій закінчення обчислень, як правило, вибираються ті ж умови, що і у методах першого порядку.

4.4.1. Метод Ньютона

Постановка задачі Нехай дано функцію $f(\mathrm{x})$, яка обмежена знизу на множині R^n і має неперервні частинні похідні у всіх її точках.

Потрібно знайти безумовний локальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині припустимих розв'язків $X = R^n$, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x})$, $f(\mathrm{x}) \in C^2$.

Стратегія розв'язання задачі Стратегія розв'язання задачі методом Ньютона (Newton I.) заключається в побудові послідовності точок $\{\mathrm{x}^k\}$, $k = 0,1,2,...$ таких, що $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$, $k = 0,1,2,...$ Точки послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ обчислюються за правилом

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \mathrm{p}^k,\ k = 0,1,2,...$$

де точка x^0 задається користувачем, а напрямок спуску p^k визначається для кожного значення k за формулою

$$\mathrm{p}^k = -H^{-1}(\mathrm{x}^k) \cdot \nabla f(\mathrm{x}^k). \qquad (4.18)$$

Вибір p^k за формулою (4.18) гарантує виконання вимоги $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$ за умови, що $H(\mathrm{x}^k) > 0$. Формула (4.18) отримана з наступних міркувань:

1. Функція $f(\mathrm{x})$ апроксимується в кожній точці послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ квадратичною функцією $F_k = f(\mathrm{x}^k) + \left\langle \nabla f(\mathrm{x}^k), \mathrm{p}^k \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{p}^k, H(\mathrm{x}^k)\mathrm{p}^k \right\rangle$.

2. Напрямок p^k визначається з необхідної умови екстремуму першого порядку: $\frac{dF_k}{d\mathrm{p}^k} = 0$. Таким чином, при виконанні вимоги $H(\mathrm{x}^k) > 0$ послідовність є послідовністю точок мінімумів квадратичних функцій F_k, $k = 0,1,2,...$ (рис. 4.9).

Щоб забезпечити виконання вимоги $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, навіть у тих випадках, коли для будь-яких значень матриця Гессе $H(\mathrm{x}^k)$ не є додатно визначеною, рекомендується для відповідних

значень k обчислити точку x^{k+1} методом градієнтного спуску $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k)$ з вибором величини кроку α_k з умови $f\left(\mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k)\right) < f(\mathrm{x}^k)$.

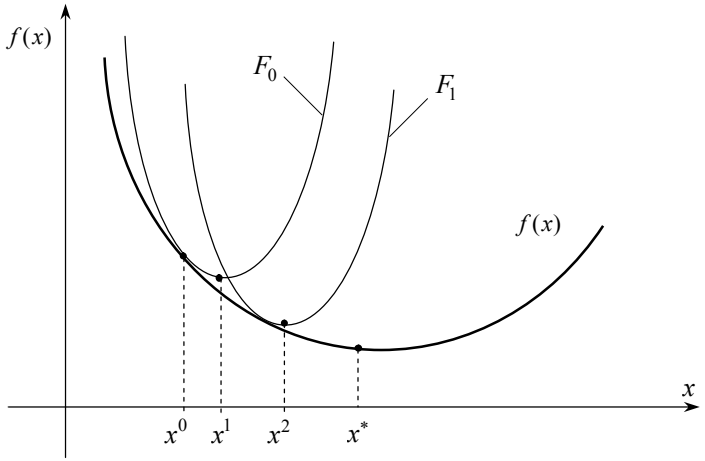


Рис. 4.9

Побудова послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ закінчується в точці x^k, для якої $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| < \varepsilon_1$, де ε_1 – задане число, або, якщо $k \geq M$ (M – граничне число ітерацій) або при дворазовому одночасному виконанні двох нерівностей $\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{k+1}) - f(\mathrm{x}^k) | < \varepsilon_2$, де ε_2 – мале додатне число. Питання про те, чи може точка x^k розглядатися як знайдене наближення шуканої точки локального мінімуму x^*, вирішується шляхом проведення додаткового дослідження, що описано нижче.

Алгоритм

1. Задати x^0, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, M – граничне число ітерацій. Знайти градієнт функції в довільній точці $\nabla f(\mathrm{x})$ і матрицю Гессе $H(\mathrm{x})$.

2. Вважати $k = 0$.

3. Обчислити $\nabla f(\mathrm{x}^k)$.

4. Перевірити виконання критерію закінчення $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| \leq \varepsilon_1$:

а) якщо нерівність виконана, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;

б) у противному випадку перейти до кроку 5.

5. Перевірити виконання нерівності $k \geq M$:

а) якщо нерівність виконана, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;

б) якщо ні, то перейти до кроку 6.

6. Обчислити матрицю $H(\mathrm{x}^k)$.

7. Обчислити матрицю $H^{-1}(\mathrm{x}^k)$.

8. Перевірити виконання умови $H^{-1}(\mathrm{x}^k) > 0$:

а) якщо $H^{-1}(\mathrm{x}^k) > 0$, то перейти до кроку 9.

б) якщо ні, то перейти до кроку 10, вважаючи $\mathrm{p}^k = -\nabla f(\mathrm{x}^k)$.

9. Визначити $\mathrm{p}^k = -H^{-1}(\mathrm{x}^k) \cdot \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

10. Знайти точку $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \alpha_k \mathrm{p}^k$,

вважаючи $\alpha_k = 1$, якщо $\mathrm{p}^k = -H^{-1}(\mathrm{x}^k) \cdot \nabla f(\mathrm{x}^k)$, або

вибравши α_k з умови $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$, якщо $\mathrm{p}^k = -\nabla f(\mathrm{x}^k)$.

11. Перевірити виконання умов

$$\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k \| < \varepsilon_2, \quad | f(\mathrm{x}^{k+1}) - f(\mathrm{x}^k) | < \varepsilon_2 ;$$

а) якщо обидві умови виконані при поточному значенні k і $k = k - 1$, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;

б) в противному випадку вважати $k = k + 1$ і перейти до кроку 3.

Збіжність

Теорема 4.6. *Нехай функція* $f(\mathrm{x})$ *двічі неперервно диференційовна сильно опукла з константою* $l > 0$ *на* R^n *і задовольняє умові Ліпшица*

$$\| H(\mathrm{x}) - H(\mathrm{y}) \| \leq L \| \mathrm{x} - \mathrm{y} \| \ , \ \forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in R^n ,$$

де $L > 0$ *, а початкова точка така, що*

$$\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| = \frac{8 l^2 q}{L} \ \text{при} \ q \in (0, 1) . \tag{4.19}$$

Тоді послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$ *збігається до точки мінімуму із квадратичною швидкістю* $\| \mathrm{x}^k - \mathrm{x}^* \| \leq \frac{4 l q^{2^k}}{L}$ [29].

Зауваження 4.10

1. Збіжність методу Ньютона доведена лише для сильно опуклих функцій і для досить гарного початкового наближення, обумовленого умо-

вою (4.19), практичне використання якого важке, оскільки постійні l й L, як правило, невідомі або вимагають трудомісткого дослідження для їхнього визначення. Тому при практичному використанні методу Ньютона треба:

а) аналізувати матрицю $H(\mathrm{x}^k)$ на виконання умови $H(\mathrm{x}^k) > 0$, $k = 0, 1, ...$ і заміняти формулу $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - H^{-1}(\mathrm{x}^k) \cdot \nabla f(\mathrm{x}^k)$ на формулу $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}^k)$ у випадку його невиконання;

б) робити аналіз точки x^k з метою з'ясування, чи є вона знайденим наближенням шуканої точки x^*.

2. При розв'язанні задачі пошуку безумовного максимуму формула (4.18) не змінюється, оскільки в цьому випадку $H(\mathrm{x}^k) < 0$.

3. Для точки x^k, в якій виконується принаймні один з критеріїв закінчення розрахунку, необхідно здійснити перевірку виконання достатніх умов мінімуму $H(\mathrm{x}^k) > 0$. Якщо умова виконана, то точка x^k може розглядатися як знайдене наближення точки мінімуму x^*. Перевірку виконання достатніх умов мінімуму можна замінити перевіркою $f(\mathrm{x})$ функції на опуклість.

Приклад 4.8

Знайти локальний мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

методом Ньютона. Визначити точку x^k, в якій виконується хоча б один з критеріїв закінчення розрахунків.

Розв'язання

1. Задамо x^0, ε_1, ε_2, M: $\mathrm{x}^0 = (0.5; 1)^T$; $\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = 0.15$; $M = 10$. Знайдемо градієнт функції $\nabla f(\mathrm{x}) = (4x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2)^T$ і матрицю Гессе $H(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вважаємо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^0) = (3;\ 2.5)^T$.

4^0. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| \le \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| = 3.9 > 0.1$. Переходимо до кроку 5.

5^0. Перевіримо умову $k \geq M$: $k = 0 < 10 = M$. Переходимо до кроку 6.

6^0. Обчислимо $H(\mathrm{x}^0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7^0. Обчислимо $H^{-1}(\mathrm{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

8^0. Перевіримо виконання умови $H^{-1}(\mathrm{x}^0) > 0$. Оскільки $\Delta_1 = \frac{2}{7} > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{7} > 0$, то відповідно до критерію Сильвестра $H^{-1}(\mathrm{x}^0) > 0$.

9^0. Визначимо

$$\mathrm{p}^0 = -H^{-1}(\mathrm{x}^0) \cdot \nabla f(\mathrm{x}^0) = -\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

10^0. Обчислимо $\mathrm{x}^1 = (0.5; 1)^T + (-0.5; -1)^T = (0; 0)^T$.

11^0. Перевіримо виконання умов

$\| \mathrm{x}^1 - \mathrm{x}^0 \| = 1.12 > \varepsilon_2 = 0.15$, $| f(\mathrm{x}^1) - f(\mathrm{x}^0) | = 2 > \varepsilon_2 = 0.15$.

Вважаємо $k = 1$, переходимо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^1) = (0; 0)^T$.

4^0. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| \leq \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| = 0 < 0.1$. Розрахунок закінчено.

В точці x^1 виконується необхідна умова першого порядку, тому вона є стаціонарною точкою. Вихідна функція $f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ є строго опуклою, оскільки її матриця других похідних $H(\mathrm{x})$ додатно визначена. Тому знайдена точка $\mathrm{x}^1 = (0; 0)^T$ є точкою локального і одночасно глобального мінімуму функції $f(\mathrm{x})$: $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^1 = (0; 0)^T$ і $f_{\min} = f(\mathrm{x}^*) = 0$.

Зауваження 4.11. Однією з модифікацій методу Ньютона є метод Ньютона – Рафсона (Newton – Raphson), в якому точки послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$, $k=0,1,2,...$ такі, що $f(\mathrm{x}^{k+1})<f(\mathrm{x}^k)$, $k=0,1,2,...$, обчислюються за правилом $\mathrm{x}^{k+1}=\mathrm{x}^k-\alpha_k H^{-1}(\mathrm{x}^k)\nabla f(\mathrm{x}^k)$, $k=0,1,2,...$, де початкова точка x^0 задається, а величина кроку α_k визначається з умови $f(\mathrm{x}^{k+1})\to\min\limits_{\alpha_k}$.

4.4.2. Метод Макварда

Метод Макварда (Marquardt D.W.), а також методи Левенберга-Голдфілда (Levenberg K., Goldfeld S. M.) і Квондта-Тротера (Quandt R. E., Trotter H. F.), є модифікаціями методу Ньютона. Метод Марквардта представляє собою комбінацію методу найшвидшого спуску і методу Ньютона і є ефективнішим кожного з них окремо.

Постановка задачі

Нехай дано функцію $f(\mathrm{x})$, яка обмежена знизу на множині R^n і має неперервні частинні похідні у всіх її точках.

Потрібно знайти безумовний локальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині припустимих розв'язків $X=R^n$, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^*\in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*)=\min\limits_{\mathrm{x}\in R^n} f(\mathrm{x})$, $f(\mathrm{x})\in C^2$.

Стратегія методу Макварда заключається в побудові послідовності точок $\{\mathrm{x}^k\}$, $k=0,1,2,...$ таких, що $f(\mathrm{x}^{k+1})<f(\mathrm{x}^k)$, $k=0,1,2,...$ Точки послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ обчислюються за правилом

$$\mathrm{x}^{k+1}=\mathrm{x}^k-\left[H(\mathrm{x}^k)+\mu_k E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^k),\quad k=0,1,2,...$$

де точка x^0 задається користувачем, E – одинична матриця, μ_k – послідовність додатних чисел, таких, що матриця $\left[H(\mathrm{x}^k)+\mu_k E\right]^{-1}$ додатно визначена. Як правило, число μ_0 призначається, як мінімум, на порядок більшим, ніж найбільший елемент матриці $H(\mathrm{x}^0)$, а в ряді стандартних програм приймається $\mu_0=10^4$ [26].

Якщо $f\left(\mathrm{x}^k - \left[H(\mathrm{x}^k) + \mu_k E\right]^{-1} \nabla f(\mathrm{x}^k)\right) < f(\mathrm{x}^k)$, то $\mu_{k+1} = \dfrac{\mu_k}{2}$. У противному випадку $\mu_{k+1} = 2\mu_k$. Очевидно, що алгоритм Макварда залежно від величини μ_k на кожному кроці за своїми властивостями або наближається до алгоритму Ньютона, або – до алгоритму градієнтного спуску.

Побудова послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ закінчується, коли або $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| < \varepsilon_1$, або число ітерацій $k \geq M$, де ε_1 – мале додатне число, а M – граничне число ітерацій.

Питання про те, чи може точка x^k розглядатися як знайдене наближення шуканої точки мінімуму, вирішується шляхом проведення додаткового дослідження.

Алгоритм

1. Задати x^0, $\varepsilon_1 > 0$, $\mu_0 > 0$, M – граничне число ітерацій. Знайти градієнт функції $\nabla f(\mathrm{x})$ і матрицю Гессе $H(\mathrm{x})$.

2. Вважати $k = 0$, $\mu_k = \mu_0$.

3. Обчислити $\nabla f(\mathrm{x}^k)$.

4. Перевірити виконання критерію закінчення $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| \leq \varepsilon_1$:

а) якщо нерівність виконана, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;
б) якщо ні, перейти до кроку 5.

5. Перевірити виконання нерівності $k \geq M$:

а) якщо нерівність виконана, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;
б) якщо ні, то перейти до кроку 6.

6. Обчислити матрицю $H(\mathrm{x}^k)$.

7. Обчислити матрицю $H(\mathrm{x}^k) + \mu_k E$.

8. Обчислити матрицю $\left[H(\mathrm{x}^k) + \mu_k E\right]^{-1}$.

9. Обчислити $\mathrm{p}^k = -\left[H(\mathrm{x}^k) + \mu_k E\right]^{-1} \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

10. Обчислити $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - \left[H(\mathrm{x}^k) + \mu_k E\right]^{-1} \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

11. Перевірити виконання умови $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$:

а) якщо нерівність виконується, то перейти до кроку 12.
б) якщо ні, перейти до кроку 13.

12. Вважати $k = k + 1$, $\mu_{k+1} = \dfrac{\mu_k}{2}$ і перейти до кроку 3.

13. Вважати $\mu_{k+1} = 2\mu_k$ й перейти до кроку 7.

Зауваження 4.12

1. В околі точки мінімуму x^* метод Макварда має швидкість збіжності, близьку до квадратичної [20].

2. Якщо достатня умова мінімуму $H(\mathrm{x}^k) > 0$ виконана, то точка x^k може розглядатися як знайдене наближення точки мінімуму x^*. Перевірку виконання достатніх умов мінімуму можна замінити перевіркою функції $f(\mathrm{x})$ на опуклість.

Приклад 4.8

Знайти локальний мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

методом Макварда. Визначити точку x^k, в якій виконується хоча б один з критеріїв закінчення розрахунків.

Розв'язання

1. Задамо x^0, ε_1, M: $\mathrm{x}^0 = (0.5;1)^T$; $\varepsilon_1 = 0.1$; $M = 10$. Знайдемо градієнт функції $\nabla f(\mathrm{x}) = (4x_1 + x_2;\, x_1 + 2x_2)^T$ і матрицю Гессе $H(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вважаємо $k = 0$, $\mu_0 = 20$.

3^0. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^0) = (3;\, 2.5)^T$.

4^0. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| \le \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| = 3.9 > 0.1$. Переходимо до кроку 5.

5^0. Перевіримо умову $k \ge M$: $k = 0 < 10 = M$. Переходимо до кроку 6.

6^0. Обчислимо $H(\mathrm{x}^0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7^0. Обчислимо $H(\mathrm{x}^0) + \mu_0 E = \begin{pmatrix} 24 & 1 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}$.

8^0. Обчислимо $\left[H(\mathrm{x}^0)+\mu_0 E\right]^{-1}=\begin{bmatrix}0.0417 & -0.0019\\ -0.0019 & 0.0455\end{bmatrix}$.

9^0. Обчислимо $\mathrm{p}^0=-\left[H(\mathrm{x}^0)+\mu_0 E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^0)=$

$$=(-0.119;\,-0.108)^T.$$

10^0. Обчислимо $\mathrm{x}^1=\mathrm{x}^0-\left[H(\mathrm{x}^0)+\mu_0 E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^0)=$

$$=\left(0.381;\,0.892\right)^T.$$

11^0. Перевіримо умову $f(\mathrm{x}^1)<f(\mathrm{x}^0)$: $f(\mathrm{x}^1)=1.438<2=f(\mathrm{x}^0)$.

12^0. Вважаємо $k=1$, $\mu_1=\dfrac{\mu_0}{2}=10$ і переходимо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^1)=(2.41;\,2.16)^T$.

4^1. Перевіримо умову $\|\nabla f(\mathrm{x}^1)\|\le\varepsilon_1$: $\|\nabla f(\mathrm{x}^1)\|=3.18>0.1$. Переходимо до кроку 5.

5^1. Перевіримо умову $k\ge M$: $k=1<10=M$. Переходимо до кроку 6.

6^1. Обчислимо $H(\mathrm{x}^1)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

7^1. Обчислимо $H(\mathrm{x}^1)+\mu_1 E=\begin{pmatrix}14 & 1\\ 1 & 12\end{pmatrix}$.

8^1. Обчислимо $\left[H(\mathrm{x}^1)+\mu_1 E\right]^{-1}=\begin{bmatrix}0.072 & -0.0059\\ -0.0059 & 0.084\end{bmatrix}$.

9^1. Обчислимо $\mathrm{p}^1=-\left[H(\mathrm{x}^1)+\mu_1 E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^1)=$

$$=(-0.160;\,-0.168)^T.$$

10^1. Обчислимо $\mathrm{x}^2=\mathrm{x}^1-\left[H(\mathrm{x}^1)+\mu_1 E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^1)=$

$$=\left(0.381;\,0.892\right)^T-(0.160;\,0.168)^T=(0.221;\,0.724)^T.$$

11^1. Перевіримо умову $f(\mathrm{x}^2)<f(\mathrm{x}^1)$:

$$f(\mathrm{x}^2)=0.791<1.438=f(\mathrm{x}^1).$$

12[1]. Вважаємо $k = 2$, $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2} = 5$ і переходимо до кроку 3.

3[2]. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^2) = (1.60; 1.67)^T$.

4[2]. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^2) \| \le \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^2) \| = 2.31 > 0.1$. Переходимо до кроку 5.

5[2]. Перевіримо умову $k \ge M$: $k = 2 < 10 = M$. Переходимо до кроку 6.

6[2]. Обчислимо $H(\mathrm{x}^2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7[2]. Обчислимо $H(\mathrm{x}^2) + \mu_2 E = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

8[2]. Обчислимо $\left[H(\mathrm{x}^2) + \mu_2 E \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.113 & -0.016 \\ -0.016 & 0.145 \end{bmatrix}$.

9[2]. Обчислимо $\mathrm{p}^2 = -\left[H(\mathrm{x}^2) + \mu_2 E \right]^{-1} \nabla f(\mathrm{x}^2) =$

$$= (-0.155; -0.217)^T.$$

10[2]. Обчислимо $\mathrm{x}^3 = \mathrm{x}^2 - \left[H(\mathrm{x}^2) + \mu_2 E \right]^{-1} \nabla f(\mathrm{x}^2) =$

$$= \left(0.221; 0.724\right)^T - (0.155; 0.217)^T = (0.07; 0.51)^T.$$

11[2]. Перевіримо умову $f(\mathrm{x}^3) < f(\mathrm{x}^2)$:

$$f(\mathrm{x}^3) = 0.3 < 0.791 = f(\mathrm{x}^2).$$

12[2]. Вважаємо $k = 3$, $\mu_3 = \frac{\mu_2}{2} = 2.5$ і переходимо до кроку 3.

3[3]. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^3) = (0.79; 1.09)^T$.

4[3]. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^3) \| \le \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^3) \| = 1.34 > 0.1$. Переходимо до кроку 5.

5[3]. Перевіримо умову $k \ge M$: $k = 3 < 10 = M$. Переходимо до кроку 6.

6[3]. Обчислимо $H(\mathrm{x}^3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7^3. Обчислимо $H(\mathrm{x}^3)+\mu_3 E=\begin{pmatrix}6.5 & 1\\ 1 & 4.5\end{pmatrix}$.

8^3. Обчислимо $\left[H(\mathrm{x}^3)+\mu_3 E\right]^{-1}=\begin{bmatrix}0.159 & -0.035\\ -0.035 & 0.23\end{bmatrix}$

9^3. Обчислимо $\mathrm{p}^3=-\left[H(\mathrm{x}^3)+\mu_3 E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^3)=$

$$=(-0.078;\,-0.22)^T.$$

10^3. Обчислимо $\mathrm{x}^4=\mathrm{x}^3-\left[H(\mathrm{x}^3)+\mu_3 E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^3)=$

$$=\left(0.07;\,0.51\right)^T-(0.078;\,0.22)^T=(-0.008;\,0.29)^T.$$

11^3. Перевіримо умову $f(\mathrm{x}^4)<f(\mathrm{x}^3)$:

$$f(\mathrm{x}^4)=0.082<0.3=f(\mathrm{x}^3).$$

12^3. Вважаємо $k=4$, $\mu_4=\dfrac{\mu_3}{2}=1.25$ і переходимо до кроку 3.

3^4. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^4)=(0.26;\,0.57)^T$.

4^4. Перевіримо умову $\|\nabla f(\mathrm{x}^4)\|\le\varepsilon_1$: $\|\nabla f(\mathrm{x}^4)\|=0.62>0.1$. Переходимо до кроку 5.

5^4. Перевіримо умову $k\ge M$: $k=4<10=M$. Переходимо до кроку 6.

6^4. Обчислимо $H(\mathrm{x}^4)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

7^4. Обчислимо $H(\mathrm{x}^4)+\mu_4 E=\begin{pmatrix}5.25 & 1\\ 1 & 3.25\end{pmatrix}$.

8^4. Обчислимо $\left[H(\mathrm{x}^4)+\mu_4 E\right]^{-1}=\begin{bmatrix}0.2039 & -0.0623\\ -0.0623 & 0.327\end{bmatrix}$

9^4. Обчислимо $\mathrm{p}^4=-\left[H(\mathrm{x}^4)+\mu_4 E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^4)=$

$$=(-0.017;\,-0.17)^T.$$

10^4. Обчислимо $\mathrm{x}^5=\mathrm{x}^4-\left[H(\mathrm{x}^4)+\mu_4 E\right]^{-1}\nabla f(\mathrm{x}^4)=$

$$=\left(0.008;\,0.29\right)^T-(0.017;\,0.17)^T=(-0.025;\,0.12)^T.$$

11^4. Перевіримо умову $f(\mathrm{x}^5) < f(\mathrm{x}^4)$:

$$f(\mathrm{x}^5) = 0.012 < 0.082 = f(\mathrm{x}^4).$$

12^4. Вважаємо $k = 5$, $\mu_5 = \dfrac{\mu_4}{2} = 0.625$ і переходимо до кроку 3.

3^5. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^5) = (0.02;\ 0.22)^T$.

4^5. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^5) \| \le \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^5) \| = 0.22 > 0.1$. Переходимо до кроку 5.

5^5. Перевіримо умову $k \ge M$: $k = 5 < 10 = M$. Переходимо до кроку 6.

6^5. Обчислимо $H(\mathrm{x}^5) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7^5. Обчислимо $H(\mathrm{x}^5) + \mu_5 E = \begin{pmatrix} 4.622 & 1 \\ 1 & 2.622 \end{pmatrix}$.

8^5. Обчислимо $\left[H(\mathrm{x}^5) + \mu_5 E \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.236 & -0.09 \\ -0.09 & 0.416 \end{bmatrix}$

9^5. Обчислимо $\mathrm{p}^5 = -\left[H(\mathrm{x}^5) + \mu_5 E \right]^{-1} \nabla f(\mathrm{x}^5) =$

$$= (0.015;\ -0.090)^T.$$

10^5. Обчислимо $\mathrm{x}^6 = \mathrm{x}^5 - \left[H(\mathrm{x}^5) + \mu_5 E \right]^{-1} \nabla f(\mathrm{x}^5) =$

$$= \left(-0.025;\ 0.12\right)^T + (0.015;\ -0.09)^T = (-0.01;\ 0.03)^T.$$

11^5. Перевіримо умову $f(\mathrm{x}^6) < f(\mathrm{x}^5)$:

$$f(\mathrm{x}^6) = 0.0006 < 0.012 = f(\mathrm{x}^5).$$

12^5. Вважаємо $k = 6$, $\mu_6 = \dfrac{\mu_5}{2} = 0.312$ і переходимо до кроку 3.

3^6. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^6) = (-0.01;\ 0.05)^T$.

4^6. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^6) \| \le \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^6) \| = 0.051 < 0.1$. Розрахунок закінчено.

Точка $\mathrm{x}^6 = (-0.01;\ 0.03)^T$ є знайденим наближенням точки мінімуму x^*, так як функція $f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ – строго опукла.

4.4.3. Квазіньютонівський метод

Квазіньютонівський метод або метод Девидона - Флетчера - Пауелла (Davidon W. C., Fletcher R., Powell M. J. D.), який часто називають ДФП-метод, не використовує другі похідні, але в міру збільшення числа ітерацій збігається до методу Ньютона.

Постановка задачі

Нехай дано функцію $f(\mathrm{x})$, яка обмежена знизу на множині R^n і має неперервні частинні похідні у всіх її точках.

Потрібно знайти безумовний локальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині припустимих розв'язків $X = R^n$, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in R^n$, що $f(\mathrm{x}^*) = \min\limits_{\mathrm{x} \in R^n} f(\mathrm{x})$, $f(\mathrm{x}) \in C^2$.

Стратегія розв'язання задачі

Стратегія ДФП-методу сзаключається в побудові послідовності точок $\{\mathrm{x}^k\}$, $k = 0,1,2,...$ таких, що $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$, $k = 0,1,2,...$ Точки послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ обчислюються за правилом

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - \alpha_k A^k \nabla f(\mathrm{x}^k), \quad k = 0,1,2,..., \tag{4.20}$$

де A^k – матриця розміру $(n \times n)$, що обчислюється за правилом

$$A^{k+1} = A^k + B^k, \quad A^0 = E, \tag{4.21}$$

$$B^k = \frac{\Delta \mathrm{x}^k \cdot (\Delta \mathrm{x}^k)^T}{\langle \Delta \mathrm{x}^k, \Delta \mathrm{g}^k \rangle} - \frac{A^k (\Delta \mathrm{g}^k)^T \Delta \mathrm{g}^k A^k}{\langle A^k \Delta \mathrm{g}^k, \Delta \mathrm{g}^k \rangle}, \tag{4.22}$$

де $\Delta \mathrm{x}^k = \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k$, $\Delta \mathrm{g}^k = \nabla f(\mathrm{x}^{k+1}) - \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

Точка x^0 задається користувачем, величина кроку α_k визначається з умови

$$\varphi(\alpha_k) = f(\mathrm{x}^k - \alpha_k A^k \nabla f(\mathrm{x}^k)) \to \min_{\alpha_k}. \tag{4.23}$$

Розв'язання задачі (4.23) може здійснюватися як з умов $\frac{d\varphi}{d\alpha_k} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{d\alpha_k^2} > 0$ або $\frac{dP}{d\alpha_k} = 0$, $\frac{d^2P}{d\alpha_k^2} > 0$, де $P(\alpha_k)$ – поліном, що апроксимує

функцію $\varphi(\alpha_k)$, так і чисельно, тобто шляхом пошуку розв'язання задачі $\varphi(\alpha_k) \to \min\limits_{\alpha_k}$ методами одновимірної мінімізації.

Формули (4.21), (4.22) при аналітичному розв'язанні задачі (4.23) забезпечують побудову послідовності $\{A^k\}$ додатно визначених матриць, таких, що $A^k \to H^{-1}(\mathrm{x}^*)$ при $k \to \infty$. Наслідком цього для квадратичної функції $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\langle H\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \langle \mathrm{b}, \mathrm{x}\rangle$, $H > 0$, є той факт, що напрямки p^k, $k = 0,1,2,...$ будуть H - спряженими і, отже, алгоритм ДФП-методу збігається не більш ніж за n кроків.

Для неквадратичних функцій $f(\mathrm{x})$ алгоритм перестає бути скінченним і його збіжність залежить від точності розв'язання задачі (4.23). Глобальну збіжність алгоритму можна гарантувати лише при його відновленні через кожні n кроків, тобто коли у формулі (4.20)

$$A^k = \begin{cases} E, & k \in J;\ J = \{0, n, 2n, ...\}, \\ A^{k-1} + B^{k-1}, & k \notin J. \end{cases}$$

Побудова послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ закінчується в точці x^k, для якої $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| \le \varepsilon_1$, де ε_1 – задане число, або при $k \ge M$ (M – граничне число ітерацій), або при дворазовому одночасному виконанні двох нерівностей $\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{k+1}) - f(\mathrm{x}^k) | < \varepsilon_2$, де ε_2 – мале додатне число. Питання про те, чи може точка x^k розглядатися як знайдене наближення шуканої точки мінімуму, вирішується шляхом проведення додаткового дослідження.

Алгоритм

1. Задати x^0, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, M – граничне число ітерацій. Знайти градієнт функції в довільній точці $\nabla f(\mathrm{x})$.

2. Вважати $k = 0$, $A^0 = E$.

3. Обчислити $\nabla f(\mathrm{x}^k)$.

4. Перевірити критерій закінчення $\| \nabla f(\mathrm{x}^k) \| < \varepsilon_1$:

а) якщо критерій виконано, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;
б) якщо критерій не виконано, то перейти до кроку 5.

5. Перевірити умову $k \ge M$:

а) якщо нерівність виконана, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^k$;

б) якщо ні, то перейти при $k=0$ до кроку 10, а при $k\geq 1$ до кроку 6.

6. Обчислити $\Delta g^k = \nabla f(\mathrm{x}^{k+1}) - \nabla f(\mathrm{x}^k)$

7. Обчислити $\Delta \mathrm{x}^k = \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k$.

8. Обчислити

$$B^k = \frac{\Delta \mathrm{x}^k \cdot (\Delta \mathrm{x}^k)^T}{\langle \Delta \mathrm{x}^k, \Delta \mathrm{g}^k \rangle} - \frac{A^k (\Delta \mathrm{g}^k)^T \Delta \mathrm{g}^k A^k}{\langle A^k \Delta \mathrm{g}^k, \Delta \mathrm{g}^k \rangle}.$$

9. Обчислити $A^{k+1} = A^k + B^k$.

10. Визначити $\mathrm{p}^k = -A^k \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

11. Обчислити α_k^* з умови $\varphi(\alpha_k) = f\left(\mathrm{x}^k - \alpha_k A^k \nabla f(\mathrm{x}^k)\right) \to \min\limits_{\alpha_k}$.

12. Обчислити $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - \alpha_k^* A^k \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

13. Перевірити умови $\| \mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^k \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^{k+1}) - f(\mathrm{x}^k) | < \varepsilon_2$:

а) якщо обидві нерівності виконуються в двох послідовних ітераціях з номерами k і $k-1$, то розрахунок закінчено і $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^{k+1}$;

б) в противному випадку вважати $k = k+1$ і перейти до кроку 3.

Збіжність

Теорема 4.7. *Алгоритм ДФП-методу в застосуванні до квадратичної функції* $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\langle H\mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle + \langle \mathrm{b}, \mathrm{x} \rangle$ *з додатно визначеною матрицею Гессе* H *забезпечує відшукання мінімуму* $\mathrm{x}^* = H^{-1}\mathrm{b}$ *не більш ніж за* n *кроків* [29].

Зауваження 4.13

1. Якщо $f(\mathrm{x})$ двічі неперервно диференційовна і $H(\mathrm{x}^*) > 0$, то ДФП-метод з відновленням збігається до точки локального мінімуму x^* із надлінійною швидкістю [29].

2. Якщо на додаток до умов п.1 має місце $\| H(\mathrm{x})\mathrm{y} \| \leq k \| \mathrm{y} \|$ $\forall \mathrm{y} \in R^n$ в околі точки x^*, то послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$ збігається до точки x^* із квадратичною швидкістю [29].

Приклад 4.9

Знайти локальний мінімум функції

$$f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

методом ДФП. Визначити точку x^k, в якій виконується принаймні один із критеріїв закінчення розрахунків.

Розв'язання

1. Задамо x^0, ε_1, ε_2, M: $\mathrm{x}^0 = (0.5;1)^T$; $\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = 0.15$; $M = 10$. Знайдемо градієнт функції в довільній точці:

$$\nabla f(\mathrm{x}) = (4x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2)^T .$$

2. Вважаємо $k = 0$, $A^0 = E$.

3^0. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^0)$: $\nabla f(\mathrm{x}^0) = (3;2.5)^T$.

4^0. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| < \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| = 3.9 > 0.1$. Переходимо до кроку 5.

5^0. Перевіримо умову $k \ge M$: $k = 0 < 10 = M$, переходимо до кроку 10.

10^0. Визначимо

$$p^0 = -A^0 \nabla f(\mathrm{x}^0) = -E\nabla f(\mathrm{x}^0) = -\nabla f(\mathrm{x}^0) = -(3;2.5)^T .$$

11^0. Обчислимо α_0^* з умови $f\left(\mathrm{x}^0 - \alpha_0 \nabla f(\mathrm{x}^0)\right) \to \min\limits_{\alpha_0}$:

$$f\left(\mathrm{x}^0 - \alpha_0 \nabla f(\mathrm{x}^0)\right) = 2(0.5 - 3\alpha_0)^2 + (0.5 - 3\alpha_0)(1 - 2.5\alpha_0) +$$
$$+(1 - 2.5\alpha_0)^2 = \varphi(\alpha_0) .$$

З умови $\dfrac{d\varphi}{d\alpha_0} = 0$ знаходимо $\alpha_0^* = 0.24$ (див. приклад 4.5), оскільки перша ітерація виконується методом найшвидшого спуску).

12^0. Обчислимо $\mathrm{x}^1 = \mathrm{x}^0 - \alpha_0^* \nabla f(\mathrm{x}^0) = (-0.22;\ 0.4)^T$.

13^0. Перевіримо умови $\| \mathrm{x}^1 - \mathrm{x}^0 \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^1) - f(\mathrm{x}^0) | < \varepsilon_2$:

$\| \mathrm{x}^1 - \mathrm{x}^0 \| = 0.94 > 0.15$, $\quad | f(\mathrm{x}^1) - f(\mathrm{x}^0) | = | 0.17 - 2 | = 1.83 > 0.15$.

Вважаємо $k = 1$, переходимо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^1) = (-0.48;\ 0.58)^T$.

4^1. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| < \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| = 0.75 > 0.1$. Переходимо до кроку 5.

5^1. Перевіримо умову $k \geq M$: $k = 1 < 10 = M$, переходимо до кроку 6.

6^0. Обчислимо $\Delta g^0 = \nabla f(\mathrm{x}^1) - \nabla f(\mathrm{x}^0) = (-3.48; -1.92)^T$.

7^0. Обчислимо $\Delta \mathrm{x}^0 = \mathrm{x}^1 - \mathrm{x}^0 = (-0.72; -0.6)^T$.

8^0. Обчислимо $B^0 = \dfrac{\Delta \mathrm{x}^0 \cdot (\Delta \mathrm{x}^0)^T}{\langle \Delta \mathrm{x}^0, \Delta \mathrm{g}^0 \rangle} - \dfrac{A^0 (\Delta \mathrm{g}^0)^T \Delta \mathrm{g}^0 A^0}{\langle A^0 \Delta \mathrm{g}^0, \Delta \mathrm{g}^0 \rangle} =$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -0.72 \\ -0.6 \end{pmatrix}(-0.72; -0.6)}{(-0.72; -0.6)\begin{pmatrix} -3.48 \\ -1.92 \end{pmatrix}} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3.48 \\ -1.92 \end{pmatrix}(-3.48; -1.92)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(-3.48; -1.92)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3.48 \\ -1.92 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.625 & -0.305 \\ -0.305 & -0.134 \end{pmatrix}.$$

9^0. Обчислимо $A^1 = A^0 + B^0 = \begin{pmatrix} 0.375 & -0.305 \\ -0.305 & 0.866 \end{pmatrix}$.

10^1. Визначимо $\mathrm{p}^1 = -A^1 \nabla f(\mathrm{x}^1) = (0.356; -0.648)^T$.

11^1. Обчислимо α_0^* з умови $f\left(\mathrm{x}^1 - \alpha_1 \nabla f(\mathrm{x}^1)\right) \to \min\limits_{\alpha_1}$. Визначаємо $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^1 - \alpha_1 A^1 \nabla f(\mathrm{x}^1) = \mathrm{x}^1 + \alpha_1 \mathrm{p}^1 = (-0.22 + 0.356\alpha_1; 0.4 - 0.648\alpha_1)$. Підставляючи отримані вирази $x_1^2 = -0.22 + 0.356\alpha_1$, $x_2^2 = 0.4 - 0.648\alpha_1$ в функцію $f(\mathrm{x})$, одержимо

$$\varphi(\alpha_1) = 2(-0.22 + 0.356\alpha_1)^2 + (-0.22 + 0.356\alpha_1)(0.4 - 0.648\alpha_1) + (0.4 - 0.648\alpha_1)^2.$$

Застосовуючи необхідну умову безумовного екстремуму

$$\frac{d\varphi(\alpha_1)}{d\alpha_1} = 4(-0.22 + 0.356\alpha_1)0.356 + 0.356(0.4 - 0.648\alpha_1) +$$

$$+(-0.22 + 0.356\alpha_1)(-0.648) - 2 \cdot 0.648(0.4 - 0.648\alpha_1) = 0$$

або $0.8854\alpha_1 - 0.5467 = 0$, знаходимо $\alpha_1^* \cong 0.6175$. Оскільки $\dfrac{d^2\varphi(\alpha_1)}{d\alpha_k^2} = 0.8854 > 0$, знайдене значення кроку забезпечує мінімум функції $\varphi(\alpha_1)$ по α_1.

12^1. Обчислимо $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^1 - \alpha_1^* \nabla f(\mathrm{x}^1) = (0.000; 0.000)^T$.

13[1]. Перевіримо умови $\| \mathrm{x}^1 - \mathrm{x}^0 \| < \varepsilon_2$, $| f(\mathrm{x}^1) - f(\mathrm{x}^0) | < \varepsilon_2$:

$$\| \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^1 \| = 0.45 > 0.15, \quad | f(\mathrm{x}^2) - f(\mathrm{x}^1) | = 0.17 > 0.15.$$

Вважаємо $k = 2$, переходимо до кроку 3.

3[2]. Обчислимо $\nabla f(\mathrm{x}^2) : \nabla f(\mathrm{x}^2) = (0.000; 0.000)^T$.

4[2]. Перевіримо умову $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| < \varepsilon_1$: $\| \nabla f(\mathrm{x}^0) \| = 0 < 0.1$. Розрахунок закінчено в точці $\mathrm{x}^2 = (0; 0)^T$.

Функція $f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ є квадратичною формою з додатно визначеною матрицею Гессе. Отже точка x^2 є знайденим наближенням точки мінімуму $\mathrm{x}^* = (0; 0)^T$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Виконати 3 ітерації методом конфігурацій в задачі

$$f(\mathrm{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$

при $\mathrm{x}^0 = (1, 2)^T$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $\lambda = 1$.

Відповідь: отримані точки $(1.5; 2)^T$, $(1.5; 2.5)^T$, $\mathrm{x}^1 = (2; 3)^T$; $(2.5; 3)^T$; $(2.5; 3.5)^T$, $\mathrm{x}^2 = (3.5; 4.5)^T$; $(4; 4.5)^T$, $(4; 5)^T$, $\mathrm{x}^3 = (5.5; 6.5)^T$. Точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (5; 6)^T$, $f_{\min} = 0$.

2. Виконати 4 ітерації методом деформуючого многогранника в задачі $f(\mathrm{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$ при $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 2$ і наступних вершинах початкового многогранника: $(4; 7)^T$, $(3; 2)^T$, $(6; 7)^T$.

Відповідь: в результаті трьох послідовних редукцій отримані трикутники, задані своїми вершинами. Перший трикутник: $(4; 7)^T$, $(5; 7)^T$, $(3.5; 4.5)^T$; другий трикутник: $(4.5; 7)^T$, $(5; 7)^T$, $(4.25; 5.75)^T$; третій трикутник: $(4.75; 7)^T$, $(5; 7)^T$, $(4.625; 6.375)^T$. В результаті четвертої ітерації (розтягання) отримано трикутник: $(4.938; 6.063)^T$, $(5; 7)^T$, $(4.625; 6.375)^T$.

3. Розв'язати задачу методом спряжених напрямків

$$f(\mathrm{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$$

при $\mathrm{x}^0 = (1; 2)^T$, $\varepsilon = 0.1$.

Відповідь: розв'язання отримано за дві ітерації: $\alpha_0^* = 4.001$, $\mathrm{x}^1 = (1.000;\ 6.001)^T$; $\alpha_1^* = 4.000$, $\mathrm{x}^2 = (5.000;\ 6.001)^T$. Точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (5;\ 6)^T$, $f_{\min} = 0$.

4. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2 \to \min$$

методами деформуючого многогранника, конфігурацій, спряжених напрямків, адаптивного випадкового пошуку. Отримані розв'язки порівняти з точними.

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (1;1)^T$, $f_{\min} = -1$.

5. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \to \min$$

методами деформуючого многогранника, конфігурацій, спряжених напрямків, адаптивного випадкового пошуку. Отримані розв'язки порівняти з точними.

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (3;\ 2)^T$, $f_{\min} = 0$.

6. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 4x_1 + 3 \to \min$$

методами деформуючого многогранника, конфігурацій, спряжених напрямків, адаптивного випадкового пошуку. Отримані розв'язки порівняти з точними.

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (1;0)^T$, $f_{\min} = 0$.

7. Розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2)^2 \to \min$$

методами деформуючого многогранника, конфігурацій, спряжених напрямків, адаптивного випадкового пошуку. Отримані розв'язки порівняти з точними.

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (2;\ 5;\ -2)^T$, $f_{\min} = 0$.

8. Методами найшвидшого градієнтного спуску, Гауса-Зейделя і спряжених градієнтів з початкових точок $\mathrm{x}^0 = (0.5;\ 0)^T$ і $\mathrm{x}^0 = (-0.1;\ -0.5)^T$ розв'язати задачу:

$$f(\mathrm{x}) = \left[(x_2 + 1)^2 + x_1^2\right] \cdot \left[x_1^2 + (x_2 - 1)^2\right] \to \min.$$

Відповідь: точні розв'язки: $\mathrm{x}^{(1)*} = (0;\ 1)^T$ із точки $\mathrm{x}^0 = (0.5;0)^T$;

$\mathrm{x}^{(2)*} = (0;-1)^T$ із точки $\mathrm{x}^0 = (-0.1;\ -0.5)^T$.

9. Методами найшвидшого градієнтного спуску, Гауса-Зейделя і спряжених градієнтів з початкових точок $\mathrm{x}^0 = (0;3)^T$ і $\mathrm{x}^0 = (3;\,0)^T$ розв'язати задачу: $f(\mathrm{x}) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2 \to \min$.

Відповідь: точні розв'язки: $\mathrm{x}^{(1)*} = (0;1)^T$ із точки $\mathrm{x}^0 = (0;3)^T$;

$\mathrm{x}^{(2)*} = (1;0)^T$ із точки $\mathrm{x}^0 = (3;\,0)^T$.

10. Методами найшвидшого градієнтного спуску, Гауса-Зейделя і спряжених градієнтів розв'язати задачу:

$$f(\mathrm{x}) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4 \to \min,\ \mathrm{x}^0 = (0;0)^T.$$

Отримані розв'язки порівняти з точними.

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (0.5;\,-1.25)^T$ і $f_{\min} = -6.4375$.

11. Методами найшвидшого градієнтного спуску, Гауса-Зейделя і спряжених градієнтів розв'язати задачу:

$$f(\mathrm{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to \min,\ \mathrm{x}^0 = (0;0)^T.$$

Отримані розв'язки порівняти з точними.

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (1;1)^T$ й $f_{\min} = 0$.

12. Методами найшвидшого градієнтного спуску, Гауса-Зейделя і спряжених градієнтів з початкової точки $\mathrm{x}^0 = (0;1)^T$ розв'язати задачу:

$$f(\mathrm{x}) = -x_1x_2 \cdot \exp\left[-(x_1 + x_2)\right] \to \min.$$

Отримані розв'язки порівняти з точними.

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (1;1)^T$ і $f_{\min} = -0.1353$.

13. Апроксимувати функцію

$$f(\mathrm{x}) = x_1^3 + x_1x_2 - x_2^2x_1^2$$

в точці $\mathrm{x}^0 = (1;1)^T$ квадратичною функцією $F(\mathrm{x})$.

Відповідь: $F(\mathrm{x}) = 1 + 2x_1 - x_2 + 2x_1^2 - x_2^2 - 3x_1x_2$.

14. Чи є вдалою початкова точка $\mathrm{x}^0 = (1;\,2;\,1;\,1)^T$ для розв'язання задачі $f(\mathrm{x}) = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 \to \min$ методом Ньютона?

Відповідь: ні, оскільки матриця $H(\mathrm{x}^0)$ не є додатно визначеною.

15. В задачі $f(\mathrm{x}) = 100x_1^2 + x_2^2 \to \min$, $\mathrm{x}^0 = (0;\,10)^T$ визначити координати точки x^1 за допомогою методу Ньютона.

Відповідь: $\mathrm{x}^1 = (0;\,0)^T$.

16. В задачі $f(\mathrm{x}) = 100(x_2 - x_1^2) + (1 - x_1)^2 \to \min$ виконати 9 ітерацій із точки $\mathrm{x}^0 = (2;\ 3)^T$ методом Ньютона.

Відповідь: отримані точки:

$\mathrm{x}^1 = (1.996;\ 3.982)^T$, $\mathrm{x}^2 = (-2.752;\ -14.969)^T$, $\mathrm{x}^3 = (-2.751;\ 7.565)^T$, $\mathrm{x}^4 = (-0.941;\ -2.385)^T$, $\mathrm{x}^5 = (-0.938;\ 0.880)^T$, $\mathrm{x}^6 = (0.472;\ -1.763)^T$, $\mathrm{x}^7 = (0.473;\ 0.224)^T$, $\mathrm{x}^8 = (1.123;\ 0.84)^T$, $\mathrm{x}^9 = (1.122;\ 1.259)^T$. Точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (1;\ 1)^T$.

17. Розв'язується задача

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} \to \max.$$

Вказати, з якої точки розв'язання задачі методом Ньютона потребує не більше однієї ітерації.

Відповідь: з будь-якої початкової точки, якщо розв'язувати цю задачу як задачу пошуку мінімуму функції $\dfrac{1}{f(\mathrm{x})} = (x_1 + 1)^2 + x_2^2$.

18. Після десяти ітерацій методом Макварда при розв'язанні задачі $f(\mathrm{x}) = (x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to \min$ програма зупинилася в точці $\mathrm{x} = (1;\ 1)^T$. Пояснити причину зупинки.

Відповідь: $\mathrm{x} = (1;1)^T$ – точка мінімуму.

19. Розв'язати задачу $f(\mathrm{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$ методом Макварда із точки $\mathrm{x}^0 = (8;9)^T$; $\mu_0 = 20$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.1$.

Відповідь: отримані точки:

$\mathrm{x}^1 = (7.143;\ 8.727)^T$, $\mathrm{x}^2 = (6.190;\ 8.273)^T$, $\mathrm{x}^3 = (5.458;\ 7.623)^T$, $\mathrm{x}^4 = (5.109;\ 6.902)^T$, $\mathrm{x}^5 = (5.015;\ 6.347)^T$, $\mathrm{x}^6 = (5.001;\ 6.083)^T$, $\mathrm{x}^7 = (5.000;\ 6.011)^T$.

Розрахунок закінчено по градієнту, оскільки $\|\nabla f(\mathrm{x}^7)\| = 0.0223 < 0.1$.

20. Розв'язати задачу $f(\mathrm{x}) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$ методом ДФП (квазіньютонівським методом) із точки $\mathrm{x}^0 = (8;9)^T$; $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.1$. На кожній ітерації величину кроку визначати методом рівномір-

ного пошуку (методом перебору) на інтервалі $[0; 1]$ з параметром $N = 999$. Повторити завдання з $N = 99$ і порівняти результати.

Відповідь: при $N = 999$ отримані значення кроку і точки: $\alpha_0^* = 0.131$, $\mathrm{x}^1 = (4.856; 8.214)^T$; $\alpha_1^* = 0.494$, $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^2 = (4.997; 6.000)^T$. Розрахунок закінчено по градієнту, оскільки $\|\nabla f(\mathrm{x}^2)\| = 0.0229 < 0.1$.

21. Методом ДФП (квазіньютонівським методом) з початкових точок $\mathrm{x}^0 = (0;3)^T$ і $\mathrm{x}^0 = (3; 0)^T$ розв'язати задачу:

$$f(\mathrm{x}) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2 \to \min .$$

Відповідь: точні розв'язки: $\mathrm{x}^{(1)*} = (0;1)^T$ із точки $\mathrm{x}^0 = (0;3)^T$;

$\mathrm{x}^{(2)*} = (1;0)^T$ із точки $\mathrm{x}^0 = (3; 0)^T$.

Розділ 5

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ УМОВНОЇ БАГАТОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

5.1. Принципи побудови чисельних методів пошуку умовного екстремуму

Розглянемо загальну постановку задачі пошуку умовного екстремуму зі змішаними обмеженнями.

Дані двічі неперервно диференційовні цільова функція $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і функції обмежень $g_i(\mathrm{x}) = 0$, $i = 1,.., p$; $g_i(\mathrm{x}) \le 0$, $i = p+1,.., m$, що визначають множину припустимих розв'язків $X \in R^n$.

Потрібно знайти локальний мінімум цільової функції на множині X, тобто таку точку $\mathrm{x}^* \in X$ що

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}), \tag{5.1}$$

$$X = \left\{ \mathrm{x} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i(\mathrm{x}) = 0,\ i = 1,.., p;\ p < n \\ g_i(\mathrm{x}) \le 0,\ i = p+1,.., m \end{array} \right\}.$$

Застосування необхідних і достатніх умов умовного екстремуму, викладених в розділі 1, ефективне для розв'язання обмеженого числа прикладів, в яких, співвідношення, що випливають з цих умов, мають аналітичний розв'язок. Для розв'язання більшості практичних задач використовуються чисельні методи, які діляться на дві групи:

1. Методи, що використовують перетворення задачі умовної оптимізації в послідовність задач безумовної оптимізації шляхом введення в розгляд допоміжних функцій: *методи послідовної безумовної мінімізації.*

2. Методи безпосереднього розв'язання задачі умовної оптимізації, засновані на русі з однієї припустимої точки, де виконані всі обмеження,

до іншої припустимої точки із кращим значенням цільової функції. Ці методи часто називаються *методами можливих напрямків.*

Основна ідея методів першої групи полягає в тому, щоб апроксимувати вихідну задачу умовної оптимізації деякою допоміжною задачею, розв'язання якої менш складне, ніж розв'язання вихідної. Природно, що обмежившись однією допоміжною задачею, можна отримати, загалом кажучи, лише наближений розв'язок. Якщо ж використовувати послідовність задач, в певному змісті "збіжних" до вихідної, то шуканий точний розв'язок в більшості випадків виявиться границею відповідної послідовності наближених розв'язків. Ідея перетворення задачі з обмеженнями в належним чином побудовану послідовність задач без обмежень є привабливою головним чином в зв'язку з наявністю ефективних і надійних методів безумовної мінімізації, розглянутих в розділах 3 і 4.

На перший погляд здається дивним, що пропонується розв'язувати нескінчену послідовність задач оптимізації, а не одну задачу. Справа в тому, що на практиці для одержання розв'язку вихідної задачі з необхідною точністю досить буває розв'язати скінчене (відносно невелике) число допоміжних задач. При цьому немає необхідності розв'язувати їх точно, а інформацію, отриману в результаті розв'язання чергової допоміжної задачі, зазвичай вдається ефективно використовувати для розв'язування наступної.

В рамках єдиної методології можна виділити кілька підходів до розв'язання задачі.

Перший – називається *методом штрафів (зовнішніх штрафів).* В цьому методі до цільової функції додається функція, яка інтегровна як штраф за порушення кожного з обмежень. Метод генерує послідовність точок, що збігається до розв'язку вихідної задачі.

Другий підхід називається *методом бар'єрів (внутрішніх штрафів).* Тут до цільової функції вихідної задачі додається доданок, який не дозволяє точкам, що генеруються виходити за межі припустимої області.

Третій підхід пов'язаний з додаванням штрафної функції не до цільової функції, а до її функції Лагранжа. В результаті виникає *модифікована функція Лагранжа,* а методи, що використовують цю функцію, називаються *методами множників.*

Четвертий підхід базується на застосуванні так званих *точних штрафних функцій,* що дозволяють обмежитися розв'язанням лише однієї задачі безумовної мінімізації. Систематизований опис модифікацій методу точних штрафних функцій є в монографії [8].

Методи безпосереднього розв'язання задачі умовної оптимізації, що утворюють другу групу, пов'язані із знаходженням границі x^* послідов-

ності $\{\mathrm{x}^k\}$ припустимих точок при $k \to \infty$, таких, що $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$, $k = 0,1,\ldots$.

Послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$ будується за правилом

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \delta \mathrm{x}^k, \quad k = 0,1,\ldots,$$

де вектор $\delta \mathrm{x}^k$ визначається залежно від застосовуваного методу.

До описаної групи методів відносять *метод проекції градієнта* і *метод можливих напрямків Зойтендейка*.

В методі Зойтендейка на кожній ітерації будується можливий напрямок спуску і потім проводиться оптимізація вздовж цього напрямку.

Означення 5.1. Ненульовий вектор d називається *можливим напрямком* в точці $\mathrm{x} \in X$, якщо існує таке $\delta > 0$, що $\mathrm{x} + td \in X$ для всіх $t \in (0;\delta)$.

Означення 5.2. Вектор d називається *можливим напрямком спуску* в точці $\mathrm{x} \in X$, якщо існує таке $\delta > 0$, що $f(\mathrm{x} + td) < f(\mathrm{x})$ і $\mathrm{x} + t\,d \in X$ для всіх $t \in (0;\delta)$.

Розглянемо окремий випадок задачі пошуку умовного мінімуму:

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}),$$

$$X = \left\{ \mathrm{x} \;\middle|\; A\mathrm{x} \le b,\ C\mathrm{x} = e \right\}, \tag{5.2}$$

де A – матриця розміру $(m \times n)$, C – матриця розміру $(l \times n)$, b – вектор розміру $(m \times 1)$, e – вектор розміру $(l \times 1)$.

Теорема 5.1 (про можливий напрямок спуску у випадку лінійних обмежень). *Нехай* x *– припустима точка в задачі* (5.2) *і припустимо, що* $A_1\mathrm{x} = b_1$, $A_2\mathrm{x} < b_2$, *де* $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = A$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b$. *Тоді ненульовий вектор* d *є можливим напрямком в точці* x *тоді і тільки тоді, якщо* $A_1 d \le 0$, $Cd = 0$. *Якщо, крім того,* $\nabla f(\mathrm{x})^T d < 0$, *то* d *є можливим напрямком спуску* [5].

Приклад 5.1

В наступній задачі

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min;$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 4,$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 12,$$

$$-x_1 \le 0\,, \quad -x_2 \le 0$$

вказати множину можливих напрямків спуску в точці $B = (2;3)^T$.

Розв'язання

Перші два обмеження є активними в точці $B = (2;3)^T$. Тому матриця $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Отже, вектор d є можливим напрямком тоді і тільки тоді, коли $A_1 d \le 0$ тобто якщо

$$-d_1 + 2d_2 \le 0\,,$$
$$3d_1 + 2d_2 \le 0\,.$$

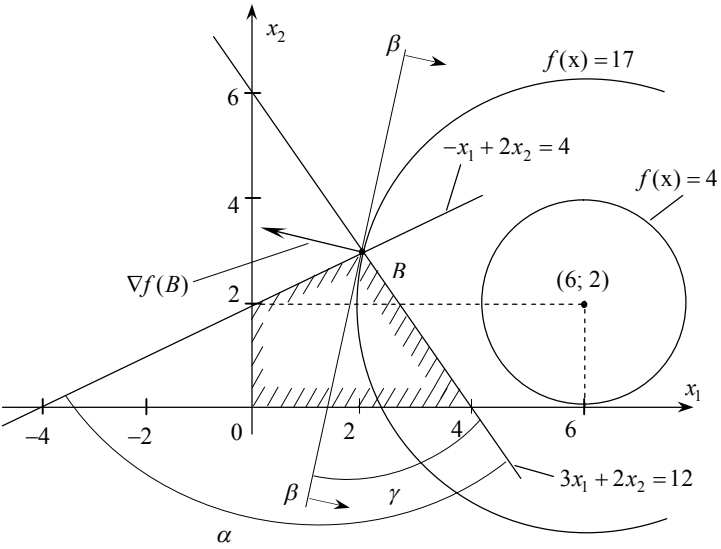


Рис. 5.1

На рис. 5.1 зображені сукупності можливих напрямків: α – конус можливих напрямків; β – напівпростір напрямків спуску; γ – конус можливих напрямків спуску. Зазначимо, що якщо зрушитися на невелику відстань від точки x вздовж будь-якого вектора d, що задовольняє двом наведеним вище нерівностям, то точка залишається в припустимій області. Якщо вектор d задовольняє в точці B нерівності $\nabla f(\mathrm{x})^T d = -8d_1 + 2d_2 < 0$, то він є напрямком спуску. Таким чином, сукупність напрямків спуску визначається відкритим напівпростором

$\{(d_1;d_2)\,|\,-8d_1+2d_2<0\}$ Переріз конуса можливих напрямків α із цим напівпростором β задає множину всіх можливих напрямків спуску γ.

Зауваження 5.1. Природний підхід до побудови можливого напрямку спуску, що випливає з теореми 5.1, полягає в мінімізації $\nabla f(\mathrm{x})^T d$ за умови $A_1 d \le 0$, $Cd = 0$. Однак, якщо існує вектор d^*, такий, що $\nabla f(\mathrm{x})^T d^* < 0$, $A_1 d^* \le 0$, $Cd^* = 0$, то мінімальне значення цільової функції в сформульованій задачі дорівнює $-\infty$, тому що будь-який вектор λd^*, де λ – як завгодно велике число, задовольняє всім обмеженням.

Таким чином, в задачу повинна бути включена умова, яка б обмежувала вектор d. Тому для знаходження можливого напрямку спуску потрібно розв'язати задачу

$$\begin{aligned} &\nabla f(\mathrm{x})^T d \to \min, \\ &A_1 d \le 0, \quad Cd = 0, \\ &|d_j| \le 1, \quad j = 1,..,n. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Розглянемо задачу умовної мінімізації при обмеженнях типу нерівностей

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x}\in X} f(\mathrm{x}),$$
$$X = \left\{ \mathrm{x} \,\middle|\, g_i(\mathrm{x}) \le 0,\ i = 1,...,m \right\}.$$

Теорема 5.2 (про можливий напрямок спуску у випадку нелінійних обмежень). *Нехай* x *– припустима точка, а* I_a *- множина індексів активних в цій точці обмежень, тобто* $I_a = \{i \mid g_i(\mathrm{x}) = 0\}$. *Припустимо, що функції* $f(\mathrm{x})$, $g_i(\mathrm{x})$, $i \in I_a$ *диференційовні в* x, *а функції* $g_i(\mathrm{x})$, $i \notin I_a$ *неперервні в цій точці. Якщо* $\nabla f(\mathrm{x})^T d < 0$ *і* $\nabla g_i(\mathrm{x})^T d < 0$ *при* $i \in I_a$, *то вектор* d *є можливим напрямком спуску* [5].

На рис. 5.2 показана сукупність можливих напрямків спуску в точці x. Вектор d, що задовольняє рівності $\nabla g_i(\mathrm{x})^T d = 0$, є дотичним до множини $\{\mathrm{x} \mid g_i(\mathrm{x}) = 0\}$. Так як функції $g_i(\mathrm{x})$ нелінійні, рух вздовж такого вектора може привести в неприпустиму точку, що змушує вимагати виконання строгої нерівності $\nabla g_i(\mathrm{x})^T d < 0$. На рис. 5.2 використовуються наступні умовні позначення: 1 - перше обмеження; 2 - друге обмеження; 3 - третє обмеження; 4 - четверте обмеження; 5 - можливі напрямки спуску; 6 - лінії рівня функції.

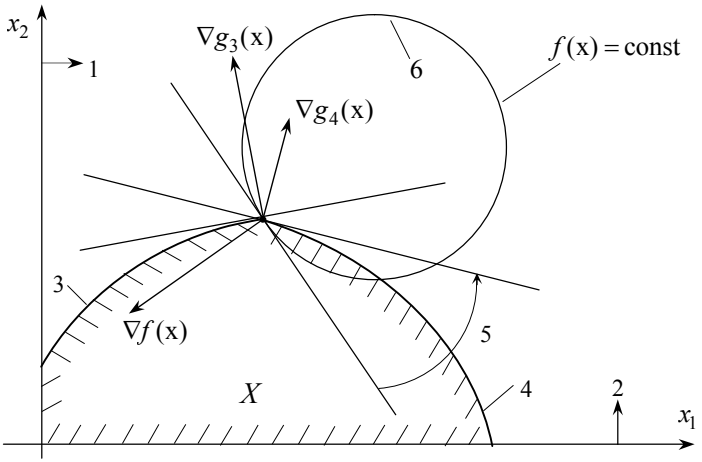


Рис. 5.2

Зауваження 5.2

1. Щоб знайти вектор d, який задовольняє умовам теореми 5.2, природно мінімізувати максимум з $\nabla f(\mathrm{x})^T d$ і $\nabla g_i(\mathrm{x})^T d$ для $i \in I_a$. Позначимо його через z. Крім того, як і у випадку лінійних обмежень, введемо обмеження на вектор d (див. зауваження 5.1). Тому для знаходження можливого напрямку спуску потрібно розв'язати задачу

$$z \to \min,$$
$$\nabla f(\mathrm{x})^T d - z \le 0,$$
$$\nabla g_i(\mathrm{x})^T d - z \le 0,\ i \in I_a,$$
$$|d_j| \le 1,\ j = 1,..,n.$$

Окремим випадком задачі пошуку умовного екстремуму є *задача лінійного програмування*, в якій цільова функція і обмеження лінійні по x. Ця особливість задачі відображається в специфіці застосовуваних для її розв'язання методів, розглянутих в розділі 2. Область припустимих розв'язків представляє собою опуклий многогранник, що має скінченне число вершин. Процедура пошуку розв'язку полягає в переході від однієї вершини до іншої, так щоб значення функції поліпшувалося. Процедура пошуку завершується у випадку, коли з поточної вершини буде неможливий перехід, пов'язаний з поліпшенням функції.

2. Якщо поточна точка близька до межі, обумовленої одним з обмежень, і якщо це обмеження не використовується в процесі знаходження напрямку пошуку, то може трапитися так, що вдасться зробити тільки

маленький крок і точка виявиться на межі, обумовленої цим обмеженням. Тому в якості множини I_a активних обмежень варто брати сукупність індексів *майже активних обмежень*, тобто , $I_a = \{ i \mid -\varepsilon < g_i(\mathrm{x}) \le 0 \}$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число. При цьому розв'язання задачі пошуку можливого напрямку спуску дасть вектор, що забезпечує порівняно більші можливості для руху в рамках припустимої області.

5.2. Метод штрафних функцій

Постановка задачі

Задані двічі неперервно диференційовні цільова функція $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і функції обмежень $g_i(\mathrm{x}) = 0$, $i = 1,..,p$; $g_i(\mathrm{x}) \le 0$, що $i = p+1,..,m$ визначають множину припустимих розв'язків X .

Потрібно знайти локальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині X , тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in X \subset R^n$, що

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}),$$

$$X = \left\{ \mathrm{x} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i(\mathrm{x}) = 0,\ i = 1,..,p;\ p < n \\ g_i(\mathrm{x}) \le 0,\ i = p+1,..,m \end{array} \right\}.$$

Стратегія розв'язання задачі

Ідея методу полягає у зведенні задачі на умовний мінімум до розв'язання послідовності задач пошуку безумовного мінімуму *допоміжної функції:*

$$F(\mathrm{x}, r^k) = f(\mathrm{x}) + P(\mathrm{x}, r^k) \to \min_{\mathrm{x} \in R^n},$$

де $P(\mathrm{x}, r^k)$ – *штрафна функція,* r^k – параметр штрафу, що задається на кожній k -й ітерації. Це пов'язано з можливістю застосування ефективних і надійних методів пошуку безумовного екстремуму, викладених в розділах 3 і 4. Штрафні функції конструюються, виходячи з умов:

$$P\left(\mathrm{x}, r^k\right) = \begin{cases} 0, & \text{коли обмеження виконуються} \\ > 0, & \text{коли обмеження не виконуються} \end{cases},$$

причому при невиконанні обмежень і $r^k \to \infty$, $k \to \infty$ має місце $P(\mathrm{x}, r^k) \to \infty$. Чим більше r^k, тим більший штраф за невиконання обмежень. Як правило, для обмежень типу рівностей використовується ква-

дратичний штраф (рис. 5.3,а), а для обмежень типу нерівностей - квадрат зрізки (рис. 5.3,б):

$$P(\mathrm{x}, r^k) = \frac{r^k}{2}\left\{\sum_{i=1}^{p}\left[g_i(\mathrm{x})\right]^2 + \sum_{i=p+1}^{m}\left[g_i^+(\mathrm{x})\right]^2\right\},$$

де $g_i^+(\mathrm{x})$ – зрізка функції:

$$g_i^+(\mathrm{x}) = \max\{0,\ g_i(\mathrm{x})\} = \begin{cases} g_i(\mathrm{x}), & \text{якщо } g_i(\mathrm{x}) > 0, \\ 0, & \text{якщо } g_i(\mathrm{x}) \le 0. \end{cases}$$

Початкова точка пошуку задається поза множиною припустимих розв'язків X. На кожній k-й ітерації шукається точка $\mathrm{x}^*(r^k)$ мінімуму допоміжної функції $F(\mathrm{x}, r^k)$ при заданому параметрі r^k за допомогою одного з методів безумовної мінімізації. Отримана точка $\mathrm{x}^*(r^k)$ використовується в якості початкової на наступній ітерації, яка виконується при зростаючому значенні параметра штрафу. При необмеженому зростанні r^k послідовність $\mathrm{x}^*(r^k)$ прямує до точки умовного мінімуму x^*.

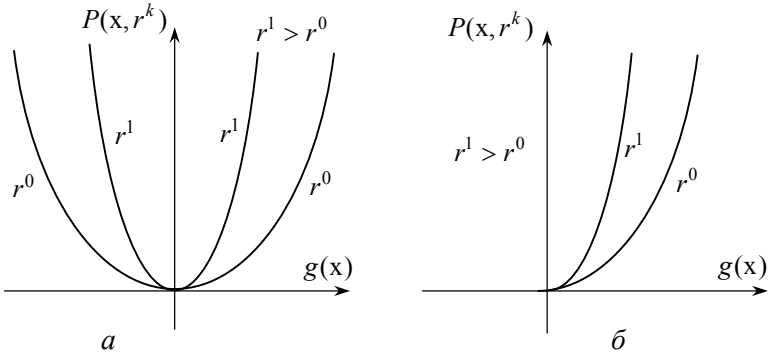


Рис. 5.3

Алгоритм

1. Задати початкову точку x^0; початкове значення параметра штрафу $r^0 > 0$; число $C > 0$ для збільшення параметра штрафу; мале число $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму. Вважаємо $k = 0$.

2. Записати допоміжну функцію

$$F(\mathrm{x}^k, r^k) = f(\mathrm{x}^k) + \frac{r^k}{2}\left\{\sum_{i=1}^{p}\left[g_i(\mathrm{x}^k)\right]^2 + \sum_{i=p+1}^{m}\left[g_i^+(\mathrm{x}^k)\right]^2\right\}.$$

3. Знайти точку $\mathrm{x}^*(r^k)$ безумовного мінімуму функції $F(\mathrm{x}, r^k)$ по x за допомогою будь-якого методу (нульового, першого або другого порядку):

$$F\left(\mathrm{x}^*(r^k), r^k\right) \to \min_{\mathrm{x}\in R^n} F(\mathrm{x}, r^k).$$

При цьому задати всі необхідні для обраного методу параметри. В якості початкової точки взяти x^k. Обчислити $P\left(\mathrm{x}^*(r^k), r^k\right)$.

4. Перевірити умову закінчення:

а) якщо $P\left(\mathrm{x}^*(r^k), r^k\right) \le \varepsilon$, процес пошуку закінчити:

$$\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^*(r^k), \quad f(\mathrm{x}^*) = f\left(\mathrm{x}^*(r^k)\right);$$

б) якщо $P\left(\mathrm{x}^*(r^k), r^k\right) > \varepsilon$, вважати $r^{k+1} = Cr^k$, $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^*(r^k)$, $k = k+1$ і перейти до кроку 2.

Збіжність

Теорема 5.3. *Нехай* x^* *– локально єдиний розв'язок задачі пошуку умовного мінімуму, а функції* $f(\mathrm{x})$ *і* $g_i(\mathrm{x})$ *неперервно диференційовні в околі* x^*. *Тоді для досить великих* r^k *знайдеться точка* $\mathrm{x}^*(r^k)$ *локального мінімуму функції* $F(\mathrm{x}, r^k)$ *в околі* x^* *і* $\mathrm{x}^*(r^k) \to \mathrm{x}^*$ *при* $r^k \to \infty$ [25].

Зауваження 5.3

1. Оскільки збіжність методу забезпечується при $r^k \to \infty$, то виникає питання про те, чи не можна отримати розв'язання вихідної задачі в результаті однократного пошуку безумовного мінімуму допоміжної функції з параметром r^k, що дорівнює великому числу, наприклад 10^{20}. Однак така заміна послідовного розв'язання допоміжних задач не є можливою, тому що з ростом r^k функція $F(\mathrm{x}, r^k)$ здобуває яскраво виражену яружну структуру. Тому швидкість збіжності будь-якого методу безумовної мінімізації до розв'язку $\mathrm{x}^*(r^k)$ різко падає, так що процес його визначення закінчується, як правило, значно раніше, ніж буде досягнута задана точність, і, отже, отриманий результат не дає можливості судити про шуканий розв'язок x^*.

2. Точки $\mathrm{x}^*(r^k)$ в алгоритмі – це точки локального мінімуму функції $F(\mathrm{x}, r^k)$. Однак функція $F(\mathrm{x}, r^k)$ може бути необмеженою знизу і процедури методів безумовної мінімізації можуть розбігатися. Цю обставину необхідно враховувати при програмній реалізації.

3. В методах штрафних функцій є тісний зв'язок між значеннями параметрів штрафу і множниками Лагранжа для регулярної точки мінімуму (див. 1.5):

$$\lambda_i(r^k) = r^k g_i\left(\mathrm{x}^*(r^k)\right), \quad i = 1,...m;$$

$$\lambda_i(r^k) = r^k g_i^+\left(\mathrm{x}^*(r^k)\right), \quad i \in I_a;$$

$$\lim_{r^k \to \infty} \lambda_i(r^k) = \lambda_i^*, \quad i = 1,...m; \quad i \in I_a.$$

4. Зазвичай вибирається $r^0 = 0.01; 0.1; 1$, а $C \in [4; 10]$. Іноді починають з $r^0 = 0$, тобто із задачі пошуку безумовного мінімуму.

5. При розв'язанні задач процедура розрахунків завершується при деякому скінченному значенні параметра штрафу r^k. При цьому наближений розв'язок, як правило, не лежить в множині припустимих розв'язків, тобто обмеження задачі не виконуються. Це є одним з недоліків методу. З ростом параметра штрафу r^k точки, що генеруються алгоритмом наближаються до розв'язків вихідної задачі ззовні множини припустимих розв'язків. Тому обговорюваний метод іноді називають *методом зовнішніх штрафів.*

6. На практиці для одержання розв'язання вихідної задачі з необхідною точністю досить буває розв'язати скінченне (відносно невелике) число допоміжних задач. При цьому немає необхідності розв'язувати їх точно, а інформацію, отриману в результаті розв'язання чергової допоміжної задачі, зазвичай вдається ефективно використовувати для розв'язання наступної.

Приклад 5.2

Знайти мінімум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

Розв'язання

1. В поставленій задачі одне обмеження-рівність, обмеження-нерівності відсутні. Розв'яжемо задачу аналітично.

2. Запишемо допоміжну функцію:

$$F(\mathrm{x}, r^k) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{r^k}{2}(x_1 + x_2 - 2)^2 .$$

3^0. Знайдемо безумовний мінімум $F(\mathrm{x}, r^k)$ по x за допомогою необхідних і достатніх умов:

$$\frac{\partial F(\mathrm{x}, r^k)}{\partial x_1} = 2x_1 + r^k(x_1 + x_2 - 2) = 0 ,$$

$$\frac{\partial F(\mathrm{x}, r^k)}{\partial x_2} = 2x_2 + r^k(x_1 + x_2 - 2) = 0 .$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, одержимо $x_1 = x_2$ і $x_1^*(r^k) = x_2^*(r^k) = \dfrac{r^k}{1 + r^k}$. В таблиці 5.1 наведені результати розрахунків при $r^k = 1, 2, 10, 100, 1000, \infty$, а на рис. 5.4 дана графічна ілюстрація розв'язку.

Таблиця 5.1

k	r^k	$x_1^*(r^k) = x_2^*(r^k)$	$F(\mathrm{x}^*(r^k), r^k)$	$\lambda_1(r^k)$
0	1	0.5	1	–1
1	2	0.667	1.333	–1.333
2	10	0.909	1.81	–1.818
3	100	0.990	1.98	–1.980
4	1000	0.999	1.998	–1.998
5	∞	1	2	-2

Так як матриця Гессе $H(\mathrm{x}^*(r^k), r^k) = \begin{pmatrix} 2 + r^k & r^k \\ r^k & 2 + r^k \end{pmatrix} > 0$ при $r^k > 0$, то достатні умови мінімуму $F(\mathrm{x}, r^k)$ задовольняються. При $r^k \to \infty$ маємо $\lim\limits_{r^k \to \infty} \dfrac{r^k}{1 + r^k} = 1 = x_1^* = x_2^*$; $f(\mathrm{x}^*) = 2$. Одночасно знаходиться множник Лагранжа:

$$\lambda_1^* = \lim_{r^k \to \infty} \lambda_1(r^k) = \lim_{r^k \to \infty} \left\{ r^k \left[x_1^*(r^k) + x_2^*(r^k) - 2 \right] \right\} = \lim_{r^k \to \infty} \left[-\frac{2r^k}{1 + r^k} \right] = -2 .$$

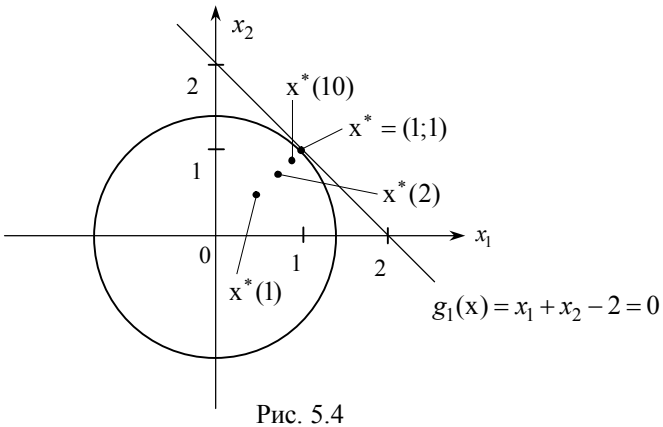


Рис. 5.4

Приклад 5.3

Знайти мінімум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = -x_1 + 1 \le 0,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0.$$

Розв'язання

1. В поставленій задачі два обмеження-нерівності, обмеження-рівності відсутні. Розв'яжемо задачу аналітично.

2. Запишемо допоміжну функцію:

$$F(\mathrm{x}, r^k) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{r^k}{2}\left\{\{\max[0; (1 - x_1)]\}^2 + \{\max[0; (x_1 + x_2 - 2)]\}^2\right\}.$$

3. Знайдемо безумовний мінімум $F(\mathrm{x}, r^k)$ при фіксованому r^k:

$$\frac{\partial F(\mathrm{x}, r^k)}{\partial x_1} = 0 = \begin{cases} 2x_1, & (1 - x_1) \le 0,\ (x_1 + x_2 - 2) \le 0, \\ 2x_1 + r^k(x_1 - 1), & (1 - x_1) > 0,\ (x_1 + x_2 - 2) \le 0, \\ 2x_1 + r^k(x_1 + x_2 - 2), & (1 - x_1) \le 0,\ (x_1 + x_2 - 2) > 0, \\ 2x_1 + r^k(x_1 - 1) + r^k(x_1 + x_2 - 2), & (1 - x_1) > 0,\ (x_1 + x_2 - 2) > 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial F(\mathrm{x}, r^k)}{\partial x_2} = 0 = \begin{cases} 2x_2, & (x_1 + x_2 - 2) \le 0, \\ 2x_2 + r^k(x_1 + x_2 - 2), & (x_1 + x_2 - 2) > 0. \end{cases}$$

Розглянемо чотири випадки:

1) $(-x_1+1)\le 0$, $(x_1+x_2-2)\le 0$. Маємо $x_1^*=x_2^*=0$, але при цьому не задовольняється перша нерівність $g_1(\mathrm{x})\le 0$;

2) $(-x_1+1)\le 0$, $(x_1+x_2-2)>0$.

Маємо $\begin{cases}2x_1+r^k(x_1+x_2-2)=0,\\ 2x_2+r^k(x_1+x_2-2)=0.\end{cases}$

Звідси $x_1=x_2$ і $x_1(r^k)=x_2(r^k)=\dfrac{r^k}{1+r^k}$.

Однак $1-x_1(r^k)=\dfrac{1}{1+r^k}>0$ при $r^k>0$, що суперечить першій нерівності;

3) $(-x_1+1)>0$, $(x_1+x_2-2)\le 0$. Маємо $\begin{cases}2x_1+r^k(x_1-1)=0,\\ 2x_2=0.\end{cases}$

Звідси $x_2^*=0$, $x_1^*(r^k)=\dfrac{r^k}{2+r^k}$.

Оскільки $H\left(x_1^*(r^k),\, r^k\right)=\begin{pmatrix}2+r^k & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}>0$, то достатні умови локального мінімуму виконуються (табл. 1.1, рядок 1). Чисельні результати наведені в табл. 5.2 і відображені на рис. 5.5;

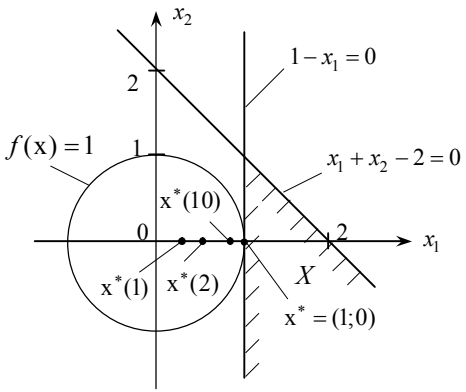


Рис. 5.5

4) $(-x_1+1)>0$, $(x_1+x_2-2)>0$.

Маємо $\begin{cases} 2x_1+r^k(x_1-1)+r^k(x_1+x_2-2)=0, \\ 2x_2+r^k(x_1+x_2-2)=0. \end{cases}$

Звідси $x_1^*(r^k)=\dfrac{(r^k)^2+6r^k}{(r^k)^2+6r^k+4}$, $x_2^*(r^k)=\dfrac{(r^k)^2+4r^k}{(r^k)^2+6r^k+4}$.

Однак $x_1^*(r^k)+x_2^*(r^k)-2=\dfrac{-2r^k-8}{(r^k)^2+6r^k+4}<0$ при всіх $r^k>0$,

тобто друга нерівність не виконується.

В результаті одержимо розв'язок задачі

$$x_1^*=\lim_{r^k\to\infty}\frac{r^k}{2+r^k}=1;\ \ x_2^*=0;\ \ f(\mathrm{x}^*)=1.$$

Таблиця 5.2

k	r^k	$x_1^*(r^k)$	$x_2^*(r^k)$	$F(\mathrm{x}^*(r^k),r^k)$	$\lambda_1(r^k)$	$\lambda_2(r^k)$
0	1	0.333	0	0.556	–0.6667	0
1	2	0.5	0	0.750	–1	0
2	10	0.833	0	0.972	–1.6667	0
3	100	0.980	0	0.9996	–0.9608	0
4	1000	0.998	0	0.9999	–1.9960	0
5	∞	1	0	1	-2	0

Приклад 5.4

Знайти мінімум в задачі

$$f(\mathrm{x})=x_1^2+x_2^2\to\min;$$
$$g_1(\mathrm{x})=x_1-1=0,$$
$$g_2(\mathrm{x})=x_1+x_2-2\le 0.$$

Розв'язання

1. В задачі одне обмеження-рівність і одне обмеження-нерівність. Розв'яжемо задачу аналітично.

2. Запишемо допоміжну функцію:

$$F(\mathrm{x},r^k)=x_1^2+x_2^2+\frac{r^k}{2}\left\{[(x_1-1)]^2+\{\max[0;(x_1+x_2-2)]\}^2\right\}.$$

3. Знайдемо безумовний мінімум $F(\mathrm{x}, r^k)$ по x за допомогою необхідних і достатніх умов:

$$\frac{\partial F(\mathrm{x}, r^k)}{\partial x_1} = 0 = \begin{cases} 2x_1 + r^k(x_1 - 1) + r^k(x_1 + x_2 - 2), & (x_1 + x_2 - 2) > 0, \\ 2x_1 + r^k(x_1 - 1), & (x_1 + x_2 - 2) \le 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial F(\mathrm{x}, r^k)}{\partial x_2} = 0 = \begin{cases} 2x_2 + r^k(x_1 + x_2 - 2), & (x_1 + x_2 - 2) > 0, \\ 2x_2, & (x_1 + x_2 - 2) \le 0. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки:

1) Нехай $(x_1 + x_2 - 2) > 0$. Віднімаючи з першого рівняння друге, одержимо: $x_2 = x_1 + \frac{r^k}{2}(x_1 - 1)$. Після підстановки в перше рівняння маємо $x_1^*(r^k) = \frac{(r^k)^2 + 6r^k}{(r^k)^2 + 6r^k + 4}$, $x_2^*(r^k) = \frac{(r^k)^2 + 4r^k}{(r^k)^2 + 6r^k + 4}$.

Однак при всіх $r^k > 0$ маємо

$$x_1^*(r^k) + x_2^*(r^k) - 2 = \frac{-2r^k - 8}{(r^k)^2 + 6r^k + 4} < 0,$$

що суперечить умові $(x_1 + x_2 - 2) > 0$ для розглянутого випадку.

2) Нехай $(x_1 + x_2 - 2) \le 0$. Тоді $x_2^* = 0$, а $x_1^*(r^k) = \frac{r^k}{2 + r^k}$. В таблиці 5.2 наведені результати розрахунків, а на рис. 5.6 дано графічну ілюстрацію.

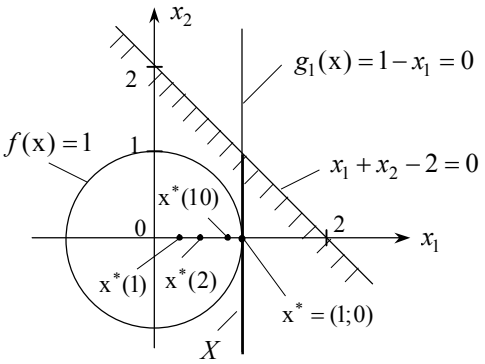


Рис. 5.6

Оскільки матриця Гессе $H\left(x_1^*(r^k),\, r^k\right)=\begin{pmatrix} 2+r^k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}>0$ при всіх $r^k>0$, то достатні умови мінімуму $F(\mathrm{x},r^k)$ задовольняються (табл. 1.1, рядок 1). При $r^k\to\infty$ маємо $x_1^*(r^k)=\lim\limits_{r^k\to\infty}\dfrac{r^k}{2+r^k}=1$, $x_2^*=0$, $f(\mathrm{x}^*)=1$.

Одночасно знаходяться множники Лагранжа:

$$\lambda_1^*=\lim_{r^k\to\infty}\lambda_1(r^k)=\lim_{r^k\to\infty}\left\{r^k[x_1^*(r^k)-1]\right\}=\lim_{r^k\to\infty}\left[-\frac{2r^k}{2+r^k}\right]=-2;$$

$$\lambda_2^*=\lim_{r^k\to\infty}\lambda_2(r^k)=\lim_{r^k\to\infty}\left\{r^k\left[\max\{0,[x_1^*(r^k)+x_2^*(r^k)-2]\}\right]\right\}=$$

$$=\lim_{r^k\to\infty}r^k\max\left\{0,\frac{r^k}{2+r^k}-2\right\}=0.$$

5.3 Метод бар'єрних функцій

Постановка задачі Задані двічі неперервно диференційовні цільова функція $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2,...,x_n)$ і функції обмежень-нерівностей $g_i(\mathrm{x})\le 0$, що $i=1,..,m$ визначають множину припустимих розв'язків X.

Потрібно знайти локальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині X, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^*\in X\subset R^n$, що

$$f(\mathrm{x}^*)=\min_{\mathrm{x}\in X}f(\mathrm{x}),$$

$$X=\left\{\,\mathrm{x}\;\middle|\;g_i(\mathrm{x})\le 0,\ i=1,..,m\right\}.$$

Стратегія розв'язання задачі Ідея методу полягає у зведенні задачі на умовний мінімум до розв'язання послідовності задач пошуку безумовного мінімуму *допоміжної функції:*

$$F(\mathrm{x},r^k)=f(\mathrm{x})+P(\mathrm{x},r^k)\to\min_{\mathrm{x}\in R^n},$$

де $P(\mathrm{x},r^k)$ – *штрафна функція,* $r^k\ge 0$ – параметр штрафу.

Як правило, використовуються:

а) обернена штрафна функція $P(\mathrm{x}, r^k) = -r^k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(\mathrm{x})}$ (рис. 5.7,а);

б) логарифмічна штрафна функція $P(\mathrm{x}, r^k) = -r^k \sum_{i=1}^{m} \ln\left[-g_i(\mathrm{x})\right]$ (рис. 5.7,б).

Обернена штрафна функція була запропонована Керролом (Carrol C.W.), а логарифмічна Фрішем (Frisch K.R.).

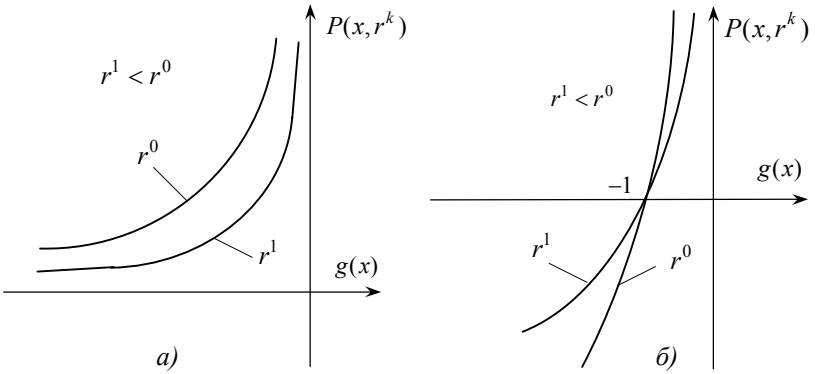


Рис. 5.7

Обидві штрафні функції визначені і неперервні всередині множини X, тобто на множині $X = \left\{ \mathrm{x} \,\middle|\, g_i(\mathrm{x}) \le 0,\ i = 1,..,m \right\}$, і прямують до нескінченності при наближенні до межі множини зсередини. Тому вони називаються *бар'єрними функціями.* При $r^k > 0$ штрафна функція, що задається оберненою функцією, додатна. Логарифмічна штрафна функція додатна при $-1 < g_i(\mathrm{x}) < 0$ і від'ємна при $g_i(\mathrm{x}) < -1$, тобто внутрішнім точкам області віддається перевага перед межовими точками.

Початкова точка задається тільки всередині множини X. На кожній k-й ітерації шукається точка $\mathrm{x}^*(r^k)$ мінімуму допоміжної функції $F(\mathrm{x}, r^k)$ при заданому параметрі r^k за допомогою одного з методів безумовної мінімізації. Отримана точка $\mathrm{x}^*(r^k)$ використовується в якості початкової на наступній ітерації, яка виконується при зменшуваному значенні параметра штрафу. При $r^k \to +0$ послідовність точок $\mathrm{x}^*(r^k)$ пря-

мує до точки умовного мінімуму x^*. Бар'єрні функції як би перешкоджають виходу із множини X, а якщо розв'язок задачі лежить на межі, то процедура методу призводить до руху зсередини області до межі.

Помітимо, що відповідно до описаної процедури точки $\mathrm{x}^*(r^k)$ лежать всередині множини припустимих розв'язків для кожного r^k. Цим пояснюється те, що метод бар'єрних функцій іноді називається *методом внутрішніх штрафів.*

Алгоритм

1. Задати початкову точку x^0 всередині області X; початкове значення параметра штрафу $r^0 \geq 0$; число $C > 1$ для зменшення параметра штрафу; мале число $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму. Вважати $k = 0$.

2. Записати допоміжну функцію:

$$F(\mathrm{x}, r^k) = f(\mathrm{x}) - r^k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(\mathrm{x})} \quad \text{або} \quad F(\mathrm{x}, r^k) = f(\mathrm{x}) - r^k \sum_{i=1}^{m} \ln\left[-g_i(\mathrm{x})\right].$$

3. Знайти точку $\mathrm{x}^*(r^k)$ мінімуму функції $F(\mathrm{x}, r^k)$ по x за допомогою будь-якого методу (нульового, першого або другого порядку) пошуку безумовного мінімуму з перевіркою приналежності поточної точки внутрішності множини X. При цьому задати всі необхідні обраному методу параметри. В якості початкової точки взяти x^k. Обчислити:

$$P\left(\mathrm{x}^*(r^k), r^k\right) = -r^k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i\left(\mathrm{x}^*(r^k)\right)} \text{ або}$$

$$P\left(\mathrm{x}^*(r^k), r^k\right) = -r^k \sum_{i=1}^{m} \ln\left[-g_i\left(\mathrm{x}^*(r^k)\right)\right].$$

4. Перевірити виконання умови закінчення:

а) якщо $\left|P\left(\mathrm{x}^*(r^k), r^k\right)\right| \leq \varepsilon$, процес пошуку закінчити: $\mathrm{x}^* = \mathrm{x}^*(r^k)$, $f(\mathrm{x}^*) = f\left(\mathrm{x}^*(r^k)\right)$;

б) якщо $\left|P\left(\mathrm{x}^*(r^k), r^k\right)\right| > \varepsilon$, вважати $r^{k+1} = \dfrac{r^k}{C}$; $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^*(r^k)$, $k = k + 1$ і перейти до кроку 2.

Збіжність

Теорема 5.4. *Нехай функції* $f(\mathrm{x})$ *і* $g_i(\mathrm{x})$, $i = 1,..,m$ *опуклі і скінченні, множина* X^* *розв'язків задачі пошуку умовного мінімуму не поро-*

жня і обмежена, існує точка $\mathrm{x}^0 \in X$ *така, що* $g_i(\mathrm{x}^0) < 0$, $i = 1,..,m$. *Тоді в методі бар'єрних функцій* $X_k^* = \operatorname{Arg}\min_{\mathrm{x}} F(\mathrm{x}, r^k) \neq \varnothing$, *функції* $F(\mathrm{x}, r^k)$ *опуклі, послідовність* $\left\{\mathrm{x}(r^k)\right\}_{k=0}^{\infty}$, *породжена алгоритмом, обмежена і всі її граничні точки належать* X^*, *причому* $f(\mathrm{x}^*(r^k)) \geq f(\mathrm{x}^*)$, $\mathrm{x}^* \in X^*$ [25].

Зауваження 5.4

1. Зазвичай вибирається $r^0 = 1, 10, 100$, а $C = 10, 12, 16$.

2. При $r^k \to +0$ забезпечується збіжність, однак зі зменшенням r^k функція $F(\mathrm{x}, r^k)$ стає все більш яружною. Тому вважати r^k малим числом відразу недоцільно.

3. Оскільки більшість методів пошуку безумовного екстремуму використовує дискретні кроки, то поблизу межі крок може привести в точку поза припустимою областю. Якщо в алгоритмі відсутня перевірка на приналежність точки множині $X = \left\{ \mathrm{x} \mid g_i(\mathrm{x}) < 0,\ i = 1,..,m \right\}$, то це може привести до помилкового успіху, тобто зменшенню допоміжної функції в точці, де вона теоретично не визначена. Тому на кроці 3 алгоритму потрібна явна перевірка того, що точка не покинула припустиму область. Процедура пошуку звичайно завершується при деякому малому r^k, відмінному від нуля. Однак наближений розв'язок належить множині припустимих розв'язків. Це одна з переваг методу бар'єрних функцій.

4. Побічним продуктом обчислень в методі штрафних функцій є вектор множників Лагранжа:

$$\lambda_i(r^k) = \frac{r^k}{g_i^2(\mathrm{x}^*(r^k))},\ i = 1,..,m \ \text{– для оберненої штрафної функції;}$$

$$\lambda_i(r^k) = -\frac{r^k}{g_i(\mathrm{x}^*(r^k))},\ i = 1,..,m \ \text{– для логарифмічної штрафної функції;}$$

$$\lambda_i^* = \lim_{r^k \to +0} \lambda_i(r^k).$$

Приклад 5.5

Знайти мінімум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 5 \leq 0.$$

Розв'язання

Розв'яжемо задачу із застосуванням різних штрафних функцій.

А. Застосування оберненої штрафної функції.

1. В поставленій задачі одне обмеження-нерівність. Розв'яжемо її аналітично.

2. Запишемо допоміжну функцію:

$$F(\mathrm{x},r^k)=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2+P(\mathrm{x},r^k),\ \text{де}\ P(\mathrm{x},r^k)=-\frac{r^k}{x_1+x_2-5}.$$

3. Знайдемо безумовний мінімум $F(\mathrm{x},r^k)$:

$$\frac{\partial F(\mathrm{x},r^k)}{\partial x_1}=2(x_1-4)+\frac{r^k}{(x_1+x_2-5)^2}=0,$$

$$\frac{\partial F(\mathrm{x},r^k)}{\partial x_2}=2(x_2-4)+\frac{r^k}{(x_1+x_2-5)^2}=0.$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, маємо

$$x_1=x_2\ \text{ і }\ 4x_1^3-36x_1^2+105x_1-100+\frac{r^k}{2}=0.$$

При $r^k=100$ одержуємо $4x_1^3-36x_1^2+105x_1-50=0$. Знайдемо корінь за формулами Кардано. Оскільки $a=4$, $b=-36$, $c=105$, $d=-50$, то перепишемо рівняння у вигляді $y^3+3py+2q=0$, де

$$y=x_1+\frac{b}{3a}=x_1-3,\quad 3p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}=-0.75,$$

$$2q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^3}+\frac{d}{a}=12.25.$$

Звідси $p=-0.25$, $q=6.125$; дискримінант $D=q^2+p^3=37.5>0$, тому рівняння має один дійсний корінь: $y_1=u+v$, де $u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}=-0.10845$, $v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}=-2.3050$. Тоді $y_1=u+v=-2.4135$, $x_1=0.5864$.

Результати розрахунків наведені в таблиці 5.3, де $\lambda_1(r^k)=\dfrac{r^k}{g_1^2(\mathrm{x}^*(r^k))}$.

Таблиця 5.3

k	r^k	$x_1^*(r^k)$, $x_2^*(r^k)$	$F(\mathrm{x}^*(r^k), r^k)$	$P(\mathrm{x}^*(r^k), r^k)$	$g_1(\mathrm{x}^*(r^k))$	$\lambda_1(r^k)$
0	100	0.5864	49.4341	26.1288	–3.8272	6.8271
1	10	1.7540	16.7914	6.7024	–1.4920	4.4922
2	1	2.2340	8.1172	1.8797	0.5320	3.5332
3	0.1	2.4113	5.6116	0.5637	0.1774	3.1775
4	0.01	2.4714	4.8480	0.1748	0.0572	3.0564
5	0.001	2.4999	4.6097	0.0549	0.0182	3.0189
6	0	2.5	4.5	-	0	3

Б. Застосування логарифмічної штрафної функції.

1. В поставленій задачі одне обмеження-нерівність. Розв'яжемо її аналітично.

2. Запишемо допоміжну функцію:

$F(\mathrm{x}, r^k) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + P(\mathrm{x}, r^k)$, де $P(\mathrm{x}, r^k) = -r^k \ln(5 - x_1 - x_2)$.

3. Знайдемо безумовний мінімум $F(\mathrm{x}, r^k)$ за допомогою необхідних і достатніх умов при фіксованому r^k:

$$\frac{\partial F(\mathrm{x}, r^k)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) + \frac{r^k}{(5 - x_1 - x_2)} = 0,$$

$$\frac{\partial F(\mathrm{x}, r^k)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + \frac{r^k}{(5 - x_1 - x_2)} = 0.$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, одержуємо $x_1 = x_2$. З врахуванням цього маємо $2(x_1 - 4) + \frac{r^k}{5 - 2x_1} = 0$ або $2x_1^2 - 13x_1 + 20 - \frac{r^k}{2} = 0$.

Корінь останнього рівняння: $x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{9 + 4r^k}}{4}$. Корінь $x_1 = \frac{13 + \sqrt{9 + 4r^k}}{4} = x_2$ не задовольняє обмеженню $x_1 + x_2 - 5 \le 0$ при $r^k \ge 0$. Тому $x_1^*(r^k) = x_2^*(r^k) = \frac{13 - \sqrt{9 + 4r^k}}{4}$. Матриця Гессе

$$H\left(x_1^*(r^k), r^k\right) = \begin{pmatrix} 2 + \dfrac{r^k}{(5 - x_1 - x_2)^2} & \dfrac{r^k}{(5 - x_1 - x_2)^2} \\ \dfrac{r^k}{(5 - x_1 - x_2)^2} & 2 + \dfrac{r^k}{(5 - x_1 - x_2)^2} \end{pmatrix} > 0,$$

оскільки $\Delta_1 = 2 + \dfrac{r^k}{(5 - x_1 - x_2)^2} > 0$, $\Delta_2 = 4 + \dfrac{4r^k}{(5 - x_1 - x_2)^2} > 0$, тобто достатні умови мінімуму виконуються (табл. 1.1, рядок 1). При $r^k \to 0$ маємо $x_1^*(r^k) = x_2^*(r^k) \to x_1^* = x_2^* = 2.5$, $f(\mathrm{x}^*) = 4.5$.

Результати розрахунків наведені в таблиці 5.4, де $\lambda_1(r^k) = -\dfrac{r^k}{g_1^2(\mathrm{x}^*(r^k))}$.

Таблиця 5.4

k	r^k	$x_1^*(r^k)$, $x_2^*(r^k)$	$F(\mathrm{x}^*(r^k), r^k)$	$P(\mathrm{x}^*(r^k), r^k)$	$g_1(\mathrm{x}^*(r^k))$	$\lambda_1(r^k)$
0	100	–1.8059	–147.8963	–215.31	–8.6118	11.61
1	10	1.5000	5.5685	–6.9315	–2.0000	5
2	1	2.3486	6.6489	1.1947	–0.3028	3.3
3	0.1	2.4835	4.9406	0.3411	–0.0330	3.03
4	0.01	2.4983	4.5669	0.0570	–0.0033	3.003
5	0.001	2.4998	4.5090	0.0080	–0.0003	3.0003
6	0	2.5	4.5	-	0	3

В. Розв'яжемо задачу за допомогою необхідних і достатніх умов умовного екстремуму (див. розділ 1.4).

1. Запишемо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \left[(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \right] + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 5).$$

2. Випишемо необхідні умови мінімуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 (x_1 - 4) + \lambda_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 (x_2 - 4) + \lambda_1 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 5 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$;

г) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 5) = 0$.

Розв'яжемо систему для двох випадків.

В першому випадку $\lambda_0 = 0$. Тоді $\lambda_1 = 0$, що суперечить теоремі 1.7.

У другому випадку $\lambda_0 \neq 0$. Поділимо систему на λ_0 і замінимо $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1. Умова «а» прийме вигляд

$$2(x_1 - 4) + \lambda_1 = 0,$$
$$2(x_2 - 4) + \lambda_1 = 0.$$

З умови «г» доповнюючи нежорсткості, випливають два випадки:

1) $\lambda_1 = 0$. Тоді $x_1 = x_2 = 4$, але при цьому не виконується умова «б»;

2) $\lambda_1 \neq 0$. Тоді

$$x_1 + x_2 - 5 = 0,$$
$$2x_1 - 8 + \lambda_1 = 0,$$
$$2x_2 - 8 + \lambda_1 = 0.$$

Одержимо $x_1^* = x_2^* = 2.5$; $\lambda_1^* = 3 > 0$.

3. Перевіримо достатні умови мінімум:

$$d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2,$$
$$dg_1(\mathrm{x}^*) = dx_1 + dx_2 = 0.$$

Звідси $dx_1 = -dx_2$ і $d^2L(\mathrm{x}^*, \lambda^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Тому в точці $\mathrm{x}^* = (2.5;\ 2.5)^T$ умовний мінімум (табл. 1.5, рядок 1)

4. Значення функції в точці умовного мінімуму: $f(\mathrm{x}^*) = 4.5$.

5.4. Метод множників

Постановка задачі Задані двічі неперервно диференційовні цільова функція $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і функції обмежень $g_i(\mathrm{x}) = 0$, $i = 1,.., p$; $g_i(\mathrm{x}) \le 0$, $i = p+1,.., m$, що визначають множину припустимих розв'язків $X \subset R^n$.

Потрібно знайти локальний мінімум функції $f(\mathrm{x})$ на множині X, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in X$, що

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}),$$

$$X = \left\{ \mathrm{x} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i(\mathrm{x}) = 0,\ i = 1,..,p;\ p < n \\ g_i(\mathrm{x}) \le 0,\ i = p+1,..,m \end{array} \right\}.$$

Стратегія розв'язання задачі

Стратегія аналогічна тій, що використовується в методі зовнішніх штрафів, тільки штрафна функція додається не до цільової функції, а до класичної функції Лагранжа. В результаті задача на умовний мінімум зводиться до розв'язання послідовності задач пошуку безумовного мінімуму *модифікованої функції Лагранжа:*

$$L(\mathrm{x}, \lambda^k, \mu^k, r^k) = f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k g_i(\mathrm{x}) + \frac{r^k}{2} \sum_{i=1}^{p} \left[g_i(\mathrm{x}) \right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2r^k} \sum_{i=p+1}^{m} \left\{ \left[\max\left\{ 0,\ \mu_i^k + r^k g_i(\mathrm{x}) \right\} \right]^2 - \left(\mu_i^k \right)^2 \right\},$$

де $\lambda^k = (\lambda_1^k; ...; \lambda_p^k)^T$, $\mu^k = (\mu_{p+1}^k; ...; \mu_m^k)^T$ – вектори множників; r^k – параметр штрафу; k – номер ітерації.

Задається початкова точка пошуку x^0. На кожній k-й ітерації шукається точка мінімуму модифікованої функції Лагранжа при заданих λ^k, μ^k, r^k за допомогою одного з методів безумовної мінімізації. Отримана точка $\mathrm{x}^*(\lambda^k, \mu^k, r^k)$ використовується в якості початкової на наступній ітерації, що виконується при зростаючому значенні параметра штрафу r^k і перерахованих певним чином векторах множників λ^k, μ^k. Для досягнення збіжності на відміну від методу зовнішніх штрафів не потрібно спрямовувати r^k до нескінченності.

Метод множників був запропонований Пауеллом (Powell M.J.D.) і Хестенсом (Hestenes M.R.) і має численні модифікації [8, 26].

Алгоритм

1. Задати початкову точку x^0; початкове значення параметра штрафу $r^0 > 0$; число $C > 1$ для збільшення параметра штрафу; початкові значення векторів множників λ^0, μ^0; мале число $\varepsilon > 0$ для зупинки алгоритму. Вважати $k = 0$.

2. Записати модифіковану функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\lambda^k,\mu^k,r^k)=f(\mathrm{x})+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^k g_i(\mathrm{x})+\frac{r^k}{2}\sum_{i=1}^{p}\left[g_i(\mathrm{x})\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2r^k}\sum_{i=p+1}^{m}\left\{\left[\max\left\{0,\ \mu_i^k+r^k g_i(\mathrm{x})\right\}\right]^2-\left(\mu_i^k\right)^2\right\},$$

3. Знайти точку $\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)$ безумовного мінімуму функції по x за допомогою якого-небудь методу (нульового, першого або другого порядку):

$$L(\mathrm{x}^*,\lambda^k,\mu^k,r^k)=\min_{\mathrm{x}\in R^n}L(\mathrm{x},\lambda^k,\mu^k,r^k).$$

При цьому задати всі необхідні обраному методу параметри. В якості початкової точки взяти x^k.

4. Обчислити $P\left(\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k),\ \mu^k,r^k\right)$, де

$$P\left(\mathrm{x},\mu^k,r^k\right)=\frac{r^k}{2}\sum_{i=1}^{p}\left[g_i(\mathrm{x})\right]^2+\frac{1}{2r^k}\sum_{i=p+1}^{m}\left\{\left[\max\left\{0,\ \mu_i^k+r^k g_i(\mathrm{x})\right\}\right]^2-\left(\mu_i^k\right)^2\right\}$$

і перевірити виконання умови закінчення обчислень:

а) якщо $\left|P\left(\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k),\ \mu^k,r^k\right)\right|\le\varepsilon$, процес пошуку закінчити:

$$\mathrm{x}^*=\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k),\qquad f(\mathrm{x}^*)=f\left(\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)\right);$$

б) якщо $\left|P\left(\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k),\ \mu^k,r^k\right)\right|>\varepsilon$, вважати:

$r^{k+1}=Cr^k$ – перерахування параметра штрафу;

$\lambda^{k+1}=\lambda^k+r^k g\left(\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)\right)$ – перерахування множників для обмежень-рівностей;

$\mu_i^{k+1}=\max\left\{0,\ \mu_i^k+r^k g_i\left(\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)\right)\right\}$ – перерахування множників для обмежень-нерівностей;

$\mathrm{x}^{k+1}=\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)$, $k=k+1$ і перейти до кроку 2.

Збіжність

Теорема 5.5 (про збіжність методу множників в задачі з обмеженнями типу рівностей). *Нехай функції* $f(\mathrm{x})$ *і* $g_i(\mathrm{x})$, $i=1,..,m$ *неперервні, послідовність* $\{\lambda^k\}$ *обмежена,* $0<r^k<r^{k+1}$ *при всіх* k, *причому*

$r^k \to \infty$, X^* – компактна ізольована множина точок локального мінімуму у вихідній задачі. Тоді знайдеться підпослідовність $\{\mathrm{x}^k\}_K$, що збігається до деякої точки $\mathrm{x}^* \in X^*$ і така, що її довільний елемент x^k, $k \in K$ є точкою локального мінімуму функції $L(\mathrm{x}, \lambda^k, r^k)$. Якщо при цьому X^* складається з єдиної точки x^*, то можна вказати послідовність $\{\mathrm{x}^k\}$ і номер $\overline{k} \geq 0$ такі, що $\mathrm{x}^k \to \mathrm{x}^*$ і x^k є точкою локального мінімуму функції $L(\mathrm{x}, \lambda^k, r^k)$ при $k > \overline{k}$ [8].

Зауваження 5.5

1. Збіжність методу множників в задачі зі змішаними обмеженнями доведена в [8].

2. На кожній ітерації бажано, щоб знайдена точка локального мінімуму $\mathrm{x}^*(\lambda^k, \mu^k, r^k)$ була б найближчою до x^*. Метод коректний, якщо починаючи з деякого k метод безумовної мінімізації щоразу приводить в окіл однієї і тієї ж точки x^* умовного локального мінімуму. Це визначає описана на кроці 3 алгоритму наступність задач.

3. Зазвичай вибирається $r^0 = 0.1; 1$, а $C \in [4;10]$. Доцільно вибрати λ^0, μ^0, близькі до λ^*, μ^*, використовуючи апріорну інформацію про розв'язок. Іноді вибирають $\lambda^0 = \mu^0 = 0$. В цьому випадку перша допоміжна задача мінімізації збігається з задачею, що розв'язується в методі зовнішніх штрафів.

4. Методом множників вдається знайти умовний мінімум за менше число ітерацій, ніж методом штрафів. При цьому для досягнення збіжності не потрібно спрямовувати r^k до нескінченності. Доведено, що мінімум модифікованої функції Лагранжа, починаючи з якогось r^k, збігається з мінімумом у вихідній задачі. Це призводить також до того, що проблема збільшення яружності не є такою гострою, як у методі штрафів.

5. Знайдена в результаті точка x^* задовольняє умовам Куна-Такера (твердження 1.12 при $\lambda^0 \neq 0$), а $\lambda^k \to \lambda^*$, $\mu^k \to \mu^*$ [8].

Приклад 5.6

Знайти мінімум функції $f(\mathrm{x})$ в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

Розв'язання

1. В поставленій задачі одне обмеження-рівність. Задамо $\varepsilon = 0.001$.

2. Запишемо модифіковану функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x},\lambda^k,r^k) = x_1^2 + x_2^2 + P(\mathrm{x},\lambda^k,r^k) =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1^k(x_1 + x_2 - 2) + \frac{r^k}{2}(x_1 + x_2 - 2)^2 .$$

3. Знайдемо мінімум функції $L(\mathrm{x},\lambda^k,r^k)$:

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda^k,r^k)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1^k + r^k(x_1 + x_2 - 2) = 0 ,$$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda^k,r^k)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1^k + r^k(x_1 + x_2 - 2) = 0 .$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, маємо $x_1 = x_2$ і $x_1^*(\lambda_1^k,r^k) = x_2^*(\lambda_1^k,r^k) = \dfrac{r^k - 0.5\lambda_1^k}{1 + r^k}$. Достатні умови мінімуму задовольняються, оскільки матриця Гессе $H = \begin{pmatrix} 2 + r^k & r^k \\ r^k & 2 + r^k \end{pmatrix} > 0$ в силу того, що $\Delta_1 = 2 + r^k > 0$, $\Delta_2 = 4 + 4r^k > 0$ при $r^k > 0$. Формула перерахування множників має вигляд

$$\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + r^k\left[x_1^*(\lambda_1^k,r^k) + x_2^*(\lambda_1^k,r^k) - 2\right] = \lambda_1^k + 2r^k\left[\frac{r^k - 0.5\lambda_1^k}{1 + r^k} - 1\right].$$

Числові результати для послідовності r^k, яка використовується в прикладі 5.2, і різних початкових значеннях λ_1^0 наведені в табл. 5.5.

Розрахунки зупинені при $P\left(\mathrm{x}^*(\lambda_1^k,r^k),\lambda_1^k,r^k\right) < \varepsilon = 0.001$. Зазначимо, що якщо λ_1^0 ближче до $\lambda_1^* = -2$ (див. приклад 5.2), то збіжність

швидша. Якщо $\lambda_1^0 = \lambda_1^* = -2$, то розв'язання перебуває на першій ітерації: $x_1^* = x_2^* = \dfrac{1-0.5(-2)}{1+1} = 1$.

Таблиця 5.5

k	r^k	λ_1^k	$x_1^*(r^k)$, $x_2^*(r^k)$	P	λ_1^k	$x_1^*(r^k)$, $x_2^*(r^k)$	P
0	1	0	0.5	0.5	–1	0.75	0.625
1	2	–1	0.8333	0.444	–1.5	0.9167	0.2777
2	10	–1.666	0.9848	0.058	–1.833	0.9924	0.0289
3	100	–1.969	0.9998	0.00079	–1.9853	0.99993	0.00029

В таблиці 5.5 прийнято позначення $P = P\left(\mathrm{x}^*(\lambda_1^k, r^k), \lambda_1^k, r^k\right)$.

Приклад 5.7

Знайти мінімум функції $f(\mathrm{x})$ в задачі

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 - 1 = 0,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0.$$

Розв'язання

1. В поставленій задачі одне обмеження-рівність і одне обмеження-нерівність. Задамо $\varepsilon = 0.001$.

2. Запишемо модифіковану функцію Лагранжа:

$$L(\mathrm{x}, \lambda^k, \mu^k, r^k) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda^k(x_1 - 1) + \frac{r^k}{2}(x_1 - 1)^2 +$$

$$+\frac{1}{2r^k}\left\{\left[\max\left\{0,\ \mu^k + r^k(x_1 + x_2 - 2)\right\}\right]^2 - (\mu^k)^2\right\}.$$

3. Знайдемо безумовний мінімум $L(\mathrm{x}, \lambda^k, \mu^k, r^k)$:

$$\frac{\partial L(\mathrm{x}, \lambda^k, \mu^k, r^k)}{\partial x_1} = 0 = \begin{cases} 2x_1 + \lambda^k + r^k(x_1 - 1), & \mu^k + r^k(x_1 + x_2 - 2) < 0, \\ 2x_1 + \lambda^k + r^k(x_1 - 1) + \mu^k + & \\ \quad + r^k(x_1 + x_2 - 2), & \mu^k + r^k(x_1 + x_2 - 2) > 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial L(\mathrm{x},\lambda^k,\mu^k,r^k)}{\partial x_2}=0=\begin{cases}2x_2, & \mu^k+r^k(x_1+x_2-2)<0,\\ 2x_2+\mu^k+r^k(x_1+x_2-2), & \mu^k+r^k(x_1+x_2-2)>0.\end{cases}$$

Формули для перерахування множників мають вигляд

$$\lambda^{k+1}=\lambda^k+r^k\left[x_1^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)-1\right],$$

$$\mu^{k+1}=\max\left\{0,\ \mu^k+r^k\left[x_1^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)+x_2^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)-2\right]\right\}.$$

Розглянемо два випадки:

1) Нехай $\mu^k+r^k(x_1+x_2-2)<0$. Тоді $x_2^*=0$, $x_1^*(\lambda^k,r^k)=\dfrac{r^k-\lambda^k}{2+r^k}$.

2) Нехай $\mu^k+r^k(x_1+x_2-2)>0$. Тоді

$$x_1^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)=\frac{2r^k-2\mu^k-2\lambda^k-r^k\lambda^k+(r^k)^2}{4+6r^k+(r^k)^2};$$

$$x_2^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)=\frac{r^k\left(2-x_1^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)\right)-\mu^k}{2+r^k}.$$

Вважаємо $\lambda^0=0$, $\mu^0=1$, $r^0=1$.

По формулі для першого випадку

$$x_1^*(\lambda^0,\mu^0,r^0)=\frac{1-0}{2+1}=0.333,\ x_2^*=0.$$

При цьому $\mu^0+r^0\left[x_1^*(\lambda^0,\mu^0,r^0)+x_2^*(\lambda^0,\mu^0,r^0)-2\right]=-0.666<0$, тобто умова виконується.

По формулі для другого випадку

$$x_1^*(\lambda^0,\mu^0,r^0)=\frac{2-2-0-0+1}{4+6+1}=0.0909;$$

$$x_2^*(\lambda^0,\mu^0,r^0)=\frac{1\cdot(2-0.0909)-1}{2+1}=-0.303.$$

При цьому $\mu^0+r^0\left[x_1^*(\lambda^0,\mu^0,r^0)+x_2^*(\lambda^0,\mu^0,r^0)-2\right]=-0.606<0$, що суперечить умові.

При цьому для першого випадку

$$\lambda^1=\lambda^0+r^0\left[x_1^*(\lambda^0,\mu^0,r^0)-1\right]=0+1\cdot(0.333-1)=-0.666$$

$$\mu^1 = \max\left\{0,\ \mu^0 + r^0\left[x_1^*(\lambda^0,\mu^0,r^0) + x_2^*(\lambda^0,\mu^0,r^0) - 2\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{0,\ 1 + 1\cdot\left[0.333 - 2\right]\right\} = 0.$$

Можна перевірити, що аналогічна ситуація має місце при інших значеннях параметрів, які використовуються при розрахунках в даному прикладі. Числові результати наведені в таблиці 5.6.

Таблиця 5.6

k	r^k	λ^k	μ^k	$x_1^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)$	$x_2^*(\lambda^k,\mu^k,r^k)$	P
0	1	0	1	0.333	0	–0.277
1	2	–0.666	0	0.666	0	0.333
2	10	–1.334	0	0.9445	0	0.0894
3	100	–1.889	0	0.9989	0	0.00213
4	1000	–1.999	0	0.99999	0	0.0005

У таблиці 5.6 прийнято позначення $P = P\left(\mathrm{x}^*(\lambda^k,\mu^k,r^k),\lambda^k,\mu^k,r^k\right)$.

Порівнюючи із прикладом 5.4, можна зробити висновок про те, що метод множників збігається швидше методу штрафів, а $\lambda^k \to \lambda_1^* = -2$ $\mu^k \to \lambda_2^* = 0$.

5.5. Метод проекції градієнта

Серед методів можливих напрямків (або проективних методів) найбільш відомим є *метод проекції градієнта* (метод Розена (Rozen J. B.)), який застосовується в задачах пошуку умовного екстремуму з обмеженнями типу рівностей і нерівностей. Метод проекції градієнта враховує обмеження в явній формі і реалізується по траєкторії, що забезпечує поліпшення значень цільової функції і не виходить за межі області припустимих розв'язків.

Застосування методу в задачах з обмеженнями типу рівностей

Постановка задачі Знайти мінімум диференційовної функції $f(\mathrm{x})$ при обмеженнях $g_i(\mathrm{x}) = 0$, $i = 1,..,m$, тобто таку точку $\mathrm{x}^* \in X \subset R^n$, що

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x}\in X} f(\mathrm{x}), \tag{5.4}$$
$$X = \left\{ \mathrm{x} \mid g_i(\mathrm{x}) = 0,\ i = 1,..,m,\ m < n \right\},$$

де функції $g_i(\mathrm{x})$, $i = 1,..,m$, є диференційовними функціями x.

Стратегія розв'язання задачі Стратегія пошуку розв'язку задачі (5.4) методом проекції градієнта заключається в побудові послідовності точок $\{\mathrm{x}^k\}$, що обчислюються за правилом

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \delta\mathrm{x}^k, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{5.5}$$

де $\delta\mathrm{x}^k$ є вектор, який обчислюється для кожного значення k. Приріст $\delta\mathrm{x}^k$ визначається з умови проекції вектора $-t_k \nabla f(\mathrm{x}^k)$, $k = 0,1,\ldots$ на *апроксимуючу площину*, що задається рівнянням

$$A_k \delta\mathrm{x}^k = \tau_k, \tag{5.6}$$

яка апроксимує в точці x^k, $k = 0,1,\ldots$, поверхня S, що задається рівняннями $g_i(\mathrm{x}) = 0$, $i = 1,..,m$. Тут A_k – матриця розміру $(m \times n)$ виду

$$A_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(\mathrm{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_1(\mathrm{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial g_m(\mathrm{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_m(\mathrm{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^k}, \tag{5.7}$$

а τ_k – вектор стовпець, $\tau_k = -\left(g_1(\mathrm{x}^k); \ldots; g_m(\mathrm{x}^k)\right)^T$.

На рис. 5.8 в точці $\mathrm{x}^k = (1;\ 0.5)^T$ побудована апроксимуюча пряма для задачі:

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 16 = 0.$$

Її рівняння $x_1 + 2x_2 = 9$, оскільки $A_k = (2x_1;\ 8x_2)|_{x^k=(1;\ 0.5)^T} = (2;4)$; $\delta\mathrm{x} = (x_1 - x_1^k;\ x_2 - x_2^k)^T = (x_1 - 1;\ x_2 - 0.5)^T$; $A_k \delta\mathrm{x} = \tau_k = -g_1(\mathrm{x}^k)$ і отже $2(x_1 - 1) + 4(x_2 - 0.5) = 14$.

Вектор $\delta\mathrm{x}^k$ визначається за формулою

$$\delta \mathrm{x}^k = \delta_1 \mathrm{x}^k + \delta_2 \mathrm{x}^k, \tag{5.8}$$

де $\delta_1 \mathrm{x}^k$ називається *градієнтною складового приросту*; вона дорівнює

$$\delta_1 \mathrm{x}^k = -t_k \left[E - A_k^T \left(A_k A_k^T \right)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k) = -t_k \Delta \mathrm{x}^k \tag{5.9}$$

і має наступну властивість: градієнтна складова приросту $\delta_1 \mathrm{x}^k$ в лінійному наближенні не міняє вектор відхилу умов зв'язку. Це означає, що під дією градієнтної складової точка x^k рухається паралельно або по площині $A_k \delta \mathrm{x}^k = \tau_k$ (рис. 5.8). Складова $\delta_2 \mathrm{x}^k$ називається *компенсаційною складовою приросту* і дорівнює $\delta_2 \mathrm{x}^k = A_k^T \left(A_k A_k^T \right)^{-1} \tau_k$. Ця складова має, у лінійному наближенні, властивість компенсувати вектор відхилу умов зв'язку на величину τ_k. Під дією складової $\delta_2 \mathrm{x}^k$ здійснюється проекція точки x^k на площину $A_k \delta \mathrm{x}^k = \tau_k$ (рис. 5.8).

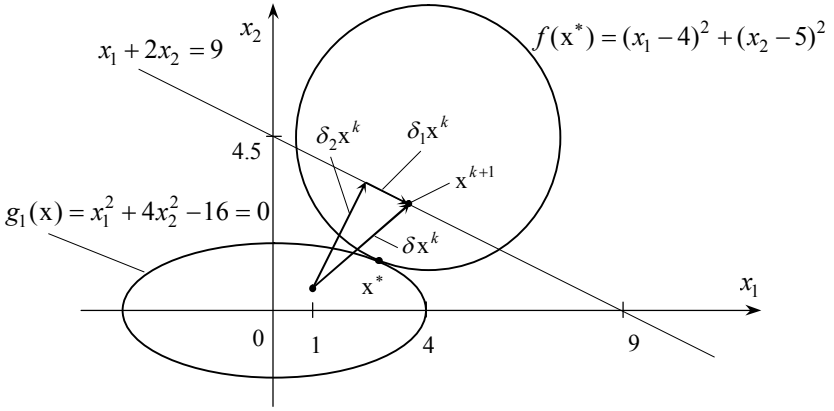


Рис. 5.8

Величина кроку t_k може вибиратися як з умови спадання $f(\mathrm{x})$ при переході із точки x^k в точку $\mathrm{x}^k - t_k \left[E - A_k^T \left(A_k A_k^T \right)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k)$ так і з умови

$$\varphi(t_k) = f\left(\mathrm{x}^k - t_k \left[E - A_k^T \left(A_k A_k^T \right)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k) \right) \to \min_{t_k}. \tag{5.10}$$

Задача (5.10) може розв'язуватись або з використанням необхідних і достатніх умов мінімуму: $\varphi'(t_k^*) = 0$, $\varphi''(t_k^*) > 0$, що застосовуються безпосередньо до функції $\varphi(t_k)$ або до апроксимуючих її поліномів, або з використанням чисельних методів.

Розрахунок закінчується в точці x^k, в якій $\| \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon$, $\| \delta_2 \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon$, де ε – задана точність. В отриманій точці x^k потрібна обов'язкова перевірка виконання достатніх умов мінімуму функції в задачі (5.4). Точна рівність $\delta_1 \mathrm{x}^k = -t_k \left[E - A_k^T \left(A_k A_k^T \right)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k) = 0$ свідчить про точне виконання необхідних умов екстремуму, при цьому вектор множників Лагранжа визначається за формулою

$$\lambda^k = -\left(A_k A_k^T \right)^{-1} A_k \nabla f(\mathrm{x}^k). \qquad (5.11)$$

Знання наближення λ^k вектора λ^*, обумовленого формулою (5.11), дозволить здійснити перевірку достатніх умов в точці x^k.

Зауваження 5.6. Якщо в задачі (5.4) обмеження лінійні, тобто мають вигляд $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1,...,m$, то матриця A постійна. Це означає, що в силу властивості складової $\delta_2 \mathrm{x}^k$ матриця обчислюється один раз в точці x^0. При цьому початкова точка попадає в область припустимих розв'язків за одну ітерацію. Подальший процес побудови послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ пов'язаний з обчисленням складової $\delta_1 \mathrm{x}^k$.

Алгоритм

1. Задати початкову точку x^0; $\varepsilon \ge 0$; число ітерацій M.

2. Вважати $k = 0$.

3. Перевірити виконання умови $k \ge M$:

а) якщо нерівність виконана, то розрахунок закінчено. Обчислити λ^k, перевірити необхідні і достатні умови мінімуму і оцінити результат;

б) якщо нерівність не виконана, то перейти до кроку 4.

4. Обчислити матрицю

$$A_k = \left(\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial g_1(\mathrm{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_1(\mathrm{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial g_m(\mathrm{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_m(\mathrm{x})}{\partial x_n} \end{array} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^k} .$$

5. Обчислити $\tau_k = -\mathrm{g}(\mathrm{x}^k) = -\left(g_1(\mathrm{x}^k); \ldots; g_m(\mathrm{x}^k)\right)^T$.

6. Обчислити $\delta_2 \mathrm{x}^k = A_k^T \left(A_k A_k^T\right)^{-1} \tau_k$.

7. Обчислити $\| \delta_2 \mathrm{x}^k \|$.

8. Обчислити $\nabla f(\mathrm{x}^k)$.

9. Обчислити $\Delta \mathrm{x}^k = -\left[E - A_k^T \left(A_k A_k^T\right)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

10. Перевірити виконання умов $\| \Delta \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon$ і $\| \delta_2 \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon$:

а) якщо $\| \Delta \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon$ й $\| \delta_2 \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon$, то розрахунок закінчено. Перейти до обчислення λ^k за формулою (5.11) і перевірки достатніх умов мінімуму.

б) якщо $\| \Delta \mathrm{x}^k \| > \varepsilon$, $\| \delta_2 \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon$, то вважати $\delta_2 \mathrm{x}^k = 0$ і перейти до кроку 11;

в) якщо $\| \Delta \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon$, $\| \delta_2 \mathrm{x}^k \| > \varepsilon$, то вважати $\Delta \mathrm{x}^k = 0$ і перейти до кроку 13;

г) якщо $\| \Delta \mathrm{x}^k \| > \varepsilon$, $\| \delta_2 \mathrm{x}^k \| > \varepsilon$, то перейти до кроку 11.

11. Одержати точку $\mathrm{x}^k + t_k^* \Delta \mathrm{x}^k$.

12. Визначити t_k^* з умови $f(\mathrm{x}^k + t_k^* \Delta \mathrm{x}^k) \to \min\limits_{t_k}$.

13. Обчислити $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + t_k^* \Delta \mathrm{x}^k + \delta_2 \mathrm{x}^k$. Вважати $k = k+1$ і перейти до кроку 3.

Зауваження 5.7. Якщо обмеження в задачі лінійні, то при $k \ge 1$ на кроці 3 переходимо до кроку 8. На кроці 10 варто вважати $\| \delta_2 \mathrm{x}^k \| = 0$.

Збіжність

Оскільки проекція вектора $-t_k \nabla f(\mathrm{x}^k)$ здійснюється для кожного значення k на множину $Q = \left\{ \mathrm{x} \mid A_k(\mathrm{x} - \mathrm{x}^k) = \tau_k,\ \mathrm{x} \in R^n \right\}$, то алгоритм методу проекції градієнта збігається для опуклих, диференційовних на R^n функцій $f(\mathrm{x})$, градієнт яких задовольняє умові Ліпшица (див. означення 1.11).

Теорема 5.6. *Нехай $f(\mathrm{x})$ опукла, диференційовна на R^n функція, градієнт якої задовольняє на множині Q умові Ліпшица з константою L. Нехай множина Q – опукла і замкнена множина розв'язків задачі, $X^* = \operatorname{Arg}\min\limits_{\mathrm{x} \in Q} f(\mathrm{x})$ не порожня, а $0 < t_k < (2/L)$. Тоді $\mathrm{x}^k \to \mathrm{x}^* \in X^*$ і, якщо $f(\mathrm{x})$ сильно опукла, $\mathrm{x}^k \to \mathrm{x}^*$ зі швидкістю геометричної прогресії* [25].

Приклад 5.8

Розв'язати задачу методом проекції градієнта:

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min\ ;\ g_1(\mathrm{x}) = x_1 + x_2^2 - 4 = 0\,.$$

Розв'язання

1. Задамо $\mathrm{x}^0 = (0;\ 0)$; $\varepsilon = 0.05$; $M = 5$.

2. Задамо $k = 0$.

3^0. Перевіряємо умову $k \ge M$: $k = 0 < 5 = M$.

4^0. Обчислюємо матрицю $A_0 = (1;\ 2x_2)_{\mathrm{x}^0} = (1;\ 0)$.

5^0. Обчислюємо $\tau_0 = -(0 + 0 - 4) = 4$.

6^0. Одержимо $\delta_2 \mathrm{x}^0 = (1;\ 0)^T \cdot 1 \cdot 4 = (4;\ 0)^T$.

7^0. Обчислюємо $\| \delta_2 \mathrm{x}^0 \| = 4$.

8^0. Обчислюємо $\nabla f(\mathrm{x}^0) = (-8; -10)^T$.

9^0. Обчислюємо $\Delta \mathrm{x}^0 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0.5 \cdot (1;\ 0) \right] \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

10^0. Перевіряємо виконання умов $\| \Delta \mathrm{x}^0 \| \le \varepsilon$, $\| \delta_2 \mathrm{x}^0 \| \le \varepsilon$:

$$\| \Delta \mathrm{x}^0 \| = 10 > \varepsilon = 0.05\,,\ \| \delta_2 \mathrm{x}^0 \| = 4 > \varepsilon = 0.05\,.$$

11^0. Одержимо точку $\mathrm{x}^0 + t_0 \Delta \mathrm{x}^0 = (0;\ 10 t_0)^T$.

12^0. Визначаємо t_0^* з $f(\mathrm{x}^0 + t_0^*\Delta\mathrm{x}^0) = \min\limits_{t_0} f(\mathrm{x}^0 + t_0\Delta\mathrm{x}^0)$: $t_0^* = 0.5$.

13^0. Обчислюємо

$\mathrm{x}^1 = \mathrm{x}^0 + t_0^*\Delta\mathrm{x}^0 + \delta_2\mathrm{x}^0 = (0;0)^T + (0;5)^T + (4;0)^T = (4;5)^T$ (рис. 5.9).

Вважаємо $k = 1$, переходимо до кроку 3.

3^1. Перевіряємо умову $k \geq M$: $k = 1 < 5 = M$.

4^1. Обчислюємо матрицю $A_1 = (1;\ 2x_2)_{\mathrm{x}^1} = (1;\ 10)$.

5^1. Обчислюємо $\tau_1 = -(4 + 25 - 4) = -25$.

6^1. Одержимо $\delta_2\mathrm{x}^1 = (-0.248;\ 2.48)^T$.

7^1. Обчислюємо $\| \delta_2\mathrm{x}^1 \| = 2.49$.

8^1. Обчислюємо $\nabla f(\mathrm{x}^1) = (0;\ 0)^T$.

9^1. Обчислюємо $\Delta\mathrm{x}^1 = (0;\ 0)^T$.

10^1. Перевіряємо виконання умов $\| \Delta\mathrm{x}^1 \| \leq \varepsilon$, $\| \delta_2\mathrm{x}^1 \| \leq \varepsilon$:

$\| \Delta\mathrm{x}^1 \| = 0 < \varepsilon = 0.05$, $\| \delta_2\mathrm{x}^1 \| = 2.49 > \varepsilon = 0.05$. Переходимо до кроку 13.

13^1. Обчислюємо:

$\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^1 + \delta_2\mathrm{x}^1 = (4;5)^T + (-0.248;\ -2.48)^T = (3.752;\ 2.52)^T$ (рис. 5.9).

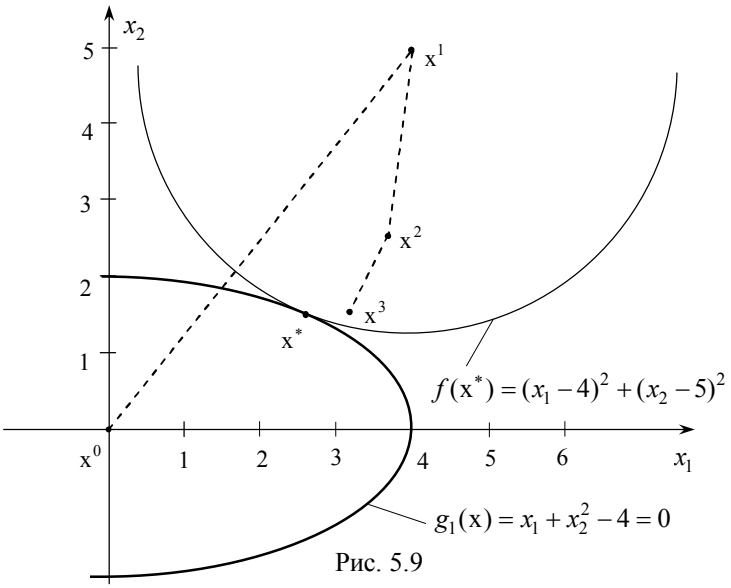


Рис. 5.9

Вважаємо $k = 2$, переходимо до кроку 3.

3^2. Перевіряємо умову $k \geq M$: $k = 2 < 5 = M$.

4^2. Обчислюємо матрицю $A_2 = (1;\ 2x_2)_{x^2} = (1;\ 5.04)$.

5^2. Обчислюємо $\tau_2 = -(3.752 + 6.32 - 4) = -6.07$.

6^2. Одержимо $\delta_2 x^2 = (-0.23;\ -1.16)^T$.

7^2. Обчислюємо $\| \delta_2 x^2 \| = 1.18$.

8^2. Обчислюємо $\nabla f(x^2) = (-0.496;\ -4.96)^T$.

9^2. Обчислюємо

$$\Delta x^2 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.038 & 0.19 \\ 0.19 & 0.69 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -0.496 \\ -4.96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.475 \\ 0.103 \end{pmatrix}.$$

10^2. Перевіряємо виконання умов $\| \Delta x^2 \| \leq \varepsilon$, $\| \delta_2 x^2 \| \leq \varepsilon$: $\| \Delta x^2 \| = 0.486 > \varepsilon = 0.05$, $\| \delta_2 x^2 \| = 1.18 > \varepsilon = 0.05$. Переходимо до кроку 11.

11^2. Одержимо $x^2 + t_2^* \Delta x^2 = (3.752 - t_2^* \cdot 0.475;\ 2.52 + t_2^* \cdot 0.103)^T$.

12^2. Визначаємо $t_2^* = \dfrac{0.138}{0.236} = 0.585$.

13^2. Обчислюємо $x^3 = x^2 + t_2^* \Delta x^2 + \delta_2 x^2 =$

$= (3.752;\ 2.52)^T + 0.585 \cdot (-0.475;\ 0.103)^T + (-0.23;\ -1.16)^T = (3.244; 1.42)^T$ (рис. 5.9). Вважаємо $k = 3$, переходимо до кроку 3.

3^3. Перевіряємо умову $k \geq M$: $k = 3 < 5 = M$.

4^3. Обчислюємо матрицю $A_3 = (1;\ 2x_2)_{x^3} = (1;\ 2.84)$.

5^3. Обчислюємо $\tau_3 = -(3.244 + 2.02 - 4) = -1.264$.

6^3. Одержимо $\delta_2 x^3 = (-0.139;\ -0.394)^T$.

7^3. Обчислюємо $\| \delta_2 x^3 \| = 0.41$.

8^3. Обчислюємо $\nabla f(x^3) = (-1.512;\ -7.160)^T$.

9^3. Обчислюємо

$$\Delta x^3 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.110 & 0.314 \\ 0.314 & 0.89 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1.512 \\ -7.160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.89 \\ 0.314 \end{pmatrix}.$$

10^3. Перевіряємо виконання умов $\| \Delta x^3 \| \le \varepsilon$, $\| \delta_2 x^3 \| \le \varepsilon$:

$\| \Delta x^3 \| = 0.94 > \varepsilon = 0.05$, $\| \delta_2 x^3 \| = 0.41 > \varepsilon = 0.05$. Переходимо до кроку 11.

11^3. Одержимо $x^3 + t_3^* \Delta x^3 = (3.244 - 0.89 t_3^*; 1.42 + 0.314 t_3^*)^T$.

12^3. Визначаємо $t_3^* = \dfrac{0.445}{0.89} = 0.5$.

13^3. Обчислюємо $x^4 = x^3 + t_3^* \Delta x^3 + \delta_2 x^3 =$

$= (3.244; 1.42)^T + 0.5 \cdot (-0.89; 0.314)^T + (-0.139; -0.394)^T = (2.66; 1.18)^T$.

Вважаємо $k = 4$, переходимо до кроку 3.

3^4. Перевіряємо умову $k \ge M$: $k = 4 < 5 = M$.

4^4. Обчислюємо матрицю $A_4 = (1; 2x_2)_{x^4} = (1; 2.36)$.

5^4. Обчислюємо $\tau_4 = -(2.66 + 1.39 - 4) = -0.05$.

6^4. Одержимо $\delta_2 x^4 = (-0.0076; -0.018)^T$.

7^4. Обчислюємо $\| \delta_2 x^4 \| = 0.019$.

8^4. Обчислюємо $\nabla f(x^3) = (-2.72; -7.64)^T$.

9^4. Обчислюємо

$$\Delta x^4 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.152 & 0.36 \\ 0.36 & 0.848 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2.72 \\ -7.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.45 \\ 0.18 \end{pmatrix}.$$

10^4. Перевіряємо виконання умов $\| \Delta x^4 \| \le \varepsilon$, $\| \delta_2 x^4 \| \le \varepsilon$:

$\| \Delta x^4 \| = 0.48 > \varepsilon = 0.05$, $\| \delta_2 x^4 \| = 0.019 < \varepsilon = 0.05$. Вважаємо $\delta_2 x^4 = 0$ і переходимо до кроку 11.

11^4. Одержимо $x^4 + t_4^* \Delta x^4 = (2.66 - 0.45 t_4^*; 1.18 + 0.18 t_4^*)^T$.

12^4. Визначаємо $t_4^* = \dfrac{0.09}{0.237} = 0.39$.

13^4. Обчислюємо $x^5 = x^4 + t_4^* \Delta x^4 + \delta_2 x^4 = (\text{где } \delta_2 x^4 = 0) =$

$= (2.66; 1.18)^T + 0.39 \cdot (-0.45; 0.18)^T = (2.48; 1.25)^T$.

Вважаємо $k = 5$, переходимо до кроку 3.

3^5. Перевіряємо умову $k \ge M$: $k = 5 = M$.

Розрахунок закінчений, обчислимо λ^5 і перевіримо необхідні і достатні умови мінімуму. Знаходимо (5.11)

$$\lambda^5 = -\left(\frac{1}{7.25}\right)(1;\ 2.5)\begin{pmatrix}-3.04\\-7.5\end{pmatrix} = 3.001.$$

Випишемо необхідні умови екстремуму (розділ 1.3) з врахуванням вигляду функції Лагранжа $L(\mathrm{x},\lambda) = (x_1-4)^2 + (x_2-5)^2 + \lambda(x_1 + x_2^2 - 4)$:

$$2(x_1-4) + \lambda = 0,$$
$$2(x_2-5) + 2\lambda x_2 = 0,$$
$$x_1 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Будемо вважати, що необхідні умови виконані, якщо абсолютна величина відхилу будь-якого з цих рівностей не перевищує 0.1. В результаті підстановки точки x^5 і λ^5 одержимо

$$2(2.48-4) + 3.001 = -0.04,$$
$$2(1.25-5) + 2\cdot 1.25\cdot 3.001 = 0,$$
$$2.48 + 1.25^2 - 4 = 0.04.$$

Звідси маємо, що необхідні умови виконуються. Перевіримо достатні умови екстремуму. Одержимо d^2L:

$$d^2L = 2dx_1^2 + 2(1+3)dx_2^2 = 2\,dx_1^2 + 8\,dx_2^2.$$

Додаткова умова $dx_1 + 2\,x_2 dx_2 = 0$. Звідси $d^2L = 20.5\,dx_2^2 > 0$.

Висновок: точка $\mathrm{x}^5 = (2.48;\ 1.25)^T$ є наближенням точки мінімуму x^* (табл.1.1, рядок 1).

Застосування методу в задачах з обмеженнями типу нерівностей

Постановка задачі Знайти мінімум диференційовної функції $f(\mathrm{x})$ при обмеженнях $g_i(\mathrm{x}) \le 0$, $i = 1,..,m$, тобто таку точку $\mathrm{x}^* \in X \subset R^n$, що

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x}\in X} f(\mathrm{x}), \qquad (5.12)$$
$$X = \left\{ \mathrm{x} \mid g_i(\mathrm{x}) \le 0,\ i = 1,..,m \right\},$$

де функції $g_i(\mathrm{x})$, $i = 1,..,m$, є диференційовними функціями від x.

Стратегія розв'язання задачі

Стратегія пошуку розв'язку задачі (5.12) методом проекції градієнта враховує той факт, що розв'язок x^* може лежати як всередині, так і на межі множини припустимих розв'язків.

Для визначення наближення розв'язку x^* будується послідовність точок $\{\mathrm{x}^k\}$: $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \delta\mathrm{x}^k$, $k = 0,1,...$, де приріст $\delta\mathrm{x}^k$ визначається в кожній точці x^k залежно від того, де ведеться пошук – всередині або на межі множини припустимих розв'язків.

Розв'язання задачі починається з обходу межі припустимої області. Обхід межі множини припустимих розв'язків пов'язаний з виявленням *активних* в точці x^k обмежень $g_A = (g_1,...,g_p)^T$, апроксимацією їхньою площиною

$$A_k\delta\mathrm{x} = \tau_k\,, \tag{5.13}$$

де $A_k = \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{\mathrm{x}=\mathrm{x}^k}$ – матриця розміру $(p\times n)$, $p \le n$; $\tau_k = -g_A(\mathrm{x}^k)$, і проекцією на неї вектора $-t_k\nabla f(\mathrm{x}^k)$. Для виявлення нерівностей, активних в точці x^k, задається похибка визначення активних обмежень $\varepsilon_1 \le 0$. Активними вважаються ті обмеження, для яких $\varepsilon_1 \le g_i(\mathrm{x}) \le 0$. Число p обмежень, активних в точці x^k, не повинне перевищувати n – розмірності вектора x.

Пошук обмежень, активних в точці x^k, розглядається як самостійна задача, що може бути розв'язана шляхом послідовних наближень. Задається точка x^k і обчислюється $g_i(\mathrm{x})$, $i = 1,..,m$. Якщо $g_i(\mathrm{x}) < \varepsilon_1$, то вибираються будь-які p обмежень із найменшими за абсолютною величиною відхилами $\rho_i^k = g_i(\mathrm{x}^k)$ в точці x^k, будується матриця A_k, обчислюється τ_k і знаходиться точка

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + A_k^T(A_kA_k^T)^{-1}\tau_k\,, \tag{5.14}$$

потім знову обчислюються відхили обраних p обмежень. Уточнення за формулою (5.14) здійснюється доти, поки не буде знайдена точка x^k, в якій $\varepsilon_1 \le g_i(\mathrm{x}) \le 0$. Проекція вектора $-t_k\nabla f(\mathrm{x}^k)$ в точці x^k, в якій активні p обмежень, визначається точкою

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k - t_k \left[E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k), \qquad (5.15)$$

де приріст $\delta \mathrm{x}^k = -t_k \left[E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k)$ здійснює рух по площині $A_k \delta \mathrm{x} = \tau_k$ в напрямку спадання $f(\mathrm{x})$. Величина t_k вибирається так: $t_k = \min\left[t_k^* \geq 0; t_{k\max} \geq 0 \right]$, де t_k^* є крок, при якому

$$f\left(\mathrm{x}^{k+1}(t_k^*)\right) = \min_{t_k} f\left(\mathrm{x}^{k+1}(t_k)\right) \text{ (див. (5.15))},$$

а $t_{k\max}$ – найменший крок, при якому

$$g_i\left(\mathrm{x}^k - t_{k\max}\left[E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k)\right) \leq 0$$

для всіх обмежень, які не були активними в точці x^k. Зрозуміло що, відхили обмежень в точці x^{k+1} змінюються, і тому обчисленню точки x^{k+2} повинна передувати процедура вибору активних обмежень, описана вище.

Процедура обчислення точок послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$ забезпечує послідовний рух вздовж межі припустимої області. При виконанні нерівності $\| \Delta \mathrm{x}^k \| = \left\| -\left[E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k) \right\| \leq \varepsilon_2$, де ε_2 – задане досить мале додатне число, обчислюється наближення λ^k вектора множників Лагранжа λ^*:

$$\lambda^k = -(A_k A_k^T)^{-1} A_k \nabla f(\mathrm{x}^k) \ . \qquad (5.16)$$

Якщо $\lambda^k \geq 0$, то в точці x^k виконано необхідні умови мінімуму і в ній треба бути перевірити достатні умови. Якщо серед множників λ_i^k є невід'ємні, то це означає, що x^k не є наближенням точки x^*, оскільки в ній не виконано необхідні умови мінімуму $f(\mathrm{x})$ при обмеженнях $g_i(\mathrm{x}) \leq 0$, $i = 1,..,m$ (див. теорему 1.7). Однак вибір кроку t_k дозволяє говорити про те, що значення $f(\mathrm{x})$ не може бути зменшене при заданому наборі активних обмежень і, отже, процес мінімізації $f(\mathrm{x})$ необхідно продовжити, зменшивши їхнє число: в число пасивних переводиться те з обмежень, якому відповідає найбільший за абсолютним значенням невід'ємний множник λ_i^k. Така процедура пошуку дозволяє відшукати розв'язок, що лежить як на межі, так і всередині множини припустимих розв'язків.

Алгоритм

1. Задати x^0, $\varepsilon_1 \le 0$, $\varepsilon_2 \ge 0$, число ітерацій M.

2. Вважати $k = 0$.

3. Перевірити виконання умови $k \ge M$:

а) якщо нерівність виконана, то розрахунок закінчено, перейти до обчислення λ^k і оцінки результату;

б) в противному випадку перейти до кроку 4.

4. Обчислити $g_i(\mathrm{x}^k)$, $i = 1,..,m$.

5. Перевірити виконання умов $\varepsilon_1 \le g_i(\mathrm{x}^k) \le 0$, $i = 1,..,m$:

а) якщо нерівність виконана хоча б для одного i, обчислити $\nabla f(\mathrm{x}^k)$. Якщо $\nabla f(\mathrm{x}^k) \ne 0$, перейти до кроку 7. Якщо $\nabla f(\mathrm{x}^k) = 0$ при $k > 0$, перейти до кроку 9, а якщо $\nabla f(\mathrm{x}^0) = 0$, то варто перевірити точку x^0 на приналежність області припустимих розв'язків. Якщо $\mathrm{x}^0 \in X$, перейти до кроку 9. В противному випадку задати заново точку x^0 і перейти до кроку 4;

б) якщо жодна з умов не виконується, перейти до кроку 6.

6. Обчислити точку x^ν, в якій виконується умова $\varepsilon_1 \le g_i(\mathrm{x}^\nu) \le 0$, принаймні для одного значення i: $\mathrm{x}^\nu = \mathrm{x}^k + \ + A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} \tau_k$. Вважати $\mathrm{x}^k = \mathrm{x}^\nu$ і перейти до кроку 7.

7. Обчислити $\Delta \mathrm{x}^k = -\left[E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k \right] \nabla f(\mathrm{x}^k)$.

8. Перевірити умову $\| \Delta \mathrm{x}^k \| \le \varepsilon_2$:

а) якщо нерівність виконується, перейти до кроку 9;

б) якщо ні - до кроку 10.

9. Обчислити вектор $\lambda^k = -(A_k A_k^T)^{-1} A_k \nabla f(\mathrm{x}^k)$. Якщо $\lambda^k \ge 0$, то розрахунок закінчено, перевірити достатні умови мінімуму. Якщо ні, то виключити із складу активних обмеження (воно переводиться в пасивні), якому відповідає найбільший за абсолютною величиною невід'ємний множник, і перейти до кроку 7 (при цьому з матриці A_k знищується рядок, що відповідає виключеному обмеженню).

10. Отримати точку $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + t_k \Delta \mathrm{x}^k$.

11. Визначити t_k. Для цього треба:

а) обчислити t_k^* з умови $f(\mathrm{x}^k + t_k \Delta \mathrm{x}^k) \to \min\limits_{t_k \ge 0}$;

б) для всіх пасивних в точці x^k обмежень, крім переведених в пасивні на кроці 9, визначити величину t_k^i з умов $g_i(\mathrm{x}^k + t_k \Delta \mathrm{x}^k) = 0$, $t_k \ge 0$ (якщо умова $g_i(\mathrm{x}^k + t_k \Delta \mathrm{x}^k) = 0$ виконується тільки при $t_k^i < 0$, то t_k^i не обчислюється);

в) знайти величину $t_{k\,\max} = \min\limits_i \{t_k^i\}$;

г) обчислити значення $t_k = \min\{t_k^*;\, t_{k\,\max}\}$.

12. Обчислити $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + t_k \Delta \mathrm{x}^k$. Вважати $k = k+1$ й перейти до кроку 3.

Збіжність

Теорема 5.7. *Нехай $f(\mathrm{x})$ опукла диференційовна на R^n функція, градієнт якої задовольняє на множині Q умові Ліпшица з константою L. Нехай множина Q –опукла і замкнена, множина $X^* = \operatorname{Arg}\min\limits_{\mathrm{x} \in Q} f(\mathrm{x})$ - не порожня, а величина t_k задовольняє умові $0 < t_k < \dfrac{2}{L}$. Тоді $\mathrm{x}^k \to \mathrm{x}^* \in X^*$ й, якщо $f(\mathrm{x})$ сильно опукла, то $\mathrm{x}^k \to \mathrm{x}^*$ зі швидкістю геометричної прогресії* [25].

Приклад 5.9

Знайти мінімум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 1 \le 0,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = -x_1 \le 0,$$
$$g_3(\mathrm{x}) = -x_2 \le 0.$$

Розв'язання

1. Задаємо $\mathrm{x}^0 = (0;\, 0)^T$; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0.1$; $M = 5$.

2. Вважаємо $k = 0$.

3^0. Перевіряємо умову $k \ge M$: $k = 0 < 5 = M$.

4^0. Обчислюємо $g_1(\mathrm{x}^0) = -1 < 0$; $g_2(\mathrm{x}^0) = 0$; $g_3(\mathrm{x}^0) = 0$.

5^0. В точці x^0 активні обмеження - друге і третє обмеження $g_2(\mathrm{x}^0)=0$, $g_3(\mathrm{x}^0)=0$, вони формують матрицю A_0. Оскільки $\nabla f(\mathrm{x}^0)= =(-8;-10)^T\neq 0$, переходимо до кроку 7.

7^0. Обчислюємо $\Delta\mathrm{x}^0=-\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, так як $A_0=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

8^0. Перевіряємо умову $\|\Delta\mathrm{x}^0\|\le\varepsilon_2$: $\|\Delta\mathrm{x}^0\|=0$, переходимо до кроку 9.

9^0. Обчислюємо

$$\lambda^0=-(A_0A_0^T)^{-1}A_0\nabla f(\mathrm{x}^0)=-\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-10\end{pmatrix},$$

знищуємо третє обмеження $g_3(\mathrm{x})=-x_2\le 0$ (воно переходить в пасивні), якому відповідає найбільший за абсолютною величиною множник -10, і переходимо до кроку 7 (при цьому з матриці A_0 знищується другий рядок).

7^1. Обчислюємо $\Delta\mathrm{x}^0=-\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-8\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}$,

оскільки $A_0=\begin{pmatrix}-1&0\end{pmatrix}$.

8^1. Перевіряємо умову $\|\Delta\mathrm{x}^0\|\le\varepsilon_2$: $\|\Delta\mathrm{x}^0\|=10>\varepsilon_2=0.1$, переходимо до кроку 10.

10^0. Одержимо точку $\mathrm{x}^1=\mathrm{x}^0+t_0\Delta\mathrm{x}^0=(0;10t_0)^T$.

11^0. Визначаємо $t_0=\min\left\{t_0^*;t_{0\max}\right\}$: величину t_0^* знаходимо з умови $f(\mathrm{x}^0+t_0^*\Delta\mathrm{x}^0)=\min\limits_{t_0\ge 0}f(\mathrm{x}^0+t_0\Delta\mathrm{x}^0)$: $t_0^*=0.5$; оскільки перше обмеження пасивне в точці x^0, то з умов $10t_0-1=0$ і $t_0\ge 0$ знаходимо $t_0^1=0.1$; третє обмеження в аналогічній процедурі не бере участь, оскільки переведене в пасивні на кроці 9; $t_{0\max}=\min\limits_i\{t_0^i\}=0.1$; $t_0=\min\{0.5;\,0.1\}=0.1$.

12^0. Обчислюємо $\mathrm{x}^1=\mathrm{x}^0+t_0\Delta\mathrm{x}^0=(0;1)^T$. Вважаємо $k=1$ і переходимо до кроку 3.

3^1. Перевіряємо умову $k \ge M$: $k = 1 < 5 = M$.

4^1. Обчислюємо $g_1(\mathrm{x}^1) = 0$; $g_2(\mathrm{x}^1) = 0$; $g_3(\mathrm{x}^1) = -1 < 0$.

5^1. Перевіряємо $\varepsilon_1 \le g_i(\mathrm{x}^1) \le 0$:

$\varepsilon_1 \le g_1(\mathrm{x}^1) = 0$, $\varepsilon_1 \le g_2(\mathrm{x}^1) = 0$, $g_3(\mathrm{x}^1) < \varepsilon_1$. Активними є перше і друге обмеження, вони формують матрицю $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\nabla f(\mathrm{x}^0) \ne 0$. Переходимо до кроку 7.

7^2. Обчислюємо

$$\Delta \mathrm{x}^1 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8^2. Перевіряємо умову $\| \Delta \mathrm{x}^1 \| \le \varepsilon_2$: $\| \Delta \mathrm{x}^1 \| = 0$, переходимо до кроку 9.

9^1. Обчислюємо

$$\lambda^1 = -(A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(\mathrm{x}^1) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\lambda_1^1 = 8$, $\lambda_2^1 = 0$. Необхідні умови мінімуму виконані.

Перевіряємо достатні умови мінімуму: $d^2 L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$. Додаткові умови $dx_1 + dx_2 = 0$, $-dx_1 \le 0$. Звідси $dx_1 = -dx_2 \ge 0$. Отже, $d^2 L = 4dx_2^2 > 0$. Точка $\mathrm{x}^1 = \mathrm{x}^* = (0; 1)^T$ – точка мінімуму функції $f(\mathrm{x})$ (табл. 1.5, рядок 1).

Приклад 5.10

Знайти мінімум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = -x_1 - x_2^2 + 4 \le 0,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = -x_1 \le 0,$$
$$g_3(\mathrm{x}) = -x_2 \le 0.$$

Розв'язання

1. Задаємо $\mathrm{x}^0 = (0; 0)^T$; $\varepsilon_1 = -0.1$; $\varepsilon_2 = 0.1$; $M = 5$.

2. Вважаємо $k = 0$.

3^0. Перевіряємо умову $k \ge M$: $k = 0 < 5 = M$.

4^0. Обчислюємо $g_1(\mathrm{x}^0) = 4$; $g_2(\mathrm{x}^0) = 0$; $g_3(\mathrm{x}^0) = 0$.

5^0. Перевіряємо $\varepsilon_1 \le g_i(\mathrm{x}^0) \le 0$:

$g_1(\mathrm{x}^0) > 0$, $\varepsilon_1 < g_2(\mathrm{x}^0) = 0$, $\varepsilon_1 < g_3(\mathrm{x}^0) = 0$. Активними є друге і третє обмеження, вони формують матрицю A_0; $\nabla f(\mathrm{x}^0) \ne 0$. Переходимо до кроку 7.

7^0. Обчислюємо $\Delta\mathrm{x}^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, оскільки $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8^0. Перевіряємо умову $\| \Delta\mathrm{x}^0 \| \le \varepsilon_2$: $\| \Delta\mathrm{x}^0 \| = 0$, переходимо до кроку 9.

9^0. Обчислюємо

$$\lambda^0 = -(A_0 A_0^T)^{-1} A_0 \nabla f(\mathrm{x}^0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix},$$

знищуємо третє обмеження $g_3(\mathrm{x}) = -x_2 \le 0$ (воно переходить в пасивні), якому відповідає найбільший за модулем множник -10, і переходимо до кроку 7 (при цьому в матриці A_0 знищується другий рядок).

7^1. Обчислюємо $\Delta\mathrm{x}^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, оскільки $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8^1. Перевіряємо умову $\| \Delta\mathrm{x}^0 \| \le \varepsilon_2$: $\| \Delta\mathrm{x}^0 \| = 10 > \varepsilon_2 = 0.1$, переходимо до кроку 10.

10^0. Знаходимо точку $\mathrm{x}^1 = \mathrm{x}^0 + t_0 \Delta\mathrm{x}^0 = (0; 10t_0)^T$.

11^0. Визначаємо t_0: $t_0^* = 0.5$; оскільки перше обмеження пасивне в точці x^0, то з умови $-(10t_0)^2 + 4 = 0$ і $t_0 \ge 0$ знаходимо $t_0^1 = 0.2$; третє обмеження в аналогічній процедурі не бере участь, оскільки переведене в пасивні на кроці 9; $t_{0\max} = \min\limits_i \{t_0^i\} = 0.2$; $t_0 = \min\{0.5; 0.2\} = 0.2$.

12^0. Обчислюємо $\mathrm{x}^1 = \mathrm{x}^0 + t_0 \Delta \mathrm{x}^0 = (0;2)^T$ (рис.5.10). Вважаємо $k = 1$ і переходимо до кроку 3.

3^1. Перевіряємо умову $k \geq M$: $k = 1 < 5 = M$.

4^1. Обчислюємо $g_1(\mathrm{x}^1) = 0$; $g_2(\mathrm{x}^1) = 0$; $g_3(\mathrm{x}^1) = -2 < 0$.

5^1. Перевіряємо $\varepsilon_1 \leq g_i(\mathrm{x}^1) \leq 0$:

$\varepsilon_1 < g_1(\mathrm{x}^1) = 0$, $\varepsilon_1 < g_2(\mathrm{x}^1) = 0$, $g_3(\mathrm{x}^1) < \varepsilon_1$. Активними є перше і друге обмеження, тому $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\nabla f(\mathrm{x}^0) \neq 0$. Переходимо до кроку 7.

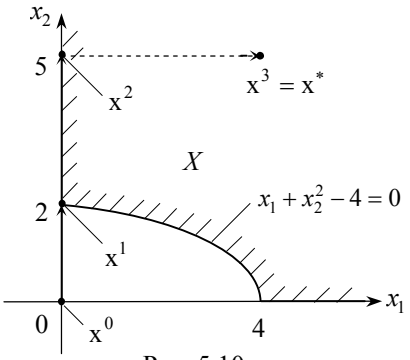


Рис. 5.10

7^2. Обчислюємо

$$\Delta \mathrm{x}^1 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

8^2. Перевіряємо умову $\| \Delta \mathrm{x}^1 \| \leq \varepsilon_2$: $\| \Delta \mathrm{x}^1 \| = 0$, переходимо до кроку 9.

9^1. Обчислюємо

$$\lambda^1 = -(A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(\mathrm{x}^1) = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 6.5 \end{pmatrix}.$$

Знищуємо перше обмеження $g_1(\mathrm{x}) \leq 0$ (воно переходить в пасивні), якому відповідає найбільший за модулем від'ємний множник, і переходимо до кроку 7 (при цьому в матриці A_1 знищується перший рядок).

7^3. Обчислюємо $\Delta x^1 = -\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\cdot(-1 \;\; 0)\right]\cdot\begin{pmatrix}-8\\ -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 6\end{pmatrix}$, оскільки $A_1 = (-1; 0)$.

8^3. Перевіряємо умову $\| \Delta x^1 \| \le \varepsilon_2$: $\| \Delta x^1 \| = 6 > \varepsilon_2$, переходимо до кроку 10.

10^1. Одержимо точку $x^2 = x^1 + t_1 \Delta x^1 = (0; 2 + 6t_1)^T$.

11^1. Визначаємо t_1: $t_1^* = 0.5$; оскільки третє обмеження пасивне в точці x^1, але умови $-(2 + 6t_1) = 0$ виконуються тільки при $t_1 < 0$, то t_1^3 не обчислюється; перше обмеження в аналогічній процедурі не бере участь, оскільки переведене в пасивні тільки на кроці 9; отже, $t_{1\max}$ не обчислюється й $t_1 = t_1^* = 0.5$.

12^1. Обчислюємо $x^2 = x^1 + t_1 \Delta x^1 = (0; 5)^T$ (рис.5.10). Вважаємо $k = 2$ і переходимо до кроку 3.

3^2. Перевіряємо умову $k \ge M$: $k = 2 < 5 = M$.

4^2. Обчислюємо $g_1(x^2) = -21$; $g_2(x^2) = 0$; $g_3(x^2) = -5$.

5^2. Перевіряємо $\varepsilon_1 \le g_i(x^2) \le 0$:

$g_1(x^2) < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 < g_2(x^2) = 0$, $g_3(x^2) < \varepsilon_1$. Активним є друге обмеження, воно формує матрицю A_2; $\nabla f(x^2) \ne 0$. Переходимо до кроку 7.

7^4. Обчислюємо

$$\Delta x^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \text{ оскільки } A_2 = (-1; 0).$$

8^4. Перевіряємо умову $\| \Delta x^2 \| \le \varepsilon_2$: $\| \Delta x^2 \| = 0$.

9^2. Обчислюємо $\lambda^2 = -(A_2 A_2^T)^{-1} A_2 \nabla f(x^2) = -8$. Знищуємо друге обмеження $g_2(x) \le 0$ і переходимо до кроку 7.

7^5. Обчислюємо $\Delta x^2 = -E\nabla f(x^2) = (8; 0)^T$.

8^5. Перевіряємо умову $\| \Delta x^2 \| \le \varepsilon_2$: $\| \Delta x^2 \| = 8 > \varepsilon_2$, переходимо до кроку 10.

10^2. Знаходимо точку $x^3 = x^2 + t_2 \Delta x^2 = (8t_2; 5)^T$.

11^2. Обчислюємо $t_2 = t_2^* = 0.5$.

12^2. Обчислюємо $\mathrm{x}^3 = \mathrm{x}^2 + t_2 \Delta \mathrm{x}^2 = (4;\, 5)^T$ (рис. 5.10). Вважаємо $k = 3$ і переходимо до кроку 3.

3^3. Перевіряємо умову $k \geq M$: $k = 3 < 5 = M$.

4^3. Обчислюємо $g_1(\mathrm{x}^3) = -25$; $g_2(\mathrm{x}^3) = -4$; $g_3(\mathrm{x}^3) = -5$.

5^3. Перевіряємо $\varepsilon_1 \leq g_i(\mathrm{x}^3) \leq 0$:

$g_1(\mathrm{x}^3) < \varepsilon_1$, $g_2(\mathrm{x}^3) < \varepsilon_1$, $g_3(\mathrm{x}^3) < \varepsilon_1$. Обчислюємо $\nabla f(\mathrm{x}^3) = \left(0;\, 0\right)^T$. Переходимо до кроку 9.

9^3. Обчислюємо λ^3: $\lambda_1^3 = 0$, $\lambda_2^3 = 0$, $\lambda_3^3 = 0$.

Перевіряємо достатні умови: $d^2 L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$. Додаткові умови відсутні, оскільки всі три обмеження в точці x^3 пасивні. Точка $x^3 = x^* = (4;\, 5)^T$ – точка мінімуму (табл. 1.5, рядок 1).

5.6. Метод Зойтендейка

Постановка задачі Знайти мінімум двічі неперервно диференційовної функції $f(\mathrm{x})$ за умови, що точка $\mathrm{x} \in R^n$ задовольняє обмеженням $g_i(\mathrm{x}) \leq 0$, $i = 1,..,m$, в яких функції $g_i(\mathrm{x})$, $i = 1,..,m$ також двічі неперервно диференційовані функції від x, тобто знайти таку точку $\mathrm{x}^* \in X$, що

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}); \tag{5.17}$$

$$X = \left\{ \mathrm{x} \mid g_i(\mathrm{x}) \leq 0,\ i = 1,..,m \right\}.$$

Стратегія розв'язання задачі Стратегія розв'язання задачі (5.17) методом Зойтендейка (Zoutendijk G.) заключається в побудові послідовності припустимих точок $\{\mathrm{x}^k\}$, таких, що $f(\mathrm{x}^{k+1}) < f(\mathrm{x}^k)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Правило побудови точок послідовності $\{\mathrm{x}^k\}$:

$$\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \overline{t}_k d^k,\ k = 0,1,\ldots, \tag{5.18}$$

де d^k – напрямок спуску, точка x^k – припустима і така, що

$$-\varepsilon_k < g_i(\mathrm{x}^k) \leq 0,\ i \in I_a, \tag{5.19}$$

I_a – множина індексів i активних обмежень, для яких виконана умова (5.19); величина кроку $\overline{t}_k \geq 0$ знаходиться в результаті розв'язання задачі одновимірної мінімізації:

$$f(\mathrm{x}^k + t_k d^k) \to \min ; \tag{5.20}$$

$$g_i(\mathrm{x}^k + t_k d^k) \leq 0 , \; i = 1,...,m . \tag{5.21}$$

Задача (5.20), (5.21) може бути розв'язана з використанням алгоритму застосування необхідних і достатніх умов умовного мінімуму, описаних в розділі. 1.4. Інакше величину $\overline{t}_k$ варто вибирати із співвідношення

$$\overline{t}_k = \min\{t_k^* \geq 0; \, t_k^{**} \geq 0\} , \tag{5.22}$$

де величина t_k^* визначається з умови $f(\mathrm{x}^k + t_k^* d^k) = \min\limits_{t_k \geq 0} f(\mathrm{x}^k + t_k d^k)$, а величина $t_k^{**} = \min\left\{t_k^i\right\}$, $\left\{t_k^i\right\}$ задовольняє умовам $g_i(\mathrm{x}^k + t_k d^k) = 0$, $t_k \geq 0$.

Напрямок спуску d^k задовольняє системі нерівностей

$$\nabla f(\mathrm{x}^k)^T d^k < 0 , \tag{5.23}$$

$$\nabla g_i(\mathrm{x}^k)^T d^k < 0 , \; i \in I_a . \tag{5.24}$$

Можливий напрямок спуску d^k, що задовольняє умовам (5.23), (5.24), визначається з розв'язання задачі лінійного програмування (див. розділ 5.1 і розділ 2.2)

$$\begin{aligned} & z \to \min ; \\ & \nabla f(\mathrm{x}^k)^T d^k \leq z , \\ & \nabla g_i(\mathrm{x}^k)^T d^k \leq z , \; i \in I_a , \\ & \left| d_j^k \right| \leq 1 , \; j = 1,...,n . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Якщо розв'язок z^* задачі (5.25) менший за $-\varepsilon_k$, то для пошуку нового можливого напрямку спуску d^{k+1} вважають $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$. Якщо ж $z^* \geq -\varepsilon_k$, то розрахунок за розсудом користувача або варто закінчити, оскільки в точці x^k з точністю до ε_k виконуються умови мінімуму в задачі (5.17), або продовжити, з метою одержання більш високої точності, вважаючи $\varepsilon_{k+1} = q\varepsilon_k$, де $0 < q < 1$.

Алгоритм

1. Задати ε_0, граничне число ітерацій M, припустиму початкову точку $\mathrm{x}^0 \in X$, в якій $\nabla f(\mathrm{x}^0) \neq 0$.

2. Вважати $k = 0$.

3. Перевірити виконання умови $k \leq M$:

а) якщо $k = M$ розрахунок закінчено;

б) якщо $k < M$, перейти до кроку 4.

4. Обчислити $g_i(\mathrm{x}^k)$, $i = 1,...,m$.

5. Перевірити виконання умови $-\varepsilon_k \leq g_i(\mathrm{x}^k) \leq 0$, $i = 1,...,m$. Сформувати множину I_a індексів i, для яких умова виконана. Якщо умова виконана хоча б для одного $i \in I_a$, то перейти до кроку 6. В противному випадку вважати $\varepsilon_k = 2\varepsilon_k$ і повторити обчислення на кроці 5.

6. Записати систему нерівностей

$$\nabla f(\mathrm{x}^k)^T d^k < 0,$$

$$\nabla g_i(\mathrm{x}^k)^T d^k < 0, \quad i \in I_a.$$

7. Сформувати задачу лінійного програмування:

$$z \to \min,$$

$$\nabla f(\mathrm{x}^k)^T d^k \leq z,$$

$$\nabla g_i(\mathrm{x}^k)^T d^k \leq z, \quad i \in I_a,$$

$$\left| d_j^k \right| \leq 1, \quad j = 1,...,n.$$

8. Розв'язати задачу лінійного програмування, сформовану на кроці 7. В результаті одержуємо шуканий можливий напрямок спуску d^k і z^* – мінімальне значення z.

9. Обчислити крок $\overline{t_k}$, розв'язавши задачу

$$f(\mathrm{x}^k + t_k d^k) \to \min,$$

$$g_i(\mathrm{x}^k + t_k d^k) \leq 0, \quad i = 1,...,m;$$

або зі співвідношення (5.22), для чого треба:

а) знайти величину t_k^* з умови $f(\mathrm{x}^k + t_k^* d^k) = \min\limits_{t_k \geq 0} f(\mathrm{x}^k + t_k d^k)$;

б) визначити величину t_k^i, $i = 1,...,m$ з умов $g_i(\mathrm{x}^k + t_k \Delta \mathrm{x}^k) = 0$, $t_k \geq 0$ (якщо умова $g_i(\mathrm{x}^k + t_k \Delta \mathrm{x}^k) = 0$ виконується тільки при $t_k < 0$, то

t_k^i не обчислюється). Якщо в точці x^k обмеження з номером i активне і $t_k = 0$, то значення t_k^i не обчислюється;

в) знайти $t_k^{**} = \min\limits_i \{t_k^i\}$;

г) обчислити значення $\overline{t}_k = \min\{t_k^*; t_k^{**}\}$.

10. Знайти точку $\mathrm{x}^{k+1} = \mathrm{x}^k + \overline{t}_k d^k$.

11. Обчислити величину $f(\mathrm{x}^{k+1})$.

12. Перевірити умову закінчення:

а) якщо $z^* \geq -\varepsilon_k$, то розрахунок може бути або закінчено, якщо точність ε_k задовільна, або продовжено при $\varepsilon_{k+1} = q\varepsilon_k$, $0 < q < 1$. В першому випадку x^{k+1} – шуканий наближений розв'язок задачі (5.17), в другому – варто перейти до кроку 3;

б) якщо $z^* < -\varepsilon_k$, то вважати $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$, $k = k+1$ і перейти до кроку 3.

Зауваження 5.7

1. Якщо задача (5.17) не є задачею опуклого програмування, в якій не всі функції $f(\mathrm{x})$, $g_i(\mathrm{x}) \leq 0$, $i = 1,..,m$ опуклі, то алгоритм Зойтендейка збігається до точки x^*, що задовольняє з точністю ε_k необхідним умовам мінімуму функції багатьох змінних при обмеженнях типу нерівностей (див. розділ 1.4) [20] . Отже, в точці x^* повинні бути перевірені достатні умови мінімуму.

2. Якщо задача (5.17) – задача опуклого програмування і її множина припустимих розв'язків $X = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in R^n, g_i(\mathrm{x}) \leq 0, i = 1,..,m\}$ має внутрішні точки, то знайдена за алгоритмом Зойтендейка точка x^* є розв'язком задачі (5.17) [20].

3. Швидкість збіжності алгоритму Зойтендейка оцінюється як низька по числу ітерацій [20].

Приклад 5.11

Знайти мінімум в задачі

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min;$$
$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0,$$
$$g_2(\mathrm{x}) = -x_1 \leq 0, \quad g_3(\mathrm{x}) = -x_2 \leq 0.$$

Розв'язання

1. Задаємо $\mathrm{x}^0 = (0;\, 0.95)^T$, $\nabla f(\mathrm{x}^0) \neq 0$; $\varepsilon_0 = 0.02$; $M = 10$.

2. Вважаємо $k = 0$.

3^0. Перевіряємо умову $k \geq M$: $k = 0 < M = 10$.

4^0. Обчислюємо $g_1(\mathrm{x}^0) = -0.05$; $g_2(\mathrm{x}^0) = 0$; $g_3(\mathrm{x}^0) = -0.95$.

5^0. Перевіряємо виконання умови $-\varepsilon_k \leq g_i(\mathrm{x}^k) \leq 0$, $i = 1,...,m$:

$g_1(\mathrm{x}^0) = -0.05 < -\varepsilon_0 = -0.02$, $g_2(\mathrm{x}^0) = 0$, $g_3(\mathrm{x}^0) = -0.95 < -\varepsilon_0 = -0.02$.

Активним є обмеження $g_2(\mathrm{x}) = -x_1 \leq 0$, $i = 2 \in I_a$.

6^0. Записуємо систему нерівностей:

$$\nabla f(\mathrm{x}^0)^T d^0 < 0,\ \nabla g_2(\mathrm{x}^0)^T d^0 < 0.$$

Маємо $\nabla f(\mathrm{x}^0) = (-8;\, -8.1)^T$; $\nabla g_2(\mathrm{x}^0) = (-1;\, 0)^T$ і

$$-8d_1^0 - 8.1d_2^0 < 0,$$
$$-d_1^0 < 0.$$

7^0. Записуємо задачу лінійного програмування

$$z \to \min,$$
$$-8d_1^0 - 8.1d_2^0 \leq z,$$
$$-d_1^0 \leq z,$$
$$|d_1^0| \leq 1,\quad |d_2^0| \leq 1.$$

8^0. Розв'язуємо задачу лінійного програмування. Для цього приводимо її до канонічного вигляду (див. розділ 2.2), ввівши наступні позначення: $d_1^0 = x_1 - x_2$; $d_2^0 = x_3 - x_4$; $z = x_5 - x_6$; $x_1,...,x_6 \geq 0$.

Маємо

$$x_5 - x_6 \to \min;$$
$$-8x_1 + 8x_2 - 8.1x_3 + 8.1x_4 - x_5 + x_6 + x_7 = 0,$$
$$-x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 + x_6 + x_8 = 0,$$
$$x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_9 = 1,$$
$$-x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_{10} = 1,$$
$$0x_1 + 0x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_{11} = 1,$$
$$0x_1 + 0x_2 - x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_{12} = 1,$$
$$x_j \geq 0,\quad j = 1,...,12.$$

Розв'язання задачі лінійного програмування з використанням симплекс-методу (см. розділ 2.2) має вигляд $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 1$; $x_7 = 15.1$; $x_8 = 0$; $x_9 = 0$; $x_{10} = 2$; $x_{11} = 0$; $x_{12} = 2$. Тому $d_1^0 = 1$; $d_2^0 = 1$; $z^* = -1$.

9^0. Обчислимо крок $\overline{t}_0$ з умови (5.22). Маємо

а) $f(\mathrm{x}^0 + t_0 d^0) = (t_0 - 4)^2 + (t_0 - 4.05)^2 \to \min$,

$$\frac{df}{dt_0} = 2(t_0 - 4) + 2(t_0 - 4.05) = 0;\ t_0^* = 4.025;\ \frac{d^2 f}{dt_0^2} = 4 > 0;$$

б) $g_1(\mathrm{x}^0 + t_0 d^0) = t_0 + 0.95 + t_0 - 1 = 0$, $t_0 \ge 0$; $t_0^1 = 0.025$;

$g_2(\mathrm{x}^0 + t_0 d^0) = -t_0 = 0$, $t_0 \ge 0$; оскільки друге обмеження є активним і $t_0 = 0$, величина t_0^2 не обчислюється;

$g_3(\mathrm{x}^0 + t_0 d^0) = -(t_0 + 0.95) = 0$, $t_0 \ge 0$; оскільки рівність виконується тільки при $t_0 = -0.95 < 0$, величина t_0^3 не обчислюється;

в) $t_0^{**} = \min\limits_i \{t_0^i\} = 0.025$;

г) $\overline{t}_0 = \min\{t_0^*, t_0^{**}\} = 0.025$.

10^0. Знаходимо точку $\mathrm{x}^1 = \mathrm{x}^0 + \overline{t}_0 (1;1)^T$:

$$\mathrm{x}^1 = (0;\ 0.95)^T + 0.025 \cdot (1;1)^T = (0.025;\ 0.975)^T.$$

11^0. Обчислюємо $f(\mathrm{x}^1)$: $f(\mathrm{x}^1) = 31.8 < 32.4 = f(\mathrm{x}^0)$.

12^0. Перевіряємо умову закінчення. Оскільки $z^* = -1 < -\varepsilon_0 = -0.02$, вважаємо $k = k + 1 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ і переходимо до кроку 3.

3^1. Перевіряємо умову $k \ge M$: $k = 1 < M = 10$.

4^1. Обчислюємо $g_1(\mathrm{x}^1) = 0$; $g_2(\mathrm{x}^1) = -0.025$; $g_3(\mathrm{x}^1) = -0.975$.

5^1. Перевіряємо виконання умови $-\varepsilon_k \le g_i(\mathrm{x}^k) \le 0$, $i = 1,...,m$: $-\varepsilon_0 < g_1(\mathrm{x}^0) \le 0$, $g_2(\mathrm{x}^1) < \varepsilon_0$, $g_3(\mathrm{x}^1) < \varepsilon_0$. Активним є обмеження $g_1(\mathrm{x}^1) = x_1 + x_2 - 1 \le 0$, $i = 1 \in I_a$.

6^1. Записуємо систему нерівностей:

$$\nabla f(\mathrm{x}^1)^T d^1 < 0,\ \nabla g_2(\mathrm{x}^1)^T d^1 < 0.$$

Маємо $\nabla f(\mathrm{x}^1) = (-7.95; -8.05)^T$; $\nabla g_1(\mathrm{x}^1) = (1; 1)^T$ і

$$-7.95d_1^1 - 8.05d_2^1 < 0,$$
$$d_1^1 + d_1^1 < 0.$$

7^1. Записуємо задачу лінійного програмування

$$z \to \min,$$
$$-7.95d_1^1 - 8.05d_2^1 \le z,$$
$$d_1^1 + d_1^1 \le z,$$
$$|d_1^1| \le 1, \quad |d_2^1| \le 1.$$

8^1. Розв'язуємо задачу лінійного програмування. Для цього приводимо її до канонічного вигляду (див. розділ 2.2), ввівши наступні позначення: $d_1^1 = x_1 - x_2$; $d_2^1 = x_3 - x_4$; $z = x_5 - x_6$; $x_1, ..., x_6 \ge 0$.

Маємо

$$x_5 - x_6 \to \min;$$
$$-7.95x_1 + 7.95x_2 - 8.05x_3 + 8.05x_4 - x_5 + x_6 + x_7 = 0,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_8 = 0,$$
$$-x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_9 = 1,$$
$$x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_{10} = 1,$$
$$0x_1 + 0x_2 - x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_{11} = 1,$$
$$0x_1 + 0x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_{12} = 1,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 12.$$

Розв'язання задачі лінійного програмування з використанням симплекс-методу (див. розділ 2.2): $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0.99$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0.01$; $x_7 = 0$; $x_8 = 0$; $x_9 = 0$; $x_{10} = 2$; $x_{11} = 1.99$; $x_{12} = 0.01$. Тому $d_1^1 = -1$; $d_2^1 = 0.99$; $z^* = -0.01$.

9^1. Обчислимо крок $\overline{t_1}$ з умови (5.22). Маємо

а) $f(\mathrm{x}^1 + t_1 d^1) = (-t_1 - 3.975)^2 + (0.99t_1 - 4.025)^2 \to \min$,

$\frac{df}{dt_1} = 2(-t_1 - 3.975) + 2(0.99t_1 - 4.025) = 0$; тому що $t_1^* < 0$, то величина t_1^* не обчислюється;

б) $g_1(\mathrm{x}^1 + t_0 d^1) = 0.025 - t_1 + 0.975 + 0.99t_1 - 1 = 0$; $t_1^1 = 0$ – оскільки перше обмеження є активним, то в обчисленнях не використовується;

$g_2(\mathrm{x}^1 + t_1 d^1) = -0.025 + t_1 = 0$, оскільки $t_1 > 0$, то $t_1^2 = 0.025$;

$g_3(\mathrm{x}^1 + t_1 d^1) = -0.975 - 0.99t_1 = 0$, оскільки $t_1 < 0$, то величина t_1^3 не обчислюється;

в) $t_1^{**} = \min\limits_i \{t_1^i\} = 0.025$;

г) $\overline{t_1} = \min\{t_1^*, t_1^{**}\} = 0.025$.

10[1]. Знаходимо точку $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^1 + \overline{t_1}(-1; 0.99)^T$:

$\mathrm{x}^2 = (0.025; 0.975)^T + 0.025 \cdot (-1; 0.99)^T = (0; 0.99975)^T$.

11[1]. Обчислюємо $f(\mathrm{x}^2)$: $f(\mathrm{x}^2) = 32 < 32.4 = f(\mathrm{x}^0)$.

12[1]. Перевіряємо умову закінчення. Оскільки $z^* = -0.01 > -\varepsilon_0$, то розрахунок закінчено, точка x^2 є знайденим наближенням точки $\mathrm{x}^* = (0; 1)^T$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Методом штрафних функцій розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = x_1 - 2x_2^2 + 4x_2 \to \max;$$
$$-3x_1 - 2x_2 = 6.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (-2.556; 0.833)^T$ – умовний максимум.

2. Методом штрафних функцій розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = -4x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 3 \to \max;$$
$$-x_1 - x_2 = 2.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (-1.125; -0.875)^T$ – умовний максимум.

3. Методом штрафних функцій розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5 \to \min;$$
$$2x_1 - x_2 = 6.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (2.25; -1.5)^T$ – умовний мінімум.

4. Методом штрафних функцій розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \mathrm{extr};$$

$$2x_1 - x_2 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (0;\ 4)^T$ – умовний мінімум, умовного максимуму немає.

5. Методом бар'єрних функцій розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 \to \min;$$

$$x_1 - 1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (1;\ 0)^T$ – умовний мінімум.

6. Методом бар'єрних функцій розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = \frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1 + x_2 \to \min;$$

$$x_1 + x_2 \le 6,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: в точці $\mathrm{x}^* = (2;\ 3)^T$ – умовний мінімум.

7. Методом множників розв'язати задачу

$$f(x) = x^2 - 4x \to \min;$$

$$g_1(x) = x - 1 \le 0.$$ Точність $\varepsilon = 0.001$.

Відповідь:

$r^4 = 1000$, $\mu^4 = 1.997$, $x^* = x^*(\mu_1^4, r^4) = 1.0000029$, $f(x^*) = -3$.

8. Методом множників розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min;$$

$$g_1(\mathrm{x}) = x_1 - 1 = 0,$$

$$g_2(\mathrm{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0.$$ Точність $\varepsilon = 0.001$.

Відповідь: $r^4 = 1000$, $\lambda^4 = -1.999$, $\mu^4 = 0$, $x_1^*(\lambda_1^4, \mu_1^4, r^4) = 0.999$, $x_2^*(\lambda_1^4, \mu_1^4, r^4) = 0$, $f(\mathrm{x}^*) = 0.999$.

9. Методом множників розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = x^2 - 4x \to \min;$$

$$x - 1 \le 0.$$

Відповідь: $k = 4$, $r^k = 1000$, $\mu^k = 1.997$, $x^*(\mu^k, r^k) = 1.0000029$. Точний розв'язок $x^* = 1$, $f(x^*) = -3$.

10. Методом проекції градієнта розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \to \min;$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (3;\ 1)^T$.

11. Методом проекції градієнта розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min;$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 + 2x_2 \leq 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (2.5;\ 0.5)^T$.

12. Методом проекції градієнта розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = -x_1 - x_2 \to \min;$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 25.$$

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (2.5\sqrt{2};\ 2.5\sqrt{2})^T$.

13. Методом Зойтендейка розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min;$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Відповідь: $\mathrm{x}^1 = (0.025;\ 0.975)^T$, $f(x^1) = 31.8$. Точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (0;\ 1)^T$, $f(x^*) = 32$.

14. Методом Зойтендейка розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \to \min;$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (3;\ 1)^T$, $f(x^*) = 44$.

15. Методом Зойтендейка розв'язати задачу

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min;$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 + 2x_2 \leq 4\ \ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Відповідь: точний розв'язок $\mathrm{x}^* = (2.5;\ 0.5)^T$, $f(x^*) = 4.5$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Абрамов Л. М., Капустин В. Ф.* Математическое программирование. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.

2. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. -М.: Высшая школа, 1986.

3. *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.

4. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. - М.: Мир, 1977.

5. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.

6. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988.

7. *Банди Б.* Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989.

8. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987.

9. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.

10. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации. – Минск: Изд-во БГУ, 1981.

11. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985.

12. *Деордица Ю. С., Нефёдов Ю. М.* Исследование операций в планировании и управлении. – Киев: Вища шк., 1991.

13. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988.

14. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.

15. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.

16. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1964.

17. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1975.

18. *Ляшенко И. Н.* и др. Линейное и нелинейное программирование. – Киев: Вища шк., 1975.

19. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. -М.: Наука, 1990.

20. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.

21. *Мухачева Э. А.*, *Рубинштейн Г. Ш.* Математическое программирование. – Новосибирск: Наука, 1987.

22. *Нефёдов Ю. М.* Методы оптимизации: Учеб. пос. – Луганск: Изд. ВНУ им. В. Даля, 2004.

23. *Нефёдов Ю. М., Таращанский М. Т.* Сборник примеров и задач по математическому программированию: Учеб. пос. – Луганск: Изд. ВНУ им. В. Даля, 2002.

24. *Пшеничный Б. И., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.

25. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука , 1983.

26. *Реклейтис Г., Рейвиндран А.; Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. Т. 1 и 2, в 2-х т. – М.: Мир, 1986.

27. Сборник задач по математике для втузов. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / Под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990.

28. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1985.

29. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.

30. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. – М.: Мир, 1972.

31. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.

32. Численные методы условной оптимизации / Под ред. Ф. Гилла, У; Мюррея. – М.: Мир, 1977.

Навчальне видання

НЕФЬОДОВ ЮРІЙ МИХАЙЛОВИЧ
БАЛИЦЬКА ТЕТЯНА ЮРІЇВНА

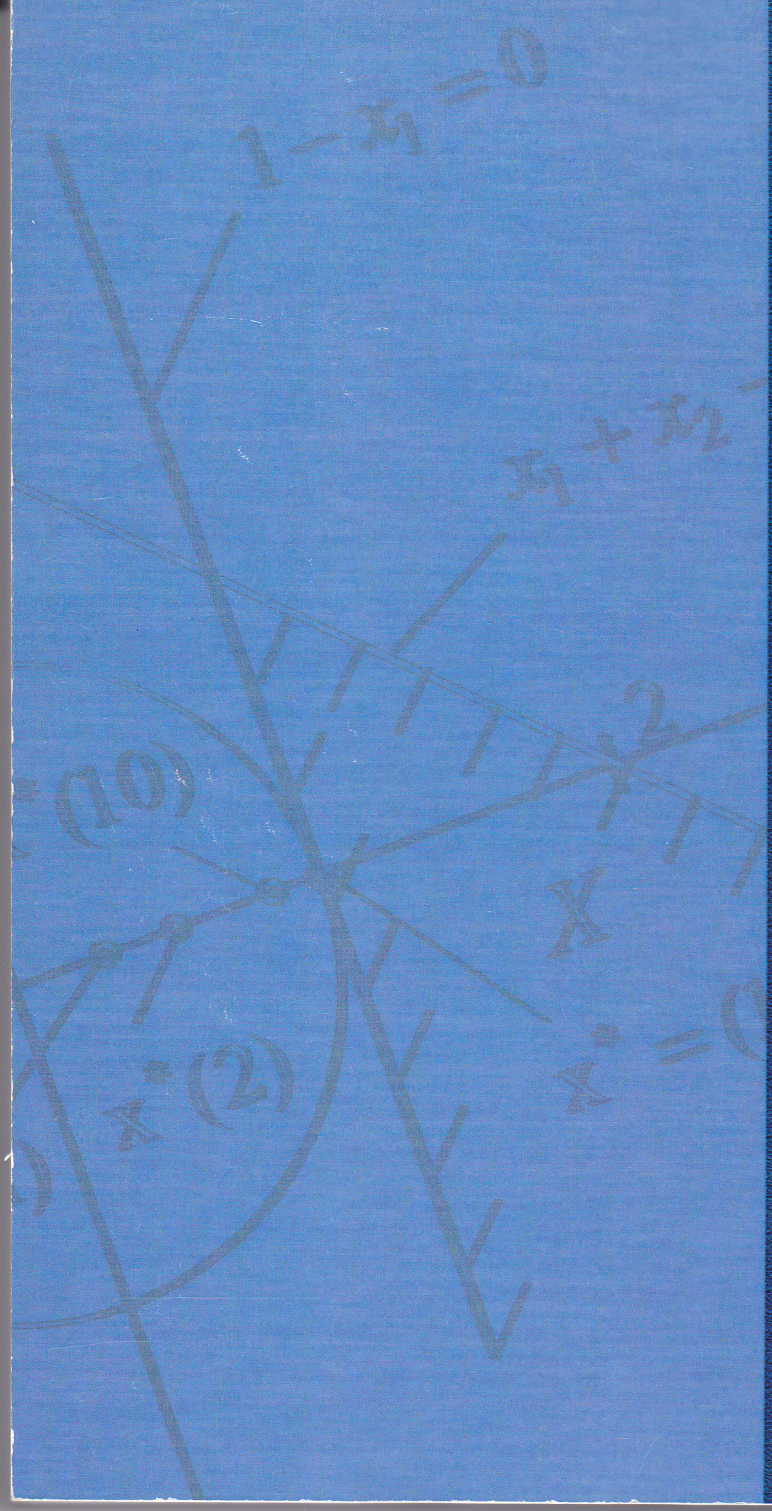
МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник

Редактор З. І. Андронова
Техн. редактор М. В. Кліпаков
Оригінал-макет Т. Ю. Балицька

Підписано до друку 19.11.2010
Формат 60x84 1/16. Папір типограф. Гарнітура Times.
Друк лазерний. Розумів. друк. арк. 17,67.
Тираж 500 екз. Зам._____

«Кондор»
Свідоцтво ДК № 1157 від 17.12.2002 р.
03067, м.Київ, вул.Гартмана, 29/31
тел../факс (044) 408-76-17, 408-76-25



КОНДОР