Р. Н. Вадзинский

Справочник по вероятностным распределениям

Санкт-Петербург
«Наука»
2001

УДК 519.2
ББК 22.17
В 12

Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. — СПб.: Наука, 2001. — 295 с., ил. 116.

ISBN 5-02-024919-X

В Справочнике подробно описаны 13 дискретных и 35 непрерывных одномерных вероятностных распределений, наиболее часто используемых на практике. Справочные материалы предваряются кратким обзором основных понятий теории вероятностей, относящихся к одномерным вероятностным распределениям. В Приложениях приведены графики, помогающие выбрать тип теоретического распределения, подходящего для сглаживания исследуемого выборочного распределения. Коротко рассмотрены возможности использования статистических пакетов STATGRAPHICS и STATISTICA для выполнения вычислений, связанных с основными вероятностными распределениями. Столь подробные справочники такого рода в нашей стране до сих пор не издавались.

Справочник предназначен для широкого круга специалистов разных профилей, использующих в своей работе методы теории вероятностей и математической статистики. Может быть использован преподавателями, аспирантами и студентами высших учебных заведений.

Рецензенты:
д-р техн. наук И. А. Рябинин,
д-р эконом. наук А. М. Брехов

ТП 2000-II-№ 118
ISBN 5-02-024919-X

Моим однокурсникам, выпускникам
Высшего военно-морского училища связи 1951 г.,
посвящается

ГЛАВА 1. СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайная величина — это такая переменная величина, которая в зависимости от случайного исхода испытания принимает какое-то одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.[1] В данном справочнике случайные величины обозначаются большими буквами из конца латинского алфавита — чаще всего буквами X, Y, Z. Если это необходимо, обозначения случайных величин снабжаются цифровыми индексами, например: $X_1, X_2, \dots, X_n$. *Возможные значения* случайных величин обозначаются соответствующими малыми буквами латинского алфавита. Так, например, возможное значение случайной величины X обозначается буквой x, а возможное значение случайной величины Y — буквой y.[2]

Числовое значение x, которое приняла случайная величина X в каком-либо конкретном испытании, называется *реализацией* этой случайной величины в данном испытании.

Множество значений, которые может принимать случайная величина X, называется *областью возможных значений* этой случайной величины.

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет какое-либо определенное значение или какое-либо значение из заданного множества значений, является случайным. Такие случайные события записываются в виде соответствующих равенств или неравенств. Так, например, запись $X = x$ обозначает случайное событие, состоящее в том, что случайная величина X примет значение x; запись $Y \le y$ обозначает случайное событие, состоящее в том, что случайная величина Y примет значение, не превышающее некоторой фиксированной величины y, а запись $c \le Z \le d$ обозначает случайное событие, состоящее в том, что случайная величина Z примет какое-нибудь значение из замкнутого интервала $[c, d]$.

Случайная величина называется *дискретной*, если она может принимать только конечное или счетное множество воз-

---

[1] Данное определение не является достаточно строгим. Строгое определение случайной величины см. в [1, т. 5, стб. 9].

[2] В конце данной главы приведен указатель основных обозначений, использованных в Справочнике.

можных значений. В гл. 2 Справочника рассматриваются только такие дискретные случайные величины, которые могут принимать лишь целые неотрицательные значения. Такие случайные величины называются *целочисленными*. Целочисленные случайные величины возникают при каких-либо подсчетах, например при подсчете числа дефектных изделий в контрольной партии, при подсчете числа телеграмм, поступающих за сутки на узел связи, и т. д.

Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принять любое значение из некоторого интервала (этот интервал может быть ограниченным или неограниченным).[1] Непрерывная случайная величина имеет несчетное множество возможных значений, которые сплошь заполняют некоторый интервал числовой оси или всю числовую ось. Непрерывные случайные величины возникают при каких-либо измерениях: при измерении отклонения контрольного параметра изделия массового производства от его номинального значения, при измерении расстояния от центра цели до точки падения снаряда и т. д.

Самой полной (исчерпывающей) характеристикой случайной величины является закон ее распределения. *Законом распределения* случайной величины называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, соответствующими этим значениям. Наиболее употребительными разновидностями закона распределения случайной величины являются: ряд распределения, плотность вероятности, функция распределения, функция риска, производящая функция и характеристическая функция. Ряд распределения и производящая функция используются только для описания дискретных случайных величин, а плотность вероятности и функция риска — для описания непрерывных случайных величин. Функция распределения и характеристическая функция могут быть использованы для описания как дискретных, так и непрерывных случайных величин.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется совокупность всех ее возможных значений x_1, $x_2, \dots, x_n$ и вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_n$ появления каждого из этих значений. Функция $p(x) = P(X = x)$, устанавливающая связь между возможными значениями $x = 0, 1, 2, \dots$ целочисленной случайной величины X и вероятностями появления этих значений, называется *функцией вероятности* (рис. 1.1, *а*).[2]

---

[1] Строгое определение понятия «непрерывная случайная величина» приводится на с. 5.

[2] Наряду с символом $p(x)$ для обозначения функции вероятности используется символ $p_x(x)$. В случае, когда необходимо подчеркнуть, что целочисленная случайная величина X зависит от параметров λ и μ для обозначения функции вероятности используется символ $p(x; \lambda, \mu)$ или $p_x(x; \lambda, \mu)$.

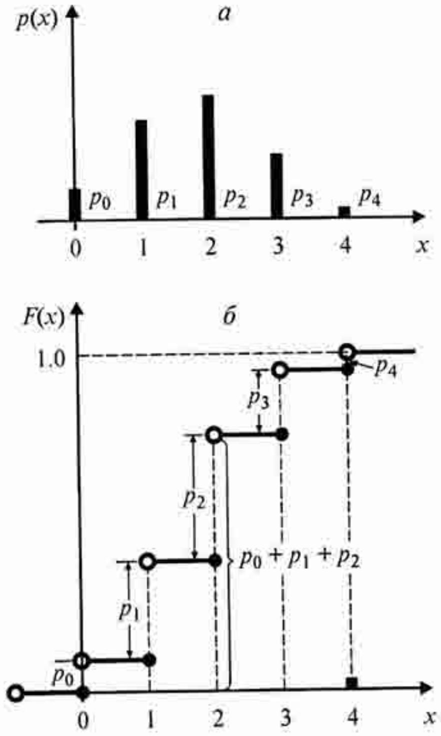


Рис. 1.1. Ряд распределения (*а*) и функция распределения (*б*) дискретной случайной величины.

Плотностью вероятности (*функцией плотности*) непрерывной случайной величины X называется предел отношения вероятности попадания этой случайной величины в интервал $(x, x + \Delta x)$ к длине Δx этого интервала, стремящейся к нулю:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Случайные величины, для которых этот предел существует (для которых существует плотность вероятности $f(x)$), называются *абсолютно непрерывными*. Именно такие случайные величины рассматриваются в гл. 3. В дальнейшем, для краткости, вместо термина «абсолютно непрерывная случайная величина» используется термин «непрерывная случайная величина».

Функция распределения случайной величины X — это такая функция $F(x)$ действительной переменной x, значение которой при каждом x равно вероятности выполнения неравенства $X < x$, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения $F(x)$ ц е л о ч и с л е н н о й случайной величины X с областью возможных значений $\{0, 1, \ldots, n\}$ связана с функцией вероятности $p(x)$ этой случайной величины соотношением (рис. 1.1, *б*):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sum_{i=0}^{k} p(i), & k < x \le k+1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X и плотность вероятности $f(x)$ связаны между собой соотношениями (рис. 1.2):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)\,d\tau \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x).$$

Равенство $f(x) = F'(x)$ справедливо во всех точках непрерывности функции плотности $f(x)$. Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X непрерывна при всех x и дифференцируема всюду, за исключением конечного или счетного числа точек.

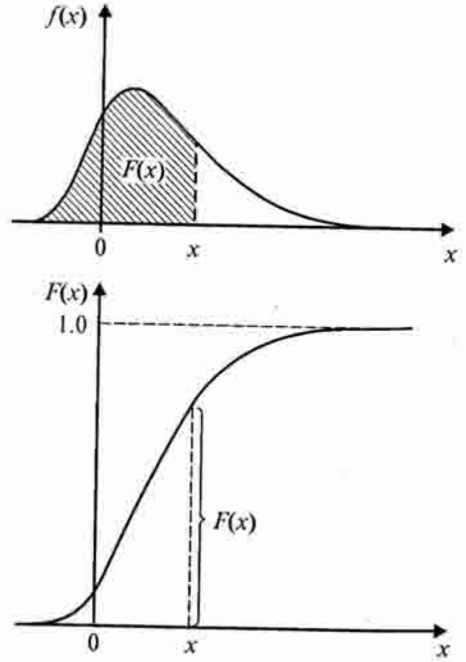


Рис. 1.2. Плотность вероятности и функция распределения непрерывной случайной величины.

Вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал $[a, b)$, равна приращению функции распределения $F(x)$ на этом интервале (рис. 1.3):

$$P(a \le x < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

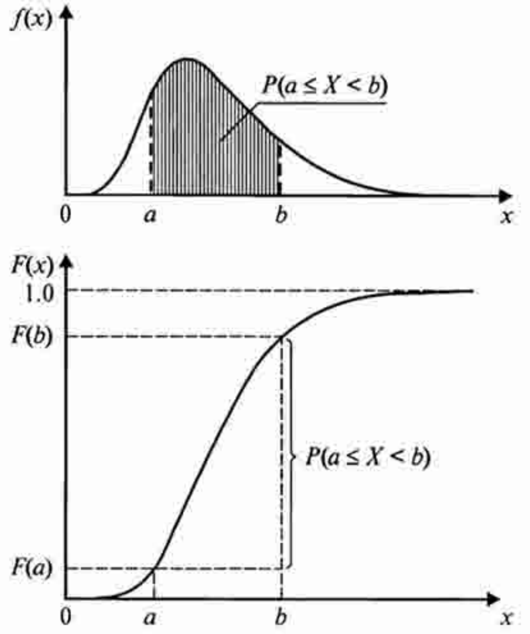


Рис. 1.3. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

Ф у н к ц и я р и с к а (*и н т е н с и в н о с т ь*) н е п р е р ы в н о й случайной величины X — это функция, определяемая соотношением

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

При любом x имеет место соотношение $\lambda(x) \ge f(x)$ (рис. 1.4).

В теории надежности под функцией риска $\lambda(x)$ понимается условная плотность вероятности отказа изделия в момент x при условии, что это изделие не отказало до момента x. При такой трактовке $\lambda(x)dx$ приближенно равно вероятности того, что изделие откажет в интервале времени $(x, x+dx)$ при условии, что оно не отказало до момента x:

$$P(x < X < x + dx / X > x) \approx \lambda(x)\,dx.$$

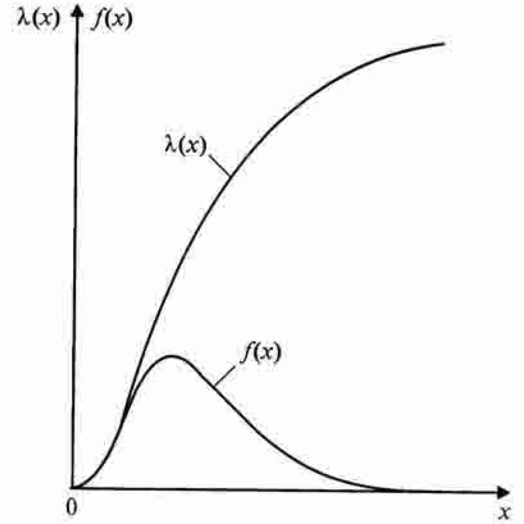


Рис. 1.4. Функция риска $\lambda(x)$ и плотность вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины.

Производящей функцией целочисленной случайной величины X называется такая функция действительной переменной t, которая представляет собой математическое ожидание случайной величины t^X:

$$\varphi_x(t) = M(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x p(x), \quad |t| \le 1.$$

Производящая функция $\varphi_x(t)$ случайной величины X однозначно определяет распределение вероятностей этой случайной величины:

$$p(0) = \varphi_x(0), \quad p(x) = \left.\frac{d^x \varphi_x(t)}{dt^x}\right|_{t=0} = \varphi_x^{(x)}(0) \quad (x = 1, 2, \ldots).$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые целочисленные случайные величины и $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, то

$$\varphi_y(t) = \varphi_{x_1}(t)\, \varphi_{x_2}(t) \ldots \varphi_{x_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{x_k}(t),$$

т. е. производящая функция суммы независимых целочисленных случайных величин равна произведению производящих функций слагаемых. (Здесь $\varphi_{x_k}(t)$ — производящая функция случайной величины X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$). Если случайные слагаемые $X_1, \ldots, X_n$ подчиняются одному и тому же закону распределения, т. е. если $\varphi_{x_1}(t) = \varphi_{x_2}(t) = \ldots = \varphi_{x_n}(t) = \varphi_x(t)$, то

$$\varphi_y(t) = [\varphi_x(t)]^n.$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых целочисленных одинаково распределенных случайных величин с производящей функцией $\varphi_x(t)$, N — независимая от них целочисленная случайная величина с производящей функцией $\varphi_N(t)$, а случайная величина Y_N определяется равенствами

$$Y_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \quad \text{и} \quad Y_0 = 0.$$

Тогда производящая функция $\varphi_{y_N}(t)$ случайной величины Y_N определяется соотношением

$$\varphi_{y_N}(t) = \varphi_N(\varphi_x(t)),$$

т. е. производящая функция случайного числа случайных слагаемых равна суперпозиции производящих функций $\varphi_N(t)$ и $\varphi_x(t)$.

Характеристической функцией случайной величины X называется такая функция действительной переменной t, которая представляет собой математическое ожидание случайной величины e^{itX}:

$$\chi_x(t) = M(e^{itX}) = \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} e^{itx} p(x), & X \text{ — целочисленная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx, & X \text{ — непрерывная,} \end{cases}$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $p(x) = P(X = x), x = 0, 1, 2, \ldots$ — функция вероятности целочисленной случайной величины X; $f(x)$ — плотность вероятности непрерывной случайной величины X.

Характеристическая функция $\chi_x(t)$ случайной величины X однозначно определяет распределение этой случайной величины:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx}\chi_x(t)\,dt, \; x = 0, 1, 2, \ldots; \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\chi_x(t)\,dt.$$

Характеристическая функция $\chi_x(t)$ целочисленной случайной величины X связана с ее производящей функцией $\varphi_x(t)$ равенством $\chi_x(t) = \varphi_x(e^{it})$.

Характеристическая функция суммы $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ равна произведению характеристических функций слагаемых

$$\chi_y(t) = \prod_{k=1}^{n} \chi_{x_k}(t),$$

где $\chi_{x_k}(t)$ — характеристическая функция случайной величины X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Если случайные величины X_k $(k = 1, \ldots, n)$ имеют одно и то же распределение, т. е. если $\chi_{x_k}(t) = \chi_x(t)$, то

$$\chi_y(t) = [\chi_x(t)]^n .$$

В том случае если случайная величина Y_N представляет собой сумму случайного числа N одинаково распределенных случайных слагаемых $X_1, X_2, \ldots$, то справедлива формула

$$\chi_{Y_N}(t) = \varphi_N(\chi_x(t)).$$

Числовые характеристики случайной величины — это числовые параметры, характеризующие отдельные свойства распределения этой случайной величины. Наиболее важными числовыми характеристиками являются характеристики положения, рассеяния, асимметрии и эксцесса.

Характеристика положения — это числовой параметр, определяющий положение центра распределения случайной величины, вокруг которого располагаются ее возможные значения. Основными характеристиками положения являются такие числовые характеристики, как математическое ожидание, медиана и мода.

Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины X определяется соотношениями

$$M(X) \equiv \bar{x} = \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} x\,p(x), & X \text{ — целочисленная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, & X \text{ — непрерывная.} \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины X существует, если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x\,p(x)$ или абсолютно сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$, т. е. если $\sum\limits_{x=0}^{\infty} x\,p(x) < \infty$ или $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx < \infty$.

В противном случае говорят, что случайная величина X не имеет математического ожидания.

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий случайных слагаемых:

$$M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k).$$

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий случайных сомножителей:

$$M\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} M(X_k).$$

Медиана непрерывной случайной величины X — это такое значение $\mathrm{Me}(X)$ этой случайной величины, для которого выполняется условие $P\{X < \mathrm{Me}(X)\} = P\{X > \mathrm{Me}(X)\} = 0.5$. Медиана является корнем уравнения $F(\mathrm{Me}(X)) = 0.5$ (рис. 1.5). Для обозначения медианы используется также более простой символ $x_{0.5}$, т. е. $\mathrm{Me}(X) \equiv x_{0.5}$.

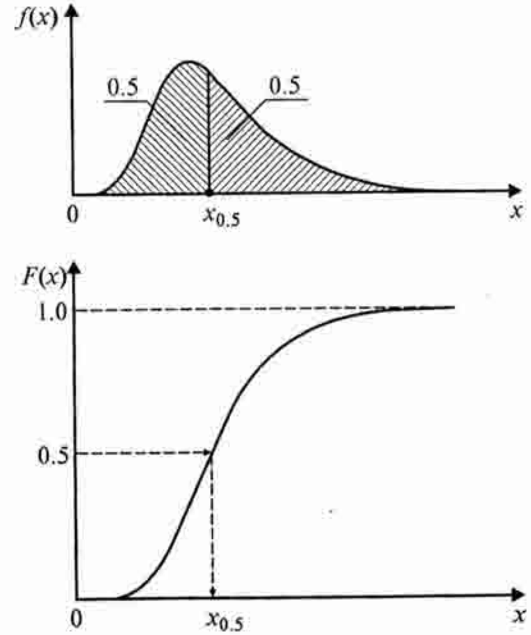


Рис. 1.5. Медиана непрерывной случайной величины.

Мода случайной величины X — это такое значение $\mathrm{Mo}(X)$ этой случайной величины, при котором функция вероятности (в дискретном случае) или плотность вероятности (в непрерывном случае) достигает максимума (рис. 1.6, *а*).[1] Для обозначения моды используется также более простой символ $\hat{x}$, т. е. $\mathrm{Mo}(X) \equiv \hat{x}$. Мода является наиболее типичным, наиболее часто наблюдаемым при экспериментах значением случайной величины, т. е. значением, которое действительно является наиболее «модным».

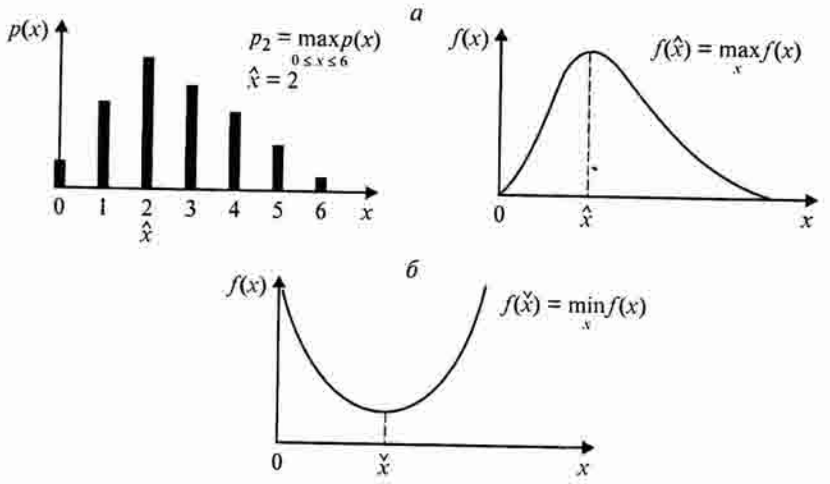


Рис. 1.6. Мода (*а*) и антимода (*б*) случайной величины.

Антимода непрерывной «антимодальной» случайной величины X — это такое значение $\check{x}$ этой случайной величины, при котором ее плотность вероятности $f(x)$ достигает минимума (рис. 1.6, *б*).

У одновершинного, симметричного относительно прямой $x = a$ распределения, мода равна a и совпадает с медианой и математическим ожиданием (если последнее существует): $\mathrm{Mo}(X) = \mathrm{Me}(X) = M(x)$ (рис. 1.7, *а*). У распределений с правосторонней асимметрией $\mathrm{Mo}(X) < \mathrm{Me}(X) < M(X)$, а у распределений с левосторонней асимметрией $M(X) < \mathrm{Me}(X) < \mathrm{Mo}(X)$ (рис. 1.7, *б*).

[1] Мода является естественной характеристикой центра распределения случайной величины лишь в случаях так называемых одновершинных (одномодальных) распределений. Именно такие распределения рассматриваются в данном справочнике. Многовершинность (многомодальность) распределения обычно свидетельствует о существенной неоднородности исследуемой совокупности статистических данных.

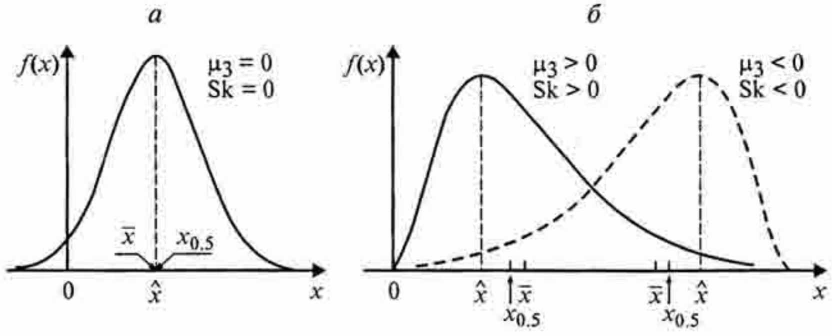


Рис. 1.7. Характеристики асимметрии распределения вероятностей случайной величины. Соотношение между математическим ожиданием $\bar{x}$, медианой $x_{0.5}$ и модой $\hat{x}$.

а — симметричные распределения; *б* — несимметричные распределения.

Эмпирическим путем установлено, что математическое ожидание, медиана и мода одновершинного распределения с умеренной правосторонней асимметрией связаны между собой соотношением $\bar{x} - \hat{x} \approx 3(\bar{x} - x_{0.5})$.

Характеристика рассеяния — это числовой параметр, характеризующий степень рассеяния возможных значений случайной величины относительно центра ее распределения. К числу характеристик рассеяния относятся: дисперсия, среднее квадратическое (стандартное) отклонение, срединное (вероятное) отклонение и коэффициент вариации.

Дисперсия случайной величины X — это математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от ее среднего значения:

$$D(X) = M\left[(X - \bar{x})^2\right] = \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x), & X \text{ — целочисленная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)\, dx, & X \text{ — непрерывная.} \end{cases}$$

Дисперсия случайной величины X характеризует рассеяние этой случайной величины относительно ее среднего значения $\bar{x}$.

Дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий случайных слагаемых:

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k).$$

Среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины X — это положительное значение квадратного корня из дисперсии этой случайной величины:

$$\sigma(X) \equiv \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Срединное (вероятное) отклонение непрерывной случайной величины X, имеющей симметричное распределение, — это число E, удовлетворяющее условию $P(|X - x_{0.5}| < E) = P(|X - x_{0.5}| > E) = 0.5$ (рис. 1.8).

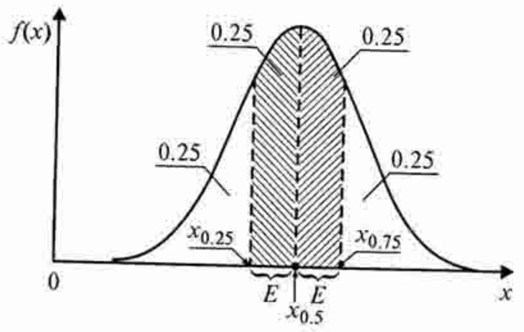


Рис. 1.8. Срединное (вероятное) отклонение E случайной величины X.

Коэффициент вариации случайной величины X — это отношение среднего квадратического отклонения σ_x этой случайной величины к ее среднему значению $\bar{x}$:

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad \text{или} \quad v_x = \frac{\sigma_x}{x} \cdot 100\ \%.$$

Коэффициент вариации используется в качестве характеристики рассеяния только неотрицательных случайных величин.

Квантиль порядка p (p-квантиль) непрерывной случайной величины X — это такое значение x_p этой случайной величины, для которого выполняется условие $P(X < x_p) = p$.

Квантиль x_p является корнем уравнения $F(x_p) = p$ (рис. 1.9).

Квантиль $x_{0.5}$ порядка $p = 0.5$ называется *медианой*, $x_{0.5} \equiv \mathrm{Me}(X)$. Квантили $x_{0.25}$ и $x_{0.75}$ называются соответственно *нижней* и *верхней квартилью*, квантили $x_{0.1}, x_{0.2}, \ldots, x_{0.9}$ — *децилями*, а квантили $x_{0.01}, x_{0.02}, \ldots, x_{0.99}$ — *процентилями* (первая процентиль, вторая процентиль и т. д.).

Разность $x_{0.75} - x_{0.25}$ между верхней и нижней квартилями называется *интерквартильным расстоянием*. Срединное

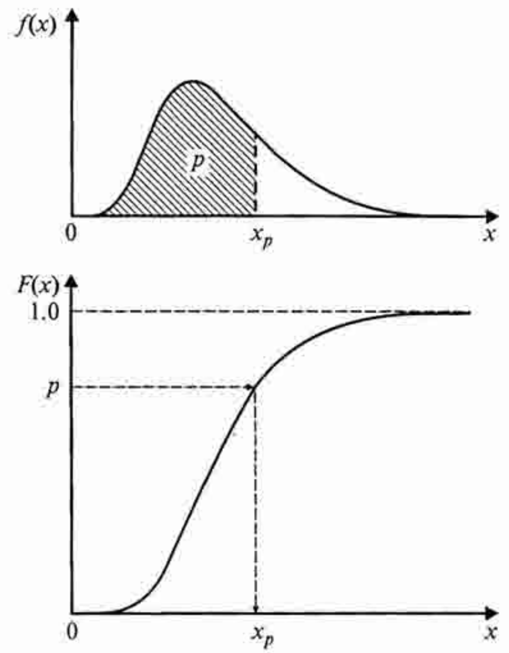


Рис. 1.9. Квантиль порядка p (p-квантиль) случайной величины X.

(вероятное) отклонение E равно половине интерквартильного расстояния: $E = (x_{0.75} - x_{0.25})/2$ (см. рис. 1.8).

В математической статистике наряду с понятием «квантиль» широко используется понятие «критическое значение» (критическая точка) распределения.

Критическим значением порядка p (критическим значением, соответствующим вероятности p) распределения непрерывной случайной величины X называется число $x_{(p)}$, удовлетворяющее условию $P(X > x_{(p)}) = p$. Критическое значение (критическая точка) $x_{(p)}$ является корнем уравнения $F(x_{(p)}) = 1 - p$ (рис. 1.10, *а*). Критические значения (критические точки) и квантили одного и того же распределения связаны простыми соотношениями: $x_{(p)} = x_{1-p}$ и $x_p = x_{(1-p)}$ (рис. 1.10, *б*).

Во многих пособиях по математической статистике порядок критической точки задается в процентах. При этом вместо термина «критическая точка порядка p» используется термин «$100p$-процентная точка». Например, критическую точку порядка $p = 0.05$ называют 5-процентной критической точкой.

Начальный момент s-го порядка (начальный момент порядка s, s-й начальный момент) случайной величины X — это математическое ожидание s-й степени этой случайной величины:

$$m_s(X) \equiv M(X^s) = \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} x^s p(x), & X \text{ — целочисленная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)\,dx, & X \text{ — непрерывная.} \end{cases}$$

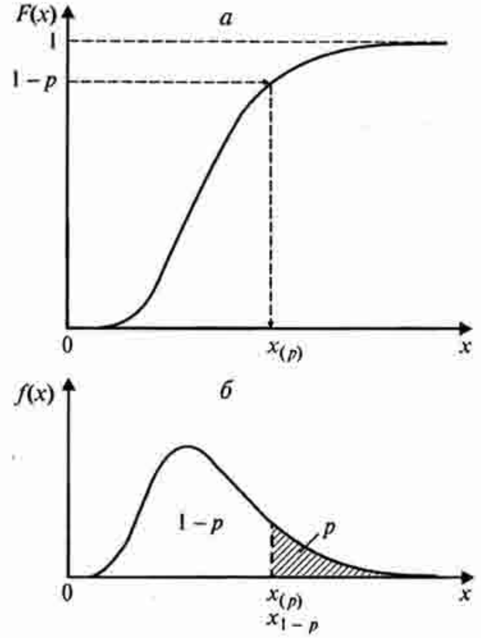


Рис. 1.10. Критическое значение (критическая точка) порядка p распределения вероятностей непрерывной случайной величины (*а*); соотношение между квантилью x_p и критической точкой $x_{(p)}$ (*б*).

Центральный момент s-го порядка (***центральный момент порядка s, s-й центральный момент***) случайной величины X — это математическое ожидание s-й степени центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X} = x - \bar{x}$:

$$\mu_s(X) = M(\overset{\circ}{X}{}^s) = M\left[(X - \bar{x})^s\right] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} (x - \bar{x})^s p(x), & X \text{ — целочисленная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^s f(x)\,dx, & X \text{ — непрерывная.} \end{cases}$$

Начальные и центральные моменты связаны между собой соотношениями:

$$m_2 = \mu_2 + m_1^2 = D_x + \bar{x}^2; \qquad \mu_2 = m_2 - m_1^2 = m_2 - \bar{x}^2;$$

$$m_3 = \mu_3 + 3\mu_2 m_1 + m_1^3; \qquad \mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3;$$

$$m_4 = \mu_4 + 4\mu_3 m_1 + 6\mu_2 m_1^2 + m_1^4; \qquad \mu_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4;$$

$$m_s = \sum_{k=0}^{s} C_s^k \mu_{s-k} m_1^k; \qquad \mu_s = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_s^k m_{s-k} m_1^k;$$

$$m_0 = \mu_0 = 1; \quad m_1 \equiv \bar{x}; \quad \mu_1 = 0.$$

Для целочисленной случайной величины X с производящей функцией $\varphi_x(t)$ справедливы следующие соотношения:

$$m_1(X) \equiv M(X) \equiv \bar{x} = \left.\frac{d\varphi_x(t)}{dt}\right|_{t=1} = \varphi'_x(1);$$

$$m_2(X) = \varphi''_x(1) + \varphi'_x(1); \quad \mu_2(X) \equiv D(X) = \varphi''_x(1) + \varphi'_x(1) - [\varphi'_x(1)]^2;$$

$$m_3(X) = \varphi'''_x(1) + 3\varphi''_x(1) + \varphi'_x(1);$$

$$m_4(X) = \varphi^{\mathrm{IV}}_x(1) + 6\varphi'''_x + 7\varphi''_x(1) + \varphi'_x(1).$$

Если при некотором натуральном r величина $M(|X|^r) < \infty$, то при всех натуральных $s \le r$ имеют место следующие соотношения:

$$m_s(X) = (-i)^s \left.\frac{d^s \chi_x(t)}{dt^s}\right|_{t=0} = (-i)^s \chi_x^{(s)}(0);$$

$$\mu_s(X) = (-i)^s \left.\frac{d^s \chi_{\overset{\circ}{x}}(t)}{dt^s}\right|_{t=0} = (-i)^s \chi_{\overset{\circ}{x}}^{(s)}(0);$$

$$\chi_x(t) = \sum_{s=0}^{r} i^s \frac{m_s(X)}{s!} t^s + o(t^r);$$

$$\chi_{\overset{\circ}{x}}(t) = \sum_{s=0}^{r} i^s \frac{\mu_s(X)}{s!} t^s + o(t^r),$$

где $\chi_{\overset{\circ}{x}}(t) = e^{it\bar{x}} \chi_x(t)$ — характеристическая функция центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X} = X - \bar{x}$; $o(t^r)$ — бесконечно малая при $t \to 0$ функция более высокого порядка малости, чем t^r.

Коэффициент асимметрии (асимметрия) распределения случайной величины X

$$\text{Sk}(X) = \frac{\mu_3(X)}{[\sigma(X)]^3}.$$

У распределения, симметричного относительно прямой $y = x_{0.5}$, коэффициент асимметрии Sk равен нулю. Он положителен, если длинная часть («хвост») кривой распределения расположена справа от центра распределения, и отрицателен, если «хвост» кривой распределения лежит слева от его центра (см. рис. 1.7).

Коэффициент эксцесса (эксцесс) распределения случайной величины X

$$\text{Ex}(X) = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4} - 3.$$

Коэффициент эксцесса характеризует «островершинность» распределения случайной величины. Эксцесс нормального распределения равен нулю. Положительный эксцесс обычно указывает на то, что рассматриваемое распределение имеет более высокую и более острую вершину, чем соответствующее нормальное распределение. Отрицательный эксцесс указывает, как правило, на более низкую и более плоскую вершину, чем у соответствующей нормальной кривой (рис. 1.11).[1]

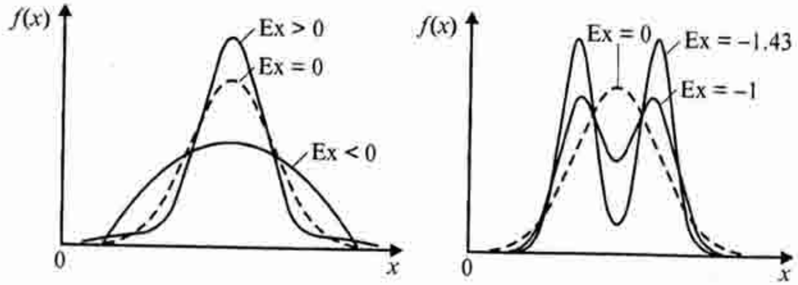


Рис. 1.11. Характеристики островершинности (эксцесса) распределения вероятностей случайной величины X.

[1] Сравнение производится с нормальным распределением, имеющим такую же дисперсию, как у рассматриваемого распределения.

1.2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Функции случайных величин. Пусть $y = \varphi(x)$ — заданная детерминированная (неслучайная) функция. Если при каждом повторении испытания, с которым связаны случайные величины X и Y, реализации x и y этих случайных величин удовлетворяют условию $y = \varphi(x)$, то говорят, что случайная величина Y является функцией случайной величины X. Символическая запись функциональной зависимости случайной величины Y от случайной величины X имеет следующий вид: $Y = \varphi(X)$.

Зная закон распределения случайной величины X (функцию распределения $F(x)$ или плотность вероятности $f(x)$), можно найти закон распределения случайной величины Y (функцию распределения $G(y)$ или плотность вероятности $g(y)$). В том случае, когда функция $y = \varphi(x)$ дифференцируема и строго монотонна, справедливы следующие соотношения:

$$G(y) = P(Y < y) = \begin{cases} F(\psi(y)), & \text{если } y = \varphi(x) \text{ возрастает;} \\ 1 - F(\psi(y)), & \text{если } y = \varphi(x) \text{ убывает,} \end{cases}$$

и

$$g(y) = G'(y) = f(\psi(y))\left|\frac{d\psi(y)}{dy}\right| = f(\psi(y))|\psi'(y)|,$$

где $x = \psi(y)$ — функция, обратная исходной функции $y = \varphi(x)$ (рис. 1.12). Границы α', β' области возможных значений случайной величины Y определяются с помощью формул:

$$\alpha' = \begin{cases} \varphi(\alpha), & \text{если } y = \varphi(x) \text{ возрастает;} \\ \varphi(\beta), & \text{если } y = \varphi(x) \text{ убывает,} \end{cases}$$

и

$$\beta' = \begin{cases} \varphi(\beta), & \text{если } y = \varphi(x) \text{ возрастает;} \\ \varphi(\alpha), & \text{если } y = \varphi(x) \text{ убывает.} \end{cases}$$

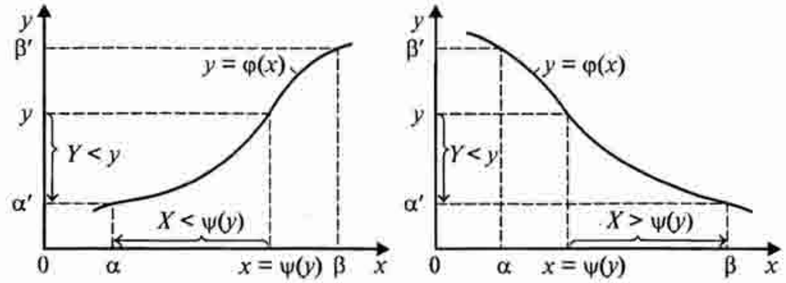


Рис. 1.12. К определению закона распределения функции случайного аргумента.

В том случае, если при каждом испытании реализация (x, y) системы случайных величин (X, Y) в данном испытании и реализация z случайной величины Z в этом же испытании связаны между собой соотношением $z = \varphi(x, y)$, то принято говорить, что случайная величина Z является функцией случайных величин X и Y. (Здесь $z = \varphi(x, y)$ — заданная детерминированная функция двух аргументов). Символическая запись функциональной зависимости случайной величины Z от случайных величин X и Y имеет вид: $Z = \varphi(X, Y)$.

Если функция $z = \varphi(x, y)$ определена во всех точках области возможных значений системы случайных величин (X, Y) и имеет в этой области непрерывные частные производные первого порядка, то плотность вероятности случайной величины Z определяется формулой

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi(z, y), y) \left| \frac{\partial \psi(z, y)}{\partial z} \right| dy, \qquad (1.1)$$

если функция $z = \varphi(x, y)$ строго монотонна относительно x, или формулой

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \psi(z, x)) \left| \frac{\partial \psi(z, x)}{\partial z} \right| dx, \qquad (1.1a)$$

если функция $z = \varphi(x, y)$ строго монотонна относительно y. Здесь $x = \psi(z, y)$ и $y = \psi(z, x)$ — функции, обратные исходной функции $z = \varphi(x, y)$.

В важном для практики частном случае, когда случайная величина $Z = X + Y$ представляет собой сумму двух независимых случайных величин X и Y, плотность вероятности случайной величины Z определяется соотношением

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z - y) f_y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z - x)\, dx. \qquad (1.2)$$

(Эта формула является частным случаем формул (1.1) и (1.1a) при $z = \varphi(x, y) = x + y$). Интеграл (1.2) называется сверткой (композицией) функций плотности $f_x(x)$ и $f_y(y)$.

Параметры закона распределения. Формула, задающая закон распределения случайной величины (функцию вероятности, плотность вероятности и т. п.), обязательно содержит хотя бы один параметр. Параметры закона распределения случайной величины принято делить на три основных вида, имеющих вполне определенный физический или геометрический смысл. Это так называемые параметры положения, масштаба и формы:

параметр положения μ — параметр, характеризующий положение области возможных значений случайной величины

на числовой оси (обычно это абсцисса «центральной точки» этой области или ее левая граница);

параметр масштаба λ — параметр, определяющий масштаб, в котором измеряется значение случайной величины;

параметр формы θ — параметр, определяющий форму графика функции плотности (форму кривой распределения) и других функций, характеризующих распределение случайной величины.

Если необходимо подчеркнуть, что распределение случайной величины X зависит от параметров μ, λ, θ, тогда для обозначения этой случайной величины используется символ $X(\mu, \lambda, \theta)$, а для обозначения ее функции распределения — символ $F_x(x; \mu, \lambda, \theta)$. В тех случаях, когда из контекста ясно, о какой случайной величине идет речь, используется более простой символ $F(x; \mu, \lambda, \theta)$. Сходные символы применяются и для обозначения других функций — функции вероятности, функции плотности и т. п. Так, например, функция риска (интенсивность) непрерывной случайной величины $X(\mu, \lambda, \theta)$ обозначается символом $\lambda_x(x; \mu, \lambda, \theta)$ или символом $\lambda(x; \mu, \lambda, \theta)$.

Следует заметить, что в тех случаях, когда имеются прочно установившиеся традиции обозначения параметров положения, масштаба и формы, вместо символов μ, λ, θ могут быть использованы и другие символы. Так, например, параметр масштаба нормального распределения, как правило, обозначается символом σ.

Тип распределения. Распределение случайной величины $Y = aX + b$, полученной путем линейного преобразования случайной величины X, отличается от распределения случайной величины X только параметрами положения и масштаба (здесь $a > 0$ и b — постоянные). Параметр формы (если таковой существует) в результате линейного преобразования не изменяется. Линейная функция $y = \varphi(x) = ax + b$, преобразующая положение и масштаб распределения, строго монотонна и имеет обратную функцию $x = \psi(y) = (y - b)/a$.

В теории вероятностей широко используется такое понятие, как «тип распределения». Сущность этого понятия заключается в следующем: распределения вероятностей случайных величин X и Y называются *однотипными*, если существуют постоянные $a > 0$ и b, такие что распределения случайных величин Y и $aX + b$ совпадают.

Пусть $X(0, 1)$ обозначает случайную величину с параметром положения μ равным нулю и параметром масштаба равным единице, а $X(\mu, \lambda)$ — случайную величину того же самого типа с параметром положения μ и параметром масштаба λ. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$X(\mu, \lambda) \sim \mu + \lambda X(0, 1), \quad X(0, 1) \sim \frac{X(\mu, \lambda) - \mu}{\lambda}$$

(запись $X \sim Y$ обозначает, что случайные величины X и Y имеют одно и то же распределение, т. е. имеют одинаковые функции вероятности, функции распределения и т.п.);

$$F(x;\mu,\lambda) = F\left(\frac{x-\mu}{\lambda};0,1\right), \qquad f(x;\mu,\lambda) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x-\mu}{\lambda};0,1\right);$$

$$\lambda(x;\ \mu,\ \lambda) = \frac{1}{\lambda}\lambda\left(\frac{x-\mu}{\lambda};0,1\right), \qquad \chi(t;\mu,\lambda) = e^{i\mu t}\chi(\lambda t;0,1);$$

$$x_p(\mu,\lambda) = \mu + \lambda x_p(0,1).$$

Здесь $x_p(\mu,\lambda)$ — квантиль порядка p случайной величины X, параметр положения которой равен μ, а параметр масштаба равен λ.

1.3. СИММЕТРИЧНЫЕ, СМЕЩЕННЫЕ И УСЕЧЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. СМЕСИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Симметричные распределения. Распределение непрерывной случайной величины X называется *симметричным*, если кривая распределения $f(x)$ этой случайной величины симметрична относительно прямой $x = x_{0.5}$, т. е. распределение симметрично, если $f(x_{0.5} - l) = f(x_{0.5} + l)$ (рис. 1.13, *а*). У симметричных распределений математическое ожидание (если оно существует) совпадает с медианой и модой (антимодой):

$$M(X) = \mathrm{Me}(X) = \mathrm{Mo}(X)$$

$$(\bar{x} = x_{0.5} = \hat{x}).$$

Функция распределения $F(x)$ симметричного распределения удовлетворяет условию $F(x_{0.5} - l) = 1 - F(x_{0.5} + l)$ (рис. 1.13, *б*).

В практических приложениях довольно часто встречаются симметричные распределения, функция плотности $f(x)$ которых является четной функцией (например, стандартное нормальное распределение или распределение Стьюдента). Для таких распределений справедливы соотношения:

$$f(-x) = f(x), \quad F(-x) = 1 - F(x); \tag{1.3}$$

$$x_{1-p} = -x_p. \tag{1.4}$$

Таблицы всех распределений с четной функцией плотности составляются только для положительных значений аргумента. При определении значений функции распределения и функции плотности таких распределений для отрицательных значений x используются формулы (1.3).

Из формулы (1.4) следует, что для вычисления квантилей распределений с четной функцией плотности во всем диапазоне изменений их порядка p (т. е. от 0 до 1) вполне достаточно

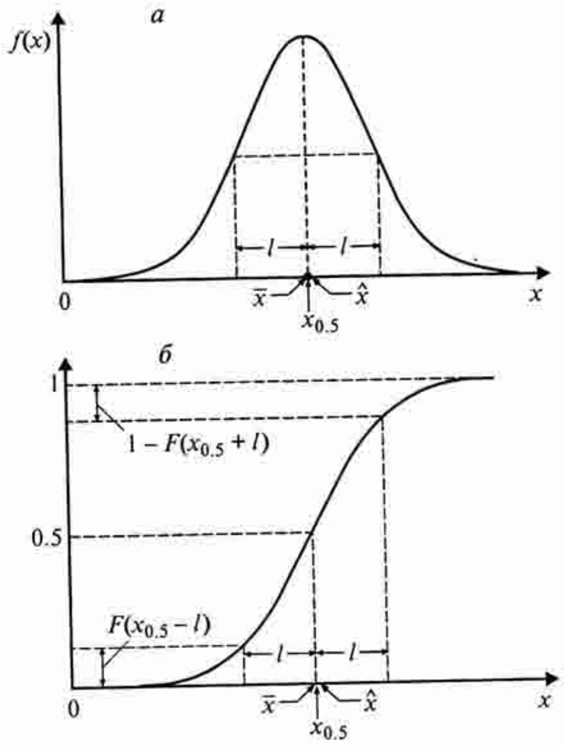


Рис. 1.13. Симметричное распределение.

иметь таблицу квантилей лишь для $p \geq 0.5$. При $p < 0.5$ квантиль определяется с помощью формулы $x_p = -x_{1-p}$.

Рассмотрим случайную величину X, функция плотности которой является четной функцией, и случайную величину $Y = X^2$. Для этих случайных величин справедливы следующие соотношения:[1]

$$f_x(x) = |x| f_y(x^2), \qquad f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_x(\sqrt{y});$$

$$F_x(x) = \frac{1}{2}\left[1 + F_y(x^2)\right], \quad F_y(y) = 2F_x(\sqrt{y}) - 1;$$

$$y_p = x^2_{(1+p)/2}.$$

Смещенные распределения. На практике довольно часто приходится иметь дело со случайными величинами вида

[1] Эти формулы используются в гл. 3 Справочника при установлении связи между F-распределением Фишера—Снедекора и t-распределением Стьюдента.

$Y = c + X$, представляющими собой сумму положительной постоянной (константы) c и случайной величины X, у которой левая граница области возможных значений $\alpha = 0$.[1]

Функции вероятности $p_y(y)$ и $p_x(x)$, функции распределения $F_y(y)$ и $F_x(x)$, плотности вероятности $f_y(y)$ и $f_x(x)$ и, наконец, функции риска $\lambda_y(y)$ и $\lambda_x(x)$ случайных величин Y и X связаны между собой следующими соотношениями:

$$p_y(y) = p_x(y-c),\ \ F_y(y) = F_x(y-c),$$
$$f_y(y) = f_x(y-c),\ \ \lambda_y(y) = \lambda_x(y-c),$$
$$(y \geq c).$$

Кривая распределения случайной величины $Y = c + X$ представляет собой кривую распределения исходной случайной величины X, сдвинутую без деформации на c единиц «вправо» (рис. 1.14). Поэтому распределение случайной величины Y называется *смещенным распределением*, а постоянная c — *параметром сдвига*, или *смещением*.

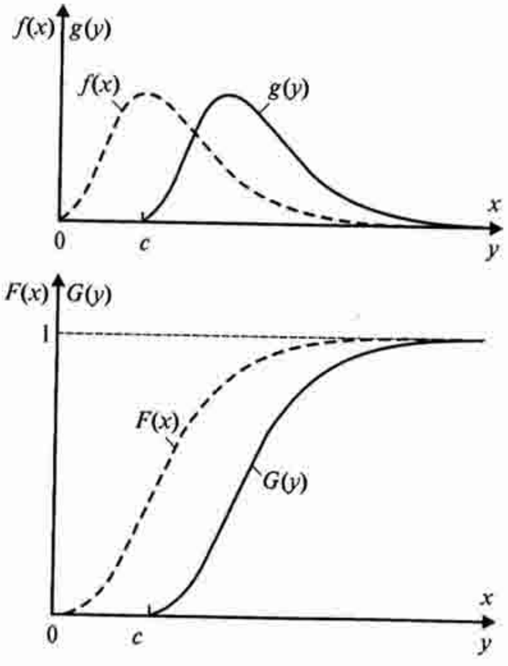


Рис. 1.14. Смещенное распределение.

[1] Так, например, случайное время Y передачи телеграфного сообщения складывается из времени c передачи служебной части (заголовка) сообщения, одинакового для всех сообщений, передаваемых в данной линии связи, и случайного времени X передачи текста сообщения, которое зависит от случайного числа символов (знаков) в этом сообщении.

Основные характеристики случайной величины $Y = c + X$:

производящая функция	$\varphi_y(t) = t^c \varphi_x(t)$;
характеристическая функция	$\chi_y(t) = e^{ict} \chi_x(t)$;
математическое ожидание	$\bar{y} = c + \bar{x}$;
медиана	$y_{0.5} = c + x_{0.5}$;
мода	$\hat{y} = c + \hat{x}$.

Начальные моменты случайных величин $Y = c + X$ и X связаны между собой следующими соотношениями:

$$m_2(Y) = m_2(X) + 2m_1(X)c + c^2;$$
$$m_3(Y) = m_3(X) + 3m_2(X)c + 3m_1(X)c^2 + c^3;$$
$$m_4(Y) = m_4(X) + 4m_3(X)c + 6m_2(X)c^2 + 4m_1(X)c^3 + c^4;$$
$$m_s(Y) = \sum_{k=0}^{s} C_s^k m_k(X) c^{s-k}.$$

Центральные моменты случайной величины $Y = c + X$ не зависят от смещения c и совпадают с соответствующими центральными моментами исходной случайной величины X:

$$\mu_s(Y) = \mu_s(X).$$

В частности,

$$D(Y) \equiv \mu_2(Y) = \mu_2(X) \equiv D(X).$$

Замечания. 1. Термины «смещенное распределение», «параметр сдвига» («смещение») используются только в тех случаях, когда формула, задающая закон распределения исходной (несмещенной) неотрицательной случайной величины X, не имеет параметра положения. Использование этих терминов применительно к случайной величине X, имеющей параметр положения, лишено какого-либо смысла.

2. При определении оценок параметров смещенного распределения методом моментов следует помнить о том, что начальные моменты (в том числе математическое ожидание) случайной величины Y не совпадают с соответствующими начальными моментами исходной (несмещенной) случайной величины X.[1]

[1] При оценке параметров распределения методом моментов довольно часто допускают следующую ошибку: из справочника выписывают соотношение, устанавливающее связь математического ожидания распределения рассматриваемого типа с параметрами этого распределения, и приравнивают математическое ожидание выборочному среднему исследуемой смещенной случайной величины, совершенно не учитывая при этом, что в справочниках приводятся формулы, определяющие математическое ожидание несмещенной случайной величины (т. е. вместо уравнения $c + \bar{x}(\lambda, \theta) = \bar{y}^*$ составляют и решают уравнение $\bar{x}(\lambda, \theta) = \bar{y}^*$).

Усеченные распределения. При решении некоторых задач из рассмотрения исключаются значения случайной величины X, не принадлежащие интервалу (α, β).[1] Распределение такой усеченной случайной величины с областью возможных значений (α, β) называется *усеченным распределением*. Плотность вероятности усеченного распределения, соответствующего исходному распределению с функцией плотности $f(x)$, определяется формулой

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & \text{при } x<\alpha,\ x>\beta;\\ \dfrac{f(x)}{F(\beta)-F(\alpha)} & \text{при } \alpha\le x\le\beta,\end{cases}$$

где $F(x)$ — функция распределения исходного (неусеченного) распределения (рис. 1.15, *а*). Усечение может быть как двусторонним, так и односторонним. При усечении только слева $\beta=\infty$, при усечении только справа $\alpha=-\infty$. Степень усечения характеризуется вероятностью $P\{X_{\text{исх}}\notin(\alpha,\beta)\}=1-[F(\beta)-F(\alpha)]$ того, что исходная (неусеченная) случайная величина $X_{\text{исх}}$ окажется вне интервала (α, β). Усеченное распределение определяется параметрами исходного распределения и *точками усечения* α и β.

Функция распределения $F(x;\alpha,\beta)$ усеченного распределения связана с функцией распределения $F(x)$ исходного распределения соотношением (рис. 1.15, *б*)

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le\alpha;\\ \dfrac{F(x)-F(\alpha)}{F(\beta)-F(\alpha)} & \text{при } \alpha\le x\le\beta;\\ 1 & \text{при } x>\beta.\end{cases}$$

Усеченное распределение представляет собой условное распределение исходной случайной величины X при условии, что $\alpha<X\le\beta$:

$$F(x;\alpha,\beta)=P(X<x/\alpha<X\le\beta).$$

Функция вероятности усеченного дискретного (целочисленного) распределения

$$p(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & \text{при } x<\alpha,\ x>\beta;\\ \dfrac{1}{\gamma}p(x) & \text{при } x=\alpha,\ \alpha+1,\dots,\beta,\end{cases}$$

[1] Такая ситуация, например, имеет место при отбраковке втулок, диаметр которых меньше α или больше β (диаметр которых не укладывается в поле допуска $[\alpha, \beta]$).

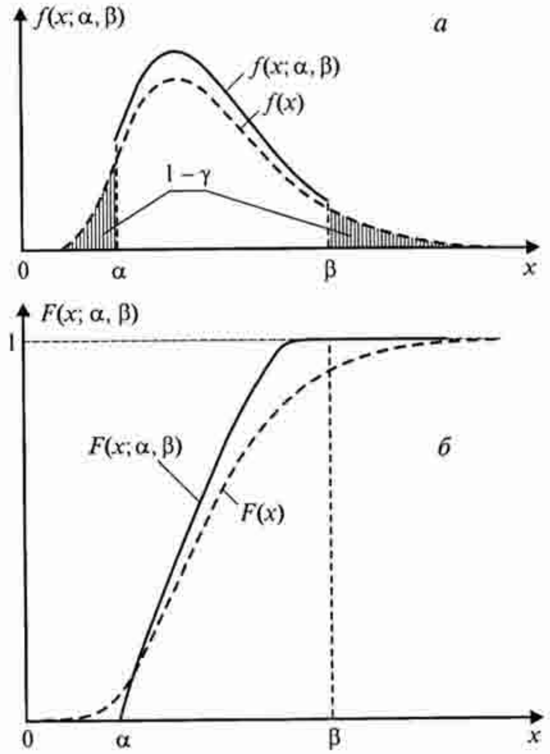


Рис. 1.15. Усеченное распределение.

где $p(x)$ — функция вероятности исходного (неусеченного) распределения; $\gamma=P(\alpha\le X_{\text{исх}}\le\beta)$ — вероятность того, что исходная (неусеченная) случайная величина $X_{\text{исх}}$ попадет в интервал $[\alpha, \beta]$.

Смеси распределений. Рассмотрим случайные величины Y и Z с известными плотностями вероятности $f_1(y)$, $f_2(z)$ и функциями распределения $F_1(y)$, $F_2(z)$. Пусть случайная величина Y связана с некоторым комплексом условий «1», а случайная величина Z — с комплексом условий «2» (т. е. всякий раз, когда в ходе испытания реализуется комплекс условий «1», реализуется одно из возможных значений случайной величины Y, а при реализации комплекса условий «2» реализуется одно из возможных значений случайной величины Z). Предположим, что в бесконечной последовательности независимых испытаний реализации комплекса условий «1» чередуются случайным образом с реализациями комплекса условий «2». Причем вероятность того, что при очередном испытании будет реализован комплекс условий «1», равна π_1, а вероятность того, что будет реализован комплекс условий «2», равна π_2 ($\pi_1+\pi_2=1$). Выполнив бесконечное число таких испытаний, получим смесь реализаций случайных величин Y и Z, в которой доля реализаций случайной величины Y равна π_1, а доля реализаций случайной величины Z равна π_2. Будем рассматривать полученную таким образом смесь как генеральную совокупность значений новой случайной величины X. Тогда плотность вероятности случайной величины X (т. е. плотность вероятности смеси случайных величин Y и Z) определяется формулой

$$f(x) = \pi_1 f_1(x) + \pi_2 f_2(x).$$

На рис. 1.16 для примера приведен график функции плотности $f(x)$ смеси двух нормальных распределений — распределения $f_1(x)$ с параметрами: $\bar{x}_1 = 3.5$, $\sigma_1 = 1$, $\pi_1 = 0.6$ и распределения $f_2(x)$ с параметрами: $\bar{x}_2 = 5.5$, $\sigma_2 = 1.5$, $\pi_2 = 0.4$.

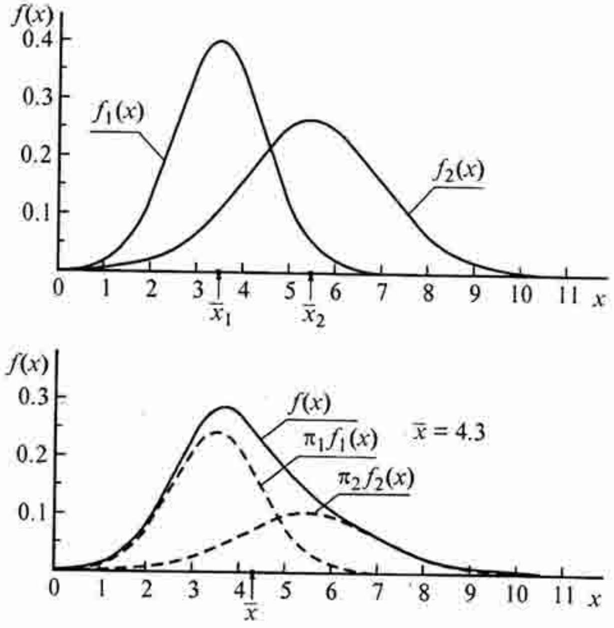


Рис. 1.16. Смесь распределений.

$f_1(x)$: $\bar{x}_1 = 3.5$, $\sigma_1 = 1.0$, $\pi_1 = 0.6$; $f_2(x)$: $\bar{x}_2 = 5.5$, $\sigma_2 = 1.5$, $\pi_2 = 0.4$.

Функция распределения и характеристическая функция смеси двух распределений определяются соотношениями:

$$F(x) = \pi_1 F_1(x) + \pi_2 F_2(x);$$

$$\chi_x(t) = \pi_1 \chi_1(t) + \pi_2 \chi_2(t).$$

Основные числовые характеристики такой смеси:

математическое ожидание $\quad \bar{x} = \pi_1 \bar{y} + \pi_2 \bar{z};$

дисперсия $\quad \sigma_x^2 = \pi_1 m_2(Y) + \pi_2 m_2(Z) - \bar{x}^2.$

В общем случае, когда генеральная совокупность значений случайной величины X представляет собой смесь значений n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi_k f_k(x), \quad F(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi_k F_k(x), \quad \chi_x(t) = \sum_{k=1}^{n} \pi_k \chi_k(t);$$

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \pi_k \bar{x}_k, \quad \sigma_x^2 = \sum_{k=1}^{n} \pi_k m_2(X_k) - \left(\sum_{k=1}^{n} \pi_k \bar{x}_k \right)^2,$$

где π_k — вероятность реализации комплекса условий «k», с которым связана случайная величина X_k («удельный вес» реализаций случайной величины X_k в смеси; $k = 1, 2, \ldots, n$).

1.4. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Для большинства распределений, рассмотренных в Справочнике, даны оценки параметров, полученные методом моментов (ММ) и методом максимального правдоподобия (ММП). Для некоторых распределений приведены оценки, основанные на использовании выборочных квантилей. Для обозначения оценок, полученных методом моментов, используется сокращенная запись ОММ. Оценки максимального правдоподобия обозначаются аббревиатурой ОМП.

Оценки параметров распределений обозначаются теми же самыми символами, что и оцениваемые параметры, но с верхним индексом в виде звездочки (*). Так, например, символ μ^* обозначает выборочную оценку параметра положения μ, а символ λ^* — оценку параметра масштаба λ.

Оценивание параметров распределений связано с использованием выборочных данных и выборочных (эмпирических) числовых характеристик. В табл. 1 приведены условные обозначения выборочных значений и выборочных числовых характеристик, используемых в Справочнике. Здесь также соблюден принцип, согласно которому выборочные числовые характеристики обозначаются теми же самыми символами, что и теоретические числовые характеристики, однако в отличие от последних выборочные числовые характеристики отмечены верхним индексом в виде звездочки.

Таблица 1

Условное обозначение	Термин или определение	Описание и примечание
n	Объем выборки	Число элементов в выборке
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	Случайная (неупорядоченная) выборка объема n	Последовательность n независимых реализаций случайной величины X
x_i	i-й элемент случайной выборки	i-я реализация случайной величины X
$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$	Упорядоченная выборка объема n (вариационный ряд)	Выборка, элементы которой расположены в порядке их возрастания (неубывания), т. е. $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$
$x_{(i)}$	i-й элемент упорядоченной выборки (вариационного ряда)	i-й по величине элемент выборки
$x_{(1)}$	Минимальный элемент выборки	$x_{(1)} = \min\limits_{1 \le i \le n} x_i$
$x_{(n)}$	Максимальный элемент выборки	$x_{(n)} = \max\limits_{1 \le i \le n} x_i$
*	Символ выборочной (эмпирической) числовой характеристики	Ставится на место верхнего индекса справа от основного буквенного обозначения соответствующей числовой характеристики (соответствующего параметра). Указывает на оценочный характер параметра, помеченного этим символом
$\bar{x}^*$	Выборочное среднее случайной величины X	Выборочная оценка математического ожидания $\bar{x}$ случайной величины X: $\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$
$\tilde{x}^*$	Выборочное среднее геометрическое	Среднее геометрическое элементов выборки $\tilde{x}^* = \sqrt[n]{x_1\, x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$
S_x^2	Выборочная дисперсия случайной величины X	Несмещенная выборочная оценка дисперсии D_x случайной величины X: $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^*)^2$
S_x	Выборочное среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины X	Выборочная оценка среднего квадратического (стандартного) отклонения σ_x случайной величины X: $S_x = \sqrt{S_x^2}$

Таблица 1 (*продолжение*)

Условное обозначение	Термин или определение	Описание и примечание
v_x^*	Выборочный коэффициент вариации неотрицательной случайной величины X	Выборочная оценка коэффициента вариации v_x неотрицательной случайной величины X: $v_x^* = S_x / \bar{x}^*$
D_x^*	Выборочная дисперсия случайной величины X	Смещенная выборочная оценка дисперсии D_x случайной величины X: $D_x^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^*)^2$
x_p^*	Выборочная квантиль порядка p (выборочная p-квантиль) случайной величины X	Выборочная оценка p-квантили x_p непрерывной случайной величины X: $x_p^* = x_{(r)}$, где $x_{(r)}$ — r-й элемент упорядоченной выборки (r-я порядковая статистика); $r = \lfloor np + 0.5 \rfloor$ и $\lfloor a \rfloor$ — целая часть числа a. Более точный результат дает формула $x_p^* = x_{(r)} + [x_{(r+1)} - x_{(r)}](np - r)$, где $r = \lfloor np \rfloor$.
E^*	Выборочное срединное (вероятное) отклонение случайной величины X	Выборочная оценка срединного (вероятного) отклонения E непрерывной случайной величины X с симметричной кривой распределения: $E^* = (x^*_{(0.75)} - x^*_{(0.25)}) / 2$
$m_s^*(X)$ или m_s^*	Выборочный начальный момент порядка s (s-й выборочный начальный момент) случайной величины X	Выборочная оценка s-го начального момента $m_s(X)$ случайной величины X: $m_s^*(X) \equiv m_s^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^s$
$\mu_s^*(X)$ или μ_s^*	Выборочный центральный момент порядка s (s-й выборочный центральный момент) случайной величины X	Выборочная оценка s-го центрального момента $\mu_s(X)$ случайной величины X: $\mu_s^*(X) \equiv \mu_s^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^*)^s$
$\mathrm{Sk}^*(X)$ или Sk^*	Выборочный коэффициент асимметрии (выборочная асимметрия) случайной величины X	Выборочная оценка коэффициента асимметрии $\mathrm{Sk}(X)$ случайной величины X: $\mathrm{Sk}^*(X) \equiv \mathrm{Sk}^* = \mu_3^*(X)/S_x^3$
$\mathrm{Ex}^*(X)$ или Ex	Выборочный коэффициент эксцесса (выборочный эксцесс) случайной величины X	Выборочная оценка коэффициента эксцесса $\mathrm{Ex}(X)$ случайной величины X: $\mathrm{Ex}^*(X) \equiv \mathrm{Ex}^* = \frac{\mu_4^*(X)}{(S_x^2)^2} - 3$

1.5. ГЕНЕРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Случайными (псевдослучайными) числами с заданным законом распределения называются числа, последовательность которых обладает статистическими свойствами, такими же как статистические свойства последовательности независимых реализаций случайной величины, подчиняющейся этому закону распределения. В терминах математической статистики последовательность случайных чисел с заданным законом распределения представляет собой случайную выборку из генеральной совокупности, распределенной по этому закону.

При рассмотрении алгоритмов генерирования (формирования) случайных чисел с заданным законом распределения в Справочнике используются приводимые ниже термины и условные обозначения.

Последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots$ независимых реализаций случайной величины R, распределенной равномерно в интервале (0, 1), называется *стандартной равномерной последовательностью* и обозначается символом $\{r_i\}$. Символ r (или r_i) обозначает одно из случайных чисел стандартной равномерной последовательности. Запись $r := \text{rand};$ (или $r_i := \text{rand};$) означает обращение к датчику случайных чисел (ДСЧ) или к стандартной подпрограмме для формирования псевдослучайных чисел (СП ПСЧ), равномерно распределенных в интервале (0, 1). На блок-схемах алгоритмов генерирования случайных (псевдослучайных) чисел с заданным законом распределения обращение к датчику случайных чисел (или к СП ПСЧ), равномерно распределенных в интервале (0, 1), изображается в виде оператора

$$\downarrow$$
$$\boxed{r := \text{rand};}$$
$$\downarrow$$

Последовательность случайных чисел $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots$, представляющих собой независимые реализации стандартной нормальной случайной величины U, называется *стандартной нормальной последовательностью* и обозначается символом $\{u_i\}$. Символ u (или u_i) обозначает одно из случайных чисел такой последовательности. Запись $u := \text{norm};$ (или $u_i := \text{norm};$) означает обращение к стандартной подпрограмме для получения стандартных нормальных случайных (псевдослучайных) чисел.

Большинство алгоритмов генерирования случайных чисел, приведенных в Справочнике, реализует так называемый стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин. Сущность этого способа заключается в следующем. В качестве очередной реализации целочисленной случайной величины X с рядом распределения

$p_i = P(X = i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, берут целое число x, удовлетворяющее условию

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_{x-1} \le r < p_0 + p_1 + \ldots + p_x,$$

где r — очередное случайное число стандартной равномерной последовательности $\{r_i\}$.

В большей части алгоритмов генерирования случайных чисел с непрерывным законом распределения используется способ обратной функции (преобразование Н. В. Смирнова). При использовании этого способа в качестве очередной реализации случайной величины X с заданной функцией распределения $F(x)$ используется число x_i, являющееся корнем уравнения

$$x_i = F^{-1}(r_i),$$

где $x = F^{-1}(r)$ — функция, обратная функции $F(x)$.

В ряде алгоритмов генерирования случайных чисел с непрерывным законом распределения, приведенных в Справочнике, использован способ исключения (способ Неймана) и различные модификации способа суперпозиции. Подробное описание различных способов генерирования случайных чисел с заданным законом распределения приведено в монографиях [14], [37], [40], [43] и [47].

1.6. ТАБЛИЦЫ, ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Таблицы

В пособии даны ссылки только на отечественные математические таблицы.

Для характеристики точности таблиц используются обозначения вида mD или mS, где m — натуральное число. Символ mD означает, что значение табулированной функции дано с точностью до m десятичных знаков после запятой, а символ mS свидетельствует о том, что табличные значения даны с m значащими цифрами.

Для обозначения пределов и шага изменения аргумента табулированной функции и ее параметров используется сокращенная запись вида $a(\delta)b$. Такая запись относится ко всем величинам от a до b включительно с шагом измерения δ. Так, например, запись

$$x = 0(1)10, \quad \lambda = 0.1\,(0.2)\,0.9;\ 5D$$

означает, что таблица содержит значения табулированной функции, соответствующие значениям аргумента $x = 0, 1, 2, \ldots, 9, 10$

и значениям параметра $\lambda = 0.1, 0.3, ..., 0.7, 0.9$; табличные значения приведены с точностью до пятого знака после запятой.

Техника вычислений

При описании техники вычислений основное внимание уделено использованию таблиц распределений. При этом рассматриваются только таблицы отечественных изданий. Для большинства дискретных распределений приведены рекуррентные формулы для вычисления вероятностей

$$p(x) = P(X = x), \quad x = 1, 2,...$$

Для некоторых наиболее важных распределений приведены аналитические выражения и различные аппроксимирующие формулы для вычисления значений функции распределения и квантилей, которые можно использовать при расчетах на ЭВМ. Более подробные сведения по этому вопросу приводятся в [42], [44] и [45].

1.7. УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Условное обозначение	Термин или описание	Описание и примечания
$p(x)$, $p_x(x)$, $p(x;\ \mu,\ \lambda)$ $p_X(x;\ \mu,\ \lambda)$	Функция вероятности целочисленной случайной величины X	Функция, устанавливающая связь между возможными значениями $x = 0, 1,...$ целочисленной случайной величины X и вероятностями появления этих значений $p(x) = P(X = x)$
$f(x)$, $f_x(x)$, $f(x;\ \mu,\ \lambda)$, $f_X(x;\ \mu,\ \lambda)$	Плотность вероятности, или функция плотности, непрерывной случайной величины X	Предел отношения вероятности попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(x, x + \Delta x)$ к длине Δx этого интервала, стремящейся к нулю: $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$
$F(x)$, $F_X(x)$, $F(x;\ \mu,\ \lambda)$, $F_X(x;\ \mu,\ \lambda)$	Функция распределения случайной величины X	Функция, значение которой при каждом x равно вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X < x)$
$\lambda(x)$, $\lambda_x(x)$	Функция риска (интенсивность) непрерывной случайной величины X	Функция, определяемая равенством $\lambda(x) = \dfrac{f(x)}{1 - F(x)}$

Условное обозначение	Термин или описание	Описание и примечания
$\varphi_x(t)$	Производящая функция целочисленной случайной величины X	Функция действительной переменной t, представляющая собой математическое ожидание случайной величины t^X: $\varphi_x(t) = M(t^X) = \sum\limits_{x=0}^{\infty} t^x p(x),\ \lvert t \rvert \le 1$
$\chi_x(t)$	Характеристическая функция случайной величины X	Функция действительной переменной t, представляющая собой математическое ожидание случайной величины e^{itX}: $\chi_x(t) = M(e^{itX}) = \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} e^{itx} p(x), & X \text{ — дискретная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx, & X \text{ — непрерывная} \end{cases}$
$M(X)$, $\bar{x}$, $m_1(X)$	Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины X	$M(X) = \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} x\,p(x), & X \text{ — дискретная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, & X \text{ — непрерывная} \end{cases}$
$m_s(X)$, m_s	Начальный момент s-го порядка (начальный момент порядка s, s-й начальный момент) случайной величины X	Математическое ожидание случайной величины X^s: $m_s(X) = M(X^s) = \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} x^s p(x), & X \text{ — дискретная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)\,dx, & X \text{ — непрерывная} \end{cases}$
$\mu_s(X)$, μ_s	Центральный момент s-го порядка (центральный момент порядка s, или s-й центральный момент) случайной величины X	Математическое ожидание случайной величины $X^s = (X - \bar{x})^s$: $\mu_s(X) = M[(X - \bar{x})^s] = \begin{cases} \sum\limits_{x=0}^{\infty} (x - \bar{x})^s p(x), & X \text{ — дискретная;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^s f(x)\,dx, & X \text{ — непрерывная} \end{cases}$
Me (X), $x_{0.5}$	Медиана непрерывной случайной величины X	Такое значение $x_{0.5}$ непрерывной случайной величины X, для которого выполняется условие $P(X < x_{0.5}) = P(X > x_{0.5}) = 0.5$ Медиана $x_{0.5}$ является корнем уравнения $F(x_{0.5}) = 0.5$

Условное обозначение	Термин или описание	Описание и примечания
$\mathrm{Mo}(X)$, $\hat{x}$	Мода случайной величины X	Такое значение $\hat{x}$ случайной величины X, при котором функция вероятности $p(x)$ (в дискретном случае) или плотность вероятности $f(x)$ (в непрерывном случае) принимает свое максимальное значение
$\check{x}$	Антимода непрерывной случайной величины X	Такое значение $\check{x}$ «антимодальной» случайной величины X, при котором плотность вероятности $f(x)$ этой случайной величины достигает своего минимума
$D(X)$, D_x, σ_x^2	Дисперсия случайной величины X (второй центральный момент случайной величины X)	Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее среднего значения $\bar{x}$ $$D(X) \equiv \mu_2(X) = M[(X-x)^2]$$
$\sigma(X)$, σ_x	Среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины X	Положительное значение квадратного корня из дисперсии: $$\sigma(X) \equiv \sigma_x = \sqrt{D(X)}$$
v_x	Коэффициент вариации неотрицательной случайной величины X	Отношение стандартного отклонения σ_x неотрицательной случайной величины X к ее среднему значению $\bar{x}$: $$v_x = \sigma_x/\bar{x} \text{ или } v_x = (\sigma_x/\bar{x}) \cdot 100\ \%$$
E	Срединное (вероятное) отклонение случайной величины X	Характеристика рассеяния непрерывной случайной величины X с симметричным распределением. Число E удовлетворяет условию $$P(\lvert X - x_{0.5}\rvert < E) = $$ $$= P(\lvert X - x_{0.5}\rvert > E) = 0.5$$
x_p	Квантиль порядка p (p-квантиль) непрерывной случайной величины X	Такое значение x_p этой случайной величины, для которого выполняется условие $P(X < x_p) = p$. Квантиль x_p является корнем уравнения $F(x_p) = p$
$x_{(p)}$	Критическое значение (критическая точка) порядка p непрерывной случайной величины X	Число $x_{(p)}$, удовлетворяющее условию $P(X > x_{(p)}) = p$. Критическая точка $x_{(p)}$ является корнем уравнения $F(x_{(p)}) = 1 - p$. Для x_p и $x_{(p)}$ справедливы соотношения $x_{(p)} = x_{1-p}$, $x_p = x_{(1-p)}$
$\mathrm{Sk}(X)$, Sk	Коэффициент асимметрии (асимметрия) распределения случайной величины X	$$\mathrm{Sk}(X) = \frac{\mu_3(X)}{[\sigma_x(X)]^3}$$

Условное обозначение	Термин или описание	Описание и примечания
$\mathrm{Ex}(X)$, Ex	Коэффициент эксцесса (эксцесс) распределения случайной величины X	$$\mathrm{Ex}(X) = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma_x(X)]^4} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{[D(X)]^2} - 3$$
$X \sim Y$		Запись $X \sim Y$ означает, что случайные величины X и Y имеют одно и то же распределение, т. е. имеют одинаковые функции вероятности, функции распределения, функции плотности и т. п.

Специальные функции

Условное обозначение	Термин или описание	Описание и примечания
$\psi(x; \mu)$	Функция вероятности распределения Пуассона	$$\psi(x;\mu) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu},$$ где X — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром μ
$\tilde{\Psi}(x; \mu)$	Дополнение функции распределения Пуассона до единицы	$$\tilde{\Psi}(x;\mu) = P(X \ge x) = e^{-\mu}\sum_{i=x}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!}$$
$\varphi(x)$	Плотность вероятности (функция плотности) стандартного нормального распределения	Плотность вероятности нормального распределения с математическим ожиданием $\mu = 0$ и стандартным отклонением $\sigma = 1$ $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2/2)} = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$$
$\Phi(x)$	Функция распределения стандартного нормального распределения	Функция распределения нормального распределения с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$: $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-(t^2/2)}\,dt$$
$\Phi_0(x)$	Функция Лапласа	$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-(t^2/2)}\,dt$$
$\Gamma(\alpha)$	Гамма-функция (эйлеров интеграл второго рода)	$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt = k^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-kt}\,dt$$
$\Gamma(x, \alpha)$	Неполная гамма-функция	$$\Gamma(x,\alpha) = \int_0^{x} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$$
$I(x, \alpha)$	Отношение неполной гамма-функции	$$I(x,\alpha) = \frac{\Gamma(x,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Условное обозначение	Термин или описание	Описание и примечания
$B(u, v)$	Бета-функция (эйлеров интеграл первого рода)	$B(u,v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$; $B(u,v)=B(v,u)$
$B_x(u, v)$	Неполная бета-функция	$B_x(u,v)=\int_0^x t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$
$I_x(u, v)$	Отношение неполной бета-функции	$I_x(u,v)=B_x(u,v)\,B(u,v)$; $I_x(u,v)=I_{1-x}(v,u)$
$\psi(\alpha)$	Пси-функция (дигамма-функция)	$\psi(\alpha)=\frac{d[\ln\Gamma(\alpha)]}{d\alpha}=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$; $\psi(1)=-\gamma=-0.57721566490\ldots$, где γ — постоянная Эйлера
$w(z)$	Интеграл вероятности комплексного аргумента	$w(z)=e^{-z^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}\,dt\right)$
$J_0(z)$	Функция Бесселя первого рода нулевого порядка	$J_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\theta)\,d\theta=$ $=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\,d\theta$
$I_0(z)$	Модифицированная функция Бесселя нулевого порядка (функция Бесселя первого рода нулевого порядка, мнимого аргумента)	$I_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\pm z\cos\theta}\,d\theta$
$F(a, b; c; z)$	Гипергеометрическая функция	$F(a,b;c;z)=$ $=1+\frac{ab}{c}\frac{t}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{t^2}{2!}+$ $+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{t^3}{3!}+\ldots=$ $=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}$; $F(a,b;c;z)=F(b,a;c;z)$
$M(a, b; z)$	Вырожденная гипергеометрическая функция первого рода (функция Куммера)	$M(a,b;z)=1+\frac{a}{b}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!}+\ldots$ $\ldots+\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}\frac{z^n}{n!}+\ldots$

Условное обозначение	Термин или описание	Описание и примечания
$D_p(z)$	Функция параболического цилиндра	$D_p(z)=$ $=-\sqrt{\frac{2^{p-1}}{z e^{z^2}}}\,\frac{\Gamma(-p/2)}{\Gamma((1-p)/2)}\,M\left(-\frac{p}{2};-\frac{1}{2};\frac{z^2}{2}\right)$
$\zeta(\alpha)$	Дзета-функция Римана	$\zeta(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$
$\exp(x)$	Экспоненциальная (показательная) функция	$\exp(x)=e^x$

Специальные математические знаки

$\lfloor x\rfloor$	Целая часть числа x	Наибольшее целое число, не превосходящее x
$\langle x\rangle$	Целое число, ближайшее к x	$\langle x\rangle=\lfloor x+0.5\rfloor$
$\sum_{k=m}^{n}x_k$	Сумма	$\sum_{k=m}^{n}x_k=x_m+x_{m+1}+\ldots+x_n$
$\prod_{k=m}^{n}x_k$	Произведение	$\prod_{k=m}^{n}x_k=x_m\,x_{m+1}\ldots x_n$
*	Символ выборочной оценки числовой характеристики или параметра	Ставится у правой верхней части символа соответствующей числовой характеристики (соответствующего параметра)
mD	Указатель точности значений табулированной функции	Значения функции даны с точностью до m-го десятичного знака после запятой
mS	Указатель точности значений табулированной функции	Значения функции даны с m значащими цифрами
$x=\alpha(\delta)\beta$	Указатель пределов (α, β) и шага δ изменения значений величины x	Запись $x=\alpha(\delta)\beta$ эквивалентна записи $x=\alpha, \alpha+\delta, \alpha+2\delta, \ldots, \beta$
$n!$	Факториал	$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$
$n!!$	Субфакториал	$n!!=\begin{cases}1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+1), & n=2k+1;\\ 2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot2k, & n=2k\end{cases}$
C_n^m	Число сочетаний из n элементов по m	$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^{n-m}$

ГЛАВА 2. ДИСКРЕТНЫЕ (ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. ДИСКРЕТНОЕ РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Ряд распределения $p(x) = \frac{1}{n}, \quad x = a, \quad a+1, \ldots, a+n-1,$

где a — параметр положения (левая граница области возможных значений случайной величины); n — параметр масштаба (число различных возможных значений случайной величины); a, n — целые, $n \geq 2$ (рис. 2.1)

Функция распределения
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \dfrac{k+1}{n}, & a+k < x \leq a+k+1, \\ & k = 0, 1, \ldots, \; n-2; \\ 1, & x > a+n-1 \end{cases}$$

Производящая функция $\varphi_x(t) = \dfrac{t^a(1-t^n)}{n(1-t)}$

Характеристическая функция $\chi_x(t) = \dfrac{e^{iat}(1-e^{int})}{n(1-e^{it})}$

Математическое ожидание $\bar{x} = a + \dfrac{n-1}{2}$

Мода Нет

Дисперсия $D_x = \dfrac{n^2-1}{12}$

Стандартное отклонение $\sigma_x = \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$

Коэффициент вариации $v_x = \dfrac{1}{(2a+n-1)}\sqrt{\dfrac{n^2-1}{3}}$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = 0$

Эксцесс $\mathrm{Ex} = -1.2 - \dfrac{2.4}{n^2-1}$

Начальные моменты
$$m_2 = \frac{2n^2 + 3(2a-1)n + 1}{6} + a(a-1),$$
$$m_3 = \frac{n^3 + 2(2a-1)n^2 + (6a^2-6a+1)n}{4} + a(a^2 - 1.5a + 0.5),$$

$$m_4 = \frac{6n^4 + 15(2a-1)n^3 + 10(6a^2-6a+1)n^2 + 30a(2a^2-3a+1)n - 1}{30} + a^2(a^2 - 2a + 1)$$

Центральные моменты
$$\mu_3 = 0,$$
$$\mu_4 = \frac{(n^2-1)(3n^2-7)}{240}$$

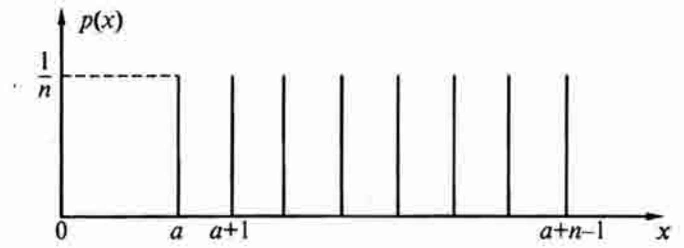


Рис. 2.1. Функция вероятности дискретного равномерного распределения.

Типичная интерпретация: X — число, выбранное наудачу из n целых чисел, принадлежащих интервалу $[a, a+n-1]$.

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \lfloor nr_i \rfloor + a.$$

2.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Ряд распределения	$p(x) = \dfrac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$ где параметр μ — математическое ожидание $(\mu > 0)$
Функция распределения	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ e^{-\mu} \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{\mu^i}{i!}, & k < x \le k+1, \\ & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$
Производящая функция	$\varphi_x(t) = e^{\mu(t-1)} = \exp\left(\mu(t-1)\right)$
Характеристическая функция	$\chi_x(t) = \exp\left(\mu(e^{it} - 1)\right)$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \mu$
Мода	$\hat{x} = \begin{cases} \lfloor \mu \rfloor, & \mu \text{ — не целое;} \\ \left.\begin{matrix} \mu - 1 \\ \mu \end{matrix}\right\}, & \mu \text{ — целое} \end{cases}$
Дисперсия	$D_x = \mu$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \sqrt{\mu}$
Коэффициент вариации	$v_x = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \dfrac{1}{\mu}$
Начальные моменты	$m_2 = \mu + \mu^2;$ $m_3 = \mu + 3\mu^2 + \mu^3;$ $m_4 = \mu + 7\mu^2 + 6\mu^3 + \mu^4$
Центральные моменты	$\mu_3 = \mu;\ \ \mu_4 = \mu + 3\mu^2;$ $\mu_s = (s-1)\mu\mu_{s-2} + \mu \dfrac{\partial \mu_{s-1}}{\partial \mu}$

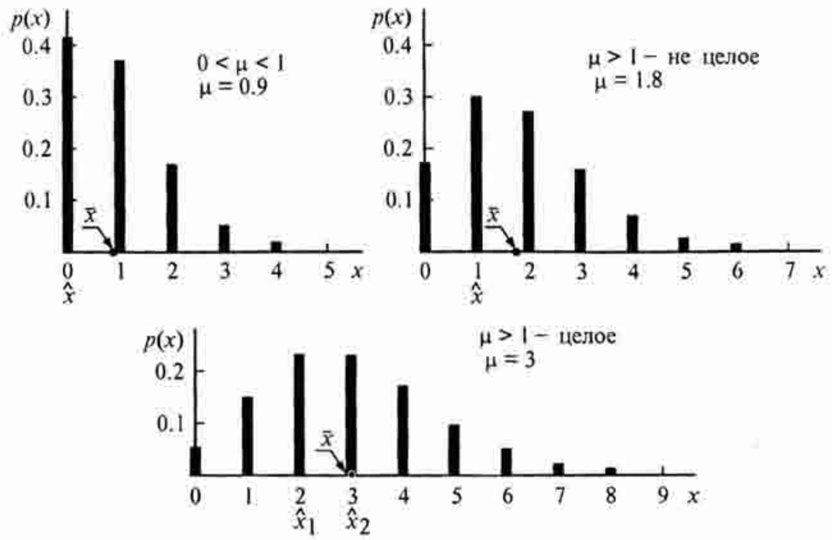


Рис. 2.2. Функция вероятности распределения Пуассона.

Типичная интерпретация: X — число событий стационарного ординарного потока без последействия (пуассоновского потока) в интервале фиксированной длины; μ — математическое ожидание числа событий (среднее число событий) в рассматриваемом интервале (рис. 2.2).

Соотношения между распределениями

1. Сумма s независимых пуассоновских случайных величин с параметрами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ подчиняется закону Пуассона с параметром $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s$. Справедливо и обратное утверждение: если сумма независимых случайных величин распределена по закону Пуассона, то каждое слагаемое распределено по этому же закону.

2. Распределение Пуассона тесно связано с показательным (экспоненциальным) распределением и распределением Эрланга. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_m$ — моменты появления событий случайного потока, например потока сообщений, отказов и т. п.; $X_1, X_2, \ldots, X_m$ — случайные промежутки времени между этими событиями; $N(t)$ — число событий случайного потока в фиксированном интервале времени $[0, t]$ (рис. 2.3).

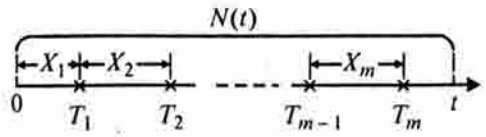


Рис. 2.3. Пуассоновский поток случайных событий.

Крестиками обозначены события случайного потока.

Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_m$ независимы и каждая из них распределена по показательному закону с одним и тем же параметром масштаба λ, то случайное число $N(t)$ событий потока в интервале фиксированной длины t подчиняется закону Пуассона с параметром $\mu = \lambda t$, а случайная величина $T_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$ имеет распределение Эрланга порядка m с параметром масштаба λ. При этом имеет место равенство

$$P\{N(t) \geq m\} = P(T_m < t).$$

3. Для пуассоновской случайной величины $X(\mu)$ и случайной величины $Z(2(1+k))$, имеющей χ^2-распределение с $\nu = 2(1+k)$ степенями свободы, справедливо соотношение

$$P\{X(\mu) \leq k\} = P\{Z(2(1+k)) > 2\mu\}.$$

4. Распределение Пуассона является предельным для биномиального, отрицательного биномиального и гипергеометрического распределений.

5. При выборе между пуассоновской, биномиальной и отрицательной биномиальной моделями можно пользоваться следующими свойствами этих моделей:

биномиальная	—	дисперсия меньше среднего
пуассоновская	—	дисперсия равна среднему
отрицательная биномиальная	—	дисперсия больше среднего

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{(ММ; ММП).}$$

Подробные рекомендации по определению оценок и доверительных границ для параметра распределения Пуассона приведены в [29].

Генерирование случайных чисел

Алгоритм 1 реализует стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин. Алгоритм 2 основан на связи пуассоновского распределения с показательным и эрланговским распределениями (см. рис. 2.3).

Таблицы

1. [13, с. 395—423, табл. VI, VII]. Приведены значения функций $\psi(x;\mu) = e^{-\mu}\dfrac{\mu^x}{x!} = p(x)$ и $\tilde{\Psi}(x;\mu) = e^{-\mu}\sum\limits_{i=x}^{\infty}\dfrac{\mu^x}{x!} = P(X \geq x)$ для $\mu = 0.1(0.1)15$; 16(2)30; 40(10)100; 4*D*.

2. [2, с. 298—306, табл. 5.3]. Даны значения вероятностей $p(x)$ для $\mu = 0.1(0.1)15$; 6*D*.

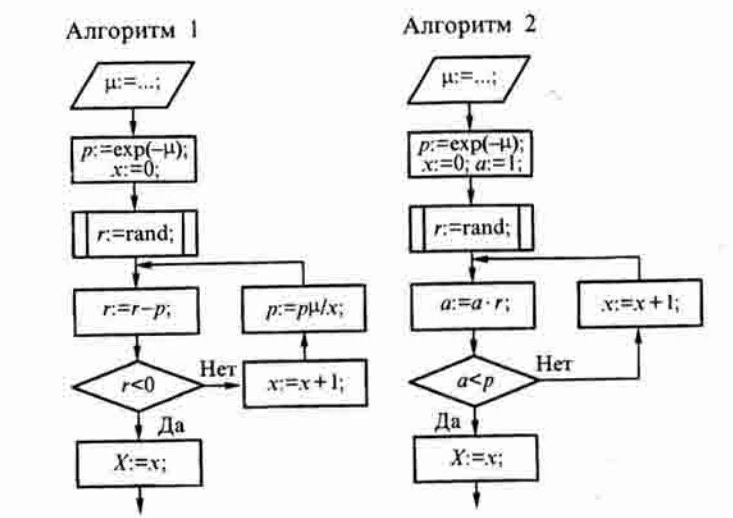


Рис. 2.4. Блок-схемы алгоритмов генерирования пуассоновских случайных чисел.

3. [16, с. 89, 90, табл. 1.1.2.5]. Приведены значения вероятностей $p(x)$ для $\mu = 0.1(0.1)1.0$; 1.5(0.5)5.0; 6(1)10; 6*D*.

4. [6, с. 259—261, табл. 9.3]. Даны значения вероятностей $P(X \leq x)$ для $\mu = 0.001(0.005)0.100$; 0.2(0.1)1.0; 1.2(0.2)2.0; 2.5(0.5)5.0; 6(1.0)10; 4*D*.

5. [3, с. 238—241, табл. 29а, 29б]. Даны значения вероятностей $p(x)$ и $P(X \geq x)$для $\mu = 0.1(0.1)3.0$; 4(1)10; 5*D*.

Техника вычислений

Вероятности $p(x)$ пуассоновского распределения можно вычислить с помощью рекуррентной формулы $p(x) = p(x-1)\dfrac{\mu}{x}$, $x = 1, 2, \ldots$, где $p(0) = e^{-\mu}$.

При вычислении вероятностей вида $P(m_1 \leq X \leq m_2)$ можно использовать таблицы значений функций $P(X \leq x)$ и $P(X \geq x)$, приведенные в [13], [6] и [3].

При $\mu > 9$ распределение Пуассона можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием μ и дисперсией μ:

$$p(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\mu}}\right) \approx \Phi_0\left(\frac{x+0.5-\mu}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-0.5-\mu}{\sqrt{\mu}}\right);$$

$$P(m_1 \leq X \leq m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2+0.5-\mu}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1-0.5-\mu}{\sqrt{\mu}}\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ — функция Лапласа.

В системе символьной математики DERIVE имеются функции POISSON_DENSITY(k, t) $= e^{-t}\frac{t^k}{k!}$ и POISSON_DISTRIBUTION (k, t) $= \sum_{i=0}^{k} e^{-t}\frac{t^i}{i!}$ (см. [41], утилиты PROBABIL.MTH).

2.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Ряд распределения	$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$, где p — параметр формы ($0 < p < 1$)
Функция распределения	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1-p, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases}$
Производящая функция	$\varphi_x(t) = q + pt$, $q = 1 - p$
Характеристическая функция	$\chi_x(t) = q + pe^{it}$
Математическое ожидание	$\bar{x} = p$
Мода	$\hat{x} = \begin{cases} 0, & 0 < p < 0.5; \\ 1, & 0.5 < p < 1 \end{cases}$
Дисперсия	$D_x = pq$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \sqrt{pq}$
Коэффициент вариации	$v_x = \sqrt{\frac{q}{p}}$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \frac{q-p}{\sqrt{pq}}$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \frac{1}{pq} - 6$
Начальные моменты	$m_2 = m_3 = m_4 = p$
Центральные моменты	$\mu_3 = pq(q-p)$, $\mu_4 = pq(1-3pq)$

Типичная интерпретация: X — число успехов в одиночном испытании Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$.[1]

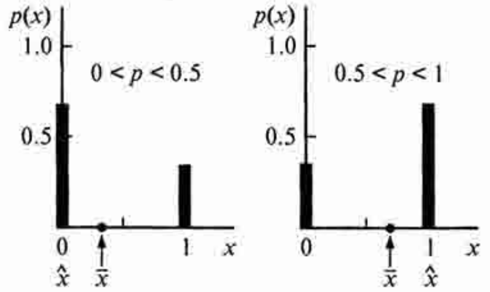


Рис. 2.5. Функция вероятности распределения Бернулли.

Последовательность независимых испытаний Бернулли (*схема Бернулли*) лежит в основе таких целочисленных распределений, как биномиальное, геометрическое и отрицательное биномиальное. «Механизм» возникновения этих распределений определяется тем способом, которым «обрывается» последовательность испытаний Бернулли.

Биномиальное распределение имеет место в тех случаях, когда последовательность испытаний Бернулли обрывается после проведения фиксированного числа n испытаний. При этом под биномиальной случайной величиной X понимается число успехов в серии из n испытаний Бернулли.

Геометрические распределения возникают при обрыве серии испытаний сразу же после первого успеха. При этом рассматриваются две случайные величины: случайная величина X — число неудач, предшествовавших первому успеху, и случайная величина Y — число испытаний до первого успеха (включая и сам успех).

Отрицательное биномиальное распределение имеет место в тех случаях, когда последовательность испытаний обрывается сразу же после m-го успеха. При этом рассматриваются две случайные величины: случайная величина Z — число неудач, предшествовавших m-му успеху, и случайная величина W — общее число испытаний до m-го успеха (включая m-й успех).

[1] «Испытание Бернулли» — вероятностный эксперимент с двумя возможными исходами: «успех» и «неудача». Вероятность успеха в одиночном испытании равна p и не меняется от испытания к испытанию (вероятность p успеха часто называют *параметром испытания Бернулли*).

Генерирование случайных чисел

r := rand;

если $r < p$, то $x := 1$;

иначе $x := 0$.

2.4. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Ряд распределения
$$p(x) = C_n^x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n,$$
$$n \ge 1 \text{ — целое}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$

Функция распределения
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sum_{i=0}^{k} C_n^i q^{n-i}, & k < x \le k+1, \\ & k = 0, 1, \ldots, n-1; \\ 1, & x > n \end{cases}$$

Производящая функция
$$\varphi_x(t) = (q + pt)^n$$

Характеристическая функция
$$\chi_x(t) = (q + pe^{it})^n$$

Математическое ожидание
$$\bar{x} = np$$

Мода
$$\hat{x} = \begin{cases} \lfloor (n+1)p \rfloor, & (n+1)p \text{ — не целое}; \\ \left.\begin{matrix} (n+1)p - 1, \\ (n+1)p, \end{matrix}\right\} & (n+1)p \text{ — целое} \end{cases}$$

Дисперсия
$$D_x = npq$$

Стандартное отклонение
$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

Коэффициент вариации
$$v_x = \sqrt{\frac{q}{np}}$$

Асимметрия
$$\mathrm{Sk} = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}$$

Эксцесс
$$\mathrm{Ex} = \frac{1 - 6pq}{npq}$$

Начальные моменты
$$m_2 = np\,[(n-1)p + 1],$$
$$m_3 = np[(n-1)(n-2)p^2 + 3(n-1)p + 1],$$
$$m_4 = np\,[(n-1)(n-2)(n-3)p^3 + 6(n-1)(n-2)p^2 + 7(n-1)p + 1],$$
$$m_{s+1} = np\left[m_s + \frac{q}{n}\frac{dm_s}{dp}\right]$$

Центральные моменты
$$\mu_3 = npq(q - p),$$
$$\mu_4 = npq[1 + 3pq(n-2)]$$

Типичная интерпретация: 1) X— число успехов в серии из n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$ в каждом испытании; 2) X — число меченых элементов в случайной выборке с возвращением объема n, извлеченной из генеральной совокупности объема N, содержащей $M = pN$ меченых элементов.

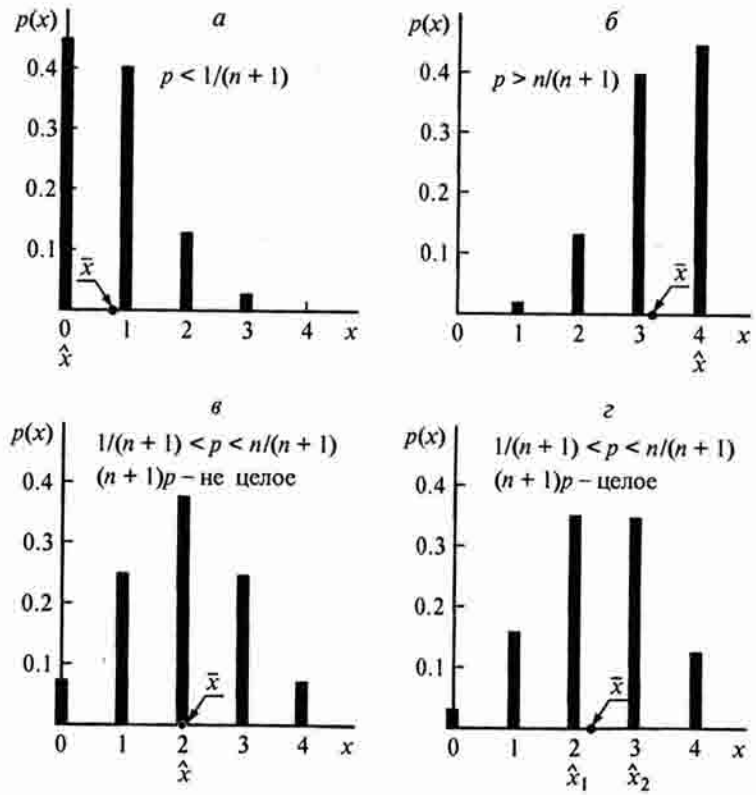


Рис. 2.6. Функция вероятности биномиального распределения.

Параметры распределения: *а* — $n = 4$, $p = 0.18$; *б* — $n = 4$, $p = 0.82$; *в* — $n = 4$, $p = 0.5$; *г* — $n = 4$, $p = 0.6$.

Соотношения между распределениями

1. Для биномиальных распределений с параметрами n, p и n, $1-p$ справедливы соотношения:

$$p(x; n, p) = p(n-x; n, 1-p); \qquad (1)$$

$$P\{X(n; p) \le x\} = 1 - P\{X(n; 1-p) \le n-x-1\}. \qquad (2)$$

2. Сумма s независимых биномиальных случайных величин с параметрами n_i, p $(i = 1, 2, \ldots, s)$ подчиняется биномиальному закону распределения с параметрами ν, p, где

$$\nu = n_1 + n_2 + \ldots + n_s.$$

3. Для биномиальной случайной величины $X(n, p)$ и случайной величины $Y(2(x+1), 2(n-x))$, имеющей F-распределение Фишера–Снедекора с числом степеней свободы $\nu_1 = 2(x+1)$, $\nu_2 = 2(n-x)$, справедливо равенство

$$P\{X(n, p) \le x\} = 1 - P\left\{Y(2(x+1), 2(n-x)) \le \frac{p(n-x)}{(1+x)(1-p)}\right\} =$$

$$= P\left\{Y(2(n-x), 2(x+1)) < \frac{(1+x)(1-p)}{p(n-x)}\right\}.$$

4. При $n \to \infty$, $p \to 0$, так что $np = \mu = \text{const}$, биномиальное распределение стремится к распределению Пуассона с параметром μ.

5. Связь биномиального распределения с геометрическим и отрицательным биномиальным распределениями рассмотрена в п. 2.3.

6. При выборе между биномиальной, отрицательной биномиальной и пуассоновской моделями можно руководствоваться следующими свойствами этих моделей:

биномиальная	—	дисперсия меньше среднего
пуассоновская	—	дисперсия равна среднему
отрицательная биномиальная	—	дисперсия больше среднего

Оценивание параметров

Метод максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия параметров n и p определяются путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} n^* p^* = \bar{x}^*; \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{x_{\max}-1} \frac{\nu_k}{n^* - k} = -m \ln\left(1 - \frac{\bar{x}^*}{n^*}\right), \end{cases} \qquad (3)$$

где ν_k — число элементов выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$, превышающих k; $x_{\max} = \max(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — максимальный элемент выборки; $\bar{x}^*$ — выборочное среднее. Если n^*, полученное при решении системы (3), больше $x_{\max}$, то в качестве оценки параметра n рекомендуется взять целое число, ближайшее к n^*. Если же $n^* < x_{\max}$, то в качестве оценки n следует взять $x_{\max}$.

В том случае, когда параметр n известен, ОМП параметра p определяется по формуле $p^* = \bar{x}^*/n$.

Метод моментов:

$$n^* = \frac{(\bar{x}^*)^2}{\bar{x}^* - S_x^2} \qquad p^* = 1 - \frac{S_x^2}{\bar{x}^*}.$$

При $\bar{x}^* < S_x^2$ оценка n^* становится отрицательной. Это указывает на то, что в данном конкретном случае биномиальная модель неприменима (см. замечание 6 о выборе биномиальной, пуассоновской и отрицательной биномиальной модели).

Подробные рекомендации по определению оценок и доверительных границ для параметров биномиального распределения приведены в [34].

Генерирование случайных чисел

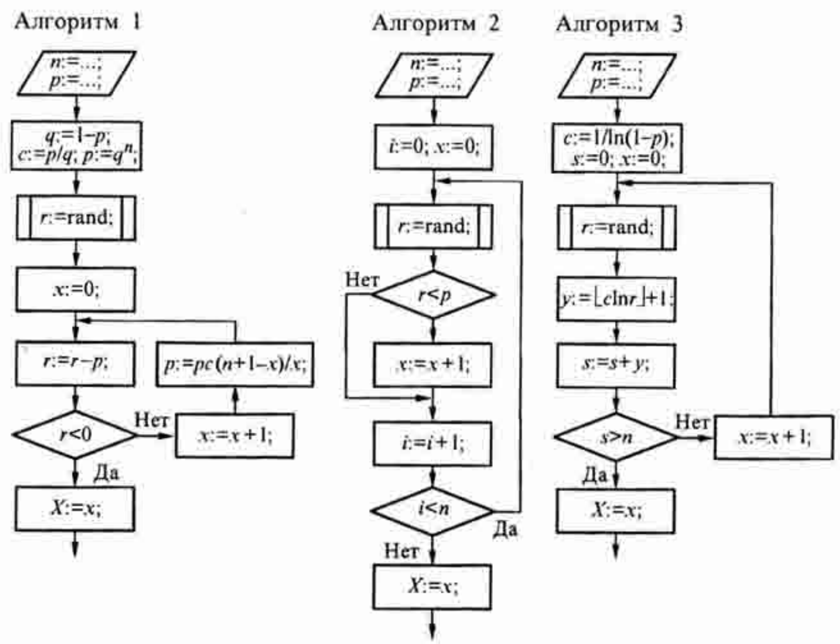


Рис. 2.7. Блок-схемы алгоритмов генерирования биномиальных случайных чисел.

Алгоритм 1 реализует стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин.

Алгоритм 2 имитирует серию из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p.

Алгоритм 3 использует связь биномиального распределения с геометрическим распределением 2 (распределение Фарри). Геометрические случайные числа суммируются до тех пор, пока их сумма не превзойдет n. Число слагаемых минус единица и есть биномиальное случайное число. Иными словами, в качестве очередного биномиального случайного числа используется число $x = k - 1$, где k — минимальное число, удовлетворяющее условию $\sum_{i=1}^{k} y_i > n$. (Здесь y_i — случайное число, принадлежащее последовательности случайных чисел с геометрическим распределением 2). При малых p алгоритм 3 работает быстрее алгоритма 1.

Таблицы

1. [2, с. 284, 285, табл. 5.1]. Приведены значения вероятностей $p(x)$ для $n = 5(5)30$ и $p = 0.01; 0.02(0.02)0.10(0.10)0.50$; $5D$.
2. [6, с. 266—272, табл. 9.5]. Даны значения вероятностей $P(X \le x)$ для $n = 2(1)25$ и $p = 1/16(1/16)8/16$; $4D$.

При $p > 0.5$ для вычисления вероятностей $p(x)$ и $P(X \le x)$ следует использовать формулы (1) и (2).

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(x)$ связаны между собой соотношением

$$p(x) = p(x-1)\,\frac{p}{q}\,\frac{n+1-x}{x},\quad x = 1, 2, \dots, n,\quad \text{где } p(0) = q^n.$$

При вычислениях, связанных с биномиальным распределением, могут быть использованы соотношения:

$$P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = I_{1-p}(n-x, x+1) = 1 - I_p(x+1, n-x);$$

$$P(X \ge x) = \sum_{i=x}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = I_p(x, n-x+1) = 1 - I_{1-p}(n-x+1, x);$$

$$p(x) = P(X = x) = I_p(x, n-x+1) - I_p(x+1, n-x) = I_{1-p}(n-x, x+1) - I_{1-p}(n-x+1, x),$$

где $I_x(u,v) = \dfrac{1}{B(u,v)}\displaystyle\int_0^x t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$ — отношение неполной бета-функции.

При $npq > 9$ биномиальное распределение можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием np и дисперсией npq:

$$p(x) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi_0\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right);$$

$$P(m_1 \le X \le m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right);$$

$$P(X \le m) \approx \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{m+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Максимальная абсолютная ошибка последнего приближенного равенства меньше $0.140/\sqrt{npq}$.

В [20] нормальная аппроксимация допускается при менее жестких условиях: $npq > 5$ и $0.1 \le p \le 0.9$.

При $p < 0.1$ можно пользоваться пуассоновским приближением:

$$p(x) \approx \frac{(np)^x}{x!}\,e^{-np} = \psi(x; np);$$

$$P(m_1 \le X \le m_2) \approx \sum_{i=m_1}^{\infty}\frac{(np)^i}{i!}\,e^{-np} - \sum_{i=m_2+1}^{\infty}\frac{(np)^i}{i!}\,e^{-np} = \widetilde{\Psi}(m_1; np) - \widetilde{\Psi}(m_2+1; np).$$

(О функциях $\psi(x;\mu)$ и $\widetilde{\Psi}(x;\mu)$ см. п. 2.2 «Распределение Пуассона»).

В системе символьной математики DERIVE имеются функции

$$\text{BINOMIAL\_DENSITY (k, n, p)} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

и

$$\text{BINOMIAL\_DISTRIBUTION (k, n, p)} = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i},\ k = 1, 2, \dots, n$$

(см. [41], утилиты PROBABIL.MTH).

2.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.5.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Ряд распределения $p(x) = pq^x$, $x = 0, 1, 2, \dots$, где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$

Функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - q^{k+1}, & k < x \le k+1, \\ & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$

Производящая функция $\varphi_x(t) = \dfrac{p}{1 - qt}$

Характеристическая функция $\chi_x(t) = \dfrac{p}{1 - qe^{it}}$

Математическое ожидание $\bar{x} = \dfrac{q}{p}$

Мода $\hat{x} = 0$

Дисперсия $D_x = \dfrac{q}{p^2}$

Стандартное отклонение $\sigma_x = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$

Коэффициент вариации $v_x = \dfrac{1}{\sqrt{q}}$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = \dfrac{1+q}{\sqrt{q}}$

Эксцесс $\mathrm{Ex} = \dfrac{p^2}{q} + 6$

Начальные моменты $m_2 = \dfrac{q(q+1)}{p^2}, \quad m_3 = \dfrac{q(q^2+4q+1)}{p^3},$

$$m_4 = \frac{q(q^3 + 11q^2 + 11q + 1)}{p^4}$$

Центральные моменты $\mu_3 = \dfrac{q(q+1)}{p^3}, \quad \mu_4 = \dfrac{q(q^2+7q+1)}{p^4}$

Типичная интерпретация: X — число неудачных испытаний Бернулли, предшествовавших первому успеху; p — вероятность успеха; $q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одиночном испытании.

Примечание. Геометрическое распределение 1 — единственное целочисленное распределение, обладающее свойством *отсутствия последействия*: при любых целых $m, n \ge 0$

$$P(X \ge m + n / X \ge m) = P(X \ge n).$$

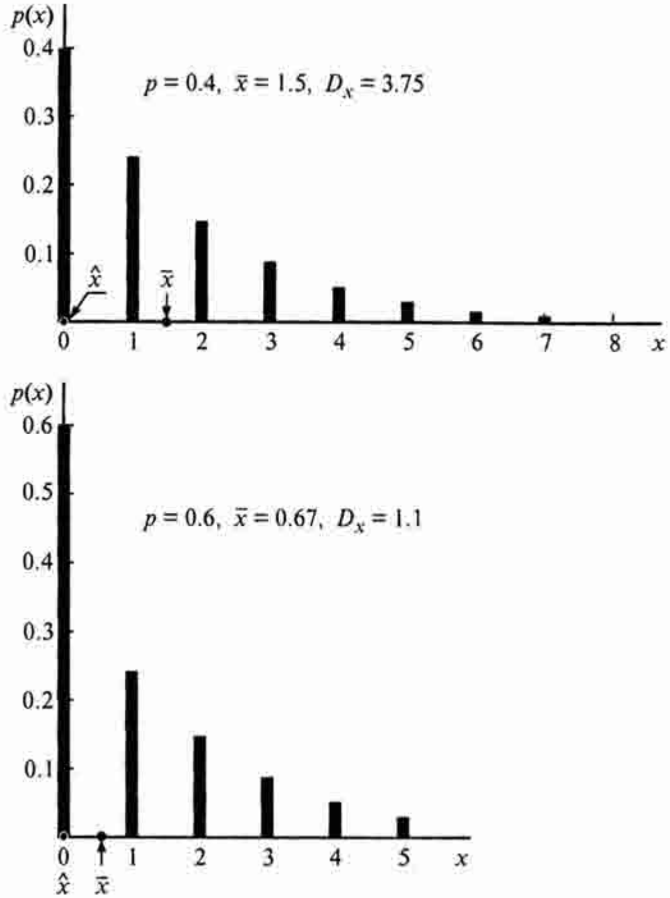


Рис. 2.8. Функция вероятности геометрического распределения 1.

В этом смысле геометрическое распределение 1 является дискретным аналогом показательного (экспоненциального) распределения.

Соотношения между распределениями

Соотношения геометрического распределения 1 с биномиальным и отрицательным биномиальным распределениями рассматриваются в п. 2.3.

Оценивание параметров

$$p^* = \frac{1}{\bar{x}^* + 1} \quad \text{(ММ; ММП)}$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \left\lfloor \frac{\ln r_i}{\ln(1-p)} \right\rfloor.$$

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(x)$ связаны между собой соотношением

$$p(x) = p(x-1)q, \quad x = 1,\ 2, \ldots,$$

где $p(0) = p$.

2.5.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФАРРИ)

Ряд распределения $\quad p(y) = pq^{y-1},\ y = 1,\ 2, \ldots,$ где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$

Функция распределения
$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1; \\ 1 - q^k, & k < y \le k+1, \\ & k = 1,\ 2, \ldots \end{cases}$$

Производящая функция $\quad \varphi_y(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$

Характеристическая функция $\quad \chi_y(t) = \dfrac{p}{e^{-it} - q}$

Математическое ожидание $\quad \bar{y} = \dfrac{1}{p}$

Мода $\quad \hat{y} = 1$

Дисперсия $\quad D_y = \dfrac{q}{p^2}$

Стандартное отклонение $\quad \sigma_y = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$

Коэффициент вариации $\quad v_y = \sqrt{q}$

Асимметрия $\quad \mathrm{Sk} = \dfrac{1+q}{\sqrt{q}}$

Эксцесс $\quad \mathrm{Ex} = \dfrac{p^2}{q} + 6$

Начальные моменты $\quad m_2 = \dfrac{q+1}{p^2}, \quad m_3 = \dfrac{q^2 + 4q + 1}{p^3},$

$$m_4 = \frac{q^3 + 11q^2 + 11q + 1}{p^4}$$

Центральные моменты $\quad \mu_3 = \dfrac{q(q+1)}{p^3}, \quad \mu_4 = \dfrac{q(q^2 + 7q + 1)}{p^4}$

Типичная интерпретация: Y — число независимых испытаний Бернулли до первого успеха (включая и первый успех); p — вероятность успеха; $q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одиночном испытании.

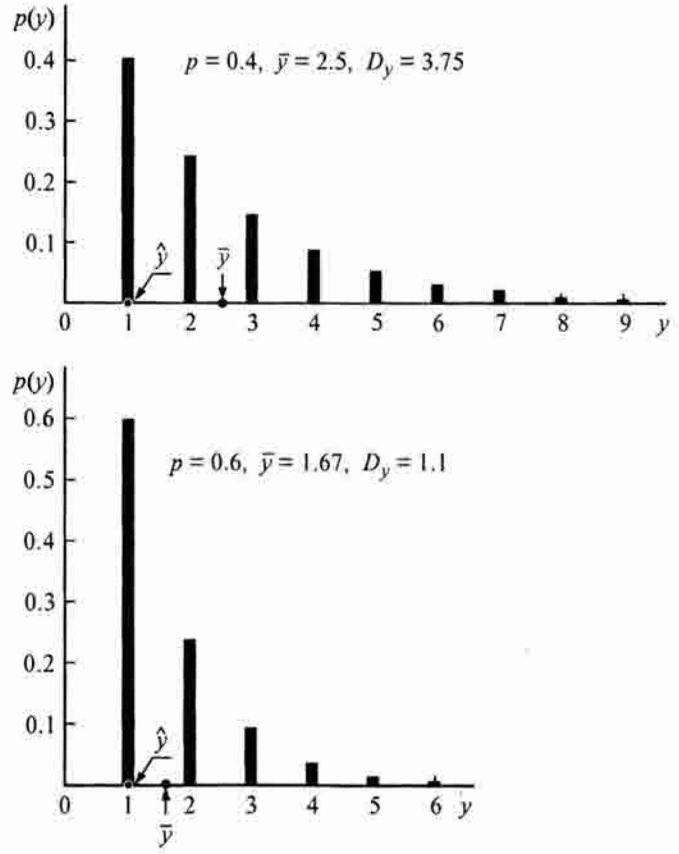


Рис. 2.9. Функция вероятности геометрического распределения 2.

Соотношения между распределениями

1. Случайная величина $X(p)$, имеющая геометрическое распределение 1, и случайная величина $Y(p)$, имеющая геометрическое распределение 2, связаны друг с другом равенством

$$Y(p) = X(p) + 1.$$

2. Соотношение между геометрическим распределением 2, биномиальным и отрицательным биномиальным распределениями рассмотрены в п. 2.3.

Оценивание параметров

$$p^* = \frac{1}{\bar{y}^*} \qquad \text{(ММ; ММП)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$y_1 = \left\lfloor \frac{\ln r_i}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1.$$

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(y)$ связаны между собой соотношением

$$p(y) = p(y-1)q, \quad y = 2, 3, \ldots,$$

где $p(1) = p$.

2.6. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

2.6.1. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Ряд распределения $\quad p(z) = C^z_{z+m-1} p^m q^z, \quad z = 0, 1, 2, \ldots,$ где $m \ge 1$ — целое, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$

Функция распределения
$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \ge 0; \\ p^m \sum_{i=0}^{k} C^i_{i+m-1} q^i, & k < z \le k+1, \\ & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Производящая функция
$$\varphi_z(t) = \left(\frac{p}{1-qt}\right)^m$$

Характеристическая функция
$$\chi_z(t) = \left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^m$$

Математическое ожидание
$$\bar{z} = \frac{mq}{p}$$

Мода
$$\hat{z} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(m-1)q}{p} \right\rfloor, & \frac{(m-1)q}{p} \text{ — не целое;} \\ \left.\begin{matrix} \frac{(m-1)q}{p} - 1 \\ \frac{(m-1)q}{p} \end{matrix}\right\}, & \frac{(m-1)q}{p} \text{ — целое} \end{cases}$$

Дисперсия
$$D_z = \frac{mq}{p^2} > \bar{z}$$

Стандартное отклонение
$$\sigma_z = \frac{\sqrt{mq}}{p}$$

Коэффициент вариации
$$v_z = \frac{1}{\sqrt{mq}}$$

Асимметрия
$$\mathrm{Sk} = \frac{1+q}{\sqrt{mq}}$$

Эксцесс
$$\mathrm{Ex} = \frac{p^2}{mq} + \frac{6}{m} > 0$$

Начальные моменты
$$m_2 = \frac{mq(mq+1)}{p^2},$$

$$m_3 = \frac{mq[m^2q^2 + (3m+1)q + 1]}{p^3},$$

$$m_4 = \frac{mq[m^3q^3 + (6m^2 + 4m + 1)q^2 +}{p^4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ (7m+4)q + 1]}{p^4}$$

Центральные моменты
$$\mu_3 = \frac{mq(q+1)}{p^3},$$

$$\mu_4 = \frac{mq[q^2 + (3m+4)q + 1]}{p^4}$$

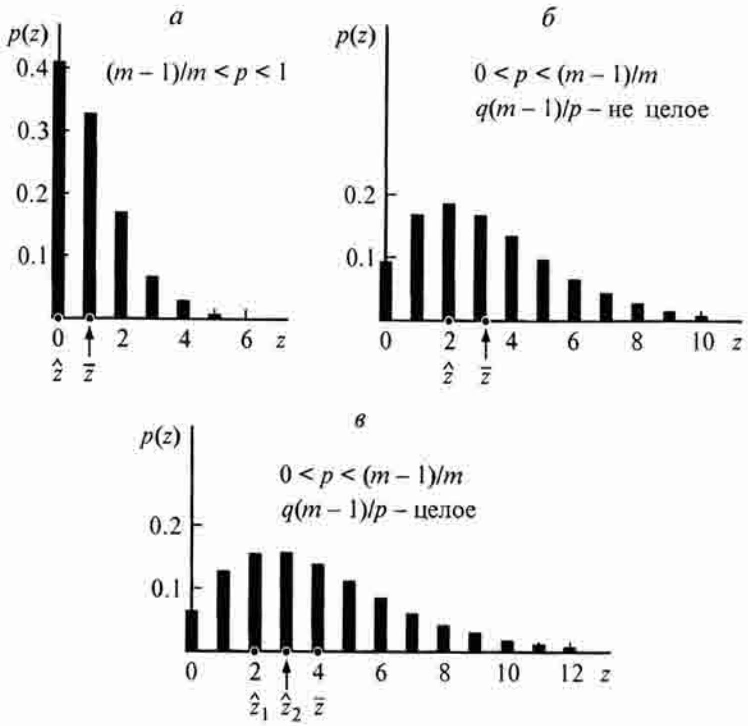


Рис. 2.10. Функция вероятности отрицательного биномиального распределения 1.

Параметры распределения: *а* — $m = 4$, $p = 0.8$; *б* — $m = 4$, $p = 0.55$; *в* — $m = 4$, $p = 0.5$.

Типичная интерпретация: Z — число неудачных испытаний Бернулли, предшествовавших m-му успеху; p — вероятность успеха; $q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одиночном испытании.

Соотношения между распределениями

1. Отрицательное биномиальное распределение 1 описывает распределение суммы m независимых случайных величин, каждая из которых имеет геометрическое распределение 1. В этом смысле отрицательное биномиальное распределение является дискретным аналогом распределения Эрланга.

2. При $m = 1$ отрицательное биномиальное распределение совпадает с геометрическим распределением 1.

3. Сумма s независимых случайных величин $Z(m_i, p)$, имеющих отрицательное биномиальное распределение 1 с параметрами m_i, p $(i = 1, 2, \dots, s)$, имеет отрицательное биномиальное распределение 1 с параметрами $m = \sum_{i=1}^{s} m_i$ и p, т. е.

$$Z(m_1, p) + Z(m_2, p) + \dots + Z(m_s, p) \sim Z(m, p).$$

Справедливо и обратное утверждение: если сумма независимых случайных величин имеет отрицательное биномиальное распределение 1, то каждое слагаемое тоже имеет отрицательное биномиальное распределение 1.

4. Соотношения отрицательного биномиального распределения с биномиальным и геометрическим распределениями рассмотрены в п. 2.3. При выборе между отрицательной биномиальной, биномиальной и пуассоновской моделями можно руководствоваться следующими свойствами этих моделей:

биномиальная	—	дисперсия меньше среднего
пуассоновская	—	дисперсия равна среднему
отрицательная биномиальная	—	дисперсия больше среднего

5. Если случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы и имеют логарифмическое распределение 1 с параметром p, а независимая от них случайная величина N распределена по закону Пуассона с параметром μ, то случайная величина $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $m = -\mu/\ln p$ и p (при $N = 0$, $X = 0$).

6. Пусть случайная величина Z подчиняется закону Пуассона со случайным параметром Λ, который в свою очередь подчиняется закону Эрланга порядка ν с параметром масштаба δ, имеющему плотность вероятности $f_\lambda(\lambda) = \frac{\delta^\nu}{(\nu - 1)!} \lambda^{\nu-1} e^{-\delta\lambda}$, $\lambda > 0$, $\delta > 0$. Тогда случайная величина Z имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $m = \nu$ и $p = \delta/(1 + \delta)$.

8. Отрицательное биномиальное распределение является предельной формой распределения Пойа (см. п. 2.10.2).

9. При $m \to \infty$, $q \to 0$ и $mq \to \mu$ отрицательное биномиальное распределение аппроксимируется распределением Пуассона с параметром μ.

Оценивание параметров

Метод моментов:

$$m^* = \frac{(\bar{z}^*)^2}{S_z^2 - \bar{z}^*}, \quad p^* = \frac{\bar{z}^*}{S_z^2}.$$

Следует заметить, что при $S_z^2 < \bar{z}^*$ эти формулы дают совершенно неприемлемые результаты: $m^* < 0$ и $p^* > 1$. Эти результаты становятся понятными, если вспомнить, что отрицательная биномиальная модель применима только при $D_z > \bar{z}$.

Метод максимального правдоподобия:

— по данным выборки определяют относительные частоты (частости)

$$p_i^* = P^*(Z = i),\ i = 0, 1, 2, \ldots,\ F_k^* = P^*(Z \ge k) = \sum_{i=k}^{\infty} p_i^*$$

и выборочное среднее $\bar{z}^*$;

— решая относительно P^* уравнение

$$\ln(1 + P^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^*}{\dfrac{\bar{z}^*}{P^*} + k - 1},$$

находят оценку P^* параметра $P = (1 - p)/p$;

— используя эту оценку, определяют оценки параметров m и p:

$$m^* = \bar{z}^*/P^*,\quad p^* = 1/(1 + P^*).$$

Комбинированный метод:

— по выборочным данным определяют выборочное среднее $\bar{z}^*$ и оценку p_0^* вероятности $p_0 = P(Z = 0)$;

— решая относительно P^* уравнение

$$\frac{P^*}{\ln(1 + P^*)} = -\frac{\bar{z}^*}{\ln p_0^*},$$

находят оценку P^* параметра $P = (1 - p)/p$;

— используя эту оценку, определяют оценки параметров m и p:

$$m^* = \bar{z}^*/P^*,\ p^* = 1/(1 + P^*).$$

В том случае, когда параметр m известен, оценка параметра p определяется по формуле

$$p^* = m/(m + \bar{z}^*)\ \ (\text{ММ}).$$

Подробные рекомендации по определению оценок и доверительных границ для параметров отрицательного биномиального распределения приведены в [34].

Генерирование случайных чисел

Алгоритм 1 реализует стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин. Алгоритм 2 использует связь отрицательного биномиального распределения с геометрическим распределением 2.

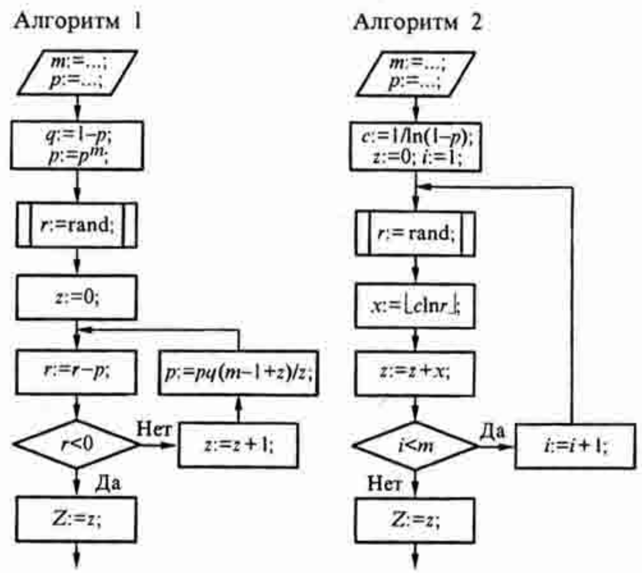


Рис. 2.11. Блок-схемы алгоритмов генерирования случайных чисел, имеющих отрицательное биномиальное распределение 1.

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(z)$ связаны друг с другом соотношением

$$p(z) = p(z-1)\,\frac{m - 1 + z}{z}\,q,\ z = 1, 2, \ldots;\quad p(0) = p^m.$$

При вычислениях, связанных с отрицательным биномиальным распределением, используются следующие соотношения:

$$P(Z \ge z) = I_{1-p}(z, m) = 1 - I_p(m, z);$$

$$P(Z \le z) = I_p(m, z + 1) = 1 - I_{1-p}(z + 1, m);$$

$$P(Z = z) = I_p(m, z + 1) - I_p(m, z) = I_{1-p}(z, m) - I_{1-p}(z + 1, m).$$

Для вычисления вероятности $P(Z \le z)$ можно использовать аппроксимирующую формулу

$$P(Z \le z) \approx \Phi(\tau),$$

где

$$\tau = \frac{\dfrac{9z + 8}{z + 1} - \dfrac{9m - 1}{m}a}{3\sqrt{a^2/m - 1/(z + 1)}},\quad a = \left[\frac{mq}{p(z + 1)}\right]^{1/3};$$

$\Phi(\tau)$ — функция распределения стандартного нормального распределения. Эта формула обеспечивает высокую точность.

2.6.2. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАСКАЛЯ)

Ряд распределения $p(w) = C_{w-1}^{m-1} p^m q^{w-m}$,
$w = m, m+1, m+2, \ldots$,
$m \geq 1$ — целое, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$

Функция распределения
$$F(w) = \begin{cases} 0, & w \leq m; \\ p^m \sum\limits_{i=0}^{k} C_{m-1+i}^{m-1} q^i, & m + k < w \leq m + k + 1, \\ & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Производящая функция $\varphi_w(t) = \left(\dfrac{pt}{1 - qt}\right)^m$

Характеристическая функция $\chi_w(t) = \left(\dfrac{p}{e^{-it} - q}\right)^m$

Математическое ожидание $\overline{w} = \dfrac{m}{p}$

Мода
$$\hat{w} = \begin{cases} \left[\dfrac{m-q}{p}\right], & \dfrac{m-q}{p} \text{ — не целое;} \\ \left\{ \dfrac{m-q}{p} - 1, \ \dfrac{m-q}{p} \right\}, & \dfrac{m-q}{p} \text{ — целое} \end{cases}$$

Дисперсия $D_w = \dfrac{mq}{p^2}$

Стандартное отклонение $\sigma_w = \dfrac{\sqrt{mq}}{p}$

Коэффициент вариации $v_w = \sqrt{\dfrac{q}{m}}$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = \dfrac{q+1}{\sqrt{mq}}$

Эксцесс $\mathrm{Ex} = \dfrac{p^2}{mq} + \dfrac{6}{m}$

Начальные моменты $m_2 = \dfrac{m(q+m)}{p^2}$, $m_3 = \dfrac{m[q^2 + (3m+1) + m^2]}{p^3}$,

$$m_4 = \frac{m[q^3 + (7m+4)q^2 +}{p^4} \to$$
$$\to \frac{+ (6m^2 + 4m + 1)q + m^3]}{p^4}$$

Центральные моменты $\mu_3 = \dfrac{mq(q+1)}{p^3}$, $\mu_4 = \dfrac{mq[q^2 + (3m+4)q + 1]}{p^4}$

Типичная интерпретация: 1. W — общее число испытаний Бернулли до m-го успеха (включая и m-й успех); p — вероятность успеха; $q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одиночном испытании. 2. W — время ожидания m-го успеха в схеме Бернулли с вероятностью успеха p (при условии, что на реализацию одиночного испытания затрачивается одна единица времени).

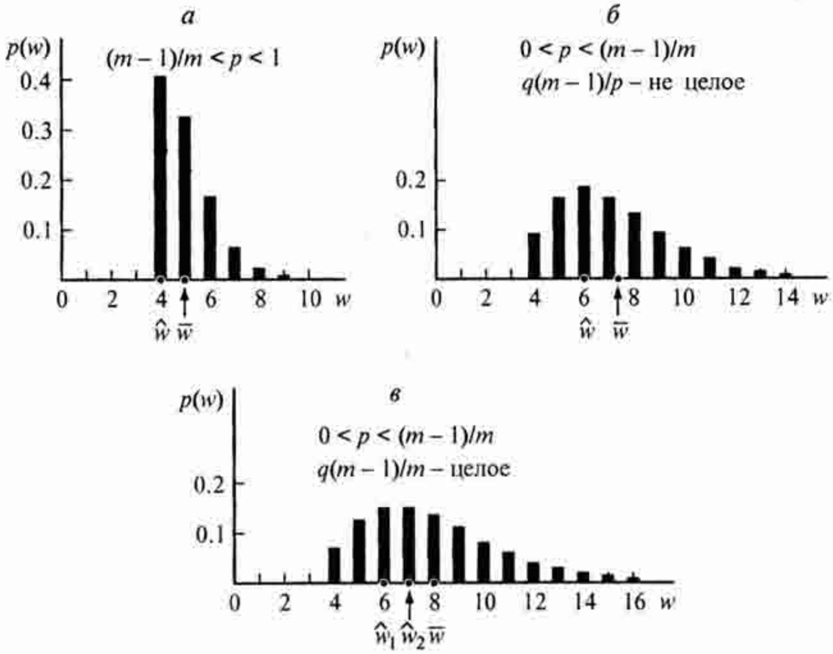


Рис.2.12. Функция вероятности отрицательного биномиального распределения 2. Параметры распределения: *а* — $m = 4$, $p = 0.8$; *б* — $m = 4$, $p = 0.55$; *в* — $m = 4$, $p = 0.5$.

Соотношения между распределениями

1. Распределение Паскаля описывает распределение суммы m независимых случайных величин, каждая из которых имеет геометрическое распределение 2 (распределение Фарри).

2. При $m = 1$ распределение Паскаля совпадает с геометрическим распределением 2.

3. Случайная величина $W(m, p)$, имеющая распределение Паскаля с параметрами m, p, связана со случайной величиной $Z(m, p)$, имеющей отрицательное биномиальное распределение 1 с параметрами m, p, очевидным соотношением $W(m, p) = Z(m, p) + m$.

4. Сумма s независимых случайных величин $W(m_i, p)$, имеющих распределение Паскаля с параметрами m_i, p ($i = 1, 2, \ldots, s$), имеет распределение Паскаля с параметрами $m = \sum_{i=1}^{s} m_i$ и p.

5. Соотношения между распределением Паскаля, биномиальным, геометрическим и отрицательным биномиальным распределениями рассмотрены в п. 2.3.

6. Для случайной величины $W(m, p)$, имеющей распределение Паскаля с параметрами m, p, и случайной величины $X(u, v)$, имеющей бета-распределение с параметрами u, v, справедливы следующие соотношения:

$$P\{W(m, p) \ge w\} = P\{X(w - m, m) < 1 - p\} = $$
$$= 1 - P\{X(m, w - m) < p\}.$$

Оценивание параметров

$$m^* = \frac{(\overline{w}^*)^2}{S_w^2 + \overline{w}^*}, \quad p^* = \frac{\overline{w}^*}{S_w^2 + \overline{w}^*} \quad \text{(ММ)}.$$

В том случае, когда параметр m известен, оценка параметра p определяется по формуле

$$p^* = \frac{m}{\overline{w}^*} \text{ (ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$w_i = z_i + m,$$

где z_i — случайное число из последовательности случайных чисел, имеющих отрицательное биномиальное распределение 1 с параметрами m, p.

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(w)$ распределения Паскаля связаны соотношением

$$p(w) = p(w-1)\,\frac{w-1}{w-m}, \quad w = m+1, m+2, \ldots, \quad \text{где } p(m) = p^m.$$

При вычислениях, связанных с распределением Паскаля, можно использовать следующие соотношения:

$$P(W \ge w) = I_{1-p}(w - m, m) = 1 - I_p(m, w - m);$$
$$P(W \le w) = I_p(m, w - m + 1) = 1 - I_{1-p}(w - m + 1, m);$$
$$P(W = w) = I_p(m, w - m + 1) - I_p(m, w - m) =$$
$$= I_{1-p}(w - m, m) - I_{1-p}(w - m + 1, m).$$

Для вычисления вероятности $P(W \le w)$ можно использовать аппроксимирующую формулу

$$P(W \le w) \approx \Phi(\tau),$$

где

$$\tau = \frac{\dfrac{9(w-m)+8}{w-m+1} - \dfrac{9m-1}{m}a}{3\sqrt{\dfrac{a^2}{m} - \dfrac{1}{w-m+1}}}, \quad a = \left[\frac{mq}{p(w-m+1)}\right]^{1/3};$$

$\Phi(\tau)$ — функция распределения стандартного нормального распределения.

2.7. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Ряд распределения

$$p(x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}, \quad x = \alpha, \alpha + 1, \ldots, \beta,$$

где N, M, n — целые неотрицательные числа ($M \le N, n \le N$),
$\alpha = \max(0, M + n - N)$, $\beta = \min(M, n)$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \alpha; \\ \dfrac{1}{C_N^n} \sum\limits_{i=\alpha}^{\alpha+k} C_M^i C_{N-M}^{n-i}, & \alpha + k < x \le \alpha + k + 1, \\ & k = 0, 1, \ldots, \beta - \alpha - 1; \\ 1, & x > \beta \end{cases}$$

Производящая функция

$$\varphi_x(t) = \frac{(N-M)^{(n)}}{N^{(n)}} \times$$
$$\times \sum_{k=\alpha}^{\beta} \frac{n^{(k)} M^{(k)}}{(N - M - n + k)^{(k)}} \frac{t^k}{k!} =$$
$$= \frac{(N-M)^{(n)}}{N^{(n)}} F(-n, -M; N - M - n + 1; t),$$

где $a^{(x)} = a(a-1)(a-2)\ \ldots\ (a - x + 1)$;
$F(a, b; c; t)$ — гипергеометрическая функция с параметрами a, b, c

Характеристическая функция
$$\chi_x(t) = \frac{(N-M)^{(n)}}{N^{(n)}} \times \sum_{k=\alpha}^{\beta} \frac{n^{(k)} M^{(k)}}{(N-M-n+k)^{(k)}} \frac{e^{itk}}{k!} = \frac{(N-M)^{(n)}}{N^{(n)}} F(-n,\ -M; N-M-n+1; e^{it})$$

Математическое ожидание
$$\bar{x} = \frac{Mn}{N}$$

Мода
$$\hat{x} = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{(M+1)(n+1)}{N+2} \right\rfloor, & \dfrac{(M+1)(n+1)}{N+2} \text{ — не целое;} \\ \left. \begin{array}{l} \dfrac{(M+1)(n+1)}{N+2} - 1 \\ \dfrac{(M+1)(n+1)}{N+2} \end{array} \right\}, & \dfrac{(M+1)(n+1)}{N+2} \text{ — целое} \end{cases}$$

Дисперсия
$$D_x = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Стандартное отклонение
$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{nM(N-M)(N-n)}{N-1}}$$

Коэффициент вариации
$$v_x = \sqrt{\frac{(N-M)(N-n)}{nM(N-1)}}$$

Асимметрия
$$\mathrm{Sk} = \frac{(N-2M)(N-2n)\sqrt{N-1}}{(N-2)\sqrt{nM(N-M)(N-n)}}$$

Эксцесс
$$\mathrm{Ex} = \frac{N^2(N-1)}{n(N-2)(N-3)(N-n)} \times \left[\frac{N(N+1) - 6n(N-n)}{M(N-M)} + \frac{6n(N-n)(5N-6)}{N^2(N-1)} - 6\right]$$

Начальные моменты
$$m_2 = \frac{nM}{N}\left[\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1\right],$$

$$m_3 = \frac{nM}{N}\left[\frac{(n-1)(n-2)(M-1)(M-2)}{(N-1)(N-2)} + \frac{3(n-1)(M-1)}{N-1} + 1\right],$$

$$m_4 = \frac{nM}{N}\left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(M-1)(M-2)(M-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} + \frac{6(n-1)(n-2)(M-1)(M-2)}{(N-1)(N-2)} + \frac{7(n-1)(M-1)}{N-1} + 1\right]$$

Центральные моменты
$$\mu_3 = \frac{nM(N-M)(N-2M)(N-n)(N-2n)}{N^3(N-1)(N-2)} = \frac{(N-2M)(N-2n)}{N(N-2)} D_x;$$

$$\mu_4 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^4(N-1)(N-2)(N-3)} \left\{N^3(N+1) - 6nN^2(N-n) + 3M(N-M)\left[n(N-n)(N+6) - 2N^2\right]\right\}$$

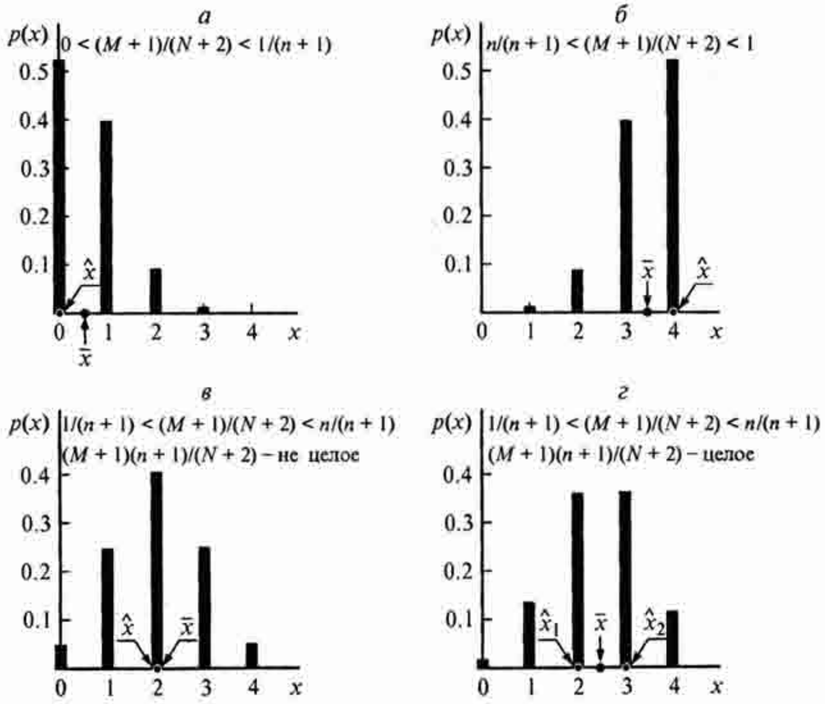


Рис. 2.13. Функция вероятности гипергеометрического распределения.

Параметры распределения: *а* — $N = 28$, $n = 4$, $M = 4$; *б* — $N = 28$, $n = 4$, $M = 24$; *в* — $N = 28$, $n = 4$, $M = 14$; *г* — $N = 28$, $n = 4$, $M = 17$.

Типичная интерпретация: X — число меченых элементов в выборке без возвращения объема n, извлеченной из генеральной совокупности объема N, содержащей M меченых элементов.

Соотношения между распределениями

1. Гипергеометрическое распределение обладает определенной симметрией относительно своих параметров. Приведенные ниже тождества выражают эту симметрию:

$$p(x; N, n, M) \equiv p(x; N, M, n) \equiv p(n-x; N, n, N-M) \equiv$$
$$\equiv p(M-x; N, N-n, M) \equiv$$
$$\equiv p(N-n-M+x; N, N-n, N-M); \qquad (1)$$
$$P(X \le x; N, n, M) \equiv P(x; N, n, M) \equiv P(x; N, M, n) \equiv$$
$$\equiv P(N-n-M+x; N, N-n, N-M) \equiv$$
$$\equiv 1 - P(n-x-1; N, n, N-M) \equiv$$
$$\equiv 1 - P(M-x-1; N, N-n, M), \qquad (2)$$

где $P(x; N, n, M) = 1$, если $n-x-1$ или $M-x-1$ отрицательно. В случае необходимости указанные тождества можно применять несколько раз. С помощью тождеств (1) и (2) функции $p(x; N, n, M)$ и $P(x; N, n, M)$ любого гипергеометрического распределения можно выразить через соответствующие функции гипергеометрического распределения с параметрами, удовлетворяющими условиям $0 \le x \le M \le n \le N/2$.

2. При $N \to \infty$ и фиксированных n и $p = M/N$ гипергеометрическое распределение стремится к биномиальному распределению с параметрами n, p (это означает, что если объем n выборки мал по сравнению с объемом N генеральной совокупности, то выборка без возвращения мало отличается от выборки с возвращением).

Оценивание параметров

При известных N и n оценивается M:

$$M^* = \left\langle \bar{x}^* \frac{N}{n} \right\rangle \quad \text{(ММ)},$$

где $\langle a \rangle$ — целое число, ближайшее к числу a.

В качестве ОМП параметра M используется наибольшее целое число, не превышающее $\bar{x}^*(N+1)/n$. Если число $\bar{x}^*(N+1)/n$ — целое, то в качестве ОМП параметра M можно использовать либо число $\bar{x}^*(N+1)/n - 1$, либо число $\bar{x}^*(N+1)/n$.

Генерирование случайных чисел

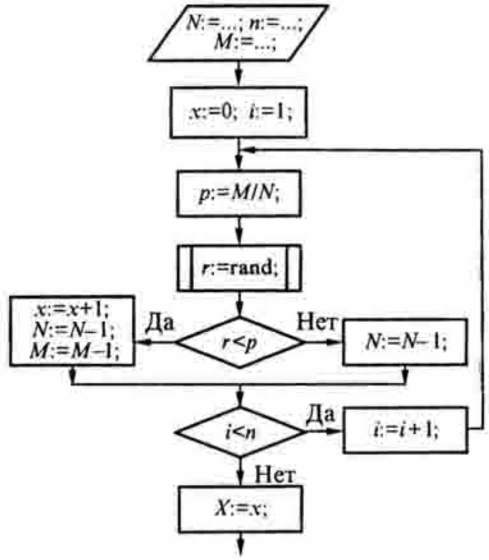


Рис. 2.14. Блок-схема алгоритма генерирования гипергеометрических случайных чисел.

Алгоритм имитирует процесс формирования случайной выборки без возвращения объема n из генеральной совокупности объема N, содержащей M меченых элементов (рис. 2.14).

Таблицы

1. [13, с. 424—443, табл. VIII]. Даны значения вероятностей $p(x)$ и $P(X \le x)$ для $N = 2(2)24$, $n = 1(1)N/2$, $M = 1(1)n$, $x = 1(1)M$; $4D$. Для вычисления значений вероятностей $p(x)$ и $P(X \le x)$ при других возможных сочетаниях N, n, M и x следует пользоваться формулами приведения (1) и (2).

2. [6, с. 458—478, табл. 18.1]. Приводятся значения вероятностей $p(x)$ и $P(X \le x)$ для $N = 2(1)20$, $n = 1(1)N/2$, $M = 1(1)n$, $x = 1(1)M$; $6D$.

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(x)$ гипергеометрического распределения связаны соотношением

$$p(x) = p(x-1)\frac{(n+1-x)(M+1-x)}{x(N-M-n+x)}, \quad x = \alpha+1, \alpha+2, \ldots, \beta,$$

где

$$\alpha = \max(0, M+n-N), \quad \beta = \min(M, n),$$

$$p(\alpha) = \begin{cases} p(0) & = \dfrac{(N-M)!(N-n)!}{(N-M-n)!N!}, \text{ если } 0 > M+n-N; \\ p(M+n-M) & = \dfrac{M!n!}{(M+n-N)!N!}, \quad \text{если } 0 < M+n-N. \end{cases}$$

Для вычисления вероятностей $p(x)$ можно использовать следующие приближенные формулы:

— при $D_x > 9$

$$P(x;\, N,\, n,\, M) \equiv P(X \le x;\, N,\, n,\, M) \approx 0.5 + \Phi_0\left(\frac{x + 0.5 - \bar{x}}{\sigma_x}\right),$$

где $\bar{x} = nM/N$ и $\sigma_x = \sqrt{nM(N-M)(N-n)/(N-1)}\,/N$;

— при $n \le 0.1N$ и $M \le 0.1N$

$$p(x) \equiv p(x;\, N,\, n,\, M) \approx \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu},$$

где $\mu = nM/N$;

— при $n < 0.1N$

$$p(x) \approx C_n^x p^x q^{n-x},$$

где $p = M/N$ и $q = 1 - p$;

$$P(x; N, n, M) \approx \sum_{m=0}^{x} C_n^m \omega^m (1-\omega)^{n-m},$$

где $\omega = (2M - x)/(2N - n + 1)$.

Указанные выше аппроксимации действуют в различных областях изменения параметров гипергеометрического распределения и поэтому, как правило, не заменяют друг друга.

При всех $N \ge 25$, независимо от значений n и M, хорошие результаты дает бета-аппроксимация

$$P(x;\, N,\, n,\, M) \approx I_{1-\xi}(n' - x + c,\, x - c + 1),$$

где $I_x(u, v)$ — отношение неполной бета-функции;

$$\xi = \frac{N(n + M - 1) - 2nM}{N(N-2)};$$

$$n' = \frac{n\,M(M-2)^2(N-n)(N-M)}{(N-1)[(N-M)(N-n) + nM - N][N(n+M-1) - 2nM]};$$

$$c = \frac{n\,M(M-1)(n-1)}{(N-1)[(N-M)(N-n) + nM - N]}.$$

В системе символьной математики DERIVE имеются функции

$$\text{HYPERGEOMETRIC\_DESITY(k, n, m, j)} = \frac{C_m^k C_{j-m}^{n-k}}{C_j^n}$$

и

$$\text{HYPERGEOMETRIC\_DISTRIBUTION(k, n, m, j)} = \sum_{i=\alpha}^{k} \frac{C_m^i C_{j-m}^{n-i}}{C_j^n},$$

где $\alpha = \max(0, m + n - j)$(см. [41], утилиты PROBABIL.MTH).

2.8. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

2.8.1. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Ряд распределения

$$p(x) = \frac{C_{x+m-1}^{x} C_{N-m-x}^{M-m}}{C_N^M},\quad 0 \le x \le N - M,$$

где N, M, m — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $m \le M \le N$

Производящая функция

$$\varphi_x(t) = \frac{M^{(m)}}{N^{(m)}} \sum_{k=0}^{N-M} \frac{(m+k-1)^{(k)}(N-M)^{(k)}}{(N-m)^{(k)}} \frac{t^k}{k!} = \frac{M^{(m)}}{N^{(m)}} F(m, -(N-M); -(N-m); t),$$

где $F(a, b; c; t)$ — гипергеометрическая функция

Характеристическая функция

$$\chi_x(t) = \frac{M^{(m)}}{N^{(m)}} F(m, -(N-M); -(N-m); e^{it})$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = m\frac{N-M}{M+1}$$

Мода

$$\hat{x} = \begin{cases} \left\lfloor (N-M+1)\dfrac{m-1}{M-1} \right\rfloor, & (N-M+1)\dfrac{m-1}{M-1} \text{ — не целое;} \\ \left.\begin{matrix} (N-M+1)\dfrac{m-1}{M-1} - 1 \\ (N-M+1)\dfrac{m-1}{M-1} \end{matrix}\right\}, & (N-M+1)\dfrac{m-1}{M-1} \text{ — целое} \end{cases}$$

Дисперсия $$D_x = m\frac{(N+1)(N-M)(M-m+1)}{(M+1)^2(M+2)}$$

Стандартное отклонение $$\sigma_x = \frac{1}{M+1}\sqrt{\frac{m(N+1)(N-M)(M-m+1)}{M+2}}$$

Коэффициент вариации $$\nu_x = \sqrt{\frac{(N+1)(M-m+1)}{m(M+2)(N-M)}}$$

Асимметрия $$\mathrm{Sk} = \frac{(2N+1-M)(M+1-2m)\sqrt{M+2}}{(M+3)\sqrt{m(N+1)(N-M)(M+1-m)}}$$

Эксцесс $$\mathrm{Ex} = \frac{1}{m(N+1)(N-M)(M+3)(M+4)(M+1-m)}\times$$
$$\times\{6N^2[M^3 - M^2(5m-4) + M(5m^2-16m+5) +$$
$$+ 11m^2 - 11m - 2] - 6N[M^4 - M^3(5m-3) +$$
$$+ M^2(5m^2-11m+1) + M(6m^2+5m-3) -$$
$$- 11m^2 + 11m - 2] + M^5 - M^4(6m+1) +$$
$$+ 3M^3(2m^2-5) - M^2(6m^2-42m+23) -$$
$$- 2M(18m^2-12m+5) + 12m(m-1)\}$$

Начальные моменты

$$m_2 = \frac{m(N-M)}{(M+1)(M+2)}[N(m+1) - m(M+1) + 1],$$

$$m_3 = \frac{m(N-M)}{(M+1)(M+2)(M+3)}\{N^2(m^2+3m+2) - N(m+1)\times$$
$$\times[M(2m+1) + 3(m-1)] + M^2m^2 +$$
$$+ M(3m^2-3m-1) + 2m^2 - 3m + 1\},$$

$$m_4 = -\frac{m(N-M)}{(M+1)(M+2)(M+3)(M+4)}\times$$
$$\times\{m^3[M^3 - M^2(3N-6) + M(3N^2-12N+11) -$$
$$- N^3 + 6N^2 - 11N + 6] - 6m^2(N+1)\times$$
$$\times[M^2 - M(2N-3) + N^2 - 3N + 2] - m(N+1)\times$$
$$\times[4M^2 - M(15N+2) + 11N^2 - 5N - 6] -$$
$$-(N+1)[M^2 - M(6N+5) + 6N(N+1)]\}$$

Центральные моменты $$\mu_3 = \frac{m(N+1)(N-M)(M+1-m)}{(M+1)^3(M+2)(M+3)}\times$$
$$\times(2N+1-M)(M+1-2m),$$

$$\mu_4 = \frac{m(N+1)(N-M)(M+1-m)}{(M+1)^4(M+2)(M+3)(M+4)}\times$$
$$\times\{3N^2[M^2(m+2) - M(m^2+4m-4) +$$
$$+ 5m^2 - 5m + 2] - 3N[M^3(m+2) -$$
$$- M^2(m^2+5m-2) + M(6m^2-m-2) -$$
$$- 5m^2 + 5m - 2] + M^4 - 3M^3(3m+1) +$$
$$+ 3M^2(3m^2-2m-3) - M(3m^2+3m+5) +$$
$$+ 6m(m-1)\}$$

Типичная интерпретация: X — число немеченых элементов в выборке без возвращения, содержащей m меченых элементов, извлеченной из генеральной совокупности объема N, содержащей M меченых элементов.

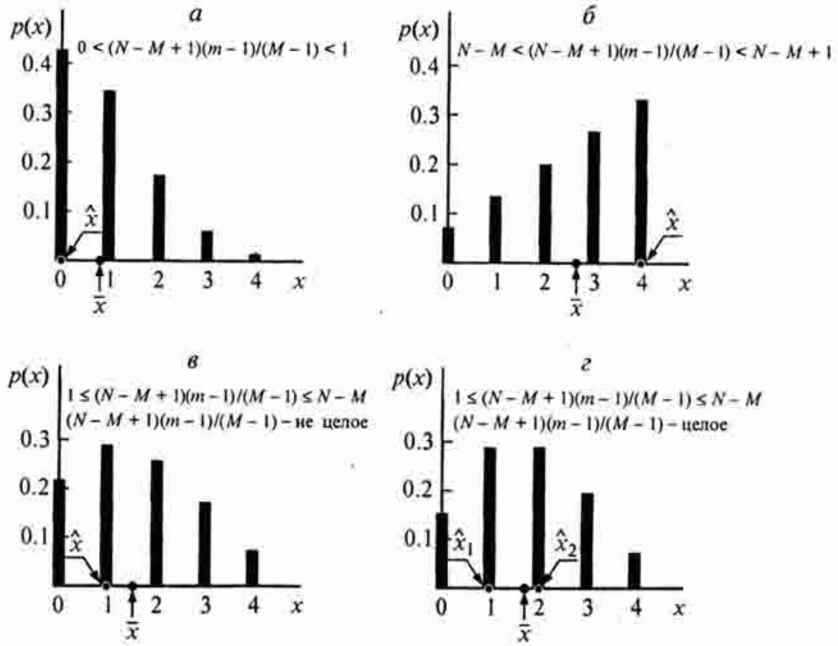


Рис. 2.15. Функция вероятности отрицательного гипергеометрического распределения 1.

Параметры распределения: *а* — $N = 12$, $M = 8$, $m = 2$; *б* — $N = 6$, $M = 2$, $m = 2$; *в* — $N = 8$, $M = 4$, $m = 2$; *г* — $N = 10$, $M = 6$, $m = 3$.

Соотношения между распределениями

1. Для случайной величины $X(N, m, M)$, имеющей отрицательное гипергеометрическое распределение с параметрами N, m, M, и случайной величины $Z(N, n, M)$, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами N, n, M, справедливо соотношение

$$P\{X(N,m,M) \le n-m\} = P\{Z(N,\ n,\ m) \ge m\} =$$
$$= 1 - P\{Z(N,\ n,\ M) \le m-1\} = 1 - P(m-1;\ N,\ m,\ M). \qquad (1)$$

Это соотношение позволяет использовать таблицы гипергеометрического распределения (таблицы функции $P(x; N, n, M)$) для проведения расчетов, связанных с отрицательным гипергеометрическим распределением 1.

2. При $N \to \infty, M \to \infty, N - M \to \infty$, так что $M/N \to p$ и $(N - M)/N \to q\,(p+q=1)$, отрицательное гипергеометрическое распределение стремится к отрицательному биномиальному распределению с параметрами m, p.

Оценивание параметров

При известных N и m оценивается параметр M:

$$M^* = \frac{mN - \bar{x}^*}{m - \bar{x}^*} \quad \text{(MM).}$$

Генерирование случайных чисел

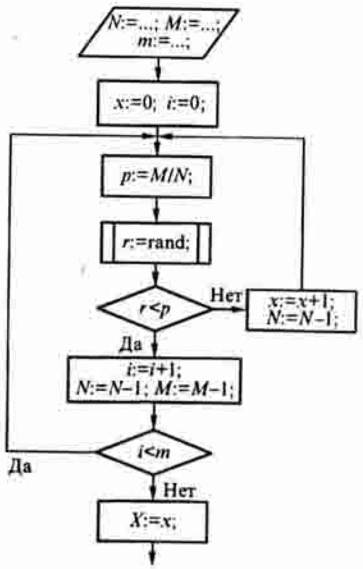


Рис. 2.16. Блок-схема алгоритма генерирования случайных чисел, имеющих отрицательное гипергеометрическое распределение 1.

Техника вычислений

1. Последовательные значения вероятностей $p(x)$ связаны между собой соотношением

$$p(x) = p(x-1)\,\frac{(m-1+x)(N-M+1-x)}{x(N-m+1-x)}, \quad x = 1,\ 2, \ldots, N-M,$$

где $p(0) = M!(N-m)!/[N!(M-m)!]$.

2. Для облегчения расчетов, связанных с отрицательным гипергеометрическим распределением 1, можно использовать таблицы гипергеометрического распределения (см. формулу (1)).

2.8.2. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 2

Ряд распределения $\quad p(y) = P(Y = y) = \dfrac{C_{y-1}^{m-1} C_{N-y}^{M-m}}{C_N^M},$

$m \le y \le N - M + m,$

где N, M, m — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $m \le M \le N$

Производящая функция $\quad \varphi_y(t) = t^m \dfrac{M^{(m)}}{N^{(m)}} F\big(m, -(N-M); -(N-m); t\big)$

Характеристическая функция $\quad \chi_y(t) = e^{itm} \dfrac{M^{(m)}}{N^{(m)}} F\big(m, -(N-M); -(N-m); e^{it}\big)$

Математическое ожидание $\quad \bar{y} = m\dfrac{N+1}{M+1}$

Мода

$$\hat{y} = \begin{cases} \left\lfloor N\dfrac{m-1}{M-1} + 1 \right\rfloor, & N\dfrac{m-1}{M-1} \text{ — не целое;} \\ \left.\begin{matrix} N\dfrac{m-1}{M-1} \\ N\dfrac{m-1}{M-1} + 1 \end{matrix}\right\}, & N\dfrac{m-1}{M-1} \text{ — целое} \end{cases}$$

Дисперсия $\quad D_y = m\dfrac{(N+1)(N-M)(M-m+1)}{(M+1)^2(M+2)}$

Стандартное отклонение $\sigma_y = \dfrac{1}{M+1}\sqrt{\dfrac{m(N+1)(N-M)(M-m+1)}{M+2}}$

Коэффициент вариации $\nu_y = \sqrt{\dfrac{(N-M)(M-m+1)}{m(M+2)(N+1)}}$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = \dfrac{(2N+1-M)(M+1-2m)\sqrt{M+2}}{(M+3)\sqrt{m(N+1)(N-M)(M+1-m)}}$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = \frac{1}{m(N+1)(N-M)(M+3)(M+4)(M+1-m)} \times$$
$$\times \left\{6N^2\left[M^3 - M^2(5m-4) + M(5m^2-16m+5) + \right.\right.$$
$$\left. + 11m^2 - 11m + 2\right] - 6N\left[M^4 - M^3(5m-3) + \right.$$
$$\left. + M^2(5m^2 - 11m + 1) + M(6m^2 + 5m - 3) - 11m^2 + 11m - 2\right] +$$
$$+ M^5 - M^4(6m+1) + 3M^3(2m^2-5) - M^2(6m^2 - 42m + 23) -$$
$$\left. - 2M(18m^2 - 12m + 5) + 12(m-1)\right\}$$

Начальные моменты
$$m_2 = \frac{m(N+1)}{M+1}\left[\frac{(m+1)(N+2)}{M+2} - 1\right],$$
$$m_3 = \frac{m(N+1)}{M+1}\left\{\frac{(m+1)(N+2)}{M+2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{(m+2)(N+3)}{M+3} - 3\right] + 1\right\},$$
$$m_4 = \frac{m(N+1)}{M+1}\left\{\frac{(m+1)(N+2)}{M+2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{(m+2)(N+3)}{M+3}\left(\frac{(m+3)(N+4)}{M+4} - 6\right) + 7\right] - 1\right\}$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = \frac{m(N+1)(N-M)(2N+1-M)(M+1-m)(M+1-2m)}{(M+1)^3(M+2)(M+3)},$$

$$\mu_4 = \frac{m(N+1)(N-M))(M+1-m)}{(M+1)^4(M+2)(M+3)(M+4)}\left\{3N^2\left[M^2(m+2) - \right.\right.$$
$$\left. - M(m^2+4m-4) + 5m^2 - 5m + 2\right] - 3N\left[M^3(m+2) - \right.$$
$$\left. - M^2(m^2+5m-2) + M(6m^2 - m - 2) - 5m^2 + 5m - 2\right] +$$
$$+ M^4 - 3M^3(3m+1) + 3M^2(3m^2 - 2m - 3) -$$
$$\left. - M(3m^2 + 3m + 5) + 6m(m-1)\right\}$$

Типичная интерпретация: Y — объем выборки без возвращения, содержащей m меченых элементов, извлеченной из генеральной совокупности объема N, содержащей M меченых элементов.

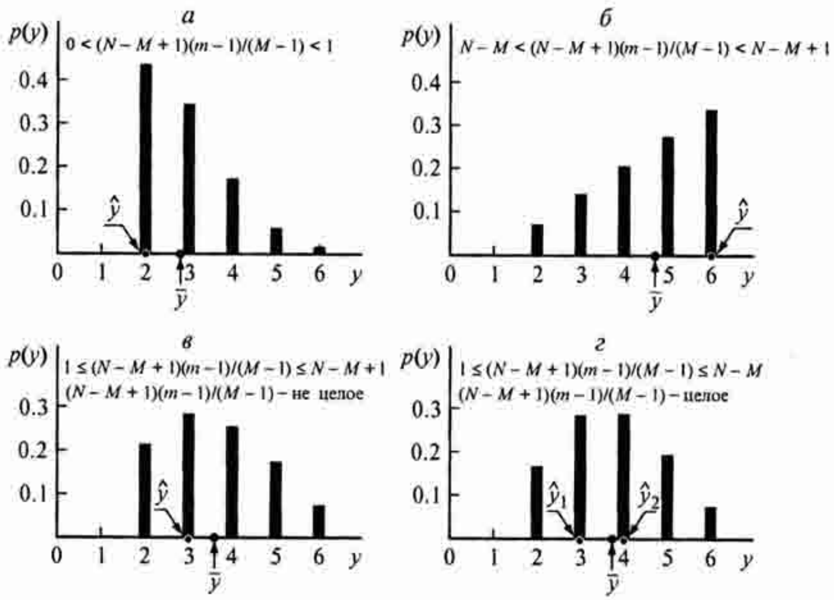


Рис. 2.17. Функция вероятности отрицательного гипергеометрического распределения 2.

Параметры распределения: *а* — $N=12$, $M=8$, $m=2$; *б* — $N=6$, $M=2$, $m=2$; *в* — $N=8$, $M=4$, $m=2$; *г* — $N=10$, $M=6$, $m=3$.

Соотношения между распределениями

1. Случайная величина $Y(M, m, M)$, имеющая отрицательное гипергеометрическое распределение 2, связана со случайной величиной $X(N, m, M)$, имеющей отрицательное гипергеометрическое распределение 1, очевидным соотношением

$$Y(N, m, M) = m + X(N, m, M).$$

2. Для случайной величины $Y(N, m, M)$, имеющей отрицательное гипергеометрическое распределение 2 с параметрами N, m, M, и случайной величины $Z(N, n, M)$, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами N, n, M, справедливо соотношение

$$P\{Y(N, m, M) \le n\} = P\{Z(N, n, M) \ge m\} =$$
$$= 1 - P\{Z(N, n, M) \le m - 1\} =$$
$$= 1 - P(m - 1;\ N, n, M). \qquad (2)$$

Это соотношение позволяет использовать таблицы гипергеометрического распределения (таблицы функции $P(x; N, n, M)$) для проведения расчетов, связанных с отрицательным гипергеометрическим распределением 2.

3. При $N \to \infty$, $M \to \infty$, $N - M \to \infty$, так что $M/N \to p$ и $(N - M)/N \to q$ $(p + q = 1)$, отрицательное гипергеометрическое распределение 2 стремится к отрицательному биномиальному распределению 2 (распределение Паскаля) с параметрами m, p.

Оценивание параметров

При известных N и m оценивается параметр M:

$$M^* = \frac{m(N+1)}{\bar{y}^*} - 1 \quad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$y = m + x,$$

где x — случайное число, принадлежащее последовательности случайных чисел, имеющих отрицательное гипергеометрическое распределение 1 с параметрами N, m, M.

Техника вычислений

1. Последовательные значения вероятностей $p(y)$ связаны между собой соотношением

$$p(y) = p(y-1)\,\frac{(y-1)(N - M + m + 1 - y)}{(y - m)(N + 1 - y)},$$
$$y = m + 1,\ m + 2, \dots,\ N - M + m,$$

где $p(m) = M!(N - m)!/[N!(M - m)!]$.

2. Для облегчения расчетов, связанных с отрицательным гипергеометрическим распределением 2, можно использовать таблицы гипергеометрического распределения (см. формулу (2)).

2.9. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

2.9.1. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Ряд распределения	$p(x) = -\dfrac{1}{\ln q}\,\dfrac{p^x}{x}, \quad x = 1, 2, \dots,$ где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$
Функция распределения	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ c\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{p^i}{i}, & k < x \le k + 1,\ k = 1, 2, \dots, \end{cases}$ где $c = -1/\ln q$
Производящая функция	$\varphi_x(t) = -c\ln(1 - pt)$
Характеристическая функция	$\chi_x(t) = -c\ln(1 - pe^{it}) = 1 - c\ln\left[1 - \dfrac{p}{q}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(it)^k}{k!}\right]$
Математическое ожидание	$\bar{x} = c\,\dfrac{p}{q}$
Мода	$\hat{x} = 1$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{cp(1 - cp)}{q^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\sqrt{cp(1 - cp)}}{q}$
Коэффициент вариации	$v_x = \sqrt{\dfrac{1}{cp} - 1}$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \dfrac{1 + p - 3cp + 2(cp)^2}{(1 - cp)\sqrt{cp(1 - cp)}}$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \dfrac{1 + 4p + p^2 - (7 + 4p)cp + 12(cp)^2 - 6(cp)^3}{cp(1 - cp)^2}$
Начальные моменты	$m_2 = \dfrac{cp}{q^2},\quad m_3 = \dfrac{cp(1 + p)}{q^3},\quad m_4 = \dfrac{cp(1 + 4p + p^2)}{q^4}$

Центральные моменты
$$\mu_3 = \frac{cp[1 + p - 3cp + 2(cp)^2]}{q^3},$$

$$\mu_4 = \frac{cp[1 + 4p + p^2 - 4(1 + p)cp + 6(cp)^2 - 3(cp)^3]}{q^4}.$$

Примечание. В некоторых источниках это распределение называют *фишеровским распределением по логарифмическому ряду.*

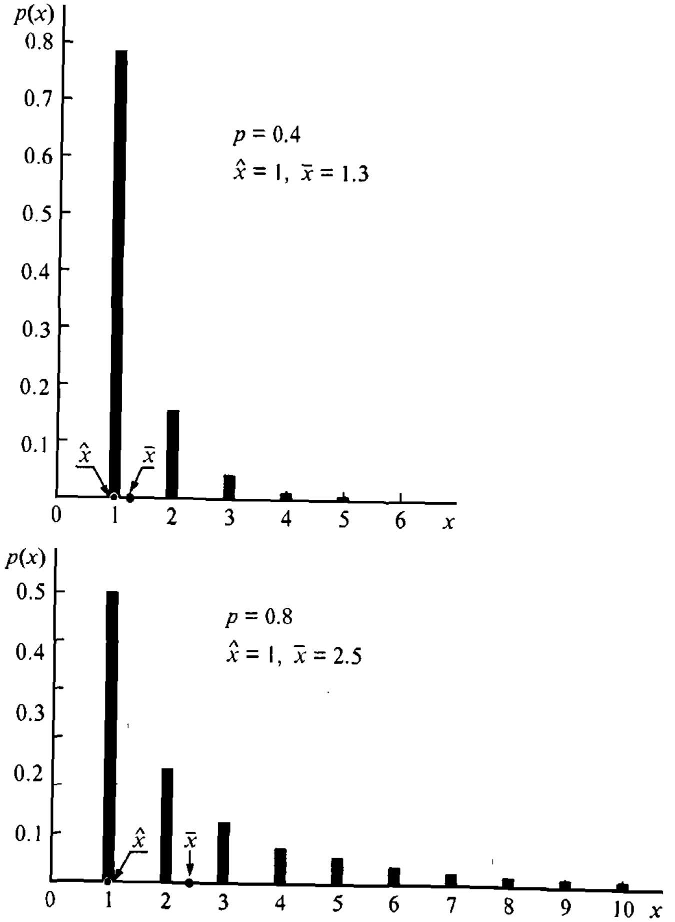


Рис. 2.18. Функция вероятности логарифмического распределения 1.

Соотношения между распределениями

Логарифмическое распределение 1 с параметром p является предельным для отрицательного биномиального распределения 1 в следующем смысле: если случайная величина

$Z(m, q)$ имеет отрицательное биномиальное распределение 1 с параметрами m, q, то

$$\lim_{m \to \infty} P\{Z(m, q) = k / Z(m, q) > 0\} = -\frac{p^k}{k \ln q},$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad p = 1 - q.$$

Оценивание параметров

Оценивание параметра p методом моментов осуществляется путем решения уравнения

$$-\frac{p^*}{(1 - p^*)\ln(1 - p^*)} = \bar{x}^*. \qquad (1)$$

К такому же уравнению приводит и метод максимального правдоподобия.

При решении уравнения (1) в качестве начального приближения можно использовать величину $p^* = 1 - p_1^* / \bar{x}^*$, где p_1^* — выборочная оценка вероятности $p_1 = P(X = 1)$.

При $\bar{x}^* < 25$ для оценки p можно использовать приближенную формулу

$$p^* \approx 1 - \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{5}{3} - \frac{\ln \bar{x}^*}{16}\right)(\bar{x}^* - 1) + 2\right] \ln \bar{x}^*}.$$

Приближенную оценку параметра p можно получить путем обратной интерполяции данных, приведенных в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Таблица значений функции $\bar{x} = -p/[(1 - p)\ln(1 - p)]$

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0		1.0050	1.0102	1.0154	1.0207	1.0261	1.0316	1.0372	1.0429	1.0487
0.1	1.0546	1.0606	1.0667	1.0730	1.0794	1.0858	1.0925	1.0992	1.1061	1.1132
0.2	1.1204	1.1277	1.1352	1.1429	1.1507	1.1587	1.1669	1.1752	1.1838	1.1926
0.3	1.2016	1.2108	1.2202	1.2299	1.2398	1.2500	1.2604	1.2711	1.2821	1.2934
0.4	1.3051	1.3170	1.3294	1.3421	1.3551	1.3687	1.3825	1.3968	1.4116	1.4269
0.5	1.4427	1.4591	1.4760	1.4935	1.5117	1.5306	1.5503	1.5706	1.5919	1.6140
0.6	1.6370	1.6611	1.6862	1.7125	1.7401	1.7690	1.7994	1.8313	1.8650	1.9005
0.7	1.9380	1.9778	2.0200	2.0649	2.1128	2.1640	2.2189	2.2779	2.3416	2.4105
0.8	2.4853	2.5670	2.6566	2.7553	2.8648	2.9870	3.1244	3.2802	3.4587	3.6656
0.9	3.9087	4.1991	4.5531	4.9960	5.5686	6.3424	7.4560	9.2208	12.5255	21.4976
0.99	21.4976	23.3755	25.6818	28.5896	32.3821	37.5591	45.0968	57.2087	80.2947	144.6201

Генерирование случайных чисел

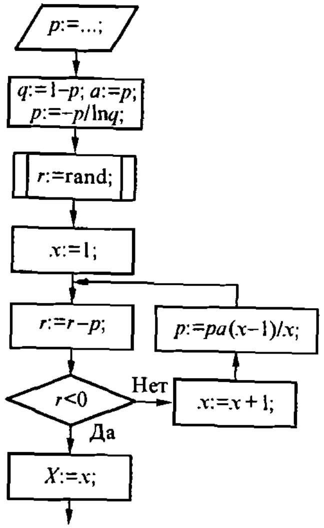


Рис. 2.19. Блок-схема алгоритма генерирования случайных чисел, имеющих логарифмическое распределение 1.

Алгоритм реализует стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин.

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(x)$ логарифмического распределения 1 связаны соотношением

$$p(x) = p(x-1)\,\frac{x-1}{x}\,p, \quad x = 2, 3, \ldots,$$

где $p(1) = -p/\ln q$.

2.9.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ 2

Ряд распределения $\quad p(x) = \log_m \dfrac{x+1}{x}, \quad x = 1, 2, \ldots, m-1,$

где $m \geq 3$ — целое

Математическое ожидание $\quad \bar{x} = m - 1 - \log_m (m-1)\,!$

Мода $\quad \hat{x} = 1$

Дисперсия

$$D_x = 2(m-1)\log_m (m-1)\,! - \left[\log_m (m-1)\,!\right]^2 - \log_m\left(\prod_{k=2}^{m-1} k^{2k-1}\right),$$

Начальные моменты

$$m_2 = (m-1)^2 - \log_m\left(\prod_{k=2}^{m-1} k^{2k-1}\right),$$

$$m_3 = (m-1)^3 - \log_m\left(\prod_{k=2}^{m-1} k\right),$$

$$m_4 = (m-1)^4 - \log_m\left(\prod_{k=2}^{m-1} k^{k^4-(k-1)^4}\right)$$

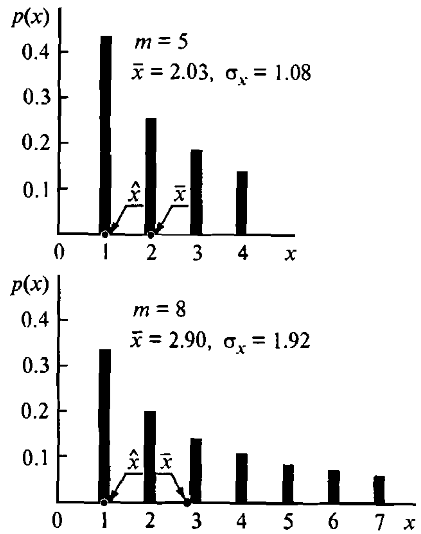


Рис. 2.20. Функция вероятности логарифмического распределения 2.

Оценивание параметров

Оценивание параметра m методом моментов осуществляется путем решения уравнения

$$m^* - \frac{1}{\ln m^*}\ln\left((m^*-1)\,!\right) = \bar{x}^* + 1.$$

Приведенное уравнение дает приближенное решение, так как не учитывает того, что m^* должно быть целым.

Генерирование случайных чисел

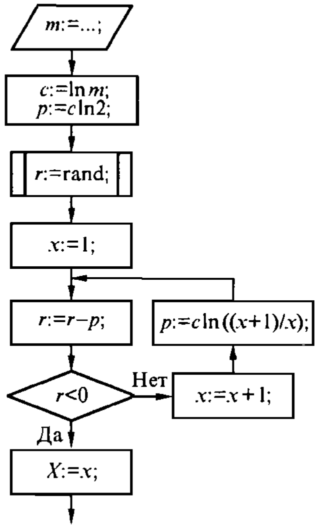


Рис. 2.21. Блок-схема алгоритма генерирования случайных чисел, имеющих логарифмическое распределение 2.

Техника вычислений

При вычислениях, связанных с логарифмическим распределением 2, могут быть использованы формулы перехода: $\log_m a = \ln a / \ln m$ и $\log_m a = \lg a / \lg m$.

2.10. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЙА

2.10.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЙА 1

Ряд распределения

$$p(0) = \frac{r(r+c)(r+2c)\ \dots\ [r+(n-1)c]}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)\ \dots\ [b+r+(n-1)c]}; \qquad (1)$$

$$p(x) = C_n^x \frac{b(b+c)\dots[b+(x-1)c]\,r(r+c)\dots[r+(n-x-1)c]}{(b+r)(b+r+c)\dots[b+r+(n-1)c]},$$
$$x = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$p(n) = \frac{b(b+c)(b+2c)\dots[b+(n-1)c]}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)\dots[b+r+(n-1)c]},$$

где $n > 0$, $b > 0$, $r > 0$, c — целые числа. Параметр c может быть отрицательным, однако он должен удовлетворять условию $b + r + c(n-1) > 0$

Математическое ожидание $\quad \bar{x} = \dfrac{nb}{b+r} = \dfrac{nb}{m}$, где $m = b + r$

Мода

$$\hat{x} = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{(b-c)(n+1)}{m-2c} \right\rfloor, & \dfrac{(b-c)(n+1)}{m-2c} \text{ — не целое;} \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{(b-c)(n+1)}{m-2c} - 1 \\ \dfrac{(b-c)(n+1)}{m-2c} \end{matrix}\right\}, & \dfrac{(b-c)(n+1)}{m-2c} \text{ — целое} \end{cases}$$

Дисперсия $\quad D_x = \dfrac{nbr(m+nc)}{m^2(m+c)}$

Стандартное отклонение $\quad \sigma_x = \dfrac{1}{m}\sqrt{\dfrac{nbr(m+nc)}{m+c}}$

Коэффициент вариации $\quad v_x = \sqrt{\dfrac{r(m+nc)}{nb(m+c)}}$

Асимметрия $\quad \mathrm{Sk} = (r-b)\dfrac{m+2nc}{m+2c}\sqrt{\dfrac{m+c}{nbr(m+nc)}}$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = \frac{(m+c)}{nbr(m+2c)(m+3c)(m+nc)} \times$$
$$\times \left\{(m+2nc)(m+3nc)(m^2-3br) + \right.$$
$$\left. + m(n-1)[cm^2 + 3br(m+nc)]\right\} - 3$$

Начальные моменты $\quad m_2 = \dfrac{nb[n(b+c)+r]}{m(m+c)}$,

$$m_3 = \frac{nb\left\{n^2b^2 + b[(3n-1)r + 3n^2c] + r^2 + 3nrc + 2n^2c^2\right\}}{m(m+c)(m+2c)},$$

$$m_4 = \frac{nb}{m(m+c)(m+2c)(m+3c)}\left\{n^3b^3 + b^2[(6n^2-4n+1)r + 6n^3c] + \right.$$
$$+ b[(7n-4)r^2 + (18n^2-5n-1)rc + 11n^3c^3] +$$
$$\left. + r^3 + (7n-1)r^2c + (12n-1)nrc^2 + 6n^3c^3\right\}$$

Для начальных моментов справедлива рекуррентная формула

$$m_{s+1} = \frac{1}{m + sc} \sum_{i=0}^{s} \left[nbC_s^i - (b - nc) C_s^{i+1} - cC_s^{i+2} \right] m_{s-i}, \quad s = 1,\ 2, \ldots$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = \frac{nbr(m + nc)}{m^3 (m + c)(m + 2c)} (m + 2nc)(r - b),$$

$$\mu_4 = \frac{nrb(m + nc)}{m^4 (m + c)(m + 2c)(m + 3c)} \times$$
$$\times \left\{ (m + 2nc)(m + 3nc)(m^2 - 3br) + \right.$$
$$\left. + \ m(n - 1)[cm^2 + 3br(m + nc)] \right\}$$

Типичная интерпретация. Имеется урна, в которой находится m шаров: b — белых и r — черных. Наудачу выбирается один шар, и после определения его цвета шар возвращается в урну вместе с новыми c шарами того же цвета. Случайная величина X — число извлечений белого шара в серии из n извлечений. Рассматриваемая схема широко используется при моделировании эпидемий инфекционных заболеваний.

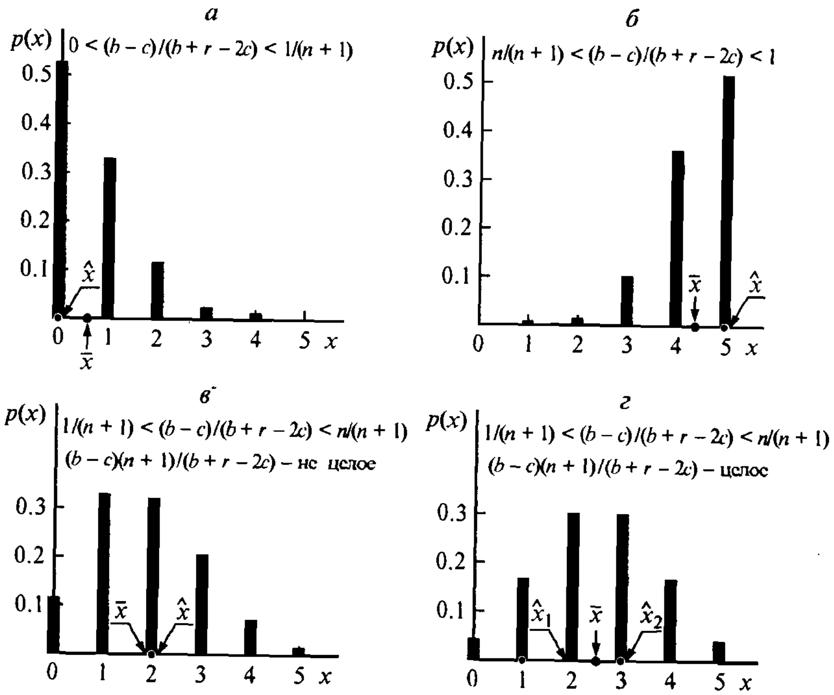


Рис. 2.22. Функция вероятности распределения Пойа 1.

Параметры распределения: $а$ — $n = 5$, $b = 3$, $r = 20$, $c = 1$; $б$ — $n = 5$, $b = 140$, $r = 20$, $c = 1$; $в$ — $n = 5$, $b = 12$, $r = 20$, $c = 1$; $г$ — $n = 5$, $b = 20$, $r = 20$, $c = 1$.

Соотношения между распределениями

1. При $c = 0$ распределение Пойа совпадает с биномиальным распределением с параметрами n, $p = b/(b + r)$.

2. При $c = -1$ распределение Пойа совпадает с гипергеометрическим распределением с параметрами $N = b + r, n$, $M = b$.

3. При $b = r = c$ распределение Пойа совпадает с дискретным равномерным распределением с параметрами $a = 0$, n.

4. Если $b \to \infty$, $r \to \infty$, так что $p = b/(b + r) = \text{const}$ и $\gamma = c/(b + r) \to 0$, то распределение Пойа стремится к биномиальному распределению с параметрами n, p.

5. Если $n \to \infty$, $b/(b + r) \to 0$, $c/(b + r) \to 0$, $nb/(b + r) \to \mu$ и $nc/(b + r) \to \alpha\mu$, где $\alpha > 0$ и $\mu > 0$ — постоянные, то распределение Пойа стремится к отрицательному биномиальному распределению с параметрами $m = 1/\alpha$ и $p = 1/(1 + \alpha\mu)$ (см. п. 2.6).

Генерирование случайных чисел

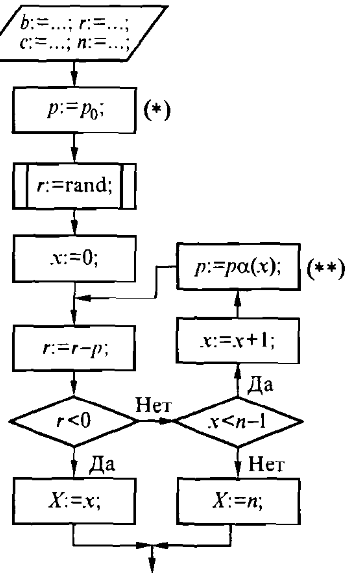


Рис. 2.23. Блок-схема алгоритма формирования случайных чисел, имеющих распределение Пойа 1.

Алгоритм реализует стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин. Вероятность $p_0 = P(X = 0)$ вычисляется по формуле (1) (оператор (*)). Функция $\alpha(x)$ вычисляется по формуле $\alpha(x) = (n - 1 - x) \times$ $\times [b + (x - 1)c] / \{x[r + (n - x)c]\}$ (оператор (**)).

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(x)$ распределения Пойа 1 связаны соотношением

$$p(x) = p(x-1)\,\frac{(n+1-x)[b+(x-1)c]}{x[r+(n-x)c]},\quad x = 1, 2, \ldots, n.$$

Вероятность $p(0)$ вычисляется по формуле (1).Если n мало по сравнению с $m = b + r$, то

$$p(x) \approx C_n^x p^x (1-p)^{n-x},\quad x = 0,\ 1, \ldots, n,$$

где $p = b/(b + r)$.

2.10.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЙА 2 (ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА)

Ряд распределения $\quad p(0) = \dfrac{1}{(1-\alpha\mu)^{1/\alpha}}$,

$$p(x) = \frac{\mu^x}{x!}\,\frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots[1+(x-1)\alpha]}{(1+\alpha\mu)^{(x+1/\alpha)}},$$

$x = 1,\ 2, \ldots,$ где $\mu > 0,\ \ 0 < \alpha < 1$

Производящая функция $\quad \varphi_x(t) = [1 - \alpha\mu(1-t)]^{-1/\alpha}$

Характеристическая функция $\quad \chi_x(t) = [1 - \alpha\mu(1 - e^{it})]^{-1/\alpha}$

Математическое ожидание $\quad \bar{x} = \mu$

Мода

$$\hat{x} = \begin{cases} \lfloor \mu(1-\alpha) \rfloor, & \mu(1-\alpha) \text{ — не целое;} \\ \left.\begin{matrix}\mu(1-\alpha) - 1 \\ \mu(1-\alpha)\end{matrix}\right\}, & \mu(1-\alpha) \text{ — целое} \end{cases}$$

Дисперсия $\quad D_x = \mu(1 + \alpha\mu)$

Стандартное отклонение $\quad \sigma_x = \sqrt{\mu(1+\alpha\mu)}$

Коэффициент вариации $\quad v_x = \sqrt{\dfrac{1+\alpha\mu}{\mu}}$

Асимметрия $\quad \mathrm{Sk} = \dfrac{1+2\alpha\mu}{\sqrt{\mu(1+\alpha\mu)}}$

Эксцесс $\quad \mathrm{Ex} = \dfrac{1}{\mu(1+\alpha\mu)} + 6\alpha$

Начальные моменты

$$m_2 = \mu[1 + (\alpha+1)\mu],$$

$$m_3 = \mu[1 + 3(\alpha+1)\mu + (2\alpha^2 + 3\alpha + 1)\mu^2],$$

$$m_4 = \mu[1 + 7(\alpha+1)\mu + 6(2\alpha^2 + 3\alpha + 1)\mu^2 + (6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha + 1)\mu^3]$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = \mu(1 + \alpha\mu)(1 + 2\alpha\mu),$$

$$\mu_4 = \mu(1+\alpha\mu)[3\mu(1+\alpha\mu)(1+2\alpha) + 1]$$

Рассматриваемое распределение является предельной формой распределения Пойа 1 при $n \to \infty$, $nb/(b + r) \to \mu$ и $nc/(b + r) \to \alpha\mu$. О толковании на языке случайных процессов см. [49].

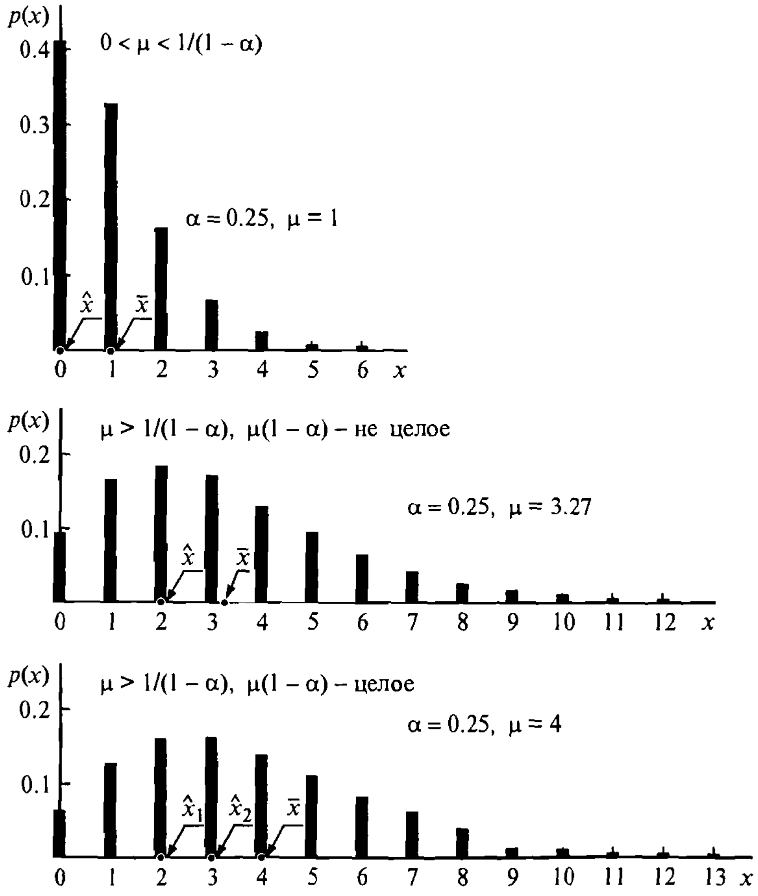


Рис. 2.24. Функция вероятности распределения Пойа 2.

Соотношения между распределениями

1. Предельная форма распределения Пойа представляет собой отрицательное биномиальное распределение 1 с параметрами $m = 1/\alpha$ и $p = 1/(1+\alpha\mu)$.

2. При $\alpha = 1$ предельная форма распределения Пойа совпадает с геометрическим распределением 1 с параметром $p = 1/(1+\mu)$.

3. При $\alpha \to 0$ рассматриваемое распределение стремится к распределению Пуассона с параметром μ.

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^*, \quad \alpha^* = \frac{S_x^2 - \bar{x}^*}{(\bar{x}^*)^2} \quad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

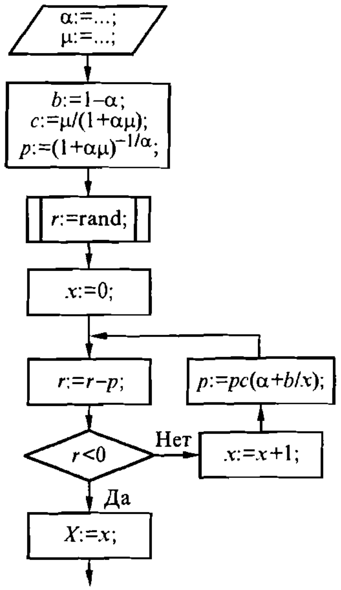


Рис 2.25. Блок-схема алгоритма генерирования случайных чисел, имеющих распределение Пойа 2.

Алгоритм реализует стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин.

Техника вычислений

Последовательные значения вероятностей $p(x)$ связаны соотношением

$$p(x) = p(x-1)\,\frac{\mu}{1+\alpha\mu}\,\frac{\alpha(x-1)+1}{x}, \quad x = 1, 2, \ldots,$$

где $p(0) = (1+\alpha\mu)^{-1/\alpha}$.

2.11. ДЗЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (ЗАКОН ЦИПФА—ЭСТОУПА)

Ряд распределения $\quad p(x) = \dfrac{1}{\zeta(\rho+1)}\, x^{-(\rho+1)}, \quad x = 1, 2, \ldots, \quad \rho > 0,$

где $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ — дзета-функция Римана

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{1}{\zeta(\rho+1)} \sum_{i=1}^{k} i^{-(\rho+1)}, & k < x \le k+1, \\ & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Производящая функция

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{\zeta(\rho+1)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{t^x}{x^{\rho+1}}$$

Характеристическая функция

$$\chi_x(t) = \frac{1}{\zeta(\rho+1)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^{\rho+1}}$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{\zeta(\rho)}{\zeta(\rho+1)}, \quad \rho > 1$$

Мода

$$\hat{x} = 1$$

Дисперсия

$$D_x = \frac{\zeta(\rho-1)\,\zeta(\rho+1) - \zeta^2(\rho)}{\zeta^2(\rho+1)}, \quad \rho > 2$$

Стандартное отклонение

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{\zeta(\rho-1)\,\zeta(\rho+1) - \zeta^2(\rho)}}{\zeta(\rho+1)}, \quad \rho > 2$$

Коэффициент вариации

$$v_x = \sqrt{\frac{\zeta(\rho-1)\,\zeta(\rho+1)}{\zeta^2(\rho)} - 1}$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk} = \frac{\zeta(\rho-2)\,\zeta^2(\rho+1) - \zeta(\rho)[3\zeta(\rho-1)\,\zeta(\rho+1) - \zeta^2(\rho)]}{[\zeta(\rho-1)\,\zeta(\rho+1) - \zeta^2(\rho)]^{3/2}},$$

$\rho > 3$

Эксцесс
$$\mathrm{Ex} = \frac{1}{[\zeta(\rho-1)\,\zeta(\rho+1) - \zeta^2(\rho)]^2}\,[\zeta(\rho-3)\,\zeta^3(\rho+1) -$$
$$-\,4\zeta(\rho-2)\,\zeta(\rho)\,\zeta^2(\rho+1) - 3\zeta^2(\rho-1)\,\zeta^2(\rho+1) +$$
$$+\,12\zeta(\rho-1)\,\zeta^2(\rho)\,\zeta(\rho+1) - 6\zeta^4(\rho)],\quad \rho > 4$$

Начальные моменты
$$m_2 = \frac{\zeta(\rho-1)}{\zeta(\rho+1)},\quad \rho > 2;\qquad m_3 = \frac{\zeta(\rho-2)}{\zeta(\rho+1)},\quad \rho > 3;$$
$$m_4 = \frac{\zeta(\rho-3)}{\zeta(\rho+1)},\quad \rho > 4;\qquad m_s = \frac{\zeta(\rho-s+1)}{\zeta(\rho+1)},\quad \rho > s$$

Центральные моменты
$$\mu_3 = \frac{\zeta(\rho-2)\zeta^2(\rho+1) - \zeta(\rho)\,[3\zeta(\rho-1)\,\zeta(\rho+1) - 2\zeta^2(\rho)]}{\zeta^3(\rho+1)},\quad \rho > 3;$$
$$\mu_4 = \frac{\zeta(\rho-3)\,\zeta^3(\rho+1) - \zeta(\rho)\left\{4\zeta(\rho-2)\,\zeta^2(\rho+1) - \right.}{\zeta^4(\rho+1)} \to$$
$$\to \frac{\left. -3\zeta(\rho)\,[2\zeta(\rho-1)\,\zeta(\rho+1) - \zeta^2(\rho)]\right\}}{\zeta^4(\rho+1)},\quad \rho > 4$$

Примечание. Дзета-распределение используется в экономике для описания числа страховых полисов, принадлежащих одному лицу, и в лингвистических исследованиях для описания распределения числа повторений одного и того же слова в достаточно длинном однородном тексте.

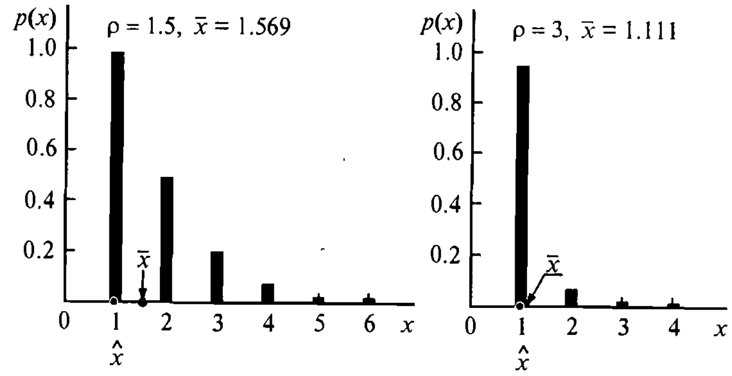


Рис. 2.26. Функция вероятности дзета-распределения.

Оценивание параметров

Оценивание параметра ρ методом моментов осуществляется путем решения уравнения

$$\frac{\zeta(\rho^*)}{\zeta(\rho^*+1)} = \bar{x}^*.$$

Для приближенного решения этого уравнения может быть использована табл. 2.2.

Оценка максимального правдоподобия ρ^* параметра ρ является корнем уравнения

$$-\frac{\zeta'(\rho^*+1)}{\zeta(\rho^*+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i.$$

Вполне приемлемую точность решения этого уравнения можно получить с помощью табл. 2.3.

Таблица 2.2

$\frac{\zeta(\rho)}{\zeta(\rho+1)}$	ρ	$\frac{\zeta(\rho)}{\zeta(\rho+1)}$	ρ	$\frac{\zeta(\rho)}{\zeta(\rho+1)}$	ρ	$\frac{\zeta(\rho)}{\zeta(\rho+1)}$	ρ	$\frac{\zeta(\rho)}{\zeta(\rho+1)}$	ρ
1.01	5.848	1.21	2.419	1.41	1.931	1.61	1.702	1.81	1.566
1.02	4.952	1.22	2.381	1.42	1.915	1.62	1.693	1.82	1.560
1.03	4.449	1.23	2.345	1.43	1.901	1.63	1.685	1.83	1.555
1.04	4.105	1.24	2.311	1.44	1.887	1.64	1.677	1.84	1.550
1.05	3.847	1.25	2.279	1.45	1.873	1.65	1.669	1.85	1.543
1.06	3.642	1.26	2.249	1.46	1.860	1.66	1.662	1.86	1.539
1.07	3.473	1.27	2.220	1.47	1.847	1.67	1.654	1.87	1.535
1.08	3.331	1.28	2.193	1.48	1.834	1.68	1.647	1.88	1.530
1.09	3.208	1.29	2.167	1.49	1.822	1.69	1.640	1.89	1.525
1.10	3.100	1.30	2.143	1.50	1.811	1.70	1.633	1.90	1.520
1.11	3.006	1.31	2.119	1.51	1.799	1.71	1.626	1.91	1.516
1.12	2.921	1.32	2.097	1.52	1.788	1.72	1.619	1.92	1.511
1.13	2.844	1.33	2.075	1.53	1.778	1.73	1.613	1.93	1.507
1.14	2.275	1.34	2.054	1.54	1.767	1.74	1.607	1.94	1.503
1.15	2.711	1.35	2.034	1.55	1.757	1.75	1.600	1.95	1.499
1.16	2.653	1.36	2.015	1.56	1.747	1.76	1.594	1.96	1.495
1.17	2.599	1.37	1.997	1.57	1.737	1.77	1.589	1.97	1.491
1.18	2.549	1.38	1.980	1.58	1.728	1.78	1.583	1.98	1.487
1.19	2.503	1.39	1.963	1.59	1.719	1.79	1.577	1.99	1.483
1.20	2.459	1.40	1.946	1.60	1.710	1.80	1.571	2.00	1.479

Таблица 2.3

ρ	$-\dfrac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho+1)}$	ρ	$-\dfrac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho+1)}$	ρ	$-\dfrac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho+1)}$
0.1	9.441	1.1	0.490	2.2	0.1340
0.2	4.458	1.2	0.425	2.4	0.1100
0.3	2.808	1.3	0.372	2.6	0.0914
0.4	1.990	1.4	0.327	2.8	0.0761
0.5	1.505	1.5	0.289	3.0	0.0637
0.6	1.186	1.6	0.256	3.2	0.0535
0.7	0.961	1.7	0.228	3.4	0.0451
0.8	0.796	1.8	0.204	3.6	0.0382
0.9	0.669	1.9	0.183	3.8	0.0324
1.0	0.570	2.0	0.164	4.0	0.0276

Примечание. При $\rho > 4$ величина $-\dfrac{\zeta'(\rho+1)}{\zeta(\rho+1)} \approx \dfrac{\ln 2}{1+2^{\rho+1}}$.

Генерирование случайных чисел

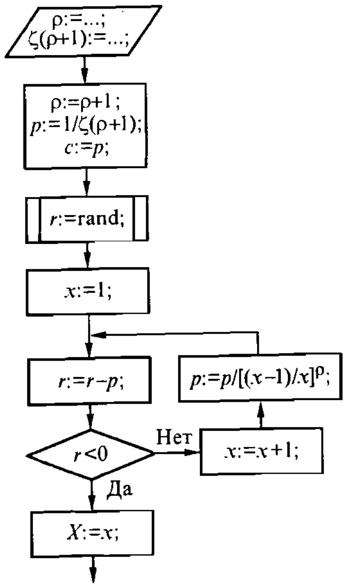


Рис. 2.27. Блок-схема алгоритма генерирования случайных чисел, имеющих дзета-распределение.

Алгоритм реализует стандартный способ имитационного моделирования дискретных случайных величин.

Таблицы

[14, с. 614, 615, табл. 23.3]. Приведены значения дзета-функции $\zeta(n)$ для $n = 2(1)42$; $20D$.

Техника вычислений

При вычислении вероятностей $p(x)$ можно использовать рекуррентную формулу

$$p(x) = p(x-1)\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\rho+1}, \quad x = 2, 3\ldots,$$

где $p(1) = 1/\zeta(\rho+1)$.

2.12. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОРЕЛЯ—ТАННЕРА

Ряд распределения

$$p(x) = \frac{r}{(x-r)!}x^{x-r-1}e^{-\alpha x}\alpha^{x-r},$$

$$x = r, \quad r+1, \ldots,$$

где $r \ge 1$ — целое, $0 < \alpha < 1$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le r, \\ re^{-\alpha r}\sum\limits_{i=0}^{k-r}\dfrac{\alpha^i}{i!}e^{-\alpha i}(r+i)^{i-1}, & k < x \le k+1, \\ & k = r, r+1, \ldots, \end{cases}$$

Производящая функция

$$\varphi_x(t) = rt^r e^{-\alpha r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}e^{-\alpha k}(r+k)^{k-1}$$

Характеристическая функция

$$\varphi_x(t) = re^{(it-\alpha)r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}e^{(it-\alpha)k}(r+k)^{k-1}$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{r}{1-\alpha}$$

Мода — При $r = 1$, $r = 2$, а также при $\alpha r < e^{\alpha}$ мода распределения $\hat{x} = r$.
При $\alpha r > e^{\alpha}$ мода находится в интервале $(\mu - 1, \mu)$, где μ — корень уравнения

$$\frac{\mu - r}{\mu}\left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right)^{r+1.5} = \alpha e^{1-\alpha}$$

Дисперсия
$$D_x = \frac{\alpha r}{(1-\alpha)^3}$$

Стандартное отклонение
$$\sigma_x = \frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\frac{\alpha r}{1-\alpha}}$$

Коэффициент вариации
$$\nu_x = \sqrt{\frac{\alpha}{r(1-\alpha)}}$$

Асимметрия
$$\mathrm{Sk} = \frac{1+2\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha r}}$$

Эксцесс
$$\mathrm{Ex} = \frac{6\alpha^2 + 8\alpha + 1}{\alpha r(1-\alpha)}$$

Начальные моменты
$$m_2 = \frac{r}{(1-\alpha)^3}\left[r - (r-1)\alpha\right],$$

$$m_3 = \frac{r}{(1-\alpha)^5}\left[r^2 - (2r^2 - 3r - 1)\alpha + (r-1)(r-2)\alpha^2\right],$$

$$m_4 = \frac{r}{(1-\alpha)^7}\left[r^3 - (3r^3 - 6r^2 - 4r - 1)\alpha + {} \right.$$
$$\left. + (3r^3 - 12r^2 + 7r + 8)\alpha^2 - (r-1)(r-2)(r-3)\alpha^3\right]$$

Центральные моменты
$$\mu_3 = \frac{\alpha r}{(1-\alpha)^5}(1+2\alpha),$$

$$\mu_4 = \frac{\alpha r}{(1-\alpha)^7}\left[1 + (3r+8)\alpha - 3(r-2)\alpha^2\right]$$

Типичная интерпретация. На вход одноканальной системы массового обслуживания с постоянным временем обслуживания поступает стационарный пуассоновский поток заявок. За время обслуживания одной заявки на вход системы поступает в среднем α заявок ($0 < \alpha < 1$). В общей упорядоченной очереди находится r заявок, ожидающих начала обслуживания ($r \geq 1$). Случайная величина X — число заявок, обслуженных системой к моменту ликвидации очереди (иными словами, X — число заявок, обслуженных за время «рассасывания» очереди, в которой первоначально находилось r заявок). Рассматриваемое распределение имеет место при любом сочетании интенсивности λ входящего потока и времени обслуживания τ, удовлетворяющем условию $0 < \lambda\tau < 1$ ($\alpha = \lambda\tau$ — приведенная интенсивность входящего потока заявок, или среднее число заявок, поступающих в систему за время τ обслуживания одной заявки).

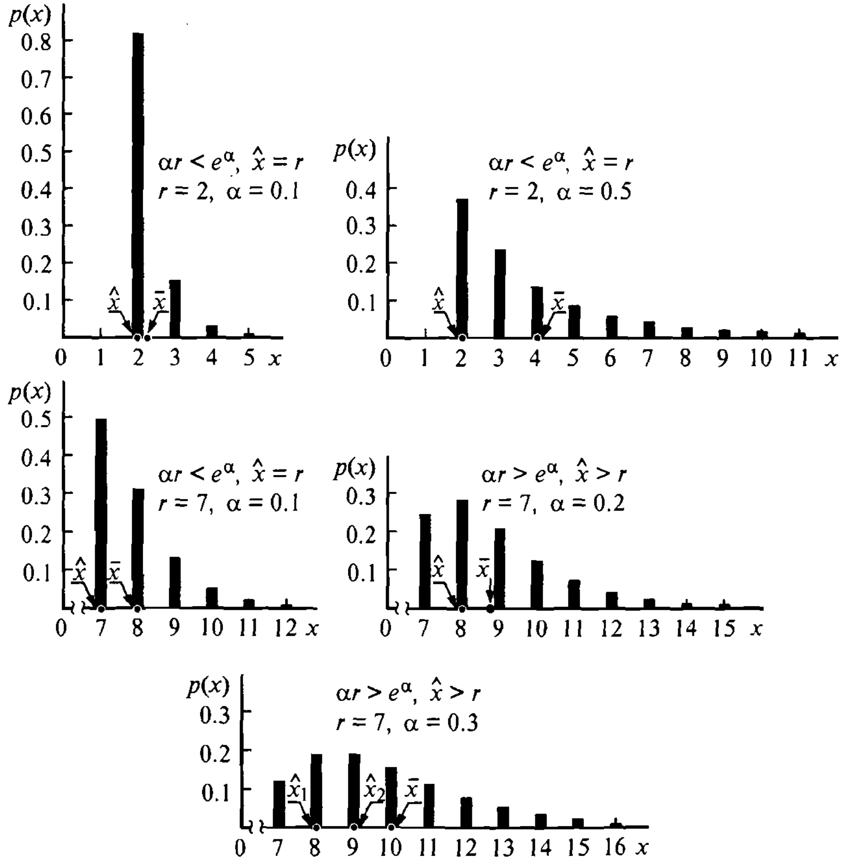


Рис. 2.28. Функция вероятности распределения Бореля—Таннера.

Оценивание параметров

При использовании метода моментов сначала вычисляется оценка параметра r:

$$r^* = \left\lfloor \frac{\sqrt{1 + 4\bar{x}^*(v_x^*)^2} - 1}{2(v_x^*)^2} + 0.5 \right\rfloor .$$

Здесь $\bar{x}^*$ — выборочное среднее; $v_x^* = S_x / \bar{x}^*$ — выборочный коэффициент вариации.

После этого вычисляется оценка параметра α:

$$\alpha^* = 1 - \frac{r^*}{\bar{x}^*}.$$

При известном r оценка максимального правдоподобия параметра α вычисляется по формуле

$$\alpha^* = 1 - \frac{r^*}{\bar{x}^*}.$$

Такой же результат дает и метод моментов.

Генерирование случайных чисел

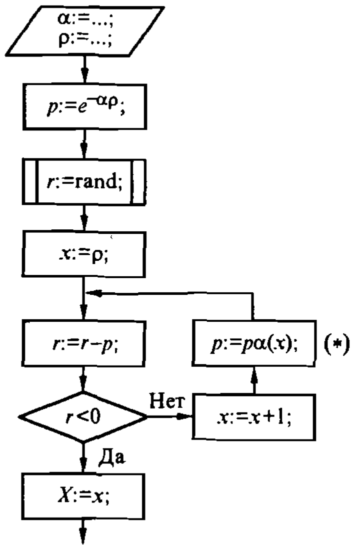


Рис. 2.29. Блок-схема алгоритма генерирования случайных чисел, имеющих распределение Бореля—Таннера.

Примечания: 1. На блок-схеме параметр r распределения Бореля—Таннера обозначен символом ρ. 2. Функция $\alpha(x)$ (оператор $*$) вычисляется по формуле

$$\alpha(x) = e^{-\alpha} \frac{\alpha x}{x - \rho} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{x-\rho-2}$$

Таблицы

[6, с. 311—316, табл. 9.13]. Даны значения вероятности $P(X \le x)$ для $r = 1(1)5$, $\alpha = 0.01(0.01)0.25$; $5D$.

Техника вычислений

При вычислении вероятностей $p(x)$ можно воспользоваться рекуррентной формулой

$$p(x) = p(x-1)\alpha e^{-\alpha} \frac{x}{x-r} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{x-r-2}, \quad x = r+1,\ r+2, \ldots ,$$

где $p(r) = e^{-\alpha r}$.

ГЛАВА 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ВСЕЙ ЧИСЛОВОЙ ОСИ

3.1. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА–ЛАПЛАСА)

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

где μ — параметр положения (математическое ожидание); $\sigma > 0$ — параметр масштаба (стандартное отклонение)

Функция распределения

$F(x) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, где $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа

Характеристическая функция

$$\chi_x(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Математическое ожидание $\bar{x} = \mu$

Медиана $x_{0.5} = \mu$

Мода $\hat{x} = \mu$

Дисперсия $D_x = \sigma^2$

Стандартное отклонение $\sigma_x = \sigma$

Срединное отклонение $E = \rho\sqrt{2}\sigma \approx 0.6745\sigma$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = 0$

Эксцесс $\mathrm{Ex} = 0$

Начальные моменты

$$m_2 = \sigma^2 + \mu^2; \quad m_3 = \mu(3\sigma^2 + \mu^2);$$

$$m_4 = 3\sigma^4 + \mu^2(6\sigma^2 + \mu^2); \quad m_s = \mu m_{s-1} + (s-1)\sigma^2 m_{s-2}$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = 0; \quad \mu_4 = 3\sigma^4; \quad \mu_s = \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ \sigma^s (s-1)!!, & s \text{ — четное,} \end{cases}$$

где $(s-1)!! = (s-1)(s-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1$

Точками перегиба функции плотности $f(x)$ являются точки $x = \mu \pm \sigma$.

Примечание. Нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu = 0$ и стандартным отклонением $\sigma = 1$ называется *стандартным нормальным распределением*. Основные характеристики этого распределения:

Плотность вероятности

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Функция распределения

$\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x)$, где $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа

Характеристическая функция

$$\chi_x(t) = e^{-t^2/2} = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Срединное отклонение $E = \rho\sqrt{2} \approx 0.6745$

Моменты

$$m_2 = \mu_2 = 1; \quad m_3 = \mu_3 = 0; \quad m_4 = \mu_4 = 3;$$

$$m_s = \mu_s = \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ (s-1)!!, & s \text{ — четное,} \end{cases}$$

Соотношения между распределениями

1. Если случайная величина $X(\mu, \sigma)$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением σ, а случайная величина $X(0, 1)$ имеет стандартное нормальное распределение, то

$$X(\mu,\sigma) \sim \mu + \sigma X(0,1) \text{ и } X(0,1) \sim \frac{X(\mu,\sigma) - \mu}{\sigma}.$$

2. Линейная функция $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ независимых случайных величин $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, распределенных по нормальному закону с параметрами μ_i, σ_i, подчиняется нормальному закону с параметрами $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b$ и $\sigma^2 = \sum a_i^2 \sigma_i^2$.

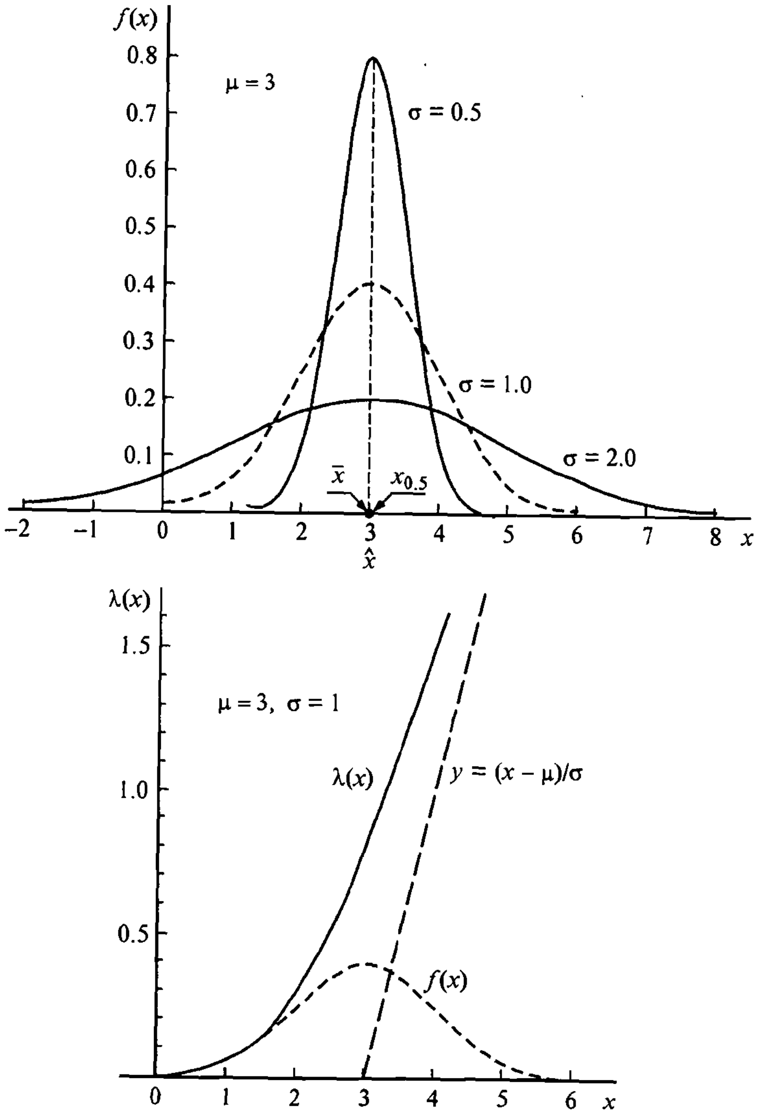


Рис. 3.1. Плотность вероятности и функция риска нормального распределения.

3. Сумма независимых нормальных случайных величин X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) подчиняется нормальному закону распределения. Справедливо и обратное утверждение: если сумма $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ подчиняется нормальному закону и случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимы, то каждая из этих случайных величин имеет нормальное распределение.

4. Сумма n независимых, одинаково распределенных нормальных случайных величин $X_i(\mu, \sigma)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $n\mu$ и стандартным отклонением $\sigma\sqrt{n}$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\mu, \sigma) \sim X\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right).$$

5. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимы и каждая из них распределена по нормальному закону с параметрами μ и σ, то их среднее арифметическое $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением $\sigma/\sqrt{n}$.

6. Пусть X_1, X_2 — независимые нормальные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, тогда случайная величина $X_1 X_2 / \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ имеет нормальное распределение.

Если к тому же $D(X_1) = D(X_2)$, то и случайная величина $(X_1^2 - X_2^2)/(X_1^2 + X_2^2)$ подчиняется нормальному закону распределения.

7. Сумма квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин имеет χ^2-распределение с n степенями свободы.

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^*, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^*)^2} \qquad \text{(ММП)};$$

$$\mu^* = \bar{x}^*, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^*)^2} \qquad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \sqrt{\frac{12}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i - \frac{n}{2}\right).$$

Здесь r_i — стандартные равномерные случайные числа; x_i — стандартные нормальные случайные числа. При $n = 12$ эта формула принимает особенно простой вид

$$x_i = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6.$$

С помощью формул

$$x_i = \sqrt{-2\ln r_i}\ \sin(2\pi r_{i+1}),$$

$$x_{i+1} = \sqrt{-2\ln r_i}\ \cos(2\pi r_{i+1})$$

из двух стандартных равномерных случайных чисел r_i, r_{i+1} можно получить два стандартных нормальных случайных числа x_i, x_{i+1}.

Для получения нормальных случайных чисел y_i с параметрами μ, σ используется формула

$$y_i = \mu + \sigma x_i,$$

где x_i — стандартные нормальные случайные числа.

Таблицы

1. [2, с. 112—118, табл. 1.1]. Даны значения функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения для $x = 0.000\ (0.001)\ 3.000$; $6S$ и для $x = 3.00\ (0.01)\ 5.00$; $5S$.

С. 119—135, табл. 1.2. Приведены значения плотности вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения и ее первых пяти производных для $x = 0.000\ (0.004)\ 3.00(0.02)\ 4.00\ (0.04)\ 5.0\ (0.1)\ 6.0$; $6D$.

С. 136, 137, табл. 1.3. Даны значения квантилей порядка p стандартного нормального распределения для $p = 0.500\ (0.001)\ 0.9700\ (0.0001)\ 0.9999$; $6D$.

С. 138, табл. 1.4. Приведены значения отношения Милса $1/\lambda(x)$ для $x = 0.00\ (0.01)\ 3.0\ (0.01)10$; $5D$.

2. [13, с. 361—368, табл. II]. Даны значения плотности вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения для $x = 0.000\ (0.001)\ 3.009$; $4D$.

С. 369—375, табл. III. Приведены значения функции Лапласа $\Phi_0(x)$ для $x = 0.000\ (0.001)\ 3.009$; $4D$.

В конце табл. II и III даны сгруппированные значения x, превосходящие 3.000, которым соответствуют одинаковые значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi_0(x)$; $4D$.

3. [3, с. 9, 10, табл. 1а]. Даны значения плотности вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения для $x = 0.00\ (0.01)\ 4.50\ (0.1)\ 4.8$; $5D$.

С. 11, 12, табл. 1б. Приведены значения функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения для $x = 0.00\ (0.01)\ 4.49$; $5D$.

4. [16, с. 91, табл. 1.1.2.6.1]. Приведены значения плотности вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения для $x = 0.00\ \ (0.01)\ 4.99$; $4S$.

С. 92, 93, табл. 1.1.2.6.2. Даны значения функции Лапласа $\Phi_0(x)$ для $x = 0.00\ (0.01)\ 2.2$; $4D$ и $x = 2.2\ (0.01)\ 5.00$; $7D$.

Очень подробные таблицы функции распределения и плотности вероятности стандартного нормального распределения приведены в [10], [12] и [14].

Во всех таблицах значения плотности вероятности $\varphi(x)$, функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения и функции Лапласа $\Phi_0(x)$ приводятся только для положительных значений аргумента x. При отрицательных значениях x следует пользоваться формулами $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ и $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.

Таблицы p-квантилей u_p стандартного нормального распределения составлены только для полуинтервала $0.5 \le p < 1$ (т. е. в таблицах даны только положительные значения квантилей u_p). При $0 < p < 0.5$ следует пользоваться формулой $u_p = -u_{1-p}$.

Техника вычислений

Плотность вероятности $f(x;\mu,\sigma)$, функция распределения $F(x;\mu,\sigma)$ и функция риска $\lambda(x;\mu,\sigma)$ нормального распределения с параметрами μ, σ связаны с плотностью вероятности $\varphi(x)$, функцией распределения $\Phi(x)$ и функцией риска $\lambda(x)$ стандартного нормального распределения соотношениями:

$$f(x;\ \mu,\ \sigma) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad F(x;\ \mu,\ \sigma) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$\lambda(x;\ \mu,\ \sigma) = \frac{1}{\sigma}\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Квантиль x_p нормального распределения с параметрами μ, σ вычисляется по формуле

$$x_p = \mu + \sigma u_p,$$

где u_p — p-квантиль стандартного нормального распределения.

Для вычисления на ЭВМ значений функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения можно использовать формулу

$$\Phi(x) = 1 - \varphi(x)\,(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) + \varepsilon(x),$$

где $t = 1/(1 + px)$, $p = 0.33267$, $a_1 = 0.4361836$, $a_2 = -0.1201676$, $a_3 = 0.9372980$, $|\varepsilon(x)| < 10^{-5}$.

Более точное приближение подобного типа обеспечивает формула

$$\Phi(x) = 1 - \varphi(x)(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \varepsilon(x),$$

где

$$t = 1/(1+px), \quad p = 0.2316419,$$
$$b_1 = 0.319381530, \quad b_2 = -0.356563782,$$
$$b_3 = 1.781477937, \quad b_4 = -1.821255978,$$
$$b_5 = 1.330274429, \quad |\varepsilon(x)| < 7.5 \cdot 10^{-8}.$$

Удобны для использования приближенные формулы, не требующие вычисления плотности вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения:

$$\Phi(x) = 1 - 0.5\,(1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4)^{-4} + \varepsilon(x),$$

где $c_1 = 0.196854$, $c_2 = 0.115194$, $c_3 = 0.000344$, $c_4 = 0.019527$, $|\varepsilon(x)| < 2.5 \cdot 10^{-4}$;

$$\Phi(x) = 1 - 0.5\left(1 - \sum_{i=1}^{6} d_i x^i\right)^{-16} + \varepsilon(x),$$

где

$$d_1 = 0.0498673470, \quad d_2 = 0.0211410061, \quad d_3 = 0.0032776263,$$
$$d_4 = 0.0000380036, \quad d_5 = 0.0000488906, \quad d_6 = 0.0000053830,$$
$$|\varepsilon(x)| < 1.5 \cdot 10^{-7}.$$

Для вычисления p-квантили u_p стандартного нормального распределения можно пользоваться приближенными формулами:

$$u_p = t - \frac{a_0 + a_1 t}{1 + b_1 t + b_2 t^2} + \varepsilon(p),$$

$$t = \sqrt{-2\ln(1-p)}, \quad a_0 = 2.30753, \quad a_1 = 0.27061, \; b_1 = 0.99229,$$
$$b_2 = 0.04481, \quad |\varepsilon(p)| < 3 \cdot 10^{-3};$$

$$u_p = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} + \varepsilon(p),$$

$$t = \sqrt{-2\ln(1-p)}, \quad c_0 = 2.515517, \quad c_1 = 0.802853, \quad c_2 = 0.010328,$$
$$|\varepsilon(p)| < 4.5 \cdot 10^{-4}, \quad d_1 = 1.432788, \quad d_2 = 0.189269, \quad d_3 = 0.001308.$$

Интересно разложение для u_p вида

$$u_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left\{-\ln[1 - 4(p-0.5)^2]\right\}^i}.$$

Первые четыре коэффициента этого разложения:

$$a_1 = \pi/2 = 1.57079633, \; a_2 = 0.37068870 \cdot 10^{-1}, \; a_3 = 0.83209445 \cdot 10^{-3},$$
$$a_4 = -0.23232430 \cdot 10^{-3}.$$

Использование первых четырех членов приведенного разложения обеспечивает необходимую для практики точность при $0.03 < p < 0.97$.

3.2. ДВУСТОРОННЕЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛАПЛАСА)

Плотность вероятности	$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\lvert x-\mu\rvert}, \quad -\infty < x < \infty,$ где μ — параметр положения ($-\infty < \mu < \infty$); λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$)
Функция распределения	$F(x) = \begin{cases} 0.5e^{\lambda(x-\mu)}, & x \le \mu; \\ 1 - 0.5e^{-\lambda(x-\mu)}, & x \ge \mu \end{cases}$
Функция риска	$\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{\lambda(x-\mu)}}{2 - e^{\lambda(x-\mu)}}, & x \le \mu; \\ \lambda, & x \ge \mu \end{cases}$
Характеристическая функция	$\chi_x(t) = \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} e^{i\mu t}$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \mu$
Медиана	$x_{0.5} = \mu$
Мода	$\hat{x} = \mu$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{2}{\lambda^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\sqrt{2}}{\lambda}$
Срединное отклонение	$E = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$
Асимметрия	Sk = 0
Эксцесс	Ex = 3
Начальные моменты	$m_2 = \dfrac{2 + (\lambda\mu)^2}{\lambda^2}, \quad m_3 = \dfrac{6\mu + \lambda^2\mu^3}{\lambda^2},$

$$m_4 = \frac{24 + 12(\lambda\mu)^2 + (\lambda\mu)^4}{\lambda^4},$$

$$m_s = \begin{cases} s!\left(\dfrac{\mu^s}{s!} + \dfrac{\mu^{s-2}}{(s-2)!\lambda^2} + \ldots + \dfrac{\mu}{\lambda^{s-1}}\right), & s \text{ — нечетное;} \\ s!\left(\dfrac{\mu^s}{s!} + \dfrac{\mu^{s-2}}{(s-2)!\lambda^2} + \ldots + \dfrac{1}{\lambda^s}\right), & s \text{ — четное} \end{cases}$$

Центральные моменты $\quad \mu_3 = 0,\ \mu_4 = \dfrac{24}{\lambda^4},\ \ \mu_s = \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ \dfrac{s!}{\lambda^s}, & s \text{ — четное} \end{cases}$.

p-квантиль $\quad x_p = \begin{cases} \mu + \dfrac{\ln 2p}{\lambda}, & 0 < p < 0.5; \\ \mu - \dfrac{\ln 2(1-p)}{\lambda}, & 0.5 < p < 1 \end{cases}$

Соотношения между распределениями

1. Распределение Лапласа с параметрами μ, λ совпадает с распределением случайной величины $\mu + X_1 - X_2$, где X_1 и X_2 — независимые случайные величины, каждая из которых подчиняется показательному закону распределения с одним и тем же параметром λ.

2. Пусть $f_{\text{Л}}(x)$ и $\chi_{\text{Л}}(t)$ — плотность вероятности и характеристическая функция случайной величины X, имеющей распределение Лапласа с параметрами $\mu = 0, \lambda = 1$; $f_{\text{К}}(y)$ и $\chi_{\text{К}}(t)$ — плотность вероятности и характеристическая функция случайной величины Y, распределенной по закону Коши с параметрами $\mu = 0, \lambda = 1$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\chi_{\text{Л}}(t) = \pi f_{\text{К}}(t) \quad \text{и} \quad f_{\text{Л}}(x) = \frac{1}{2}\chi_{\text{К}}(x).$$

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^*, \quad \lambda^* = \frac{\sqrt{2}}{S_x} \quad \text{(ММ).}$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_i}{r_{i+1}}.$$

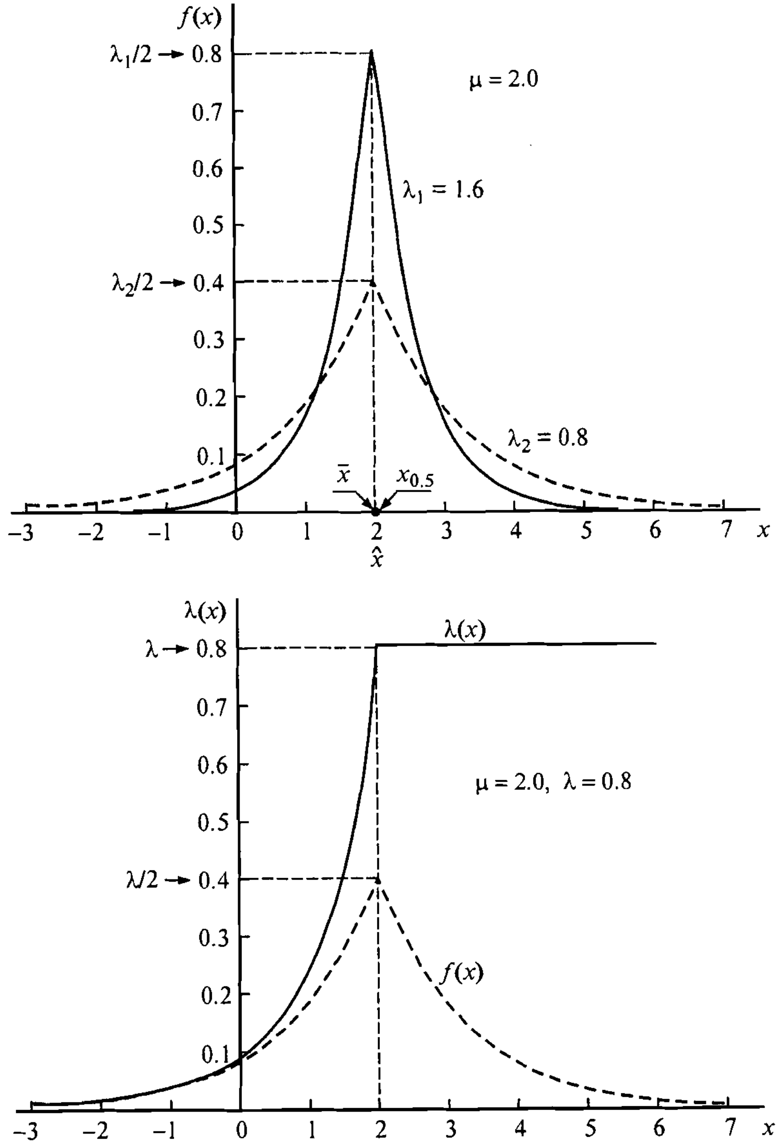


Рис. 3.2. Плотность вероятности и функция риска двухстороннего показательного распределения.

Плотность вероятности	$f(x) = \dfrac{\lambda}{\pi[\lambda^2 + (x-\mu)^2]}, \quad -\infty < x < \infty,$ где μ — параметр положения (медиана); $\lambda > 0$ — параметр масштаба (срединное отклонение)
Функция распределения	$F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x-\mu}{\lambda}$
Функция риска	$\lambda(x) = \dfrac{2}{\lambda\left[1+\left(\dfrac{x-\mu}{\lambda}\right)^2\right]\left[\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-\mu}{\lambda}\right)\right]}$
Характеристическая функция	$\chi_x(t) = \exp(i\mu t - \lambda\|t\|)$
Математическое ожидание	Нет
Медиана	$x_{0.5} = \mu$
Мода	$\hat{x} = \mu$
Срединное отклонение	$E = \lambda$
Моменты	Нет
p-квантиль	$x_p = \mu + \lambda \operatorname{tg}\dfrac{\pi(2p-1)}{2}$

Точками перегиба функции плотности $f(x)$ являются точки $x = \mu \pm \lambda/\sqrt{3}$.

Соотношения между распределениями

1. Отношение нормальной случайной величины X с параметрами $0, \sigma_1$ к нормальной случайной величине Y с параметрами $0, \sigma_2$ имеет распределение Коши с параметрами $\mu = 0$ и $\lambda = \sigma_1/\sigma_2$.

2. Сумма n независимых случайных величин, имеющих распределение Коши с параметрами μ_i, λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, имеет также распределение Коши с параметрами $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ и $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$. Справедливо и обратное утверждение: если сумма $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ подчиняется закону Коши и случай-

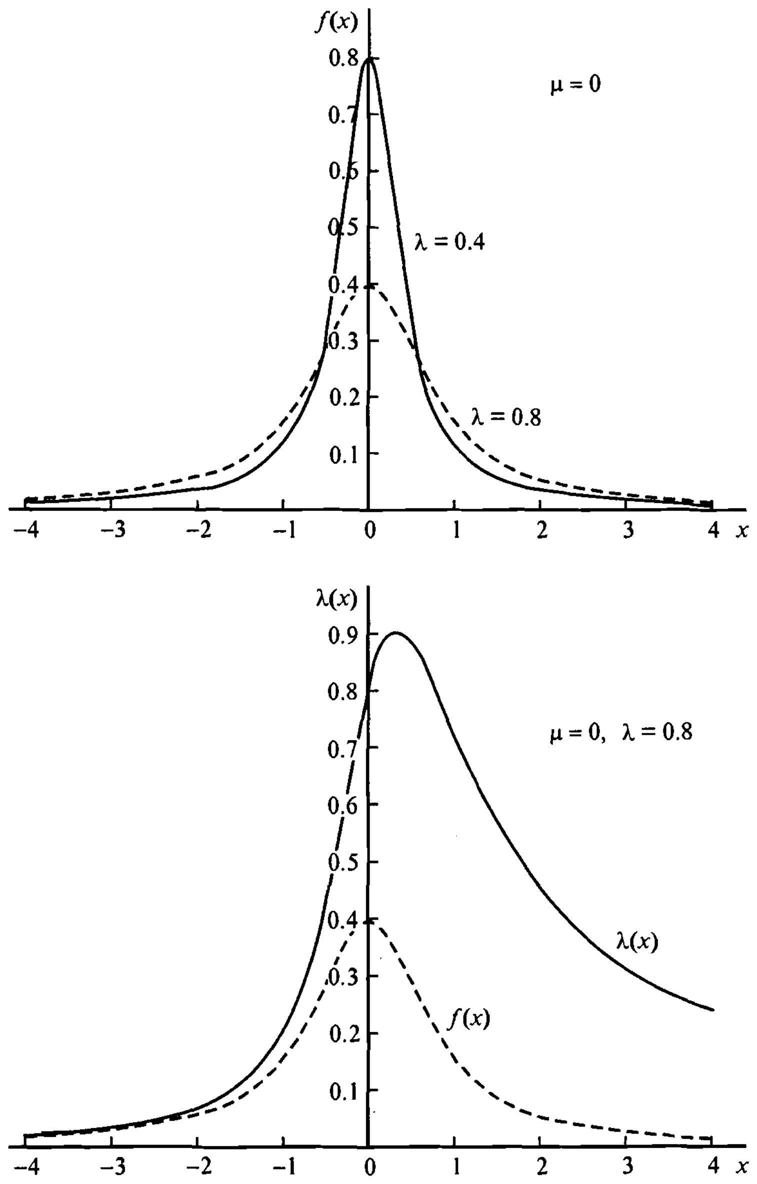


Рис. 3.3. Плотность вероятности и функция риска распределения Коши.

ные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то каждая из этих случайных величин имеет распределение Коши.

3. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и распределены по закону Коши с параметрами μ_i, λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то случайная величина $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ подчиняется закону Коши с параметрами $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b$ и $\lambda = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \lambda_i$. Иными словами, линейная функция случайных величин, распределенных по закону Коши, имеет распределение Коши.

4. Случайная величина $Y = 1/X$, обратная случайной величине X, распределенной по закону Коши с параметрами μ, λ, также имеет распределение Коши с параметрами $\mu' = \mu/(\mu^2 + \lambda^2)$ и $\lambda' = \lambda/(\mu^2 + \lambda^2)$.

5. Пусть $f_К(y)$ и $\chi_К(t)$ — плотность вероятности и характеристическая функция случайной величины X, имеющей распределение Коши с параметрами $\mu = 0$, $\lambda = 1$; $f_Л(x)$ и $\chi_Л(t)$ — плотность вероятности и характеристическая функция случайной величины Y, имеющей распределение Лапласа с параметрами $\mu = 0, \lambda = 1$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$f_К(x) = \frac{1}{\pi}\chi_Л(x) \quad \text{и} \quad \chi_К(t) = 2 f_Л(t).$$

6. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и имеют одно и то же распределение Коши, то их среднее арифметическое $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ имеет такое же распределение, как и каждая из случайных величин X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, с точки зрения оценивания параметра положения μ среднее арифметическое не более информативно, чем любая из случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

7. Если X и Y независимы и имеют одно и то же распределение Коши, то случайные величины $X + X$ и $X + Y$ имеют одно и то же распределение Коши. Это утверждение справедливо и для случайных величин: $aX + bY$, $(|a| + |b|)X$ и $(|a| + |b|)Y$.

8. Распределение Коши с параметрами $\mu = 0, \lambda = 1$ совпадает с распределением Стьюдента с параметром $\nu = 1$.

9. Случайная величина $X = \mu + \lambda \operatorname{tg}\Phi$, где Φ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, имеет распределение Коши с параметрами μ, λ (рис. 3.4).

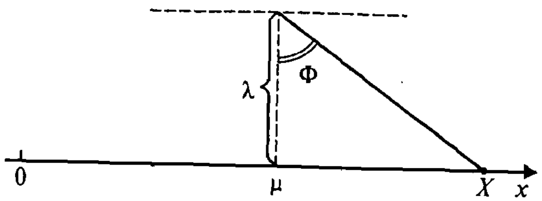


Рис. 3.4. Вероятностная схема, приводящая к распределению Коши.

Оценивание параметров

Оценки параметров μ, λ распределения Коши определяются с помощью выборочных квантилей x_p^*:

$$\mu^* = \frac{x_{p_2}^* \operatorname{ctg}(\pi p_1) - x_{p_1}^* \operatorname{ctg}(\pi p_2)}{\operatorname{ctg}(\pi p_1) - \operatorname{ctg}(\pi p_2)}; \quad \lambda^* = \frac{x_{p_2}^* - x_{p_1}^*}{\operatorname{ctg}(\pi p_1) - \operatorname{ctg}(\pi p_2)},$$

где $x_{p_i}^*$ — выборочная квантиль порядка p_i, $i = 1, 2$.

В «симметричном» случае, т. е. при $p_1 = p < 0.5$ и $p_2 = 1 - p$:

$$\mu^* = \frac{x_p^* + p_{1-p}^*}{2}, \quad \lambda^* = \frac{(x_{1-p}^* - x_p^*) \operatorname{tg}(\pi p)}{2}. \qquad (1)$$

При $p = 0.25$ формулы (1) принимают особенно простой и наглядный вид:

$$\mu^* = \frac{x_{0.25}^* + x_{0.75}^*}{2}, \quad \lambda^* = \frac{x_{0.75}^* - x_{0.25}^*}{2},$$

где $x_{0.25}^*$ и $x_{0.75}^*$ — выборочные оценки первой и третьей квартилей случайной величины X. В качестве этих оценок используются элементы упорядоченной выборки объема n с номерами $\lfloor (n+2)/4) \rfloor$ и $\lfloor (3n+2)/4 \rfloor$.

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \mu + \lambda \operatorname{tg}(2\pi r_i).$$

3.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ[1]

3.4.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ

Плотность вероятности	$f(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{x-\mu}{\lambda} - e^{(x-\mu)/\lambda}\right), \quad -\infty < x < \infty,$ где μ — параметр положения (мода); λ — параметр масштаба $(\lambda > 0)$
Функция распределения	$F(x) = 1 - \exp(-e^{(x-\mu)/\lambda})$
Функция риска	$\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} e^{(x-\mu)/\lambda}$

[1] В некоторых руководствах рассматриваемое распределение называется *распределением экстремального значения типа* 1, или *распределением экстремального значения Гумбеля*.

Характеристическая функция	$\chi_x(t) = \Gamma(1 + i\lambda t)\, e^{i\mu t} \quad (\lambda \lvert t \rvert < 1)$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \mu - \lambda\gamma$, где γ — постоянная Эйлера ($\gamma \approx 0.57722$)
Медиана	$x_{0.5} = \mu + \lambda \ln \ln 2 \approx \mu - 0.3665\lambda$
Мода	$\hat{x} = \mu$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{\pi^2}{6}\lambda^2 \approx 1.6449\lambda^2$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}\lambda \approx 1.2825\lambda$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = -1.1395$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = 2.4$
Центральные моменты	$\mu_3 = -2\zeta(3)\lambda^3 \approx -2.4041\lambda^3$, $\mu_4 = \dfrac{3\pi^4}{20}\lambda^4 \approx 14.6114\lambda^4$, где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана
p-квантиль	$x_p = \mu + \lambda \ln(-\ln(1-p))$

Соотношения между распределениями

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — одинаково распределенные, независимые случайные величины, распределение которых не ограничено слева и имеет вид экспоненты. Тогда при $n \to \infty$ распределение случайной величины $X = \min\limits_{1 \le i \le n}(X_i)$ сходится к распределению минимального значения.

2. Пусть $X_i(a, b)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — n независимых случайных величин, имеющих распределение минимального значения с параметром положения a и параметром масштаба b. Тогда минимальная из этих случайных величин тоже имеет распределение минимального значения с параметрами $\mu = a - b\ln n$ и $\lambda = b$, т. е.

$$\min_{1 \le i \le n}[X_i(a, b)] \sim X(a - b\ln n,\ b).$$

3. Если случайная величина Y имеет распределение Вейбулла—Гнеденко с параметром масштаба $a = 1$ и параметром формы c, то случайная величина $X = \ln Y$ имеет распределение минимального значения с параметрами $\mu = 0$, $\lambda = 1/c$.

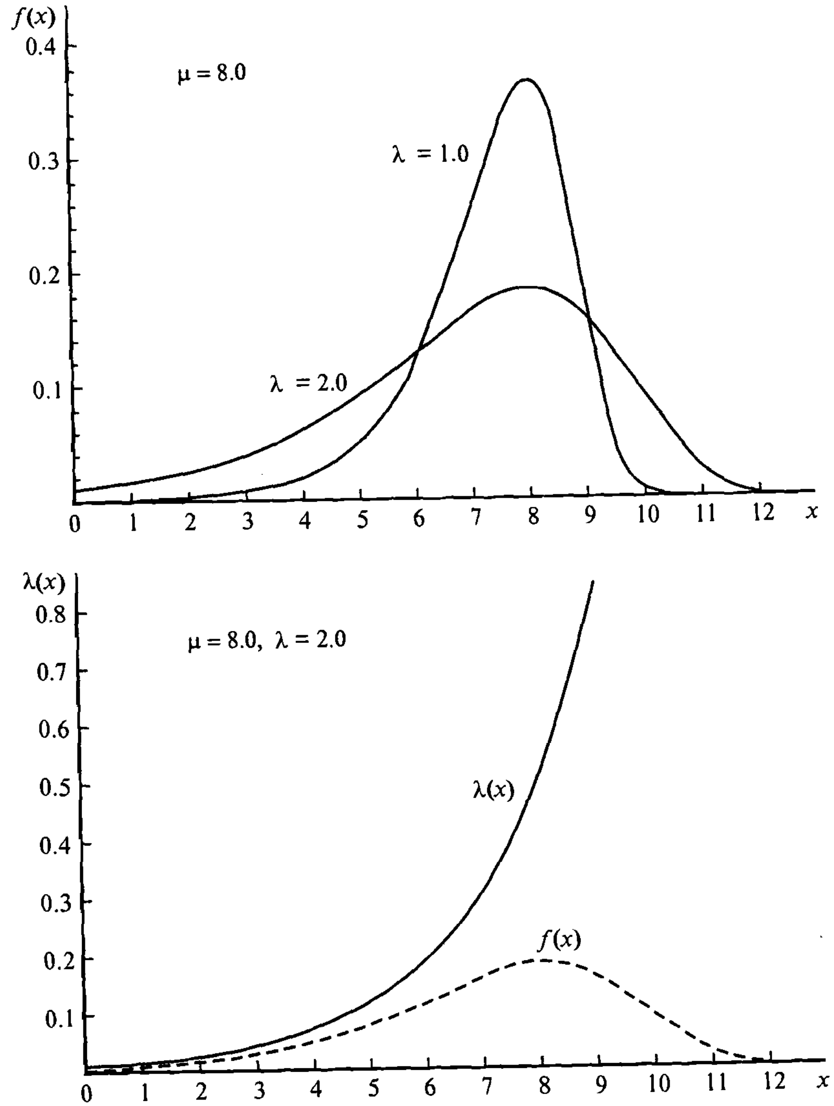


Рис. 3.5. Плотность вероятности и функция риска распределения минимального значения.

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^* + 0.4501 S_x, \quad \lambda^* = 0.7797 S_x \quad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \mu + \lambda \ln(-\ln r_i).$$

3.4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ

Плотность вероятности	$f(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\lambda} - e^{-(x-\mu)/\lambda}\right)$, $-\infty < x < \infty$, где μ — параметр положения (мода); λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$)
Функция распределения	$F(x) = \exp\left(-e^{-(x-\mu)/\lambda}\right)$
Функция риска	$\lambda(x) = \dfrac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{\lambda}\right)}{\lambda\left[\exp\left(e^{-(x-\mu)/\lambda}\right)-1\right]}$
Характеристическая функция	$\chi_x(t) = \Gamma(1 - i\lambda t)e^{i\mu t} \quad (\lambda\lvert t\rvert < 1)$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \mu + \lambda\gamma$, где γ — постоянная Эйлера ($\gamma \approx 0.57722$)
Медиана	$x_{0.5} = \mu - \lambda \ln \ln 2 \approx \mu + 0.3665\lambda$
Мода	$\hat{x} = \mu$
Дисперсия	$D_x = \frac{\pi^2}{6}\lambda^2 \approx 1.6449\lambda^2$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\lambda \approx 1.2825\lambda$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = 1.1395$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = 2.4$

Центральные моменты	$\mu_3 = 2\zeta(3)\lambda^3 \approx 2.4041\lambda^3$, $\mu_4 = \frac{3\pi^4}{20}\lambda^4 \approx 14.6114\lambda^4$, где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана
p-квантиль	$x_p = \mu - \lambda \ln(-\ln p)$

Точками перегиба функции плотности $f(x)$ являются точки $x = \mu \mp \lambda \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \approx \mu \mp 0.9624\lambda.$

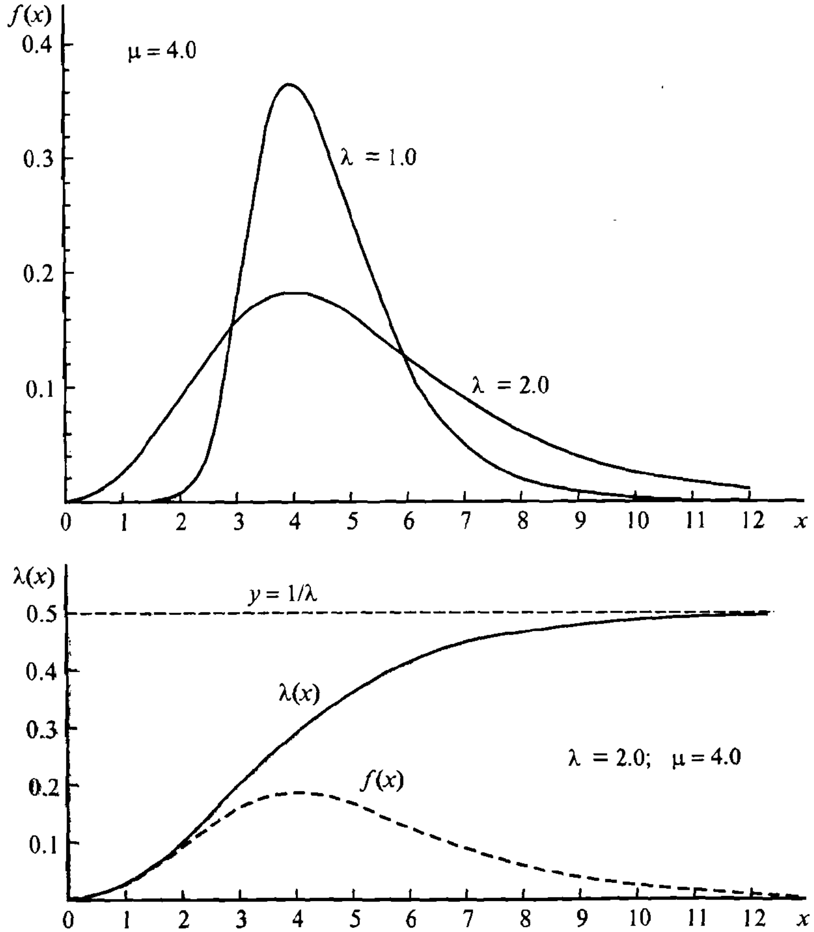


Рис. 3.6. Плотность вероятности и функция риска распределения максимального значения.

Соотношения между распределениями

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — одинаково распределенные, независимые случайные величины, распределение которых не ограничено справа и имеет вид экспоненты. Тогда при $n \to \infty$ распределение случайной величины $X = \max_{1 \le i \le n}(X_i)$ сходится к распределению максимального значения.

2. Пусть $X_i(a, b)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ — n независимых случайных величин, имеющих распределение максимального значения с параметром положения a и параметром масштаба b. Тогда максимальная из этих случайных величин тоже имеет распределение максимального значения с параметрами $\mu = a + b\ln n$ и $\lambda = b$, т. е.

$$\max_{1 \le i \le n}[X_i(a,b)] \sim X(a + b\ln n, b).$$

3. Если случайная величина X имеет распределение максимального значения с параметрами μ, λ, то случайная величина $Y = \exp\left(-\dfrac{X-\mu}{\lambda}\right)$ подчиняется показательному закону распределения с параметром масштаба $\lambda = 1$.

4. Если случайная величина X имеет распределение максимального значения с параметром положения $\mu = 0$ и параметром масштаба λ, то случайная величина $Y = X + \lambda\ln\tilde{\mu}$ имеет двойное показательное распределение с параметром положения $\tilde{\mu}$ и параметром масштаба $\tilde{\lambda} = 1/\lambda$.

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^* - 0.4501 S_x, \quad \lambda^* = 0.7797 S_x \ \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \mu - \lambda\ln(-\ln r_i).$$

3.5. ДВОЙНОЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности	$f(x) = \lambda\mu\exp(-\lambda\mu - \mu e^{-\lambda x}), \ -\infty < x < \infty$, где μ — параметр положения ($\mu > 0$); λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$)
Функция распределения	$F(x) = \exp(-\mu e^{-\lambda x})$

Функция риска	$\lambda(x) = \dfrac{\lambda\mu\exp(-\lambda x)}{\exp(\mu e^{-\lambda x}) - 1}$
Характеристическая функция	$\chi_x(t) = \mu^{it/\lambda}\Gamma\left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \dfrac{1}{\lambda}(\ln\mu + \gamma) \approx \dfrac{1}{\lambda}(\ln\mu + 0.5772)$, где γ — постоянная Эйлера
Медиана	$x_{0.5} = \dfrac{1}{\lambda}(\ln\mu - \ln\ln 2) \approx \dfrac{1}{\lambda}(\ln\mu - 0.3665)$
Мода	$\hat{x} = \dfrac{\ln\mu}{\lambda}$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{\pi^2}{6\lambda^2} \approx \dfrac{1.6449}{\lambda^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\pi}{\lambda\sqrt{6}} \approx \dfrac{1.2825}{\lambda}$
Асимметрия	$\text{Sk} = 1.1395$
Эксцесс	$\text{Ex} = 2.4$
Центральные моменты	$\mu_3 = \dfrac{2\zeta(3)}{\lambda^3} \approx \dfrac{2.4041}{\lambda^3}$, $\mu_4 = \dfrac{3\pi^4}{20\lambda^4} \approx \dfrac{14.6114}{\lambda^4}$
p-квантиль	$x_p = \dfrac{\ln\mu - \ln(-\ln p)}{\lambda}$

Соотношения между распределениями

1. Если случайная величина X имеет двойное показательное распределение с параметрами μ, λ, то случайная величина $Y = X - (\ln\mu/\lambda)$ имеет распределение максимального значения с параметром положения 0 и параметром масштаба $1/\lambda$.

2. Если случайная величина Y имеет распределение Вейбулла—Гнеденко с параметром масштаба b и параметром формы c, то случайная величина $X = -\ln Y$ имеет двойное показательное распределение с параметром положения $\mu = 1/b^c$ и параметром масштаба $\lambda = c$.

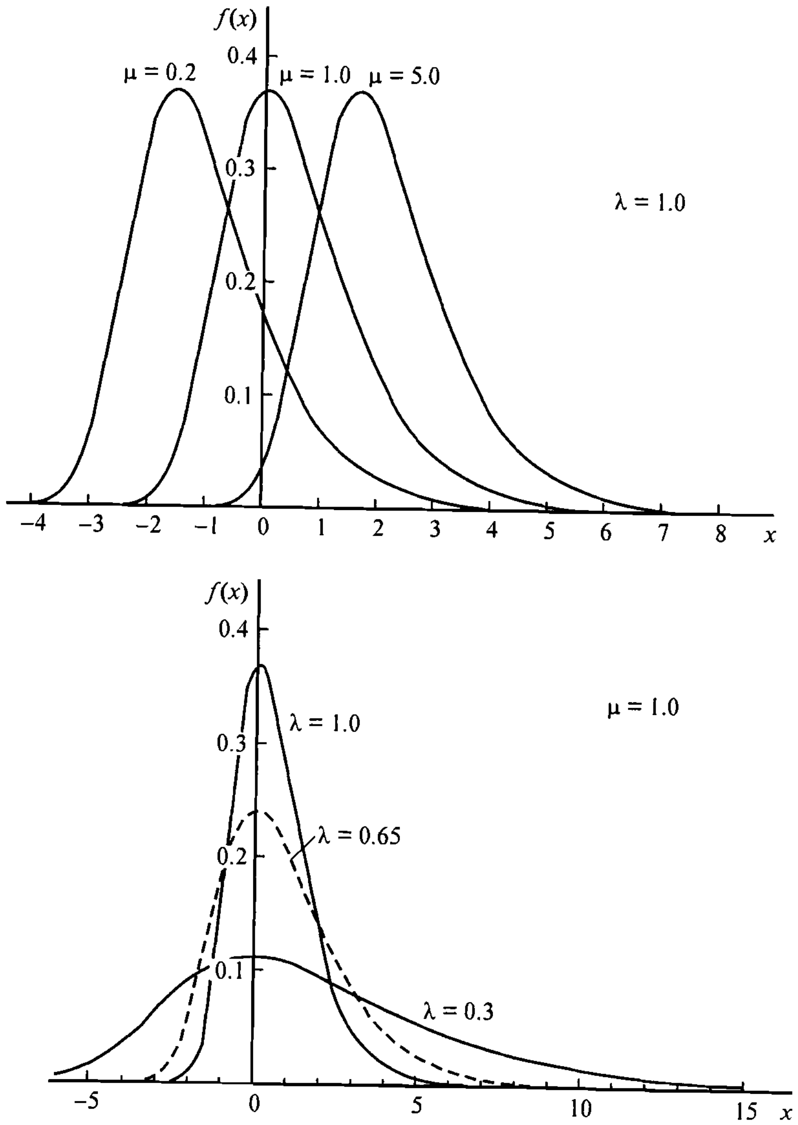


Рис. 3.7. Плотность вероятности двойного показательного распределения.

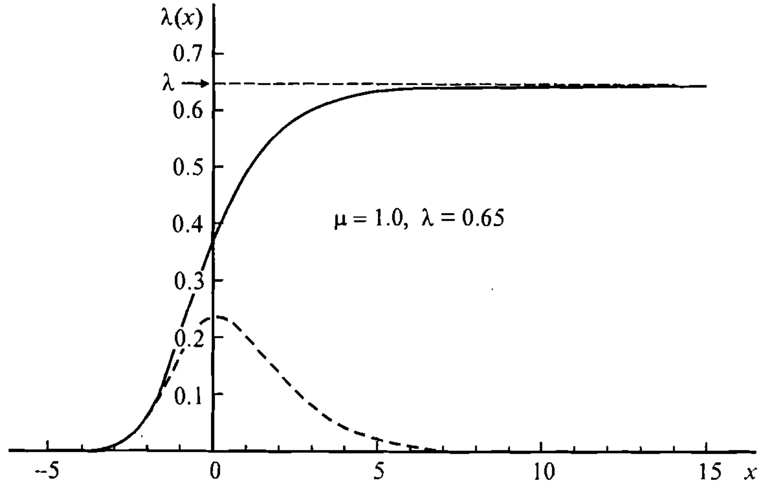


Рис. 3.8. Функция риска двойного показательного распределения.

Оценивание параметров

$$\lambda^* = \frac{\pi}{S_x\sqrt{6}} \approx \frac{1.28255}{S_x},$$

$$\mu^* = \exp\left(\frac{\pi}{v_x^*\sqrt{6}} - \gamma\right) \approx 0.56146 \exp\left(1.28255/v_x^*\right) \quad \text{(MM)},$$

где γ — постоянная Эйлера.

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \frac{1}{\lambda}[\ln\mu - \ln(-\ln r_i)].$$

Таблицы

[6, с. 307—309, табл. 9.12]. Даны значения квантилей «стандартизированного» двойного показательного распределения (двойное показательное распределение с параметрами $\mu = 1$, $\lambda = 1$) для $p = 0.0001$ (0.0001) 0.0010 (0.0010) 0.0100 (0.0050) 0.100 (0.010) 0.90 (0.005) 0.990 (0.001) 0.9990 (0.0001) 0.9999; 0.99995; 0.99999; 0.999995; 0.999999; 0.9999995; 0.9999999; 0.99999995; 4*D*.

Квантиль y_p порядка p двойного показательного распределения с параметрами μ, λ вычисляется с помощью формулы $y_p = (\ln\mu + x_p)/\lambda$, где x_p — p-квантиль «стандартизированного» двойного показательного распределения.

3.6. ЛОГИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)}{\lambda\left[1+\exp\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)\right]^2} = \frac{1}{4\lambda \operatorname{ch}^2\left(\frac{x-\mu}{2\lambda}\right)},$$

$$-\infty < x < \infty,$$

где μ — параметр положения ($-\infty < \mu < \infty$); λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$)

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\lambda}\right)} = \frac{1}{2}\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{x-\mu}{2\lambda}\right)\right]$$

Функция риска

$$\lambda(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)}{\lambda\left[1+\exp\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)\right]}$$

Характеристическая функция $\quad \chi(t) = \frac{\pi\lambda t}{\operatorname{sh}(\pi\lambda t)} e^{i\mu t}$

Математическое ожидание $\quad \bar{x} = \mu$

Медиана $\quad x_{0.5} = \mu$

Мода $\quad \hat{x} = \mu$

Дисперсия $\quad D_x = \frac{(\lambda\pi)^2}{3} \approx 3.2899\lambda^2$

Стандартное отклонение $\quad \sigma_x = \frac{\lambda\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.8138\lambda$

Срединное отклонение $\quad E = \lambda \ln 3 \approx 1.0986\,\lambda$

Асимметрия $\quad \mathrm{Sk} = 0$

Эксцесс $\quad \mathrm{Ex} = 1.2$

Начальные моменты $\quad m_2 = \frac{(\lambda\pi)^2}{3} + \mu^2, \quad m_3 = \mu(\lambda^2\pi^2 + \mu^2),$

$$m_4 = \frac{7(\lambda\pi)^4}{15} + \mu^2(2\lambda^2\pi^2 + \mu^2)$$

Центральные моменты $\quad \mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{7(\lambda\pi)^4}{15} \approx 45.4576\,\lambda^4,$

$$\mu_s = \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ (\lambda\pi)^s(2^s-2)|B_s|, & s \text{ — четное,} \end{cases}$$

где B_s — числа Бернулли ($B_6 = 1/42$; $B_8 = -1/30$; $B_{10} = 5/66$)

p-квантиль $\quad x_p = \mu - \lambda \ln\frac{1-p}{p}$

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^*, \quad \lambda^* = \frac{S_x\sqrt{3}}{\pi} \approx 0.5513 S_x \quad \text{(ММ)}.$$

Оценки максимального правдоподобия удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda^* + \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \exp(-x_i/\lambda^*)}{1+\exp(-(x_i-\mu^*)/\lambda^*)}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\exp(-x_i/\lambda^*)}{1+\exp(-(x_i-\mu^*)/\lambda^*)}} = \bar{x}^*,$$

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\exp(-x_i/\lambda^*)}{1+\exp(-(x_i-\mu^*)/\lambda^*)} = \exp\left(-\frac{\mu^*}{\lambda^*}\right).$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \mu - \lambda \ln\frac{1-r_i}{r_i}.$$

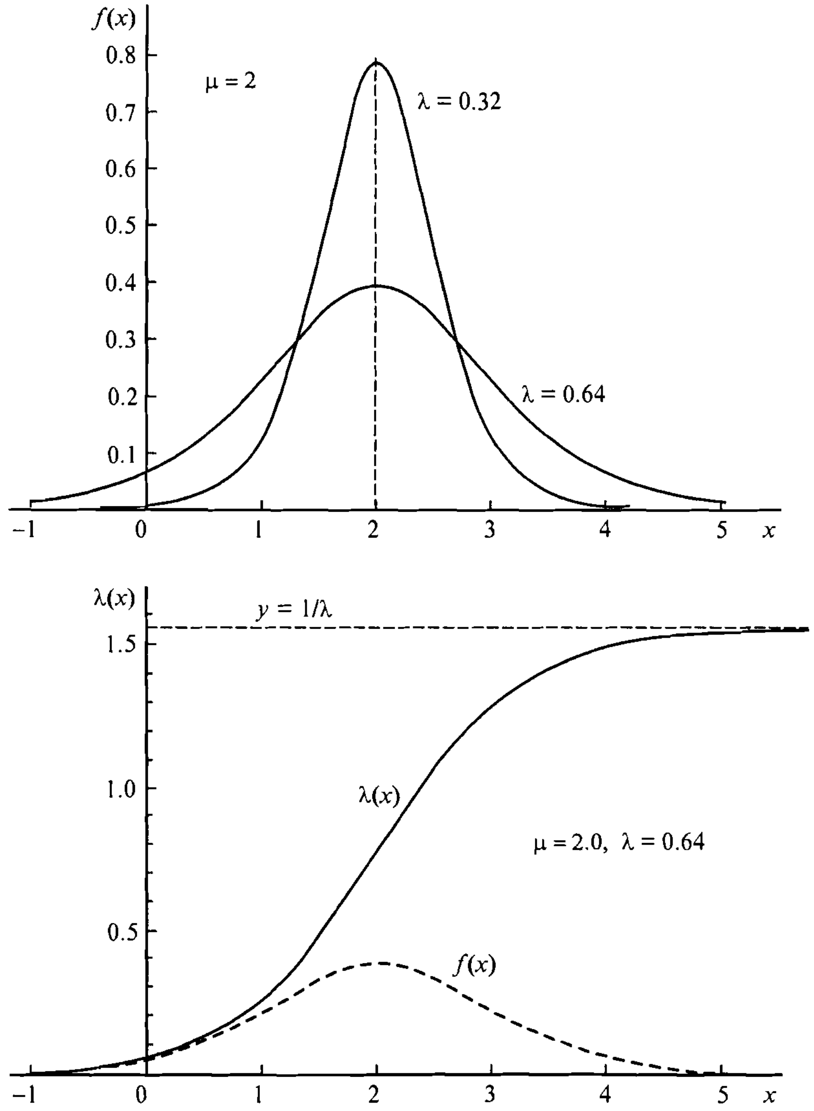


Рис. 3.9. Плотность вероятности и функция риска логистического распределения.

Таблицы

[6, с. 254—256, табл. 9.1]. Приведены значения функции распределения $G(t)$ и плотности вероятности $g(t)$ стандартного логистического распределения (логистическое распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией) для $t = 0.00\ (0.01)\ 1.00\ (0.05)\ 3.00$; $4D$.

[6, с. 257, 258, табл. 9.2]. Даны значения p-квантилей стандартного логистического распределения для $p = 0.5\,(0.01)\,0.900\ (0.005)\,0.990\,(0.001)\,0.999\,(0.0001)\,0.9999$; $4D$ и для $p = 0.99995 \div 0.999999999$; 5—$9D$.

Техника вычислений

Функция распределения $F(x)$ и плотность вероятности $f(x)$ логистического распределения с параметрами λ, μ связаны с функцией распределения $G(t)$ и плотностью вероятности $g(t)$ стандартного логистического распределения соотношениями

$$F(x) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma}\, g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

3.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАМПЕРНАУНА

Плотность вероятности	$f(x) = \dfrac{\alpha}{\pi \operatorname{ch} \alpha (x-\mu)}, \quad -\infty < x < \infty,$ где μ — параметр положения (математическое ожидание); α — параметр масштаба ($\alpha > 0$)
Функция распределения	$F(x) = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^{\alpha(x-\mu)}$
Характеристическая функция	$\chi(t) = \dfrac{\exp(i\mu t)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi t}{2\alpha}\right)}$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \mu$
Медиана	$x_{0.5} = \mu$
Мода	$\hat{x} = \mu$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{\pi^2}{4\alpha^2} \approx \dfrac{2.4674}{\alpha^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\pi}{2\alpha} \approx \dfrac{1.5708}{\alpha}$
Срединное отклонение	$E = \dfrac{\ln \operatorname{tg}(3\pi/8)}{\alpha} \approx \dfrac{0.8814}{\alpha}$

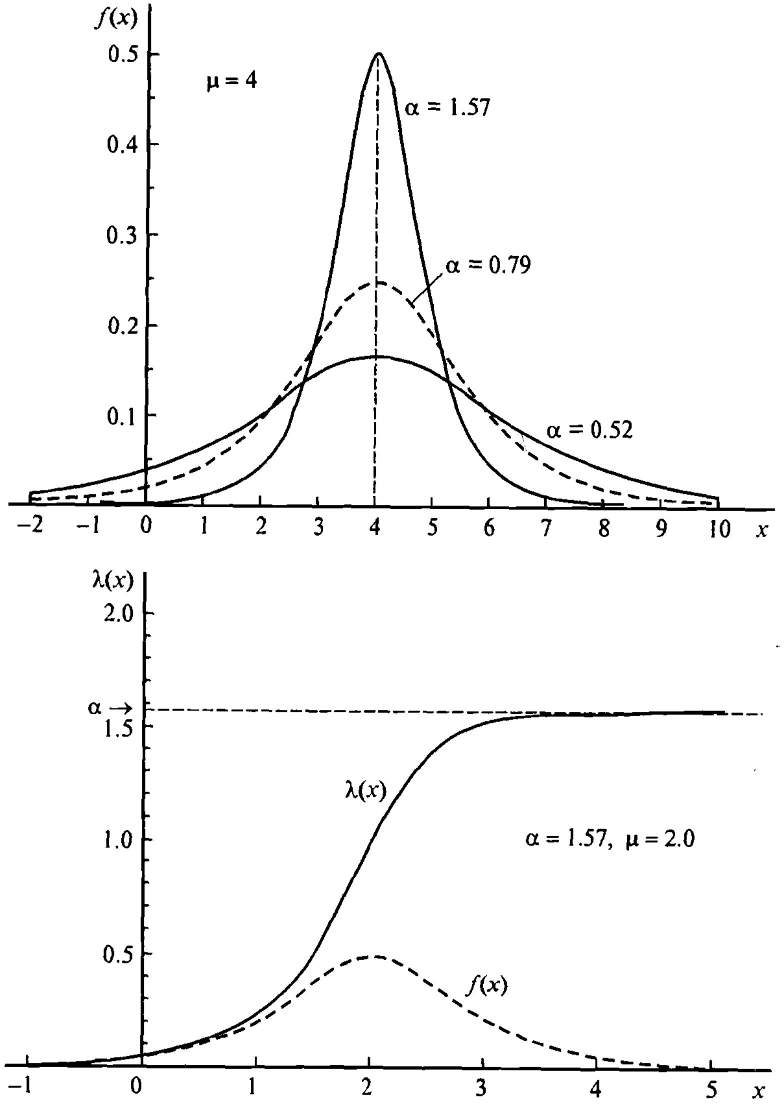


Рис. 3.10. Плотность вероятности и функция риска распределения Чампернауна.

Асимметрия	$\mathrm{Sk} = 0$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = 2$
Начальные моменты	$m_2 = \left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)^2 + \mu^2, \ m_3 = 3\mu\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)^2 + \mu^3,$
	$m_4 = 5\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)^4 + 6\mu^2\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)^2 + \mu^4$
Центральные моменты	$\mu_3 = 0, \ \ \mu_4 = 5\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)^4,$
	$\mu_s = \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ \left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)^s \lvert E_s \rvert, & s \text{ — четное,} \end{cases}$
	где E_s — числа Эйлера ($E_6 = -61$, $E_8 = 1385$, $E_{10} = -50521$)
p-квантиль	$x_p = \mu + \dfrac{1}{\alpha}\ln \operatorname{tg}\dfrac{\pi p}{2}$

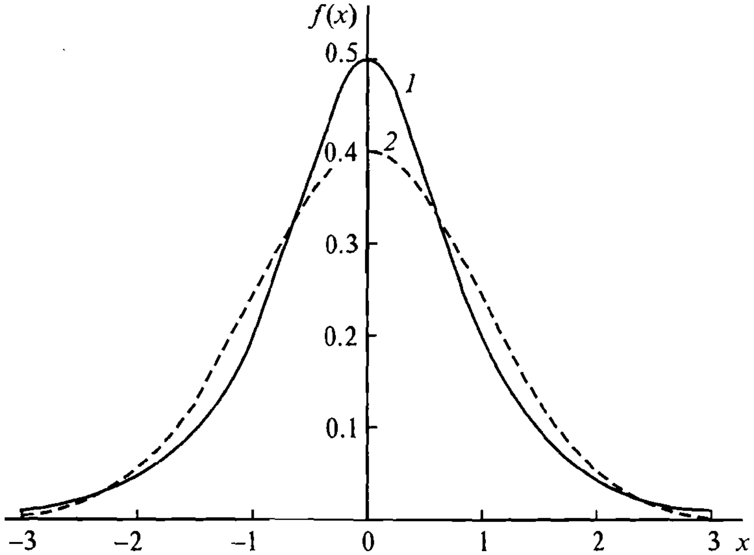


Рис. 3.11. Плотность вероятности стандартного распределения Чампернауна (*1*) и стандартного нормального распределения (*2*).

Параметры распределения Чампернауна: $\bar{x} = 0$, $\sigma_x = 1$, $\alpha = \pi/2$, $\mu = 0$.

Оценивание параметров

$$\mu^{*} = \bar{x}^{*}, \quad \alpha^{*} = \frac{\pi}{2S_x} \approx \frac{1.5708}{S_x} \quad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \mu + \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi r_i}{2}.$$

3.8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ШАРЛЬЕ (РЯД ГРАМА—ШАРЛЬЕ ТИПА А)

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\left[\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{\gamma_1}{6}\varphi^{(3)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\gamma_2}{24}\varphi^{(4)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{\gamma_1}{6}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3 - 3\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma_2}{24}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^4 - 6\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + 3\right], \qquad (1)$$

где μ — параметр положения, математическое ожидание; σ — параметр масштаба, стандартное отклонение; γ_1 — параметр формы, асимметрия; γ_2 — параметр формы, эксцесс; $\varphi(x)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $\varphi^{(s)}(x)$ — s-я производная плотности вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения ($s = 3, 4$)

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \times$$
$$\times \left\{\frac{\gamma_1}{6}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right] + \frac{\gamma_2}{24}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3 - 3\frac{x-\mu}{\sigma}\right]\right\}$$

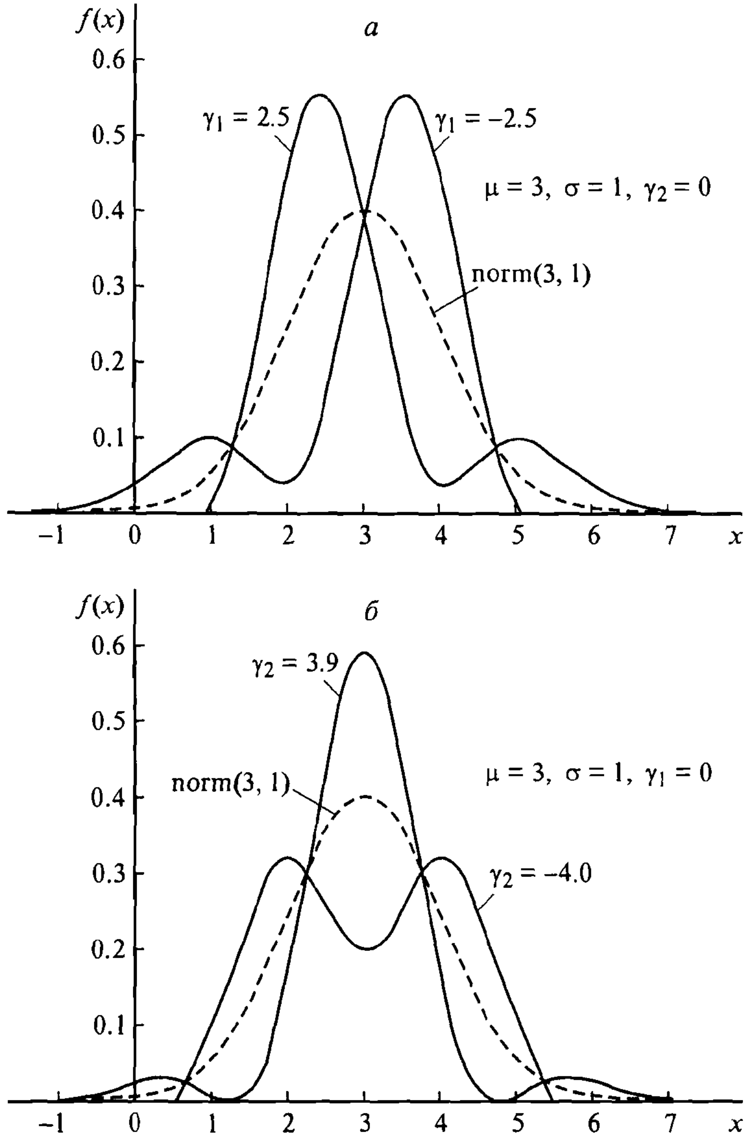


Рис. 3.12. Плотность вероятности распределения Шарлье.

Штриховая кривая — нормальное распределение с параметрами: $\bar{x} = 3$, $\sigma = 1$.

Характеристическая функция

$$\chi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{(\sigma t)^2}{2}\right)\left[1 - \frac{i\gamma_1}{6}(\sigma t)^3 + \frac{\gamma_2}{24}(\sigma t)^4\right]$$

Математическое ожидание $\bar{x} = \mu$

Дисперсия $D_x = \sigma^2$

Стандартное отклонение $\sigma_x = \sigma$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = \gamma_1$

Эксцесс $\mathrm{Ex} = \gamma_2$

Центральные моменты $\mu_3 = \gamma_1\sigma^3, \quad \mu_4 = (\gamma_2 + 3)\sigma^4,$

$$\mu_s = \begin{cases} \dfrac{2^{(s-3)/2}}{3\sqrt{\pi}}\sigma^s s(s-1)\gamma_1\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right), & s \text{ — нечетное;} \\ \dfrac{2^{s/2}}{\sqrt{\pi}}\sigma^s\left[1 + \dfrac{1}{24}s(s-2)\gamma_2\right]\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right), & s \text{ — четное} \end{cases}$$

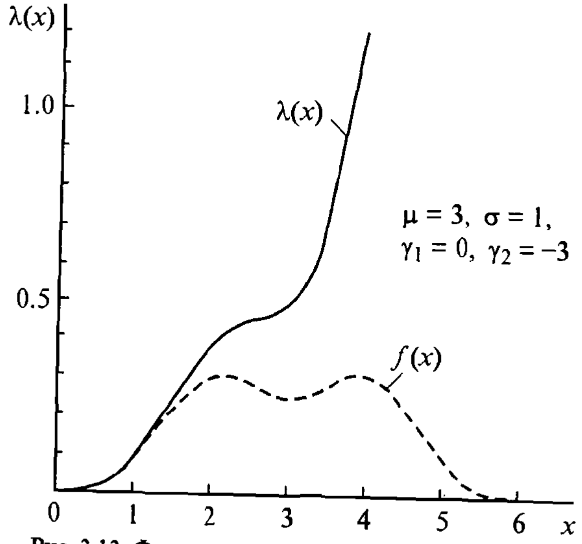


Рис. 3.13. Функция риска распределения Шарлье.

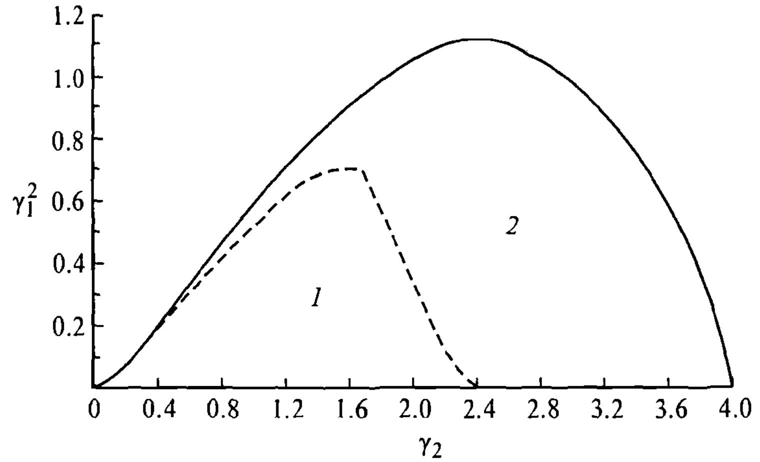


Рис. 3.14. Области одновершинных кривых распределения Шарлье (*1*) и неотрицательных ординат функции плотности $f(x)$ этого распределения (*2*).

Примечания: 1. Распределение Шарлье используется для сглаживания эмпирических распределений с умеренными асимметрией и эксцессом.

2. В некоторых случаях (при «неблагоприятном» сочетании значений параметров γ_1 и γ_2) формула (1) дает отрицательные значения плотности вероятности $f(x)$ на «хвостах» распределения. Это обусловлено тем, что данная формула содержит только три первых члена разложения Грама—Шарлье, т. е. по существу является приближенной формулой. На рис. 3.14 приведена область значений параметров γ_1 и γ_2, при которых плотность вероятности распределения Шарлье неотрицательна. На этом же рисунке указана область значений параметров γ_1, γ_2, при которых кривая распределения $f(x)$ имеет только одну вершину (одномодальна).

Б. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

3.9. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ (ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$

где λ — параметр масштаба, интенсивность случайной величины ($\lambda > 0$)

Функция распределения	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
Функция риска	$\lambda(x) = \lambda$
Характеристическая функция	$\chi(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \dfrac{1}{\lambda}$
Медиана	$x_{0.5} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx \dfrac{0.6931}{\lambda}$
Мода	$\hat{x} = 0$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{1}{\lambda^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{1}{\lambda}$
Коэффициент вариации	$v_x = 1$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = 2$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = 6$
Начальные моменты	$m_2 = \dfrac{2}{\lambda^2},\ m_3 = \dfrac{6}{\lambda^3},\ m_4 = \dfrac{24}{\lambda^4},\ m_s = \dfrac{s!}{\lambda^s}$
Центральные моменты	$\mu_3 = \dfrac{2}{\lambda^3},\ \mu_4 = \dfrac{9}{\lambda^4},\ \mu_s = \dfrac{s!}{\lambda^s}\sum_{k=0}^{s}\dfrac{(-1)^k}{k!}$
p-квантиль	$x_p = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-p)$

Примечание. Показательное распределение — единственное непрерывное распределение, обладающее свойством *отсутствия последействия*, т. е. для любых $x_0 > 0$ и $x > 0$ выполняется условие $P(X - x_0 < x / X \geq x_0) = P(X < x)$. Свойство отсутствия последействия часто называют *марковским свойством*.

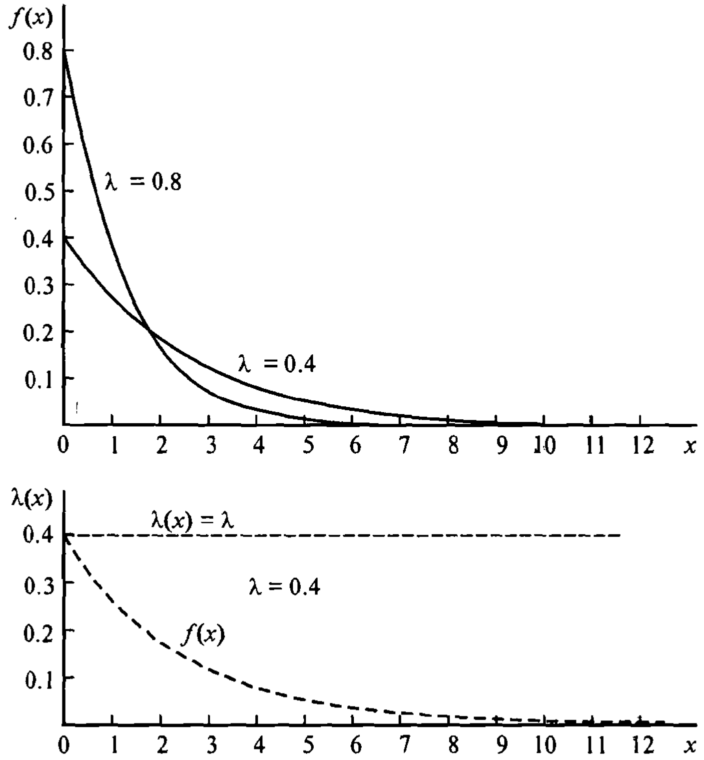


Рис. 3.15. Плотность вероятности и функция риска показательного распределения.

Соотношения между распределениями

1. Показательное распределение тесно связано с распределением Эрланга (см. п. 2.2 и 3.11).
2. Показательное распределение является частным случаем гамма-распределения и распределения Вейбулла—Гнеденко (см. п. 3.10 и 3.12).
3. Если случайная величина $X = (Y/a)^c$ подчиняется показательному распределению с параметром $\lambda = 1$, то случайная величина Y имеет распределение Вейбулла—Гнеденко с параметром масштаба a и параметром формы c.
4. Если случайная величина $X = e^{-Y}$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1/a$, то случайная величина Y имеет распределение максимального значения с параметром положения равным нулю и параметром масштаба равным a.

Оценивание параметров

$$\lambda^* = 1/\bar{x}^* \quad (\text{ММП, ММ}).$$

В случае смещенного показательного распределения, когда $f(y) = \lambda e^{-\lambda(y-c)}$, $y > c$:

$$c^* = \min(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \lambda^* = \frac{1}{\bar{y}^* - c^*} \quad (\text{ММП});$$

$$c^* = \bar{y}^* - S_y, \qquad \lambda^* = 1/S_y \quad (\text{ММ}).$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i.$$

3.10. ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

3.10.1. КЛАССИЧЕСКОЕ (ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ) ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$, $x > 0$, где λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$); α — параметр формы ($\alpha > 0$)
Функция распределения	$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda x} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = I(\lambda x; \alpha)$, где $I(x;\alpha)$ — отношение неполной гамма-функции
Характеристическая функция	$\chi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\alpha$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \frac{\alpha}{\lambda}$
Мода	$\hat{x} = \frac{\alpha - 1}{\lambda}$, $\alpha \ge 1$
Дисперсия	$D_x = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$

Коэффициент вариации	$v_x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \frac{6}{\alpha}$
Начальные моменты	$m_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$, $m_3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3}$, $m_4 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\lambda^4}$, $m_s = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)}{\lambda^s}$
Центральные моменты	$\mu_3 = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$, $\mu_4 = \frac{3\alpha(\alpha+2)}{\lambda^4}$

Квантиль x_p гамма-распределения вычисляется путем решения уравнения $I(\lambda x_p; \alpha) = p$, где p — заданный порядок квантили ($0 < p < 1$).

Точками перегиба функции плотности $f(x)$ являются точки $x = (\alpha - 1 \mp \sqrt{\alpha - 1})/\lambda$ (при условии, что x — действительное положительное число).

Соотношения между распределениями

1. При $\alpha = 1$ гамма-распределение совпадает с показательным распределением с параметром масштаба λ.
2. Если случайная величина X имеет гамма-распределение с параметром масштаба 1 и параметром формы α, то случайная величина $Y = X/\lambda$ имеет гамма-распределение с параметрами λ, α.
3. При $\alpha = m$, где m — целое положительное число, гамма-распределение называется *распределением Эрланга порядка m* (см. п. 3.11).
4. Сумма любого конечного числа m независимых случайных величин с одним и тем же параметром масштаба λ и параметрами формы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ имеет гамма-распределение с параметром масштаба λ и параметром формы $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$. Иными словами, гамма-распределение устойчиво относительно операции композиции законов распределения.

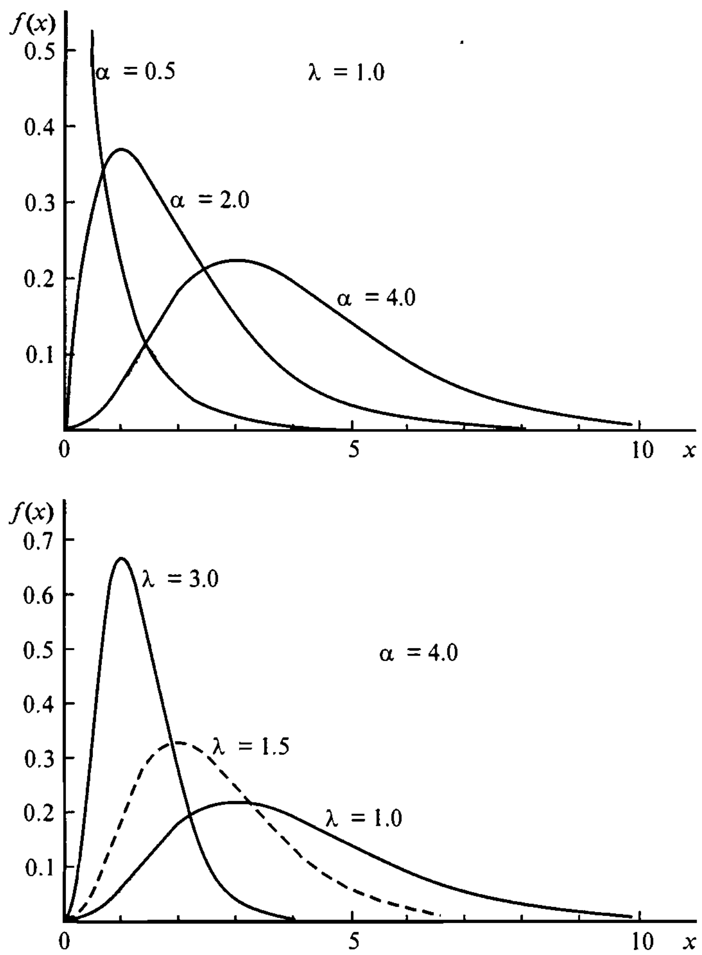


Рис. 3.16. Плотность вероятности гамма-распределения.

5. При $\alpha = n/2$, где $n \geq 2$ — целое и $\lambda = 1/2$, гамма-распределение совпадает с χ^2-распределением с n степенями свободы (см. п. 3.31).

6. В том случае, когда случайная величина X имеет гамма-распределение с «полуцелым» параметром формы $\alpha = n/2$ и произвольным параметром масштаба λ, случайная величина $Y = 2\lambda X$ имеет χ^2-распределение Пирсона с $n = 2\alpha$ степенями свободы. При этом справедливо соотношение $F_x(x; n/2, \lambda) = F(2\lambda x; 2a)$, где $F(y; n) = P\{\chi_n^2 < y\}$ — функция распределения χ^2-распределения.

7. Если независимые случайные величины X и Y имеют гамма-распределение с параметрами $\lambda = 1, \alpha = u$ и $\lambda = 1$, $\alpha = v$ соответственно, то случайная величина $Z = X/(X+Y)$ имеет

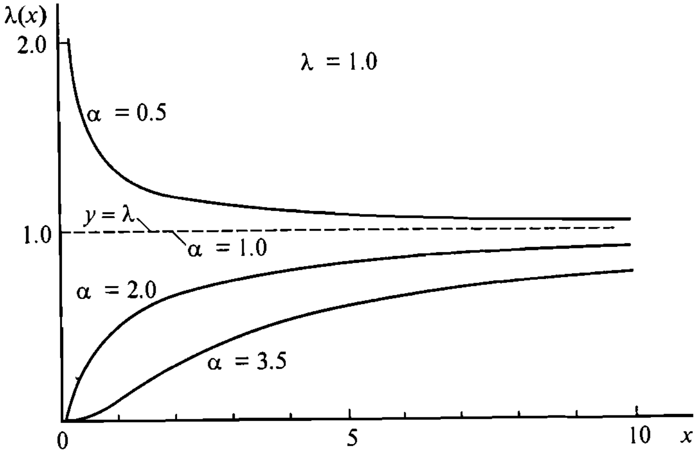


Рис. 3.17. Функция риска гамма-распределения.

бета-распределение первого рода с параметрами формы u, v (см. п. 3.26).

8. В том случае, когда случайные величины X и Y независимы и имеют гамма-распределение с параметрами $\lambda = 1$, $\alpha = u$ и $\lambda = 1$, $\alpha = v$ соответственно, случайная величина $Z = X/Y$ имеет бета-распределение второго рода с параметрами формы u, v (см. п. 3.19).

9. Плотности распределения линейных функций $aX + b$ случайной величины X, имеющей гамма-распределение, составляют специальный класс распределений — так называемый «тип III» семейства кривых Пирсона.

Оценивание параметров

Метод моментов:

$$\lambda^* = \frac{\bar{x}^*}{S_x^2}, \quad \alpha^* = \frac{(\bar{x}^*)^2}{S_x^2}.$$

Метод максимального правдоподобия. Путем решения уравнения $\ln\alpha^* - \psi(\alpha^*) = \ln y$ определяется оценка α^* параметра формы α. После этого по формуле $\lambda^* = \alpha^*/\bar{x}^*$ определяется оценка λ^* параметра масштаба λ. Здесь $\psi(\alpha) = \dfrac{d[\ln\Gamma(\alpha)]}{d\alpha} = \dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ — пси-функция (дигамма-функция); $y = \ln(\bar{x}^*/\tilde{x})$; $\tilde{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ — среднее геометрическое элементов выборки. Функция $\psi(\alpha)$ табулирована (см., например, [14, с. 91—94, табл. 6.1]).

Для определения оценки параметра формы α можно использовать приближенные формулы

$$\alpha^* = \begin{cases} \dfrac{0.5000876 + 0.1648852y - 0.0544274y^2}{y}, & 0 < y \le 0.5772; \\ \dfrac{8.898919 + 9.059950y + 0.9775373y^2}{y\,(17.79728 + 11.968477y + y^2)}, & 0.5772 \le y \le 17. \end{cases}$$

Генерирование случайных чисел

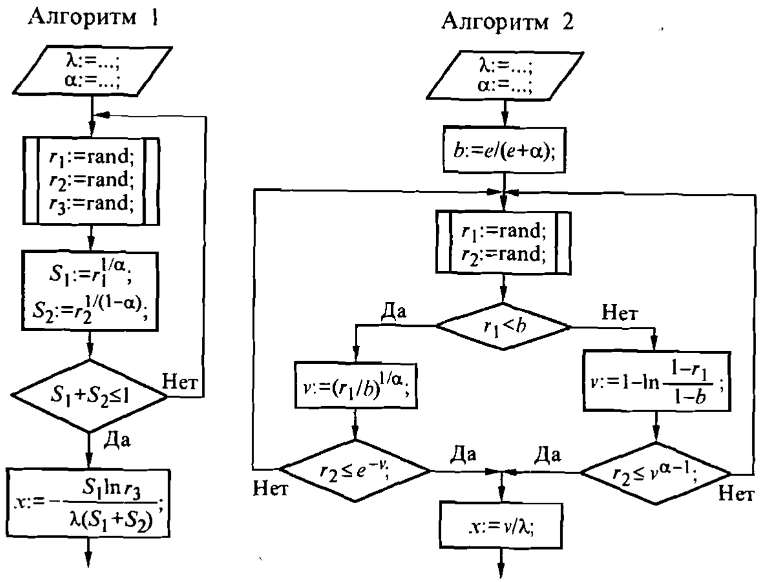


Рис. 3.18. Блок-схемы алгоритмов генерирования случайных чисел, имеющих гамма-распределение.

Гамма-распределение с параметром масштаба λ и параметром формы α $(0 < \alpha < 1)$.

Алгоритм 1

1. $r_1 :=$ rand; $r_2 :=$ rand; $r_3 :=$ rand;
2. $S_1 := r_1^{1/\alpha}$; $S_2 := r_2^{1/(1-\alpha)}$;
3. Если $S_1 + S_2 \le 1$, то на 4, иначе — на 1;
4. $x := -\dfrac{S_1 \ln r_3}{\lambda(S_1 + S_2)}$.

Блок-схема алгоритма 1 приведена на рис. 3.18, *слева*.

Алгоритм 2

1. $b := e/(e+\alpha)$;
2. $r_1 :=$ rand; $r_2 :=$ rand;
3. Если $r_1 < b$, то на 4, иначе — на 6;
4. $v := (r_1/b)^{1/\alpha}$;
5. Если $r_2 \le e^{-v}$, то на 8, иначе — на 2;
6. $v := 1 - \ln((1-r_1)/(1-b))$;
7. Если $r_2 \le v^{\alpha-1}$, то на 8, иначе — на 2;
8. $x := v/\lambda$.

Блок-схема алгоритма 2 приведена на рис. 3.18, *справа*.

Гамма-распределение с параметром масштаба λ и параметром формы $\alpha > 1$:

$$x = y - \frac{1}{\lambda}\ln(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m),$$

где y — случайное число, принадлежащее последовательности случайных чисел $\{y_i\}$, имеющих гамма-распределение с параметром масштаба λ и параметром формы $a = \alpha - \lfloor\alpha\rfloor$, $m = \lfloor\alpha\rfloor$. (Здесь $\lfloor\alpha\rfloor$ — целая часть числа α).

Таблицы

[7]. Даны значения функций $I(x,\alpha)$, $T(x,\alpha) = I(x;\alpha)/x^\alpha$, $1 - I(x,\alpha)$ и $R(y,t) = I(x,\alpha) - \Phi(y)$; 7D.

Техника вычислений

Все таблицы гамма-функции $\Gamma(\alpha)$ ограничены значениями аргумента α, принадлежащими интервалу $(1 \le \alpha \le 2)$. Значения гамма-функции для $\alpha < 1$ и $\alpha > 2$ вычисляются с помощью формул $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)/\alpha$ и $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, которые следуют из функционального уравнения Эйлера $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$.

При вычислении функции распределения $F_x(x;\alpha,\lambda)$ гамма-распределения могут быть использованы таблицы [7], [9] или стандартные подпрограммы (см., например, [46]).

При вычислении на ЭВМ могут быть использованы формулы:

$$\Gamma(x+1) = 1 + \sum_{i=1}^{5} a_i x^i + \varepsilon(x) \quad (0 \le x \le 1),$$

$$a_1 = -0.5748646,\quad a_2 = 0.9512363,\quad a_3 = -0.698588,$$

$$a_4 = 0.4245549,\quad a_5 = -0.1010678,\quad |\varepsilon(x)| \le 5\cdot 10^{-5};$$

$$\Gamma(x+1) = 1 + \sum_{i=1}^{8} b_i x^i + \varepsilon(x) \quad (0 \le x \le 1),$$

$b_1 = -0.577191652,\quad b_2 = \ \ 0.988205891,\quad b_3 = -0.897056937,$
$b_4 = \ \ 0.918206857,\quad b_5 = -0.756704078,\quad b_6 = \ \ 0.482199394,$
$b_7 = -0.193527818,\quad b_8 = \ \ 0.035868343,\quad |\varepsilon(x)| \le 3\cdot 10^{-7};$

$$F(x;\,\alpha,\,\lambda) = \frac{(\lambda x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\,\frac{(\lambda x)^{i}}{(\alpha+i)\,i\,!}\quad (x>0); \tag{1}$$

$$F(x;\alpha,\lambda) = \frac{(\lambda x)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\,e^{-\lambda x}\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{i}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+i)}\right]\quad (x>0). \tag{2}$$

При $\alpha > 1$ ряд (2) сходится быстрее, чем ряд (1).

В системе символьной математики DERIVE имеются функции:

GAMMA(z) = Г(z),

INCOMPLETE_GAMMA(z, w) $= I(w,\, z) = \dfrac{1}{\Gamma(z)}\displaystyle\int_0^w e^{-t}t^{z-1}dt,$

INCOMPLETE_GAMMA_SERIES(z, w, m) =

$$= e^{-w}w^{z}\sum_{n=0}^{m}\frac{w^{m-n}}{\Gamma(z+m-n+1)}$$

(см. [44], утилиты PROBABIL.MTH). Функция INCOMPLETE_GAMMA_SERIES(z, w, m) позволяет вычислить частичную сумму m первых членов ряда (2).

3.10.2. СМЕЩЕННОЕ (ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ) ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности	$f(y) = \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(y-c)^{\alpha-1}e^{-\lambda(y-c)}\ \ (y<c),$ где λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$); α — параметр формы ($\alpha > 0$); c — параметр сдвига (смещение)
Функция распределения	$F(y) = I(\lambda(y-c);\alpha)\ \ (y>c),$ где $I(x;\alpha)$ — отношение неполной гамма-функции
Характеристическая функция	$\chi(t) = e^{ict}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-it}\right)^{\alpha}$
Математическое ожидание	$\bar{y} = c + \dfrac{\alpha}{\lambda}$

Мода	$\hat{y} = c + \dfrac{\alpha-1}{\lambda}\ \ (\alpha \ge 1)$
Дисперсия	$D_y = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_y = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \dfrac{6}{\alpha}$
Начальные моменты	$m_2 = \dfrac{\alpha^2+(2c\lambda+1)\alpha+(c\lambda)^2}{\lambda^2},$

$$m_3 = \frac{\alpha^3+3(c\lambda+1)\alpha^2+[3(c\lambda)^2+3c\lambda+2]\alpha+(c\lambda)^3}{\lambda^3},$$

$$m_4 = \frac{\alpha^4+(4c\lambda+6)\alpha^3+[6(c\lambda)^2+12c\lambda+11]\alpha^2+}{\lambda^4}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{+[4(c\lambda)^3+6(c\lambda)^2+8c\lambda+6]\alpha+(c\lambda)^4}{\lambda^4}$$

Центральные моменты	$\mu_3 = \dfrac{2\alpha}{\lambda^3},\quad \mu_4 = \dfrac{3\alpha(\alpha+2)}{\lambda^4}$

Квантиль y_p гамма-распределения вычисляется путем решения уравнения $I(\lambda(y_p-c);\,\alpha) = p$, где p — заданный порядок квантили ($0 < p < 1$).

Точками перегиба функции плотности $f(x)$ являются точки $y = c + (\alpha - 1 \mp \sqrt{\alpha-1})/\lambda$ (при условии, что y — действительное положительное число, превышающее c).

Соотношения между распределениями

1. Смещенное гамма-распределение с параметрами λ, α, c описывает распределение случайной величины $Y = c + X$, где X — случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами λ, α; c — постоянная величина (смещение).

2. Сумма конечного числа n независимых случайных величин, имеющих смещенное гамма-распределение с параметрами

λ, α_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, имеет смещенное гамма-распределение с параметром масштаба λ, параметром формы $\alpha = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ и параметром сдвига $c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$, т. е. смещенное гамма-распределение, так же как и классическое гамма-распределение, устойчиво относительно операции композиции законов распределения.

Оценивание параметров

$$\alpha^* = \frac{4(S_y^2)^3}{(\mu_3^*)^2} = \frac{4}{(\mathrm{Sk}^*)^2}, \quad \lambda^* = \frac{2S_y^2}{(\mu_3^*)^2} = \frac{2}{S_y \mathrm{Sk}^*},$$

$$c = \bar{y}^* - \frac{2(S_y^2)^2}{\mu_3^*} = \bar{y}^* - \frac{2S_y}{\mathrm{Sk}^*} \quad \text{(ММ)}.$$

Оценки максимального правдоподобия являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - c^*) = \dfrac{\alpha^*}{\lambda^*}, \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(y_i - c^*) = \psi(a^*) - \ln\lambda^*, \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{y_i - c^*} = \dfrac{\lambda^*}{\alpha^* - 1}. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь $\psi(\alpha) = \dfrac{d[\ln\Gamma(\alpha)]}{d\alpha} = \dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ — пси-функция (дигамма-функция). Функция $\psi(\alpha)$ табулирована (см. [14, с. 91—94, табл. 6.1]).

Систему уравнений (3) можно использовать только при $\alpha > 1$. При α, близкой к единице, система дает довольно нестабильные результаты (см. третье уравнение системы), поэтому ее рекомендуется использовать при $\alpha \ge 2.5$.

Генерирование случайных чисел

$$y_i = c + x_i,$$

где x_i — случайное число, принадлежащее последовательности $\{x_i\}$ случайных чисел, имеющих гамма-распределение с параметрами λ, α; c — параметр сдвига (смещение).

3.11. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭРЛАНГА

3.11.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭРЛАНГА m-ГО ПОРЯДКА

Плотность вероятности	$f(x) = \dfrac{\lambda^m}{(m-1)!}x^{m-1}e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0,$ где λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$); m — параметр формы, *порядок распределения*, целое положительное число ($m \ge 1$)
Функция распределения	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\dfrac{(\lambda x)^i}{i!} = e^{-\lambda x}\sum\limits_{i=m}^{\infty}\dfrac{(\lambda x)^i}{i!}$
Характеристическая функция	$\chi(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^m$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \dfrac{m}{\lambda}$
Мода	$\hat{x} = \dfrac{m-1}{\lambda}$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{m}{\lambda^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\sqrt{m}}{\lambda}$
Коэффициент вариации	$v_x = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \dfrac{2}{\sqrt{m}}$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \dfrac{6}{m}$
Начальные моменты	$m_2 = \dfrac{m(m+1)}{\lambda^2}, \quad m_3 = \dfrac{m(m+1)(m+2)}{\lambda^3},$ $m_4 = \dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{\lambda^4},$ $m_s = \dfrac{m(m+1)\ldots(m+s-1)}{\lambda^s}$
Центральные моменты	$\mu_3 = \dfrac{2m}{\lambda^3}, \quad \mu_4 = \dfrac{3m(m+2)}{\lambda^4}$

Квантиль x_p определяется как корень уравнения $\tilde{\Psi}(m; \lambda x_p) = p$, где $\tilde{\Psi}(x; \mu) = e^{-\mu}\sum_{i=x}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!}$. Функция $\tilde{\Psi}(x; \mu)$ табулирована (см. п. 2.2).

Соотношения между распределениями

1. Распределение Эрланга порядка m описывает распределение случайной величины $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$, представляющей собой сумму m независимых случайных величин, каждая из которых распределена по показательному закону распределения с одним и тем же параметром λ.

В большинстве пособий по теории вероятностей под порядком распределения Эрланга понимается число m независимых показательно распределенных слагаемых, входящих в сумму $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$. Однако в некоторых пособиях порядком распределения называют число, которое на единицу меньше числа слагаемых в этой сумме (см., например, [39]).

2. При $m = 1$ распределение Эрланга совпадает с показательным распределением.

3. Распределение Эрланга порядка m является частным случаем гамма-распределения, параметром формы которого является целое положительное число $m\,(\alpha = m)$. Все характеристики распределения Эрланга порядка m определяются по тем же формулам, что и соответствующие характеристики гамма-распределения (с заменой во всех формулах α на m).

4. Распределение Эрланга тесно связано с распределением Пуассона (см. п. 2.2).

5. Распределение Эрланга порядка $m+1$ с параметром масштаба $\lambda = 1$ иногда называют *показательно-степенным распределением* с параметром формы m.

6. Распределение Эрланга порядка m является непрерывным аналогом отрицательного биномиального распределения 1 с параметрами m, p, которое описывает распределение суммы m независимых случайных величин, каждая из которых имеет геометрическое распределение 1 с одним и тем же параметром p.

Оценивание параметров

$$m^* = \left\langle \frac{(\bar{x}^*)^2}{S_x^2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{(v_x^*)^2} \right\rangle, \quad \lambda^* = \frac{m^*}{\bar{x}^*} \qquad \text{(MM)},$$

где $\langle a \rangle$ — целое число, ближайшее к a.

Генерирование случайных чисел

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m).$$

Таблицы

Могут быть использованы таблицы, применяемые при вычислениях, связанных с распределением Пуассона (см. п. 2.2) и гамма-распределением (см. п. 3.10).

Техника вычислений

При выполнении вычислений, связанных с распределением Эрланга, помимо таблиц неполной гамма-функции [7] могут быть использованы таблицы функций (см. п. 2.2):

$$\psi(x;\mu) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} \quad \text{и} \quad \tilde{\Psi}(x;\mu) = e^{-\mu}\sum_{i=x}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!}.$$

Функции $\psi(x;\mu)$ и $\tilde{\Psi}(x;\mu)$ связаны с плотностью вероятности $f(x)$ и функцией распределения $F(x)$ закона Эрланга порядка m очевидными соотношениями:

$$f(x) = \lambda\psi(m-1; \lambda x) \quad \text{и} \quad F(x) = \tilde{\Psi}(m; \lambda x) \qquad (x \ge 0).$$

3.11.2. НОРМИРОВАННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭРЛАНГА m-ГО ПОРЯДКА

Плотность вероятности	$f(z) = \frac{(\lambda m)^m}{(m-1)!} z^{m-1} e^{-\lambda m z}, \quad z \ge 0,$ где λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$); m — параметр формы, *порядок распределения*, целое положительное число ($m \ge 1$)
Функция распределения	$F(z) = 1 - e^{-\lambda m z}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda m z)^i}{i!} = e^{-\lambda m z}\sum_{i=m}^{\infty}\frac{(\lambda m z)^i}{i!}$
Характеристическая функция	$\chi_z(t) = \left(\frac{\lambda z}{\lambda z - it}\right)^m$
Математическое ожидание	$\bar{z} = \frac{1}{\lambda}$

Мода $\hat{z} = \dfrac{m-1}{\lambda m} = \dfrac{m-1}{m}\bar{z}$

Дисперсия $D_x = \dfrac{1}{m\lambda^2}$

Коэффициент вариации $v_x = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = \dfrac{2}{\sqrt{m}}$

Эксцесс $\mathrm{Ex} = \dfrac{6}{m}$

Начальные моменты $m_2 = \dfrac{m+1}{m\lambda^2}, \quad m_3 = \dfrac{(m+1)(m+2)}{m^2\lambda^3},$

$$m_4 = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{m^3\lambda^4},$$

$$m_s = \frac{(m+1)\dots(m+s-1)}{m^{s-1}\lambda^s}$$

Центральные моменты $\mu_3 = \dfrac{2}{m^2\lambda^3}, \quad \mu_4 = \dfrac{3(m+2)}{m^3\lambda^4}$

Квантиль z_p определяется как корень уравнения $\tilde{\Psi}(m;\lambda m z_p) = p$, где $\tilde{\Psi}(x;\mu) = e^{-\mu}\sum_{i=x}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!}$. Функция $\tilde{\Psi}(x;\mu)$ табулирована (см. п. 2.2).

Соотношения между распределениями

1. Нормированное распределение Эрланга порядка m описывает распределение среднего арифметического

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$$

m независимых случайных величин, каждая из которых подчиняется показательному закону с одним и тем же параметром λ.

2. Случайная величина Z, имеющая нормированное распределение Эрланга порядка m, связана со случайной величиной X, распределенной по закону Эрланга m-го порядка, соотношением $Z = X/m$.

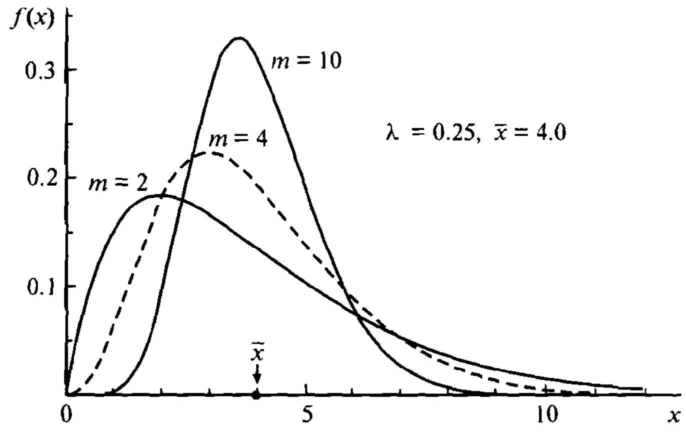


Рис. 3.19. Плотность вероятности нормированного распределения Эрланга.

3. Нормированное распределение Эрланга порядка m описывает распределение суммы $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m$ независимых случайных величин $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, каждая из которых распределена по показательному закону с одним и тем же параметром λm.

4. Сумма независимых случайных величин, имеющих нормированное распределение Эрланга порядка $m_1, m_2, \dots, m_n$ с одним и тем же параметром масштаба λ, имеет нормированное распределение Эрланга порядка $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ с тем же самым параметром масштаба λ.

5. При $m = 1$ нормированное распределение Эрланга совпадает с показательным распределением.

Примечание. При увеличении порядка m математическое ожидание $\bar{z} = 1/\lambda$ этого распределения остается неизменным, а его дисперсия $D_z = 1/(m\lambda^2)$ стремится к нулю. Следовательно, случайная величина Z, имеющая нормированное распределение Эрланга, «становится все менее и менее случайной» и в конце концов вырождается в постоянную $c = 1/\lambda$. Это свойство нормированного распределения Эрланга очень удобно в практических приложениях. Оно позволяет, задаваясь различными значениями m, получать различную «степень случайности» случайной величины Z — от «сильной случайности» при $m = 1$ до полного отсутствия случайности при $m = \infty$. При этом порядок m нормированного распределения Эрланга можно рассматривать как своеобразную «меру случайности» случайной величины Z, используемой в качестве вероятностной модели какого-либо случайного параметра исследуемого объекта (например, времени прохождения сообщения через систему связи, времени безотказной работы технического устройства и т. п.).

Оценивание параметров

$$m^* = \left\langle \frac{(\bar{z}^*)^2}{S_z^2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{(v_z^*)^2} \right\rangle, \quad \lambda^* = \frac{1}{\bar{z}^*} \quad \text{(ММ)},$$

где $\langle a \rangle$ — целое число, ближайшее к a.

Генерирование случайных чисел

$$x_i = -\frac{1}{\lambda m} \ln (r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m).$$

Таблицы

Могут быть использованы таблицы, применяемые при вычислениях, связанных с распределением Пуассона (см. п. 2.2) и гамма-распределением (см. п. 3.10).

Техника вычислений

При выполнении вычислений, связанных с нормированным распределением Эрланга, помимо таблиц неполной гамма-функции [7] могут быть использованы таблицы функций (см. п. 2.2)

$$\psi(x;\mu) = e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!} \quad \text{и} \quad \widetilde{\Psi}(x;\mu) = e^{-\mu} \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!}.$$

Функции $\psi(x;\mu)$ и $\widetilde{\Psi}(x;\mu)$ связаны с плотностью вероятности $f(z)$ и функцией распределения $F(x)$ нормированного распределения Эрланга m-го порядка очевидными соотношениями:

$$f(z) = \lambda m \psi(m-1; \lambda m z) \quad \text{и} \quad F(z) = \widetilde{\Psi}(m; \lambda m z) \quad (z \ge 0).$$

3.11.3. ОБОБЩЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭРЛАНГА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Плотность вероятности	$f(x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}(e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}) \quad (x \ge 0)$, где λ, μ — параметры масштаба ($\lambda > 0, \mu > 0$). Параметром формы данного распределения может служить отношение $k = \mu/\lambda$

Функция распределения	$F(x) = 1 - \frac{1}{\lambda - \mu}\left(\lambda e^{-\mu x} - \mu e^{-\lambda x}\right)$
Характеристическая функция	$\chi(t) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda - it)(\mu - it)}$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}$
Медиана	Медиана $x_{0.5}$ является корнем уравнения $\lambda e^{-\mu x} - \mu e^{-\lambda x} = (\lambda - \mu)/2$
Мода	$\hat{x} = \frac{\ln(\lambda/\mu)}{\lambda - \mu}$
Дисперсия	$D_x = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(\lambda\mu)^2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\lambda\mu}$
Коэффициент вариации	$v_x = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\lambda + \mu} \quad (v_x < 1)$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \frac{2(\lambda^3 + \mu^3)}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \quad (\mathrm{Sk} > 0)$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \frac{6(\lambda^4 + \mu^4)}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \quad (\mathrm{Ex} > 0)$
Начальные моменты	$m_2 = \frac{2(\lambda^3 - \mu^3)}{(\lambda - \mu)(\lambda\mu)^2}$, $m_3 = \frac{6(\lambda^4 - \mu^4)}{(\lambda - \mu)(\lambda\mu)^3}$, $m_4 = \frac{24(\lambda^5 - \mu^5)}{(\lambda - \mu)(\lambda\mu)^4}$, $m_s = \frac{s!(\lambda^{s+1} - \mu^{s+1})}{(\lambda - \mu)(\lambda\mu)^s}$
Центральные моменты	$\mu_3 = \frac{2(\lambda^3 + \mu^3)}{(\lambda\mu)^3}$, $\mu_4 = \frac{3(3\lambda^4 + 2\lambda^2\mu^2 + 3\mu^4)}{(\lambda\mu)^4}$

Квантиль x_p порядка p является решением уравнения

$$\lambda e^{-\mu x} - \mu e^{-\lambda x} = (\lambda - \mu)(1 - p).$$

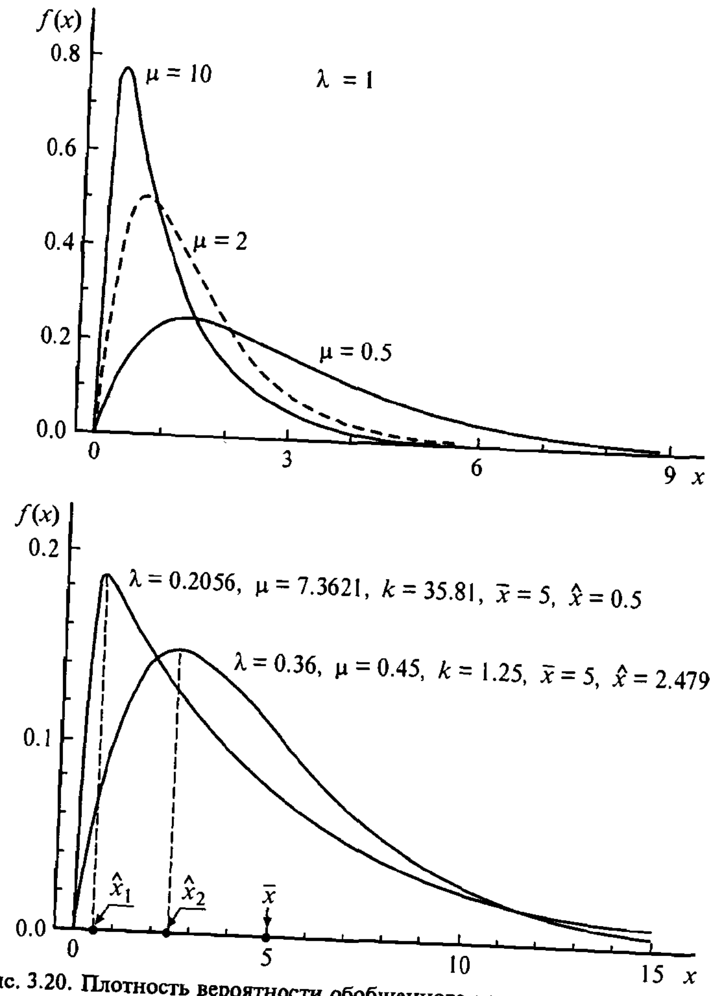


Рис. 3.20. Плотность вероятности обобщенного распределения Эрланга второго порядка.

Соотношения между распределениями

1. Обобщенное распределение Эрланга второго порядка описывает распределение случайной величины $X = X_1 + X_2$, представляющей собой сумму двух независимых случайных величин X_1 и X_2, одна из которых распределена по показательному закону с параметром λ, а другая — по показательному закону с параметром μ.

2. При $k = \mu/\lambda \to \infty$ и $\bar{x} = (\lambda + \mu)/(\lambda\mu) = \text{const}$ обобщенное распределение Эрланга второго порядка приближается к показательному распределению с параметром равным $1/\bar{x}$.

3. При $k = 1$ обобщенное распределение Эрланга второго порядка совпадает с распределением Эрланга второго порядка с параметром масштаба равным $2/\bar{x}$.

Оценивание параметров

$$\lambda^* = \frac{\bar{x}^* \pm \sqrt{2S_x^2 - (\bar{x}^*)^2}}{S_x^2 \pm \bar{x}^* \sqrt{2S_x^2 - (\bar{x}^*)^2}}, \quad \mu^* = \frac{\bar{x}^* \pm \sqrt{2S_x^2 - (\bar{x}^*)^2}}{(\bar{x}^*)^2 - S_x^2} \quad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_{2i-1} - \frac{1}{\mu}\ln r_{2i}.$$

3.12. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА—ГНЕДЕНКО

3.12.1. КЛАССИЧЕСКОЕ (ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА—ГНЕДЕНКО (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ТИПА III)

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{c}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{c-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^c\right), \quad x > 0,$$

где a — параметр масштаба (*характерное время жизни*); c — параметр формы ($a > 0$, $c > 0$). Параметр a обладает следующим свойством: при любом $c > 0$ вероятность $P\{X < a\} = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$

Функция распределения

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^c\right)$$

Функция риска

$$\lambda(x) = \frac{c}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{c-1}$$

Характеристическая функция

$$\chi(t) = 1 + it\int_0^\infty \exp\left(itx - \left(\frac{x}{a}\right)^c\right)dx = \sum_{s=0}^\infty i^s \frac{a^s}{s!}\Gamma\left(\frac{s}{c}+1\right)$$

Математическое ожидание $\bar{x} = a\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)$

Медиана $x_{0.5} = a(\ln 2)^{1/c}$

Мода $\hat{x} = a\left(\frac{c-1}{c}\right)^{1/c}, \quad c \ge 1$

Дисперсия $D_x = a^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{c}+1\right)\right]$

Стандартное отклонение $\sigma_x = a\sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{c}+1\right)}$

Коэффициент вариации $v_x = \sqrt{\frac{\Gamma(2/c+1)}{\Gamma^2(1/c+1)} - 1}$

Асимметрия
$$\mathrm{Sk} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{c}+1\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{c}+1\right)\right]^{3/2}}$$

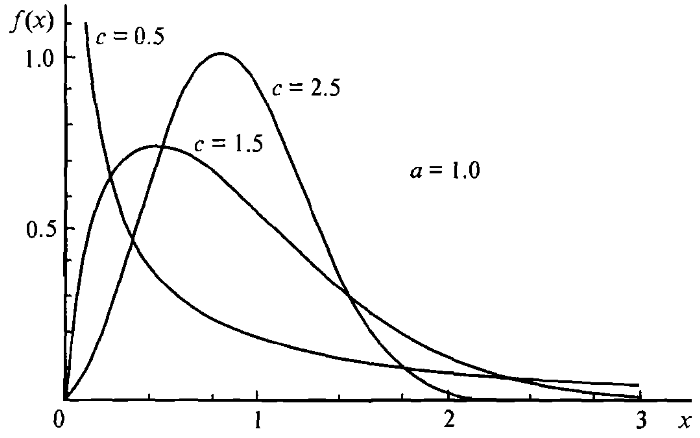
Эксцесс
$$\mathrm{Ex} = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{c}+1\right) - 4\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right) + 6\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{c}+1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{c}+1\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{c}+1\right)\right]^2} - 3$$

Начальные моменты $m_2 = a^2\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right), \quad m_3 = a^3\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right),$

$m_4 = a^4\Gamma\left(\frac{4}{c}+1\right), \quad m_s = a^s\Gamma\left(\frac{s}{c}+1\right)$

Центральные моменты
$$\mu_3 = a^3\left[\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{c}+1\right)\right],$$
$$\mu_4 = a^4\left[\Gamma\left(\frac{4}{c}+1\right) - 4\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right) + 6\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{c}+1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{c}+1\right)\right]$$

p-квантиль $x_p = a[-\ln(1-p)]^{1/c}$



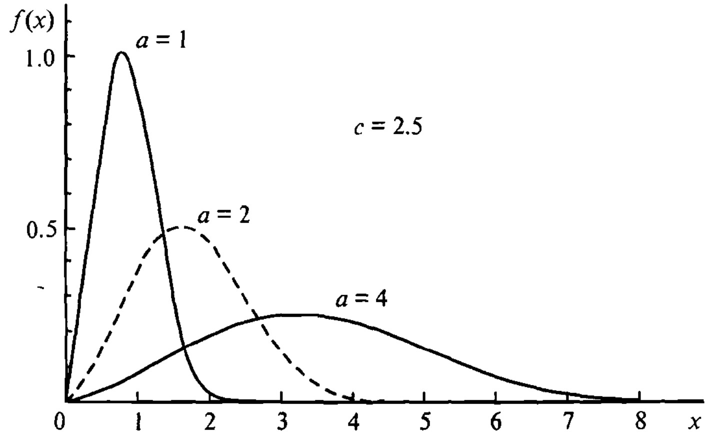


Рис. 3.21. Плотность вероятности распределения Вейбулла—Гнеденко.

Соотношения между распределениями

1. Распределение Вейбулла—Гнеденко с параметром масштаба a и параметром формы $c = 1$ совпадает с показательным распределением с параметром $\lambda = 1/a$.

2. Распределение Вейбулла—Гнеденко с параметром масштаба a и параметром формы $c = 2$ совпадает с распределением Рэлея с параметром масштаба $a/\sqrt{2}$.

3. Если случайная величина X распределена по закону Вейбулла—Гнеденко с параметрами a, c, то случайная величина $Y = (X/a)^c$ подчиняется показательному закону распределения с параметром $\lambda = 1$.

4. Если случайная величина X распределена по закону Вейбулла—Гнеденко с параметрами a, c, то случайная величина $Y = c\ln(X/a)$ имеет распределение минимального значения, а случайная величина $Y = -c\ln(X/a)$ — распределение максимального значения с параметрами $\mu = 0$ и $\lambda = 1$.

5. Распределение Вейбулла—Гнеденко хорошо аппроксимируется логарифмически нормальным распределением, т. е.

$$F(x;a,c) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{c}\right)^c\right) \approx \Phi\left(\frac{\ln(x/m)}{\alpha}\right),$$

где $m = \bar{x}/\sqrt{1+v^2}$, $\alpha = \sqrt{\ln(1+v^2)}$; $\bar{x}$ — математическое ожидание; v — коэффициент вариации распределения Вейбулла—Гнеденко [21, т. 1, стб. 614].

Оценивание параметров

Метод моментов. Решая относительно c^* уравнение

$$\Gamma\left(\frac{2}{c^*}+1\right)\Big/\Gamma^2\left(\frac{1}{c^*}+1\right) = 1 + (v_x^*)^2, \qquad (1)$$

где $v_x^* = S_x/\bar{x}^*$ — выборочный коэффициент вариации, находят оценку c^* параметра формы c.

По формуле

$$a^* = \bar{x}^*\Big/\Gamma\left(\frac{1}{c^*}+1\right)$$

вычисляют оценку a^* параметра масштаба a. Для приближенного решения уравнения (1) можно воспользоваться табл. 3.1.

Таблица 3.1

c	v_x	k_1	k_2	Sk	c	c	v_x	k_1	k_2	Sk	c
0.20	15.834	120.000	1901.158	190.113	0.20	1.00	1.000	1.000	1.000	2.000	1.00
0.21	13.579	80.358	1091.206	144.237	0.21	1.20	0.837	0.941	0.787	1.521	1.20
0.22	11.807	56.331	665.080	112.319	0.22	1.40	0.724	0.911	0.660	1.198	1.40
0.23	10.393	41.058	426.712	89.464	0.23	1.60	0.640	0.897	0.574	0.962	1.60
0.24	9.248	30.942	286.141	72.686	0.24	1.80	0.575	0.889	0.511	0.779	1.80
0.25	8.307	24.000	199.359	60.092	0.25	2.00	0.523	0.886	0,463	0.631	2.00
0.26	7.524	19.067	143.600	50.450	0.26	2.20	0.480	0.886	0.425	0.509	2.20
0.27	6.865	15.514	106.495	42.938	0.27	2.40	0.444	0.886	0.393	0.405	2.40
0.28	6.304	12.853	81.029	36.991	0.28	2.60	0.413	0.888	0.367	0.316	2.60
0.29	5.824	10.829	63.064	32.216	0.29	2.80	0.387	0.890	0.344	0.237	2.80
0.30	5.408	9.261	50.078	28.334	0.30	3.00	0.363	0.893	0.325	0.168	3.00
0.32	4.727	7.035	33.255	22.481	0.32	3.50	0.316	0.900	0.285	0.026	3.50
0.34	4.195	5.575	23.391	18.358	0.34	4.00	0.281	0.906	0.254	0.087	4.00
0.36	3.771	4.571	17.240	15.351	0.36	4.50	0.252	0.913	0.230	0.179	4.50
0.38	3.426	3.853	13.203	13.093	0.38	5.00	0.229	0.918	0.210	0.253	5.00
0.40	3.141	3.323	10.438	11.353	0.40	5.50	0.210	0.923	0.194	0.318	5.50
0.42	2.901	2.921	8.475	9.983	0.42	6.00	0.194	0.928	0.180	0.375	6.00
0.44	2.697	2.609	7.037	8.883	0.44	6.50	0.180	0.932	0.168	0.419	6.50
0.46	2.522	2.362	5.956	7.986	0.46	7.00	0.168	0.935	0.157	0.466	7.00
0.48	2.370	2.163	5.125	7.243	0.48	7.50	0.158	0.939	0.148	−0.500	7.50
0.50	2.236	2.000	4.427	6.619	0.50	8.00	0.148	0.942	0.140	−0.534	8.00
0.55	1.965	1.702	3.345	5.431	0.55	9.00	0.133	0.947	0.126	−0.588	9.00
0.60	1.758	1.505	2.645	4.593	0.60	10.00	0.120	0.951	0.114	−0.640	10.00
0.65	1.595	1.366	2.179	3.974	0.65	11.00	0.110	0.995	0.105	−0.669	11.00
0.70	1.462	1.266	1.851	3.498	0.70	12.00	0.101	0.958	0.097	−0.700	12.00
0.75	1.353	1.191	1.611	3.121	0.75	13.00	0.094	0.961	0.090	−0.741	13.00
0.80	1.261	1.133	1.428	2.815	0.80	14.00	0.087	0.964	0.084	−0.764	14.00
0.85	1.182	1.088	1.285	2.560	0.85	16.00	0.077	0.986	0.074	−0.807	16.00
0.90	1.113	1.052	1.171	2.345	0.90	18.00	0.069	0.971	0.067	−0.836	18.00
0.95	1.053	1.023	1.078	2.160	0.95	20.00	0.062	0.974	0.060	−0.914	20.00

Оценивание параметров с помощью этой таблицы осуществляется следующим образом:

— по выборочной оценке v_x^* коэффициента вариации v_x находят оценку c^* параметра формы c и значение коэффициента $k_1 = \Gamma(1/c + 1)$;

— с помощью формулы $a^* = \bar{x}^*/k_1$ определяют оценку a^* параметра масштаба a.

Метод максимального правдоподобия. ОМП параметров a и c определяются путем решения системы уравнений:

$$c^* = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{c^*}}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{c^*}\ln x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^{c^*}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}, \quad a^* = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{c^*}\right)^{1/c^*}.$$

В качестве начального приближения можно взять значение оценки параметра формы c, полученное с помощью табл. 3.1.

Оценка параметров с помощью выборочных квантилей:

$$c^* = \frac{\ln\left(\dfrac{\ln(1-p_2)}{\ln(1-p_1)}\right)}{\ln\left(x^*_{p_2}/x^*_{p_1}\right)}, \quad a^* = \frac{x^*_{p_1} + x^*_{p_2}}{(-\ln(1-p_1))^{1/c^*} + (-\ln(1-p_2))^{1/c^*}}. \qquad (2)$$

Совместная асимптотическая эффективность оценок c^* и a^*, полученных с помощью квантилей, максимальна (и равна 0.64) при использовании квантилей порядка $p_1 = 0.24$ и $p_2 = 0.93$. При этом формулы (2) принимают следующий вид:

$$c^* = \frac{2.2711}{\ln(x^*_{0.93}/x^*_{0.24})}, \quad a^* = \frac{x^*_{0.24} + x^*_{0.93}}{(0.2744)^{1/c^*} + (2.6593)^{1/c^*}}.$$

Оценки, основанные на распределении $\ln X$:

$$c^* = \frac{\pi\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{6\left[n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 x_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2\right]}}, \quad a^* = \exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{\gamma}{c^*}\right],$$

где $\gamma \approx 0.5772$ — постоянная Эйлера.

Подробные рекомендации по определению оценок и доверительных границ для параметров распределения Вейбулла—Гнеденко приведены в [31].

Генерирование случайных чисел

$$x = a(-\ln r)^{1/c}.$$

Примечание. В литературе по теории надежности вместо параметра масштаба a обычно используют параметр $\lambda = a^{-c}$. При этом основные характеристики распределения Вейбулла—Гнеденко принимают следующий вид:

Плотность вероятности	$f(x) = \lambda c x^{c-1}\exp(-\lambda x^c), \quad x > 0$
Функция распределения	$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x^c)$
Функция риска	$\lambda(x) = \lambda c x^{c-1}$
Характеристическая функция	$\chi(t) = 1 + it\int_0^\infty \exp(itx - \lambda x^c)\,dx = \sum_{s=0}^{\infty} i^s \dfrac{\Gamma(s/c+1)}{s!\lambda^{s/c}}$

Математическое ожидание	$\bar{x} = \lambda^{-1/c}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{c}+1\right)$
Медиана	$x_{0.5} = \left(\dfrac{\ln 2}{\lambda}\right)^{1/c}$
Мода	$\hat{x} = \left(\dfrac{c-1}{\lambda c}\right)^{\lambda/c}, \quad c \ge 1$
Дисперсия	$D_x = \lambda^{-2/c}\left[\Gamma\left(\dfrac{2}{c}+1\right) + \Gamma^2\left(\dfrac{1}{c}+1\right)\right]$
Начальные моменты	$m_s = \lambda^{-s/c}\,\Gamma\left(\dfrac{s}{c}+1\right), \quad s = 1, 2, \ldots$
p-квантиль	$x_p = \left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-p)\right]^{1/c}$

3.12.2. СМЕЩЕННОЕ (ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА—ГНЕДЕНКО

Плотность вероятности	$f(y) = \dfrac{c}{a}\left(\dfrac{y-y_0}{a}\right)^{c-1}\exp\left(-\left(\dfrac{y-y_0}{a}\right)^c\right), \quad y > y_0,$ где a — параметр масштаба ($a > 0$); c — параметр формы ($c > 0$); y_0 — параметр сдвига (*смещение*)
Функция распределения	$F(y) = 1 - \exp\left(-\left(\dfrac{y-y_0}{a}\right)^c\right)$
Математическое ожидание	$\bar{y} = y_0 + a\Gamma\left(\dfrac{1}{c}+1\right)$
Медиана	$y_{0.5} = y_0 + a(\ln 2)^{1/c}$
Мода	$\hat{y} = y_0 + a\left(\dfrac{c-1}{c}\right)^{1/c}, \quad c \ge 1$
Дисперсия	$D_y = a^2\left[\Gamma\left(\dfrac{2}{c}+1\right) - \Gamma^2\left(\dfrac{1}{c}+1\right)\right]$
Асимметрия и эксцесс	Те же, что и у двухпараметрического распределения Вейбулла—Гнеденко

Начальные моменты	$m_2 = a^2\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right)+2y_0 a\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)+y_0^2,$
	$m_3 = a^3\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right)+3y_0 a^2\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right)+ 3y_0^2 a\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)+y_0^3,$
	$m_4 = a^4\Gamma\left(\frac{4}{c}+1\right)+4y_0 a^3\Gamma\left(\frac{3}{c}+1\right)+ 6y_0^2 a^2\Gamma\left(\frac{2}{c}+1\right)+4y_0^3 a\Gamma\left(\frac{1}{c}+1\right)+y_0^4$
Центральные моменты	Те же, что и у двухпараметрического распределения Вейбулла—Гнеденко
p-квантиль	$y_p = y_0 + a\left[-\ln(1-p)\right]^{1/c}$

Соотношения между распределениями

1. Смещенное распределение Вейбулла—Гнеденко с параметрами a, c, y_0 описывает распределение случайной величины $Y = y_0 + X$, где X — случайная величина, имеющая распределение Вейбулла—Гнеденко с параметрами a, c; y_0 — постоянная величина (смещение).

2. Если случайная величина Y имеет смещенное распределение Вейбулла—Гнеденко с параметрами a, c, y_0, то случайная величина $X = [(Y - y_0)/a]^c$ подчиняется показательному распределению с параметром масштаба $\lambda = 1$.

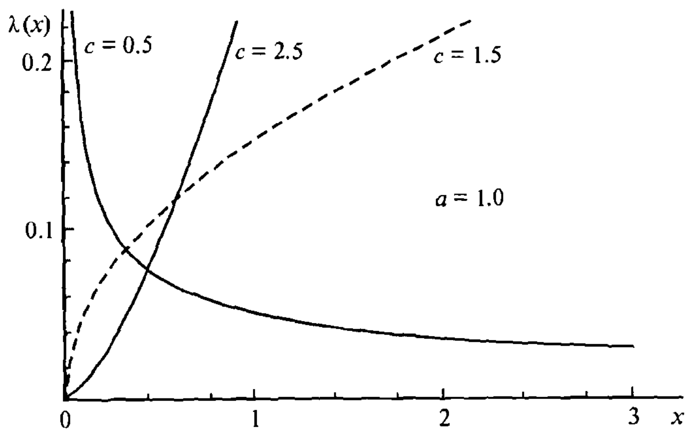


Рис. 3.22. Функция риска распределения Вейбулла—Гнеденко.

Оценивание параметров

Метод моментов. Решая уравнение

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{c^*}+1\right)-3\Gamma\left(\frac{2}{c^*}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{c^*}+1\right)+2\Gamma^3\left(\frac{1}{c^*}+1\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2}{c^*}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{c^*}+1\right)\right]^{3/2}} = \mathrm{Sk}^*,$$

находят оценку c^* параметра формы c. Используя эту оценку, определяют оценки параметров a и y_0:

$$a^* = \frac{S_x}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{c^*}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{c^*}+1\right)}}, \quad y_0^* = \bar{y}^* - a^*\Gamma\left(\frac{1}{c^*}+1\right).$$

Для облегчения расчетов, связанных с оценкой параметров a, c и y_0, можно воспользоваться данными табл. 3.1. Оценивание параметров с помощью этой таблицы осуществляется следующим образом:

— по выборочной оценке Sk* коэффициента асимметрии Sk находят оценку c^* параметра формы c и значения коэффициентов $k_1 = \Gamma(1+1/c)$ и $k_2 = \sqrt{\Gamma(2/c+1) - \Gamma^2(1/c+1)}$;

— с помощью формулы $a^* = S_x/k_2$ определяют оценку a^* параметра масштаба a;

— по формуле $y_0^* = \bar{y}^* - a^* k_1$ находят оценку y_0^* смещения y_0.

Метод максимального правдоподобия. ОМП параметров a, c и y_0 определяются путем решения системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
c^* &= \frac{n\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0^*)^{c^*}}{n\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0^*)^{c^*}\ln(y_i-y_0^*) - \sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0^*)^{c^*}\sum_{i=1}^{n}\ln(y_i-y_0^*)},\\
a^* &= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0^*)\right]^{1/c^*},\\
\frac{c^*}{(a^*)^{c^*}(c^*-1)} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i-y_0^*}}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0^*)^{c^*-1}}.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Если оценка y_0^*, полученная при решении системы уравнений (3), окажется больше $y_{(1)} = \min(y_1, \ldots, y_n)$, то полагают, что $y_0^* = y_{(1)}$. При $0 < c < 1$ первая порядковая статистика $y_{(1)}$ является «сверхэффективной» оценкой параметра сдвига y_0.

Следует заметить, что ОМП рекомендуется использовать только при $c > 2$.

Оценки, основанные на квантилях. Оценки параметров a, c и y_0 могут быть получены путем решения системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_0^* + a^*[-\ln(1-p_1)]^{1/c^*} &= y_{p_1}^*, \\ y_0^* + a^*[-\ln(1-p_2)]^{1/c^*} &= y_{p_2}^*, \\ y_0^* + a^*[-\ln(1-p_3)]^{1/c^*} &= y_{p_3}^*. \end{aligned}\right\}.$$

Эта система дает следующее уравнение для оценки параметра c:

$$c^* = \frac{y_{p_1}^* - y_{p_2}^*}{y_{p_2}^* - y_{p_3}^*} + \frac{[-\ln(1-p_1)]^{1/c^*} - [-\ln(1-p_2)]^{1/c^*}}{[-\ln(1-p_2)]^{1/c^*} - [-\ln(1-p_3)]^{1/c^*}}. \tag{4}$$

При выполнении условия $-\ln(1-p_2) = \sqrt{\ln(1-p_1)\ln(1-p_3)}$ уравнение (4) принимает более простой вид

$$c^* = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\ln(1-p_3)}{\ln(1-p_2)} \Big/ \ln\frac{y_{p_1}^* - y_{p_2}^*}{y_{p_2}^* - y_{p_3}^*}\right].$$

Подробные рекомендации по определению оценок и доверительных интервалов для параметров смещенного распределения Вейбулла—Гнеденко приведены в [31].

Генерирование случайных чисел

$$y = y_0 + a(-\ln r)^{1/c}.$$

3.13. ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Плотность вероятности

$$f(x) = 2p^2\lambda e^{-2p\lambda x} + 2(1-p)^2\lambda e^{-2(1-p)\lambda x}, \quad x \ge 0, \tag{1}$$

где λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$); p — параметр формы ($0 < p < 0.5$)

Функция распределения

$$F(x) = 1 - pe^{-2p\lambda x} - (1-p)e^{-2(1-p)\lambda x}$$

Функция риска

$$\lambda(x) = 2\lambda\frac{p^2 + (1-p)^2 e^{-2(1-2p)\lambda x}}{p + (1-p)e^{-2(1-2p)\lambda x}}$$

Характеристическая функция

$$\chi(t) = 2\lambda\left[\frac{p^2}{2p\lambda - it} + \frac{(1-p)^2}{2(1-p)\lambda - it}\right]$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{1}{\lambda}$$

Мода

$$\hat{x} = 0$$

Дисперсия

$$D_x = \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{1}{2p(1-p)} - 1\right]$$

Стандартное отклонение

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2p(1-p)} - 1}$$

Коэффициент вариации

$$v_x = \sqrt{1 + \frac{(1-2p)^2}{2p(1-p)}} > 1$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk} = \frac{3 - 12p(1-p) + 8p^2(1-p)^2}{\sqrt{2p(1-p)[1-2p(1-p)]^3}}$$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = \frac{3[2 - 11p(1-p) + 16p^2(1-p)^2 - 8p^3(1-p)^3]}{p(1-p)[1-2p(1-p)]^2}$$

Начальные моменты

$$m_2 = \frac{1}{2p(1-p)\lambda^2}, \quad m_3 = \frac{3[1-2p(1-p)]}{4p^2(1-p)^2\lambda^3},$$

$$m_4 = \frac{3[1-3p(1-p)]}{2p^3(1-p)^3\lambda^4},$$

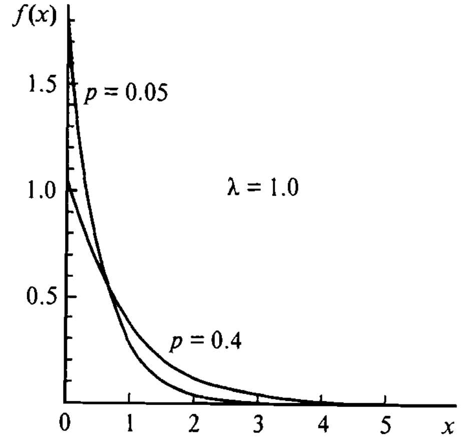
$$m_s = \frac{s!}{2^s\lambda^s}\left[\frac{1}{p^{s-1}} + \frac{1}{(1-p)^{s-1}}\right]$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = \frac{3 - 12p(1-p) + 8p^2(1-p)^2}{4p^2(1-p)^2\lambda^3},$$

$$\mu_4 = \frac{3\left[1 - 5p(1-p) + 6p^2(1-p)^2 - 2p^3(1-p)^3\right]}{2p^3(1-p)^3\lambda^4}$$

Квантиль x_ρ порядка ρ является корнем уравнения $pe^{-2p\lambda x} + (1-p)\,e^{-2(1-p)\lambda x} = 1-\rho$.



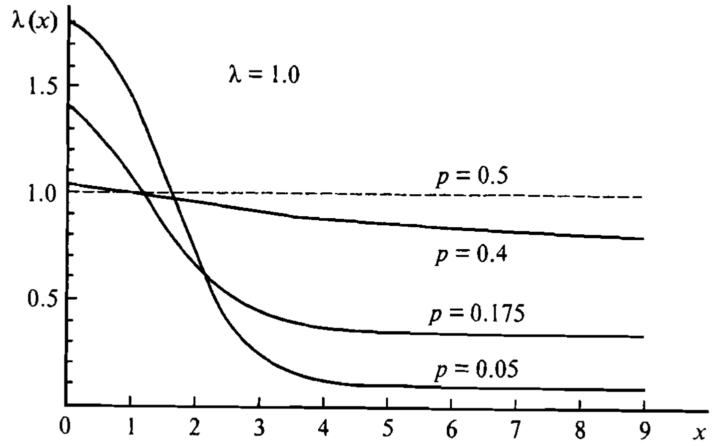


Рис. 3.23. Плотность вероятности и функция риска гиперэкспоненциального распределения второго порядка.

Соотношения между распределениями

1. Пусть X_1 — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda_1 = 2p\lambda$; X_2 — независимая от X_1 случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda_2 = 2(1-p)\lambda$; p — вероятность реализации комплекса условий, с которым связана случайная величина X_1; $(1-p)$ — вероятность реализации комплекса условий, с которым связана случайная величина X_2. Тогда смесь этих случайных величин имеет гиперэкспоненциальное распределение второго порядка с плотностью вероятности (1).

2. Схеме, приводящей к гиперэкспоненциальному распределению второго порядка, можно дать следующее формализованное описание. Пусть I_1 и I_2 — дискретные случайные величины, каждая из которых может принимать значение 0 или 1, причем $P(I_1 = 1) = p$, $P(I_2 = 1) = 1-p$ и $P(I_1 + I_2 = 1) = 1$. Тогда если X_1 и X_2 — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметрами $\lambda_1 = 2p\lambda$ и $\lambda_2 = 2(1-p)\lambda$ соответственно и не зависящие от I_1 и I_2, то случайная величина $X = I_1X_1 + I_2X_2$ имеет гиперэкспоненциальное распределение второго порядка с плотностью вероятности (1).

3. При $p = 0.5$ рассматриваемое распределение совпадает с показательным распределением с параметром λ.

Оценивание параметров

$$\lambda^* = \frac{1}{x^*}, \quad p^* = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{(v_x^*)^2 - 1}{(v_x^*)^2 + 1}}\right).$$

Генерирование случайных чисел

1. $r_1 := \mathrm{rand}$; $r_2 := \mathrm{rand}$;
2. Если $r_1 < p$, то $x = -\dfrac{1}{2p\lambda}\ln r_2$, иначе $x = -\dfrac{1}{2(1-p)\lambda}\ln r_2$.

3.14. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ n-МЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2-1}a^n\Gamma(n/2)}x^{n-1}e^{-x^2/(2a^2)}, \quad x > 0,$$

где n — параметр формы, положительное целое число; a — параметр масштаба ($a > 0$)

Функция распределения
$$F(x)=\Gamma\left(\frac{x^2}{2a^2},\frac{n}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=I\left(\frac{x^2}{2a^2},\frac{n}{2}\right),$$
где $I(x,\alpha)$ — отношение неполной гамма-функции

Характеристическая функция
$$\chi(t)=\frac{(n-1)!}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}D_{-n}(iat)e^{-(at)^2/4},$$
где $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра

Математическое ожидание
$$\bar{x}=a\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}=$$
$$=\begin{cases} a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{(n-1)!!}{(n-2)!!}, & n\text{ — четное}\\ a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{(n-1)!!}{(n-2)!!}, & n\text{ — нечетное}\end{cases}$$

Мода
$$\hat{x}=a\sqrt{n-1}$$

Дисперсия
$$D_x=na^2-\bar{x}^2$$

Стандартное отклонение
$$\sigma_x=\sqrt{na^2-\bar{x}^2}$$

Асимметрия
$$\mathrm{Sk}=\bar{x}\,\frac{2\bar{x}^2-(2n-1)a^2}{D_x^{3/2}}$$

Эксцесс
$$\mathrm{Ex}=\frac{2\bar{x}^2[2(2n-1)a^2-3\bar{x}^2]-2n(n-1)a^4}{D_x^2}$$

Начальные моменты
$$m_2=na^2,\quad m_3=(n+1)a^2\bar{x},$$
$$m_4=n(n+2)a^4,$$
$$m_s=(a\sqrt{2})^s\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

Центральные моменты
$$\mu_3=\bar{x}[2\bar{x}^2-(2n-1)a^2],$$
$$\mu_4=\bar{x}^2[2(n-2)a^2-3\bar{x}^2]+n(n+2)a^4$$

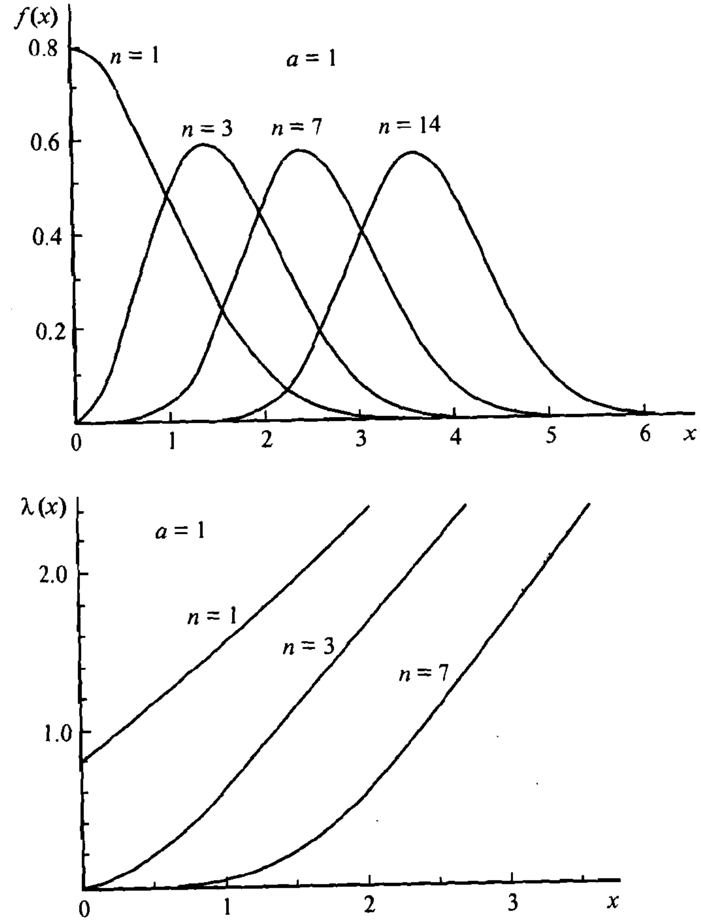


Рис. 3.24. Плотность вероятности и функция риска распределения модуля n-мерного случайного вектора.

Соотношения между распределениями

1. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением a, то случайная величина $X=\sqrt{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}$ имеет распределение модуля n-мерного случайного вектора с параметром масштаба a. Иными словами, рассматриваемое распределение описывает распределение длины n-мерного случайного вектора, координаты которого независимы и подчиняются нормальному распределению с параметрами 0 и a.

2. При $a=1$ распределение модуля n-мерного случайного вектора совпадает с χ-распределением Пирсона с n степенями свободы (см. п. 3.32).

3. Пусть $X(a,n)$ — случайная величина, имеющая распределение модуля n-мерного случайного вектора с параметром масштаба a; $Y(n)$ — случайная величина, имеющая χ-распределение Пирсона с n степенями свободы; $Z(n)$ — случайная величина, имеющая χ^2-распределение Пирсона с n степенями свободы, тогда справедливы следующие утверждения:

$$X(a,n) \sim aY(n) \sim a\sqrt{Z(n)}, \quad X(1,n) \sim Y(n) \sim \sqrt{Z(n)}.$$

Оценивание параметров

При известном n оценивается параметр масштаба a:

$$a^* = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{2}\,\Gamma((n+1)/2)}\bar{x}^* \text{ (ММ)}; \quad a^* = \sqrt{\frac{1}{n}m_2^*} \text{ (ММП)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x = a\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2},$$

где u_i — стандартные нормальные случайные числа ($i=1,2,\ldots,n$).

Таблицы

[7]. Приведены значения функций $I(x,\alpha)$, $1-I(x,\alpha)$, $T(x,\alpha)=I(x,\alpha)/x^\alpha$, $R(y,t)=I(x,\alpha)-\Phi(y)$; 7D.

3.15. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

Плотность вероятности	$f(x)=\frac{x}{a^2}e^{-x^2/(2a^2)}, \quad x>0,$ где a — параметр масштаба, мода ($a>0$)
Функция распределения	$F(x)=1-e^{-x^2/(2a^2)}$
Функция риска	$\lambda(x)=\frac{1}{a^2}x$

Характеристическая функция	$\chi(t)=1+iat\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,w\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$, где $w(z)=e^{-z^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{u^2}du\right)$ — интеграл вероятности комплексного аргумента
Математическое ожидание	$\bar{x}=a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 1.2533a$
Медиана	$x_{0.5}=a\sqrt{\ln 4}\approx 1.1774a$
Мода	$\hat{x}=a$
Дисперсия	$D_x=a^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\approx 0.4292a^2$
Стандартное отклонение	$\sigma_x=a\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}\approx 0.6551a$
Коэффициент вариации	$v_x=\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\approx 0.5227$
Асимметрия	$\mathrm{Sk}=\frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}}\approx 0.6311$
Эксцесс	$\mathrm{Ex}=\frac{6\pi(4-\pi)-16}{(4-\pi)^2}\approx 0.2451$
Начальные моменты	$m_2=2a^2$, $m_3=3\sqrt{\frac{\pi}{2}}a^3\approx 3.7599a^3$, $m_4=8a^4$, $m_s=(a\sqrt{2})^s\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$
Центральные моменты	$\mu_3=a^3(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 0.1775a^3$, $\mu_4=a^4(8-\frac{3\pi^2}{4})\approx 0.5978a^4$
p-квантиль	$x_p=a\sqrt{-2\ln(1-p)}$

Соотношения между распределениями

1. Если X_1, X_2 — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением a, то случайная величина $X=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ имеет распределение Рэлея с параметром масш-

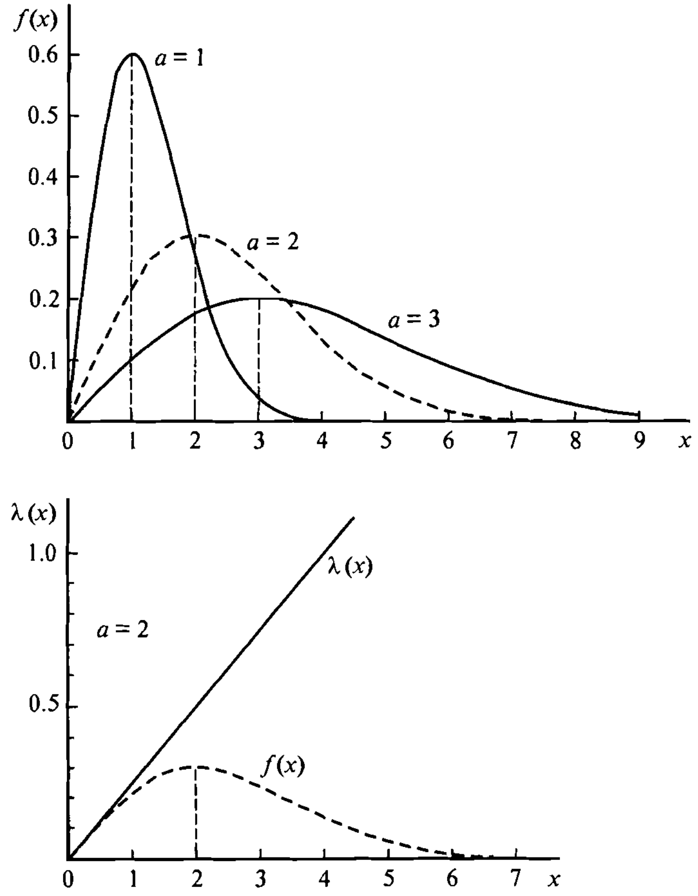


Рис. 3.25. Плотность вероятности и функция риска распределения Рэлея.

таба a. Иными словами, распределение Рэлея описывает распределение длины двумерного случайного вектора, прямоугольные координаты которого независимы и подчиняются нормальному закону распределения с параметрами 0 и a.

2. Распределение Рэлея является частным случаем распределения модуля n-мерного случайного вектора (см. п. 3.14).

3. Связь между распределением Рэлея χ- и χ^2-распределениями Пирсона рассматривается в п. 3.31 и 3.32.

Оценивание параметров

$$a^* = \bar{x}^* \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{(ММ)}; \quad a^* = \sqrt{\frac{m_2^*}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{(ММП)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = a\sqrt{-2\ln r_i}.$$

3.16. ОБОБЩЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ—РАЙСА)

Плотность вероятности

$$f(z) = \frac{z}{a^2} e^{-(z^2+h^2)/(2a^2)} I_0\left(\frac{zh}{a^2}\right), \quad z \ge 0,$$

где a — параметр масштаба ($a > 0$); h — параметр формы ($h > 0$); $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка

Функция распределения

$$F(z) = 1 - e^{-(x+\theta)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!},$$

где $x = z^2/(2a^2)$ и $\theta = h^2/(2a^2)$

Математическое ожидание

$$\bar{z} = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\theta)I_0\left(\frac{\theta}{2}\right) + \theta I_1\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]e^{-\theta/2},$$

где $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка

Мода

$$\hat{z} = \frac{a^2}{h}\xi, \quad \text{где } \xi \text{ — корень уравнения}$$

$$\xi I_1(\xi)/I_0(\xi) = \frac{a^2}{h^2}\xi^2 - 1$$

Дисперсия

$$D_z = 2a^2(1+\theta) - \bar{z}^2$$

Начальные моменты

$$m_2 = 2a^2(1+\theta),$$

$$m_3 = 3a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1 + 2\theta + \frac{2}{3}\theta^2\right)I_0\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{2}{3}\theta(2+\theta)I_1\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]e^{-\theta/2},$$

$$m_4 = 4a^4[(2+\theta)^2 - 2]$$

Соотношения между распределениями

1. Распределение Рэлея—Райса описывает длину Z двумерного случайного вектора, прямоугольные координаты которого являются независимыми нормальными случайными величинами с одинаковыми дисперсиями, равными a^2, и математиче-

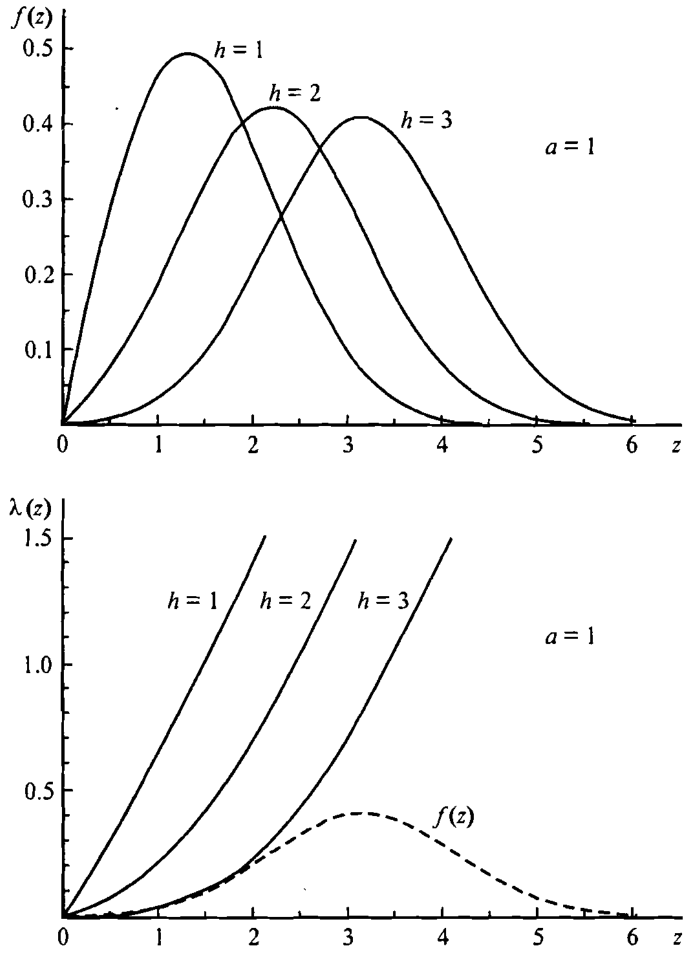


Рис. 3.26. Плотность вероятности и функция риска распределения Рэлея—Райса.

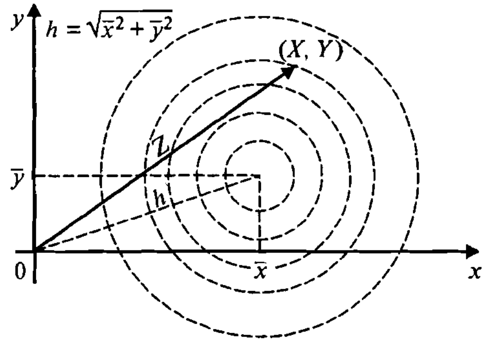


Рис. 3.27. Вероятностная схема, приводящая к распределению Рэлея—Райса.

скими ожиданиями $\bar{x}$ и $\bar{y}$, удовлетворяющими условию $\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=h$ (рис. 3.27).

2. При $h \to 0$ распределение Рэлея—Райса стремится к распределению Рэлея.

Оценивание параметров

На рис. 3.28 приведены графики функций $k_1=\varphi_1(\nu_z)$ и $k_2=\varphi_2(\nu_z)$, позволяющие по известным математическому ожиданию $\bar{z}$ и коэффициенту вариации $\nu_z=\sigma_z/\bar{z}$ случайной величины Z, распределенной по закону Рэлея—Райса, найти параметры этого закона $a=k_1\bar{z}$ и $h=k_2\bar{z}$.

Генерирование случайных чисел

Алгоритм 1

$$z=\sqrt{(h+au_1^2)+(au_2)^2},$$

где u_1 и u_2 — стандартные нормальные случайные числа.

Алгоритм 2

1. $r_1:=\text{rand}$; $r_2:=\text{rand}$;
2. $\alpha:=\sin(2\pi r_1)$; $\beta:=-2\ln r_2$;
3. $z:=\sqrt{h^2+2ah\alpha\sqrt{\beta}+a^2\beta}$.

Таблицы

1. [1]. Приведены значения функции $Q(u,v)=\int\limits_u^\infty \rho e^{-(\rho^2+v^2)/2}\times$ $\times I_0(\rho v)d\rho$, дополняющей до единицы функцию распределения случайной величины U, распределенной по закону Рэлея—Райса с параметром масштаба $a=1$ и параметром формы v.

2. [13]. Даны значения так называемой ***функции кругового накрытия***

$$W(r,h)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(x-h)^2+y^2\le r^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\exp\left(-\frac{(x-h)^2+y^2}{2}\right)dx\,dy$$

для $r=0(0.1)10$ и $h=0(0.1)9.9$; $4D$.

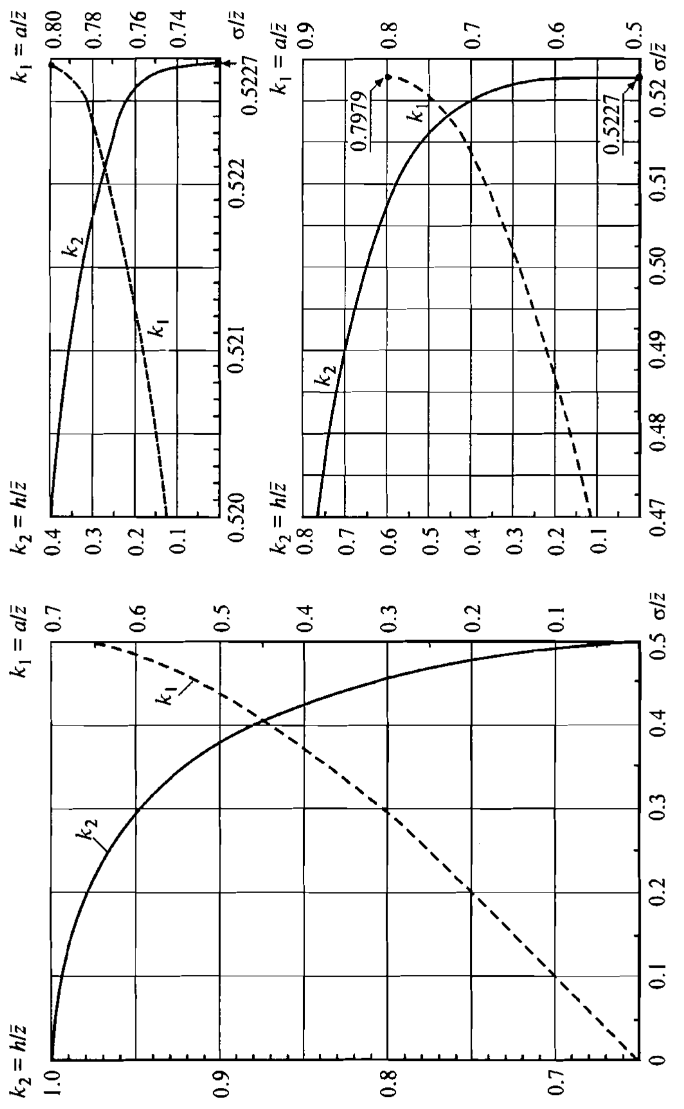


Рис. 3.28. Графики для определения оценок параметров распределения Рэлея—Райса.

3. [6]. Приведены значения функции

$$q\left(\frac{r_d}{\sigma},\frac{D}{\sigma}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{(x-D)^2+y^2>r_d^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{x^2+y^2>r_d^2}\exp\left(-\frac{(x-D)^2+y^2}{2\sigma^2}\right)dx\,dy$$

для $(r_d-D)/\sigma=-3.9(0.1)4.0$ и $D/\sigma=0.0(0.1)6.0(0.5)10.0(1)20;\ 3D$.

Функция $q\left(\frac{r_d}{\sigma},\frac{D}{\sigma}\right)$ дополняет до единицы функцию кругового накрытия

$$p\left(\frac{r_d}{\sigma},\frac{D}{\sigma}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{(x-D)^2+y^2\le r_d^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r_d^2}\exp\left(-\frac{(x-D)^2+y^2}{2\sigma^2}\right)dx\,dy.$$

Техника вычислений

Функция распределения $F(z;a,h)$ распределения Рэлея—Райса с параметром масштаба a и параметром формы h связаны с функциями $Q(u,v)$, $W(r,h)$ и $q\left(\frac{r_d}{\sigma},\frac{D}{\sigma}\right)$ соотношениями

$$F(z;\,a,\,h)=1-Q\left(\frac{z}{a},\,\frac{h}{a}\right)=W\left(\frac{z}{a},\,\frac{h}{a}\right)=1-q\left(\frac{z}{a},\,\frac{h}{a}\right).$$

Для вычисления на ЭВМ значений модифицированных функций Бесселя нулевого и первого порядка можно использовать следующие разложения в степенной ряд:

$$I_0(z)=1+\frac{z^2/4}{(1!)^2}+\frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2}+\frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2}+\frac{(z^2/4)^4}{(4!)^2}+\ldots;$$

$$I_1(z)=\frac{z}{2}\left[1+\frac{z^2/4}{1!2!}+\frac{(z^2/4)^2}{2!3!}+\frac{(z^2/4)^3}{3!4!}+\ldots\right].$$

3.17. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Плотность вероятности

$$f(x)=\frac{2x^2}{a^3\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/(2a^2)},\quad x\ge 0,$$

где a — параметр масштаба ($a>0$)

Функция распределения

$$F(x) = 2\left[\Phi_0\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2a^2)}\right] = 2\left[\Phi_0\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

Характеристическая функция

$$\chi(t) = \left(1 - a^2t^2\right) w\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) + iat\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

где $w(z) = e^{-z^2}\left(1 + \dfrac{2i}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{t^2}dt\right)$ — интеграл вероятности комплексного аргумента

Математическое ожидание

$$\bar{x} = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 1.5958a$$

Медиана

$$x_{0.5} \approx 1.5383a$$

Мода

$$\hat{x} = a\sqrt{2} \approx 1.4142a$$

Дисперсия

$$D_x = \frac{3\pi - 8}{\pi}a^2 \approx 0.4535a^2$$

Стандартное отклонение

$$\sigma_x = a\sqrt{3 - \frac{8}{\pi}} \approx 0.6734a$$

Коэффициент вариации

$$v_x = \sqrt{\frac{3\pi}{8} - 1} \approx 0.4220$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk} = \frac{2\sqrt{2}(16 - 5\pi)}{(3\pi - 8)^{3/2}} \approx 0.4857$$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = \frac{160\pi - 12\pi^2 - 384}{(3\pi - 8)^2} \approx 0.1082$$

Начальные моменты

$$m_2 = 3a^2,\quad m_3 = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}a^3,\quad m_4 = 15a^4,$$

$$m_s = \begin{cases} a^s \dfrac{2^{\frac{s}{2}+1}}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{s+1}{2}\right)!, & s \text{ — нечетное;} \\ a^s (s+1)!!, & s \text{ — четное} \end{cases}$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = a^3(16 - 5\pi)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \approx 0.1483a^3,$$

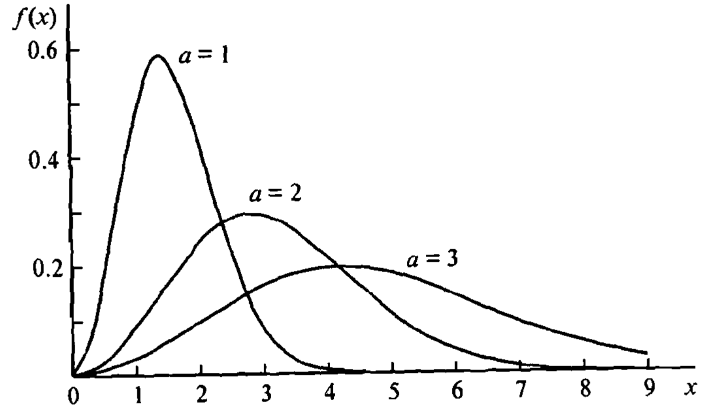
$$\mu_4 = a^4\,\frac{15\pi^2 + 16\pi - 192}{\pi^2} \approx 0.6393a^4$$

p-квантиль

$$x_p = am_p,$$

где m_p — квантиль порядка p распределения Максвелла с параметром масштаба $a = 1$; m_p определяется путем решения уравнения

$$\Phi_0(m_p) - m_p\varphi(m_p) = p/2$$



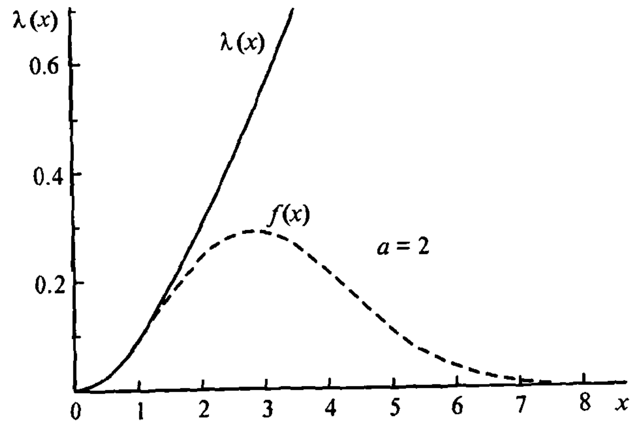


Рис. 3.29. Плотность вероятности и функция риска распределения Максвелла.

Для приближенного решения этого уравнения можно использовать табл. 3.2.

Таблица 3.2

m_p	p	m_p	p	m_p	p	m_p	p
0.1	0.0003	1.1	0.2928	2.1	0.7795	3.1	0.9778
0.2	0.0021	1.2	0.3038	2.2	0.8161	3.2	0.9834
0.3	0.0070	1.3	0.3608	2.3	0.8484	3.3	0.9877
0.4	0.0162	1.4	0.4193	2.4	0.8761	3.4	0.9909
0.5	0.0309	1.5	0.4779	2.5	0.9001	3.5	0.9934
0.6	0.0516	1.6	0.5355	2.6	0.9200	3.6	0.9953
0.7	0.0789	1.7	0.5912	2.7	0.9368	3.7	0.9966
0.8	0.1128	1.8	0.6439	2.8	0.9506	3.8	0.9976
0.9	0.1529	1.9	0.6933	2.9	0.9614	3.9	0.9984
1.0	0.1987	2.0	0.7385	3.0	0.9707	4.0	0.9989

Соотношения между распределениями

1. Если X_1, X_2, X_3 — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением a, то случайная величина $X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$ имеет распределение Максвелла с параметром масштаба a. Иными словами, распределение Максвелла описывает распределение длины трехмерного случайного вектора, прямоугольные координаты которого являются независимыми случайными величинами, распределенными по нормальному закону с параметрами 0 и a.

2. Распределение Максвелла является частным случаем распределения модуля n-мерного случайного вектора (см. п. 3.14).

3. Связь между распределением Максвелла, χ- и χ^2-распределениями Пирсона рассматривается в п. 3.31 и 3.32.

Оценивание параметров

$$a^* = \bar{x}^* \sqrt{\frac{\pi}{8}} \approx 0.6267\bar{x}^* \text{ (ММ)}; \quad a^* = \sqrt{\frac{m_2^*}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ (ММП)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \sqrt{u_{3i-2}^2 + u_{3i-1}^2 + u_{3i}^2},$$

где $u_{3i-2}, u_{3i-1}, u_{3i}$ — стандартные нормальные случайные числа.

Техника вычислений

Плотность вероятности $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ распределения Максвелла связаны с плотностью вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения и функцией Лапласа $\Phi_0(x)$ соотношениями

$$f(x) = \frac{2x^2}{a^3}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{и} \quad F(x) = 2\left[\Phi_0\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{a}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right].$$

При вычислениях по этим формулам можно использовать таблицы плотности вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения и функции Лапласа $\Phi_0(x)$ (см. п. 3.1).

3.18. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАКАГАМИ

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} x^{2\alpha-1} e^{-\alpha x^2/\beta}, \quad x > 0,$$

где β — параметр масштаба, второй начальный момент ($\beta > 0$); α — параметр формы

Функция распределения

$$F(x) = I\left(\frac{\alpha}{\beta}x^2, \alpha\right)$$

Характеристическая функция

$$\chi(t) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} D_{-2\alpha}\left(-it\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}\right) e^{-\beta t^2/(8\alpha)},$$

где $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{\Gamma(\alpha + 0.5)}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Мода

$$\hat{x} = \sqrt{\beta\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)}, \quad \alpha \ge 0.5$$

Дисперсия

$$D_x = \beta - \bar{x}^2$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk} = \frac{\bar{x}[4\alpha\bar{x}^2 - (4\alpha - 1)\beta]}{2\alpha D_x^{3/2}}$$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = \frac{2\bar{x}^2[(4\alpha - 1)\beta - 3\alpha\bar{x}^2] - (2\alpha - 1)\beta^2}{\alpha D_x^2}$$

Начальные моменты

$$m_2 = \beta, \quad m_3 = \frac{1+2\alpha}{2\alpha}\beta\bar{x},$$

$$m_4 = \frac{1+\alpha}{\alpha}\beta^2,$$

$$m_s = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{s/2}\frac{\Gamma(\alpha + s/2)}{\Gamma(\alpha)}$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = \bar{x}\left(2\bar{x}^2 - \frac{4\alpha - 1}{2\alpha}\beta\right),$$

$$\mu_4 = \bar{x}^2\left(\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}\beta - 3\bar{x}^2\right) + \frac{\alpha+1}{\alpha}\beta^2$$

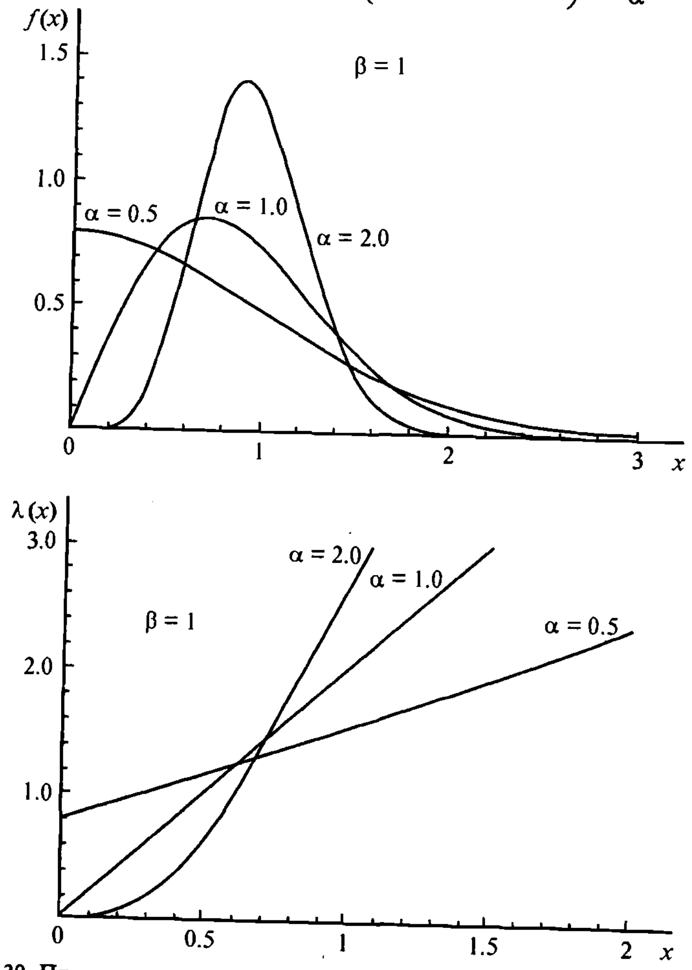


Рис. 3.30. Плотность вероятности и функция риска распределения Накагами.

Квантиль x_p порядка p является корнем уравнения $I\left(\frac{\alpha}{\beta}x_p^2, \alpha\right) = p$.

Соотношения между распределениями

1. При $\alpha = n/2$ и $\beta = na^2$ распределение Накагами совпадает с распределением модуля n-мерного случайного вектора (см. п. 3.14).
2. При $\alpha = 1$ и $\beta = 2a^2$ распределение Накагами совпадает с распределением Рэлея (см. п. 3.15).
3. При $\alpha = 3/2$ и $\beta = 3a^2$ распределение Накагами совпадает с распределением Максвелла (см. п. 3.17).
4. Если случайная величина X подчиняется закону Накагами с параметрами α, β, то случайная величина $Y = X^2$ имеет гамма-распределение с параметром масштаба α/β и параметром формы α.

Оценивание параметров

Оценка параметра масштаба β методом моментов определяется по формуле

$$\beta^* = m_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Оценка параметра формы α является корнем уравнения

$$\sqrt{\frac{\alpha^*\Gamma^2(\alpha^*)}{\Gamma^2(\alpha^* + 0.5)} - 1} = v_x^*.$$

Для приближенного решения этого уравнения может быть использована табл. 3.3.

Генерирование случайных чисел

$$x = \sqrt{y},$$

где y — случайное число, принадлежащее последовательности $\{y_i\}$ случайных чисел, имеющих гамма-распределение с параметром масштаба α/β и параметром формы α (см. п. 3.10).

Таблицы

Могут быть использованы таблицы неполной гамма-функции [7] и [9] (см. п. 3.10).

Таблица 3.3

α	v_x	α	v_x	α	v_x	α	v_x
0.010	5.632	0.11	1.671	0.3	0.990	6	0.206
0.011	5.369	0.12	1.598	0.4	0.851	7	0.191
0.012	5.139	0.13	1.533	0.5	0.756	8	0.178
0.013	4.937	0.14	1.475	0.6	0.686	9	0.168
0.014	4.756	0.15	1.424	0.7	0.632	10	0.159
0.015	4.594	0.16	1.377	0.8	0.588	11	0.152
0.016	4.447	0.17	1.334	0.9	0.553	12	0.145
0.017	4.314	0.18	1.295	1.0	0.523	13	0.139
0.018	4.192	0.19	1.259	1.1	0.497	14	0.134
0.019	4.079	0.20	1.225	1.2	0.475	15	0.130
0.020	3.975	0.21	1.195	1.3	0.455	16	0.125
0.03	3.240	0.22	1.166	1.4	0.438	17	0.122
0.04	2.801	0.23	1.139	1.5	0.422	18	0.118
0.05	2.501	0.24	1.114	2.0	0.363	19	0.115
0.06	2.280	0.25	1.090	2.5	0.323	20	0.112
0.07	2.107	0.26	1.068	3.0	0.294	30	0.091
0.08	1.968	0.27	1.047	3.5	0.272		
0.09	1.853	0.28	1.027	4.0	0.254		
0.10	1.755	0.29	1.008	5.0	0.226		

3.19. БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРОГО РОДА

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(u,v)} \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} x^{u-1}(1+x)^{-(u+v)},\quad x>0,$$

где u, v — параметры формы ($u>0$, $v>0$)

Функция распределения

$$F(x) = I_{x/(1+x)}(u,v),$$

где $I_x(u,v)$ — отношение неполной бета-функции

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{u}{v-1},\quad v>1$$

Мода

$$\hat{x} = \frac{u-1}{v+1},\quad u \ge 1$$

Дисперсия

$$D_x = \frac{u(u+v-1)}{(v-1)^2(v-2)},\quad v>2$$

Стандартное отклонение

$$\sigma_x = \frac{1}{v-1}\sqrt{\frac{u(u+v-1)}{v-2}},\quad v>2$$

Коэффициент вариации

$$v_x = \sqrt{\frac{u+v-1}{u(v-2)}},\quad v>2$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk} = \frac{2(2u+v-1)}{v-3}\sqrt{\frac{v-2}{u(u+v-1)}},\quad v>3$$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = \frac{6\left[(v-1)^2(v-2)+u(5v-11)(u+v-1)\right]}{u(u+v-1)(v-3)(v-4)},$$

$$v>4$$

Начальные моменты

$$m_2 = \frac{(u+1)u}{(v-1)(v-2)},\quad v>2;$$

$$m_3 = \frac{(u+2)(u+1)u}{(v-1)(v-2)(v-3)},\quad v>3;$$

$$m_4 = \frac{(u+3)(u+2)(u+1)u}{(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)},\quad v>4;$$

$$m_s = \frac{(u+s-1)(u+s-2)\,\dots\,u}{(v-1)(v-2)\,\dots\,(v-s)},\quad v>s$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = \frac{2u(u+v-1)(2u+v-1)}{(v-1)^3(v-2)(v-3)},\quad v>3;$$

$$\mu_4 = \frac{3u(u+v-1)\left[u^2(v+5)+u(v+5)(v-1)+2(v-1)^2\right]}{(v-1)^4(v-2)(v-3)(v-4)},$$

$$v>4$$

Квантиль x_p порядка p является корнем уравнения $I_{x/(1+x)}(u,v)=p$.

Соотношения между распределениями

1. Случайная величина X, имеющая бета-распределение второго рода с параметрами u, v, и случайная величина Y, имеющая бета-распределение первого рода с теми же параметрами, связаны между собой соотношениями:

$$X = \frac{Y}{1-Y} \quad \text{и} \quad Y = \frac{X}{1+X}.$$

2. Если u, v — натуральные числа, то случайную величину $X(u,v)$, имеющую бета-распределение второго рода с параметрами u, v, можно представить в виде

$$X(u,\ v) = \chi^2_{2u}/\chi^2_{2v},$$

где χ^2_{2u} и χ^2_{2v} — независимые случайные величины, имеющие χ^2-распределение с числом степеней свободы $2u$ и $2v$ соответственно.

3. Если случайная величина X имеет бета-распределение второго рода с параметрами $u=1$ и $v=\alpha$, то случайная величина $Y = y_0(1+X)$ имеет распределение Парето с параметрами y_0, α.

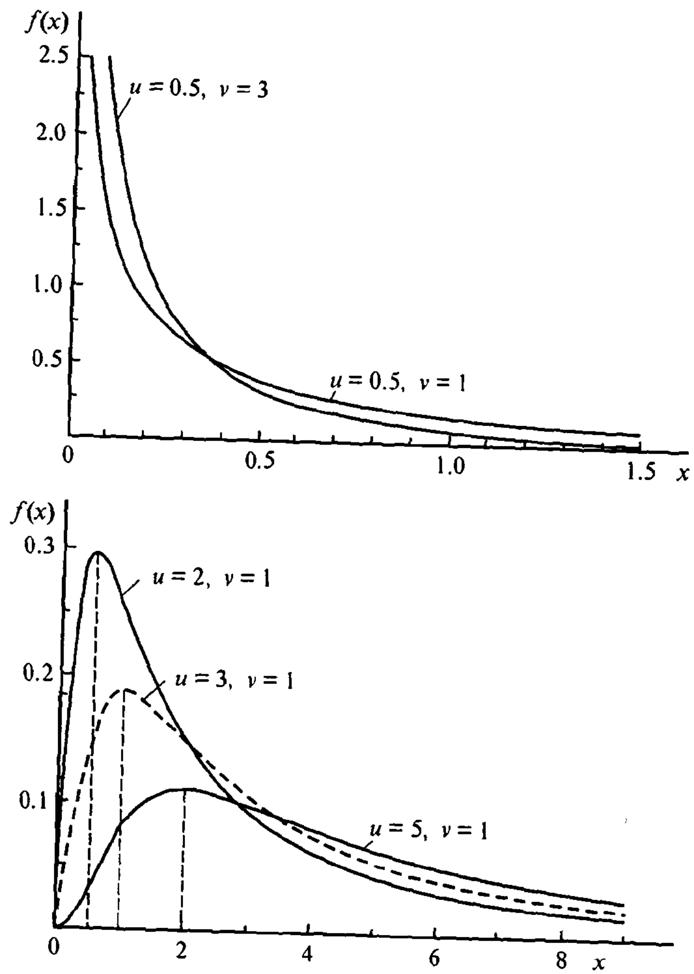


Рис. 3.31. Плотность вероятности бета-распределения второго рода.

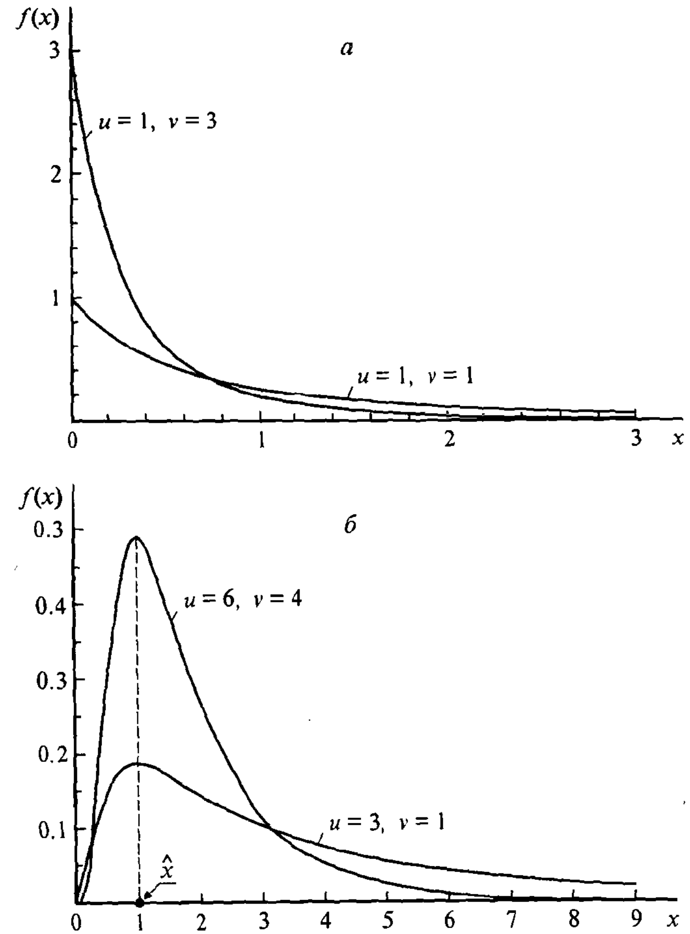


Рис. 3.32. Плотность вероятности бета-распределения второго рода.
a — $u=1$, $\hat{x}=0$; $б$ — $v=u-2$, $\hat{x}=1$.

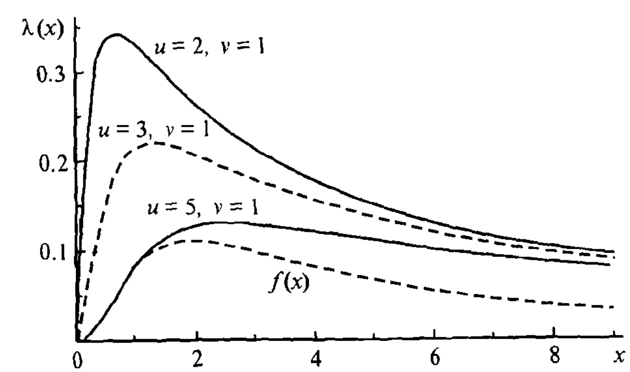


Рис. 3.33. Функция риска бета-распределения второго рода.

Оценивание параметров

$$v_x^* = \frac{\bar{x}^*(\bar{x}^*+1)}{S_x^2} + 2;\ u^* = \bar{x}^*(v_x^*-1)\ \ (\text{ММ}).$$

Генерирование случайных чисел

$$x = \frac{y}{1-y},$$

где y — случайное число из последовательности $\{y_i\}$ случайных чисел, имеющих бета-распределение первого рода с параметрами u, v (см. п. 3.26).

Таблицы

При вычислении функции распределения $F(x)$ могут быть использованы таблицы отношения неполной бета-функции $I_x(u,v)$, приведенные в [8] и [2] (см. п. 3.26).

3.20. ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ (ЛОГНОРМАЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{xa\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[\ln(x/m)]^2}{2a^2}} = \frac{1}{xa\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/m)]^2}{2a^2}\right\},$$

$$x \ge 0,$$

где m — параметр масштаба (медиана); a — параметр формы. Часто вместо m используется другой параметр масштаба $\mu = \ln m$ — математическое ожидание случайной величины $\ln X$. Параметры m и μ связаны соотношениями $m = \exp\mu$, $\mu = \ln m$. Параметр формы a представляет собой стандартное отклонение случайной величины $\ln X (a > 0)$.

Функция распределения $\quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\ln(x/m)}{a}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(x/m)}{a}\right)$

Математическое ожидание	$\bar{x} = me^{a^2/2}$
Медиана	$x_{0.5} = m$
Мода	$\hat{x} = me^{-a^2}$
Дисперсия	$D_x = m^2 e^{a^2}(e^{a^2}-1) = \bar{x}^2\left[\left(\frac{\bar{x}}{m}\right)^2 - 1\right]$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = me^{a^2/2}\sqrt{e^{a^2}-1} = \bar{x}\sqrt{\left(\frac{\bar{x}}{m}\right)^2 - 1}$
Коэффициент вариации	$v_x = \sqrt{e^{a^2}-1} = \sqrt{\left(\frac{\bar{x}}{m}\right)^2 - 1}$
Асимметрия	$\text{Sk} = (e^{a^2}+2)\sqrt{e^{a^2}-1} > 0$
Эксцесс	$\text{Ex} = e^{4a^2} + 2e^{3a^2} + 3e^{2a^2} - 6$
Начальные моменты	$m_2 = m^2 e^{2a^2},\ \ m_3 = m^3 e^{9a^2/2},$ $m_4 = m^4 e^{8a^2},\ \ m_s = m^s e^{s^2 a^2/2}$
Центральные моменты	$\mu_3 = m^3(e^{3a^2} - 3e^{a^2} + 2)\, e^{3a^2/2},$ $\mu_4 = m^4(e^{6a^2} - 4e^{3a^2} + 6e^{a^2} - 3)e^{2a^2}$
p-квантиль	$x_p = m\exp(au_p)$, где u_p — квантиль порядка p стандартного нормального распределения

Точками перегиба функции плотности $f(x)$ являются точки

$$x = m\exp\left(-\frac{3}{2}a^2 \mp a\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}\right) = m\exp\left[\frac{a}{2}\,(-3a \mp \sqrt{a^2+4})\right].$$

Соотношения между распределениями

1. Если случайная величина X имеет логнормальное распределение с параметрами m, a, то случайная величина $Y = \ln X$ подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $\mu = \ln m$ и стандартным отклонением $\sigma = a$.

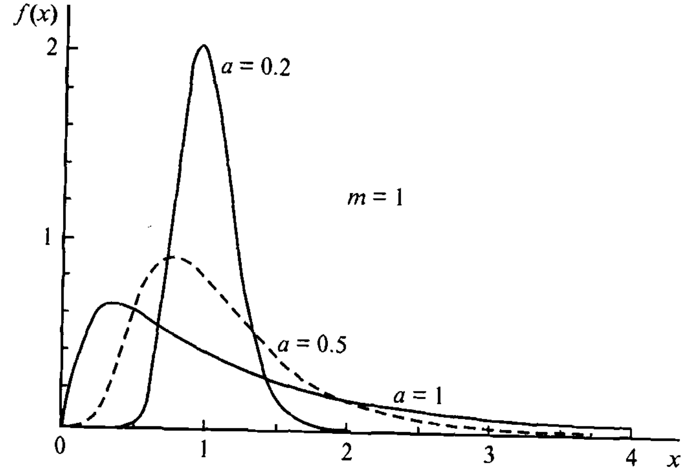
2. Пусть $X(m,a)$ — случайная величина, имеющая логнормальное распределение с параметрами m, a; $Y(\bar{y}, \sigma)$ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $\bar{y}$ и стандартным отклонением σ и $\mu = \ln m$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$X(m,a) \sim \exp[Y(\mu,a)] \sim \exp[\mu + aY(0,1)] \sim m\exp[aY(0,1)];$$

$$\ln X(m,a) \sim Y(\mu,a) \sim \mu + aY(0,1);$$

$$P\{X(m,a) < x\} = P\{\exp[Y(\mu,a)] < x\} = P\{Y(\mu,a) < \ln x\} =$$

$$= P\left\{Y(0,1) < \ln\frac{x-\mu}{a}\right\}.$$



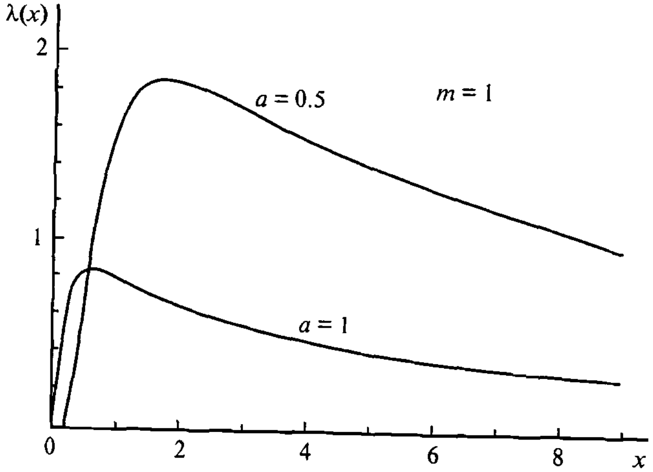


Рис. 3.34. Плотность вероятности и функция риска логарифмически нормального распределения.

3. Произведение независимых случайных величин $X(m_i, a_i)$, имеющих логнормальное распределение с параметрами m_i, a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), подчиняется логарифмически нормальному закону с параметрами $m = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln m_i\right)$ и $a = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$:

$$\prod_{i=1}^{n} X(m_i, a_i) \sim X(m, a).$$

4. Имеет место аналог центральной предельной теоремы: при соблюдении некоторых достаточно общих условий и $n \to \infty$ распределение произведения n независимых положительных случайных величин стремится к логарифмически нормальному распределению.

Оценивание параметров

$$m^* = \frac{\bar{x}^*}{\sqrt{1+\left(\frac{S_x}{\bar{x}^*}\right)^2}}, \quad a^* = \sqrt{\ln\left[1+\left(\frac{S_x}{\bar{x}^*}\right)^2\right]} \quad \text{(ММ)},$$

где $\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^*)^2$;

$$m^* = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right), \quad a^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \ln m^*)^2} \quad \text{(ММ)};$$

$$m^* = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right), \quad a^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \ln m^*)^2} \quad \text{(ММП)}.$$

Параметры m и a можно оценить и с помощью выборочных квантилей:

$$m^* = x_{0.5}^*, \quad a^* = 0.303978\ln\frac{x_{0.95}^*}{x_{0.05}^*},$$

где $x_{0.5}^*$ — выборочная медиана; $x_{0.05}^*$ и $x_{0.95}^*$ — выборочные квантили порядка $p = 0.05$ и $p = 0.95$ соответственно.

Для повышения точности оценивания параметра a можно использовать следующий прием: с помощью формул $a^* = 0.607957\ln\frac{x_{0.5}^*}{x_{0.05}^*}$ и $a^* = 0.607957\ln\frac{x_{0.95}^*}{x_{0.5}^*}$ найти еще две оценки параметра масштаба a и в качестве окончательного варианта оценки взять среднее арифметическое трех оценок.

Подробные рекомендации по определению оценок параметров логнормального распределения и доверительных интервалов для параметров этого распределения приведены в [33].

Генерирование случайных чисел

$$x = \exp(\ln m + au) = m\exp(au),$$

где u — стандартное нормальное случайное число, или

$$x = m\exp\left[a\left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right)\right].$$

Техника вычислений

При вычислениях могут быть использованы таблицы плотности вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения и таблицы функции Лапласа $\Phi_0(x)$. При этом искомые значения функции распределения $F(x;m,a)$ и плотности вероятности $f(x;m,a)$ логнормального распределения с параметрами m, a определяются по формулам

$$F(x;m,a) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\ln x - \mu}{a}\right) \quad \text{и} \quad f(x;m,a) = \frac{1}{ax}\varphi\left(\frac{\ln x - \mu}{a}\right),$$

где $\mu = \ln m$.

При малых a логнормальное распределение близко к нормальному (см. рис. 3.34). Поэтому при $a < 0.13$ допустима приближенная замена логнормального распределения с параметрами m, a нормальным распределением с параметрами $\bar{x} = m\exp(a^2/2)$, $\sigma = ma$. Такой прием, например, используется при нахождении композиции нормального и логнормального распределений с малым значением параметра формы a.

При $a < 0.13$ p-квантиль логнормального распределения

$$x_p \approx u_p + \frac{a}{2}(u_p^2 - 1) + \frac{a^2}{12}(2u_p^3 - 9u_p),$$

где u_p — квантиль порядка p стандартного нормального распределения.

3.21. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЕТО

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, \quad x > x_0,$$

где x_0 — параметр положения, левая граница области возможных значений ($x_0 > 0$); α — параметр формы ($\alpha > 0$)

Функция распределения $F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, \quad x > x_0$

Функция риска $\lambda(x) = \frac{\alpha}{x}, \quad x > x_0$

Математическое ожидание $\bar{x} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}x_0, \quad \alpha > 1$

Медиана $x_{0.5} = x_0 2^{1/\alpha}$

Мода $\hat{x} = x_0$

Дисперсия $D_x = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}x_0^2, \quad \alpha > 2$

Стандартное отклонение $\sigma_x = \frac{x_0}{\alpha - 1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}}, \quad \alpha > 2$

Коэффициент вариации $v_x = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}, \quad \alpha > 2$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha - 3}\sqrt{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}, \quad \alpha > 3$

Эксцесс $\mathrm{Ex} = \frac{6(\alpha^3 + \alpha^2 - 6\alpha - 2)}{\alpha(\alpha - 3)(\alpha - 4)}, \quad \alpha > 4$

Начальные моменты $m_2 = \frac{\alpha}{\alpha - 2}x_0^2, \ \alpha > 2; \quad m_3 = \frac{\alpha}{a - 3}x_0^3, \ \alpha > 3;$

$$m_4 = \frac{\alpha}{\alpha - 3}x_0^4, \ \alpha > 4; \quad m_s = \frac{\alpha}{\alpha - s}x_0^s, \ \alpha > s$$

Центральные моменты $\mu_3 = \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha-1)^3(\alpha-2)(\alpha-3)}x_0^3, \quad \alpha > 3;$

$$\mu_4 = \frac{3\alpha(3\alpha^2 + \alpha + 2)}{(\alpha-1)^4(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}x_0^4, \quad \alpha > 4$$

p-квантиль $x_p = \frac{x_0}{(1-p)^{1/\alpha}}$

Соотношения между распределениями

1. Если случайная величина T имеет бета-распределение второго рода с параметрами $u=1$, $v=\alpha$ (т. е. если $f(\tau)=\alpha(1+\tau)^{-(\alpha+1)}$, $0<\tau<\infty$), то случайная величина $X=1+T$ подчиняется закону Парето с параметром положения $x_0=1$ и параметром формы α.

2. Распределение Парето с параметрами x_0, α представляет собой усечение на интервале (x_0,∞) распределения Парето с параметром положения 1 и параметром формы α.

3. Если случайная величина X имеет распределение Парето с параметрами x_0, α, то случайная величина $Y=(X-x_0)/x_0$ имеет бета-распределение второго рода с параметрами $u=1$, $v=\alpha$.

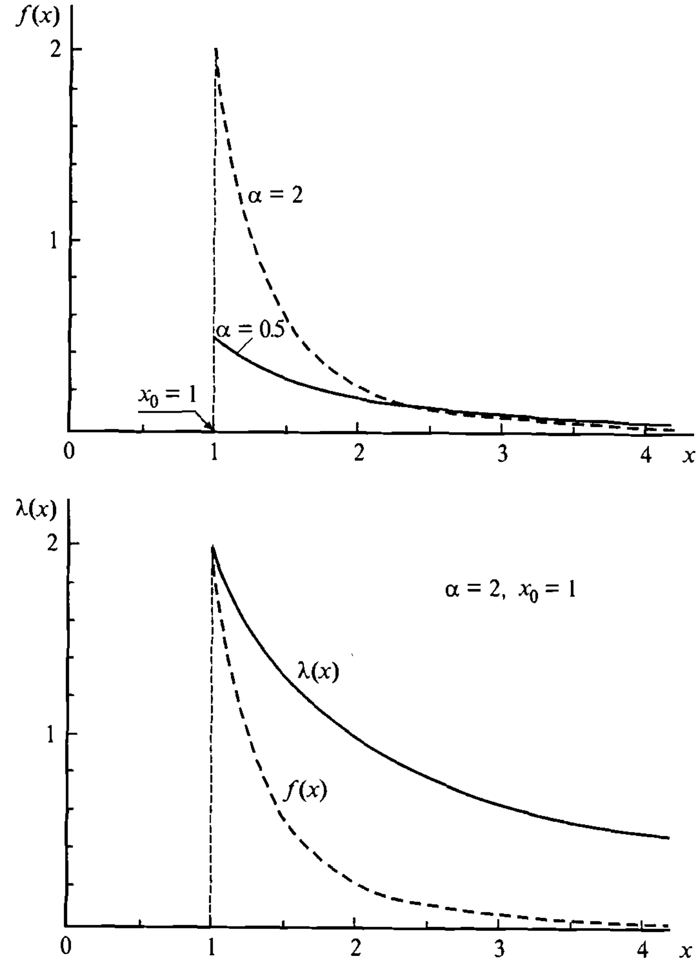


Рис. 3.35. Плотность вероятности и функция риска распределения Парето.

4. Преобразованием $y=x_0/x$ распределение Парето с параметрами x_0, α сводится к бета-распределению первого рода с параметрами $u=\alpha$, $v=1$ (см. п. 3.26).

5. В системе кривых Пирсона распределение Парето принадлежит к распределениям типа VI и XI.

Оценивание параметров

Метод моментов. В классическом виде применяется только при $\alpha>2$. Оценка определяется по формулам

$$\alpha^*=1+\sqrt{1+\frac{(\bar{x}^*)^2}{S_x^2}},\qquad x_0^*=\frac{\alpha^*-1}{\alpha^*}\,\bar{x}^*.$$

При $1<\alpha\le 2$ используется следующая модификация этого метода:

$$\alpha^*=\frac{n\bar{x}^*-x_{(1)}}{n\left[\bar{x}^*-x_{(1)}\right]},\qquad x_0^*=\frac{(a^*/n-1)\;x_{(1)}}{\alpha^* n},$$

где $x_{(1)}$ — минимальный элемент выборки (данная модификация может быть использована и при $\alpha>2$).

Метод максимального правдоподобия:

$$x_0=x_{(1)},\qquad \alpha^*=\frac{1}{\ln(\tilde{x}^*/x_0)},$$

где $\tilde{x}^*=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ — среднее геометрическое элементов выборки.

Метод квантилей:

$$\alpha^*=\frac{\ln\left[(1-p_1)/(1-p_2)\right]}{\ln\left(x^*_{p_1}/x^*_{p_2}\right)},\qquad x_0^*=\frac{x^*_{p_1}(1-p_1)^{1/\alpha^*}+x^*_{p_2}(1-p_2)^{1/\alpha^*}}{2}.$$

Метод наименьших квадратов:

$$\alpha^*=\frac{-n\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\ln\left[1-P^*(x_i)\right]+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left[1-P^*(x_i)\right]\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2},$$

$$x_0^*=\exp\left\{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha^*}\sum_{i=1}^{n}\ln\left[1-P^*(x_i)\right]+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]\right\},$$

где $P^*(x)=P^*(X\le x)$ — частость (относительная частота) события $(X\le x)$, найденная по выборочным данным.

При известном x_0 оценивается параметр формы α:

$$\alpha^* = \frac{\bar{x}^*}{\bar{x}^* - x_0} \text{ (ММ)}, \quad \alpha^* = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln x_0} \text{ (ММП)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x = x_0 r^{-1/\alpha}.$$

3.22. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ НОРМАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ (ОТРАЖЕННОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2a^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+m)^2}{2a^2}\right)\right], \quad x \ge 0,$$

где m — параметр положения, математическое ожидание исходной нормальной случайной величины; a — параметр масштаба, стандартное отклонение исходной нормальной случайной величины ($a > 0$)

Функция распределения

$$F(x) = \Phi_0\left(\frac{x-m}{a}\right) + \Phi_0\left(\frac{x+m}{a}\right)$$

Характеристическая функция

$$\chi(t) = \left[\Phi_0\left(\frac{m}{a} + iat\right)e^{itm} - \Phi_0\left(\frac{m}{a} - iat\right)e^{-itm} + \cos(mt)\right]\exp\left(-\frac{a^2t^2}{2}\right)$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = 2a\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{m^2}{2a^2}\right) + \frac{m}{a}\Phi_0\left(\frac{m}{a}\right)\right] = 2a\left[\varphi(h) + h\Phi_0(h)\right],$$

где $\varphi(x)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $h = m/a$

Медиана — Медиана $x_{0.5}$ является корнем уравнения

$$\Phi_0\left(\frac{x_{0.5} - m}{a}\right) + \Phi_0\left(\frac{x_{0.5} + m}{a}\right) = \frac{1}{2}$$

Мода

$$\hat{x} = \begin{cases} 0, & a \ge m; \\ \frac{a^2}{m}\zeta, & a < m, \end{cases}$$

где ζ — корень уравнения $\zeta \operatorname{cth}\zeta = (m/a)^2$

Дисперсия

$$D_x = a^2 + m^2 - \bar{x}^2 = a^2(1 + h^2 - 4k^2),$$

где $k = \varphi(h) + h\Phi_0(h)$

Начальные моменты

$$m_2 = a^2(1 + h^2),$$
$$m_3 = 2a^3\left[(2 + h^2)\varphi(h) + (3 + h^2)\Phi_0(h)\right],$$
$$m_4 = a^4(3 + 6h^2 + h^4)$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = 2a^3[8k^3 - 2h^2k - \varphi(h)],$$
$$\mu_4 = a^4[3 + 6h^2 + h^4 + 16\varphi(h)k - 8(3 + h^2)k^2 - 48k^4],$$

где $k = \varphi(h) + h\Phi_0(h)$

Квантиль x_p порядка p является корнем уравнения

$$\Phi_0\left(\frac{x_p - m}{a}\right) + \Phi_0\left(\frac{x_p + m}{a}\right) = p.$$

Соотношения между распределениями

Отраженное нормальное распределение с параметрами m, a описывает распределение случайной величины $X = |Y|$, где Y — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием m и стандартным отклонением a.

Оценивание параметров

Сначала путем решения уравнения

$$\frac{[\varphi(h^*) + h^*\Phi_0(h^*)]^2}{1 + (h^*)^2} = \frac{(\bar{x}^*)^2}{4m_2^*} \tag{1}$$

определяется оценка h^* отношения $h = m/a$. Затем по формулам

$$a^* = \sqrt{\frac{m_2^*}{1 + (h^*)^2}} \quad \text{и} \quad m^* = a^*h^*$$

определяются оценки параметров m и a.

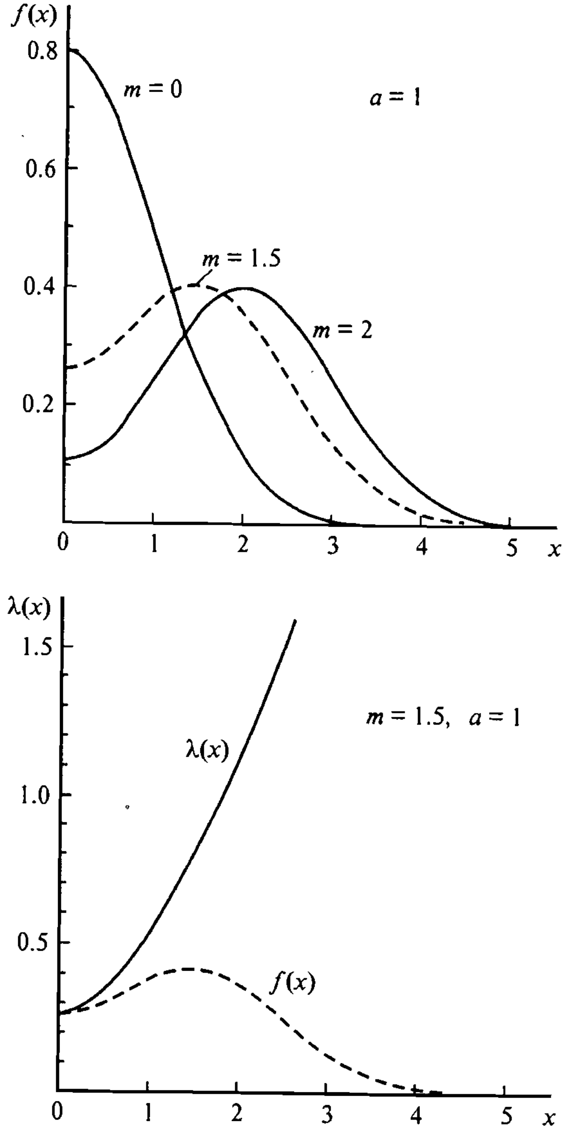


Рис. 3.36. Плотность вероятности и функция риска модуля нормальной случайной величины.

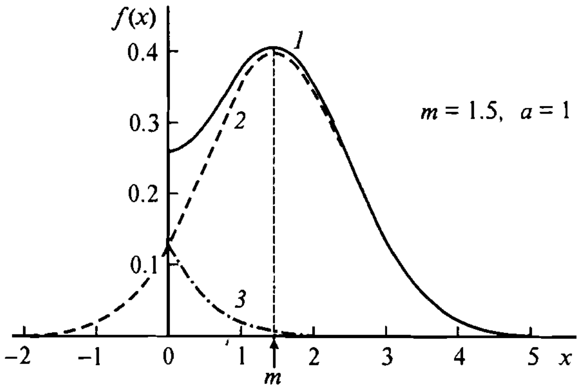


Рис. 3.37. Вероятностная схема, приводящая к отраженному нормальному распределению.

1 — отраженное нормальное распределение; *2* — исходное нормальное распределение с параметрами *m*, *a*; *3* — «отраженная часть» исходного распределения.

Для приближенного решения уравнения (1) может быть использована табл. 3.4.

Таблица 3.4

h	$\psi(h)$	h	$\psi(h)$	h	$\psi(h)$	h	$\psi(h)$
0	$1/(2\pi)$	1.3	0.1798	2.6	0.2183	3.9	0.2346
0.1	0.159158	1.4	0.1833	2.7	0.2202	4.0	0.2353
0.2	0.159195	1.5	0.1869	2.8	0.2220	4.5	0.2382
0.3	0.1593	1.6	0.1904	2.9	0.2236	5.0	0.2404
0.4	0.1597	1.7	0.1938	3.0	0.2251	5.5	0.2420
0.5	0.1604	1.8	0.1971	3.1	0.2265	6.0	0.2432
0.6	0.1615	1.9	0.2004	3.2	0.2278	6.5	0.2442
0.7	0.1630	2.0	0.2034	3.3	0.2290	7.0	0.2450
0.8	0.1650	2.1	0.2063	3.4	0.2301	7.5	0.2456
0.9	0.1674	2.2	0.2090	3.5	0.2311	8.0	0.2462
1.0	0.1701	2.3	0.2116	3.6	0.2321	8.5	0.2476
1.1	0.1732	2.4	0.2140	3.7	0.2330	∞	1/4
1.2	0.1764	2.5	0.2162	3.8	0.2338		

В таблице $\psi(h) = [\varphi(h) + h\Phi_0(h)]^2/(1+h^2)$.

Генерирование случайных чисел

$$x = |m + au| \quad \text{или} \quad x = \left| m + a\left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right)\right|,$$

где u — случайное число стандартной нормальной последовательности.

Таблицы

При вычислениях могут быть использованы таблицы стандартного нормального распределения и таблицы функции Лапласа (см. п. 3.1).

Техника вычислений

Плотность вероятности $f(x)$ отраженного нормального распределения связана с плотностью вероятности $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения соотношением

$$f(x) = \frac{1}{a}\left[\varphi\left(\frac{x-m}{a}\right) + \varphi\left(\frac{x+m}{a}\right)\right].$$

Примечание. В приложениях довольно широко используется отраженное нормальное распределение с параметром положения $m = 0$. Ниже приводятся основные характеристики этого варианта рассматриваемого распределения.

Плотность вероятности	$f(x) = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) = \frac{2}{a}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$, $x \ge 0$, где $\varphi(x)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения
Функция распределения	$F(x) = 2\Phi_0\left(\frac{x}{a}\right)$
Характеристическая функция	$\chi(t) = [1 - 2\Phi_0(iat)]\exp\left(-\frac{a^2t^2}{2}\right)$
Математическое ожидание	$\bar{x} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.7979a$
Медиана	$x_{0.5} = au_{0.75} \approx 0.6745a$, где $u_{0.75}$ — верхняя квартиль стандартного нормального распределения
Мода	$\hat{x} = 0$
Дисперсия	$D_x = a^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \approx 0.3634a^2$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = a\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \approx 0.6028a$

Коэффициент вариации	$v_x = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \approx 0.7555$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{(\pi-2)^{3/2}} \approx 0.9953$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \frac{8(\pi-3)}{(\pi-2)^2} \approx 0.8692$
Начальные моменты	$m_2 = a^2$, $m_3 = a^3\sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 1.5958a^3$, $m_4 = 3a^4$
Центральные моменты	$\mu_3 = a^3\left(\frac{4}{\pi} - 1\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.2180a^3$,
	$\mu_4 = a^4\left(3 - \frac{4}{\pi} - \frac{12}{\pi^2}\right) \approx 0.5109a^4$
p-квантиль	$x_p = au_{(1+p)/2}$, где $u_{(1+p)/2}$ — квантиль порядка $(1+p)/2$ стандартного нормального распределения

Соотношения между распределениями

Случайная величина X, имеющая отраженное нормальное распределение с параметрами $m = 0$, a, и случайная величина Y, имеющая χ-распределение Пирсона с одной степенью свободы, связаны между собой соотношениями $X \sim aY$ и $Y \sim X/a$.

Оценивание параметров

$$a^* = \bar{x}^*\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.2533\bar{x}^* \text{ (ММ)}, \quad a^* = \bar{x}^*\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ (ММП)}.$$

Оценка максимального правдоподобия совпадает с оценкой, получаемой путем приравнивания выборочного и теоретического начальных моментов второго порядка.

Генерирование случайных чисел

$$x = |au| \quad \text{или} \quad x = \left|a\left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right)\right|.$$

3.23. УСЕЧЕННОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (ОДНОСТОРОННЕЕ УСЕЧЕНИЕ)

3.23.1. УСЕЧЕНИЕ СЛЕВА

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\gamma a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2a^2}\right), \quad x \ge \alpha,$$

где α — левая граница области возможных значений случайной величины (*левая точка усечения*); m — параметр положения; a — параметр масштаба ($a > 0$) и $\gamma = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{a}\right)$.

Число $1-\gamma$, равное вероятности того, что исходная (неусеченная) случайная величина окажется вне интервала (α, ∞), называется *степенью усечения*

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\gamma}\left[\Phi_0\left(\frac{x-m}{a}\right) + \Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{a}\right)\right]$$

Характеристическая функция

$$\chi(t) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{a} - iat\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left(imt - \frac{a^2t^2}{2}\right)$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = m + \frac{a}{\gamma}\varphi(u),$$

где $\varphi(u)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $u = (\alpha - m)/a$ — *стандартизированная* (центрированная, нормированная) *точка усечения*

Медиана

Медиана $x_{0.5}$ является корнем уравнения

$$\Phi_0\left(\frac{x_{0.5} - m}{a}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{a}\right)$$

Мода

$$\hat{x} = \begin{cases} m, & \alpha \le m \\ \alpha, & \alpha > m \end{cases}$$

Дисперсия

$$D_x = a^2 + (\bar{x} - \alpha)(m - \bar{x})$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk} = \frac{m - \bar{x}}{\sigma_x}\left[1 - \frac{(\alpha - \bar{x})^2}{D_x}\right]$$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = \frac{m - \bar{x}}{D_x}\left(m - 4\bar{x} + 3\alpha - \frac{(\alpha - x)^2}{D_x}(m - 2\bar{x} + \alpha)\right)$$

Начальные моменты

$$m_2 = m\bar{x} + a^2 + (\bar{x} - m)\alpha,$$
$$m_3 = mm_2 + 2a^2\bar{x} + (\bar{x} - m)\alpha^2,$$
$$m_4 = mm_3 + 3a^2m_2 + (\bar{x} - m)\alpha^3,$$
$$m_s = mm_{s-1} + (s-1)a^2m_{s-2} + (\bar{x} - m)\alpha^{s-1}$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = (m - \bar{x})D_x + (\bar{x} - m)(\alpha - \bar{x})^2,$$
$$\mu_4 = (m - \bar{x})\mu_3 + 3a^2D_x + (\bar{x} - m)(\alpha - \bar{x})^3,$$
$$\mu_s = (m - \bar{x})\mu_{s-1} + (s-1)a^2\mu_{s-2} +$$
$$+ (\bar{x} - m)(\alpha - \bar{x})^{s-1}$$

Оценивание параметров

В том случае, когда точка усечения α известна, для нахождения оценок максимального правдоподобия параметров m и a можно использовать следующие рекуррентные соотношения:

$$u_i = \frac{\alpha - m_i}{a_i}, \quad m_{i+1} = \bar{x}^* - a_i\frac{\varphi(u_i)}{0.5 - \Phi_0(u_i)},$$

$$a_{i+1} = D_x^* + (\bar{x}^* - m_{i+1})^2 - a_i^2\frac{u_i\varphi(u_i)}{0.5 - \Phi_0(u_i)}.$$

Здесь m_i и a_i — i-е приближение оценок максимального правдоподобия параметров m и a; $\varphi(u)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $\Phi_0(u)$ — функция Лапласа; $\bar{x}^*$ и D_x^* — выборочные оценки математического ожидания $\bar{x}$ и дисперсии D_x, найденные по реализациям усеченной нормальной случайной величины.

В качестве «нулевых» (начальных) приближений m_0 и a_0^2 можно использовать выборочные оценки $\bar{x}^*$ и D_x^*. Однако, учитывая эффект левостороннего усечения, m_0 лучше взять несколько меньше $\bar{x}^*$, а в качестве a_0^2 — взять число, немного превосходящее D_x^*.

В том случае, когда точка усечения α неизвестна, а объем выборки достаточно велик, в качестве α можно взять число несколько меньшее наименьшего элемента выборки $x_{(1)}$.

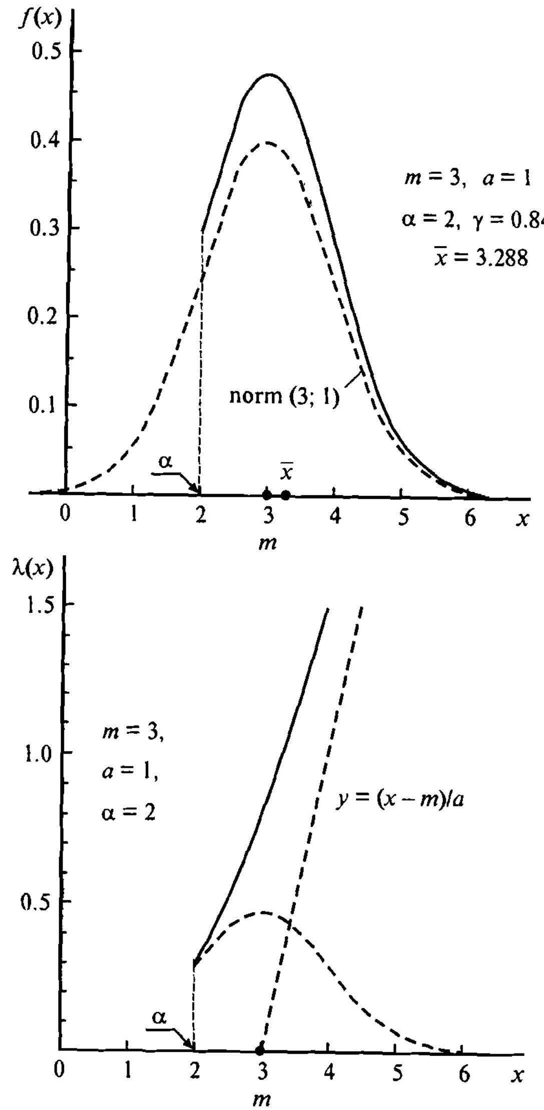


Рис. 3.38. Плотность вероятности и функция риска усеченного нормального распределения (*усечение слева*).

Генерирование случайных чисел

1. u := norm;
2. $y := m + au$;
3. Если $y < \alpha$, то на 1, иначе — на 4;
4. $x := y$.

3.23.2. УСЕЧЕНИЕ СПРАВА

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\gamma a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2a^2}\right), \quad x \le \beta,$$

где β — правая граница области возможных значений случайной величины (*правая точка усечения*); m — параметр положения; a — параметр масштаба ($a > 0$) и $\gamma = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\beta - m}{a}\right)$. Число $1-\gamma$, равное вероятности того, что исходная (неусеченная) случайная величина окажется вне интервала $(-\infty, \beta)$, называется *степенью усечения*

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-m}{a}\right)\right]$$

Характеристическая функция

$$\chi(t) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{a} - iat\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left(imt - \frac{a^2t^2}{2}\right)$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = m - \frac{a}{\gamma}\varphi(u),$$

где $\varphi(u)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $u = (\beta - m)/a$ — *стандартизированная* (центрированная, нормированная) *точка усечения*

Медиана

Медиана $x_{0.5}$ является корнем уравнения

$$\Phi_0\left(\frac{x_{0.5}-m}{a}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Phi_0\left(\frac{\beta-m}{a}\right)$$

Мода

$$\hat{x} = \begin{cases} m, & \beta \ge m; \\ \beta, & \beta < m \end{cases}$$

Дисперсия

$$D_x = a^2 - (\beta - \bar{x})(m - \bar{x})$$

Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \dfrac{m-\bar{x}}{\sigma_x}\left[1 - \dfrac{(\bar{x}-\beta)^2}{D_x}\right]$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \dfrac{m-\bar{x}}{D_x}\left[m - 4\bar{x} + 3\beta - \dfrac{(\beta-\bar{x})^2}{D_x}(m - 2\bar{x} + \beta)\right]$
Начальные моменты	$m_2 = m\bar{x} + a^2 + (\bar{x}-m)\beta,$ $m_3 = mm_2 + 2a^2\bar{x} + (\bar{x}-m)\beta^2,$ $m_4 = mm_3 + 3a^2 m_2 + (\bar{x}-m)\beta^3,$ $m_s = mm_{s-1} + (s-1)a^2 m_{s-2} + (\bar{x}-m)\beta^{s-1}$
Центральные моменты	$\mu_3 = (m-\bar{x})D_x + (\bar{x}-m)(\beta-\bar{x})^2,$ $\mu_4 = (m-\bar{x})\mu_3 + 3a^2 D_x + (\bar{x}-m)(\beta-\bar{x})^3,$ $\mu_s = (m-\bar{x})\mu_{s-1} + (s-1)a^2\mu_{s-2} + (\bar{x}-m)(\beta-\bar{x})^{s-1}$

Оценивание параметров

В том случае, когда точка усечения β известна, для нахождения оценок максимального правдоподобия параметров m и a можно использовать следующие рекуррентные соотношения:

$$u_i = \frac{\beta - m_i}{a_i}, \quad m_{i+1} = \bar{x}^* + a_i\frac{\varphi(u_i)}{\Phi_0(u_i) - 0.5},$$

$$a_{i+1} = D_x^* + (\bar{x}^* - m_{i+1})^2 + a_i^2\frac{u_i\varphi(u_i)}{\Phi_0(u_i) - 0.5}.$$

Здесь m_i и a_i — i-е приближение оценок максимального правдоподобия параметров m и a; $\varphi(u)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $\Phi_0(u)$ — функция Лапласа; $\bar{x}^*$ и D_x^* — выборочные оценки математического ожидания $\bar{x}$ и дисперсии D_x, найденные по реализациям усеченной нормальной случайной величины.

В качестве «нулевых» (начальных) приближений m_0 и a_0^2 можно использовать выборочные оценки $\bar{x}^*$ и D_x^*. Однако, учитывая эффект правостороннего усечения, m_0 лучше взять несколько больше $\bar{x}^*$, а в качестве a_0^2 — взять число, немного превосходящее D_x^*.

В том случае, когда точка усечения β неизвестна, а объем выборки достаточно велик, в качестве β можно взять число несколько большее наибольшего элемента выборки $x_{(n)}$.

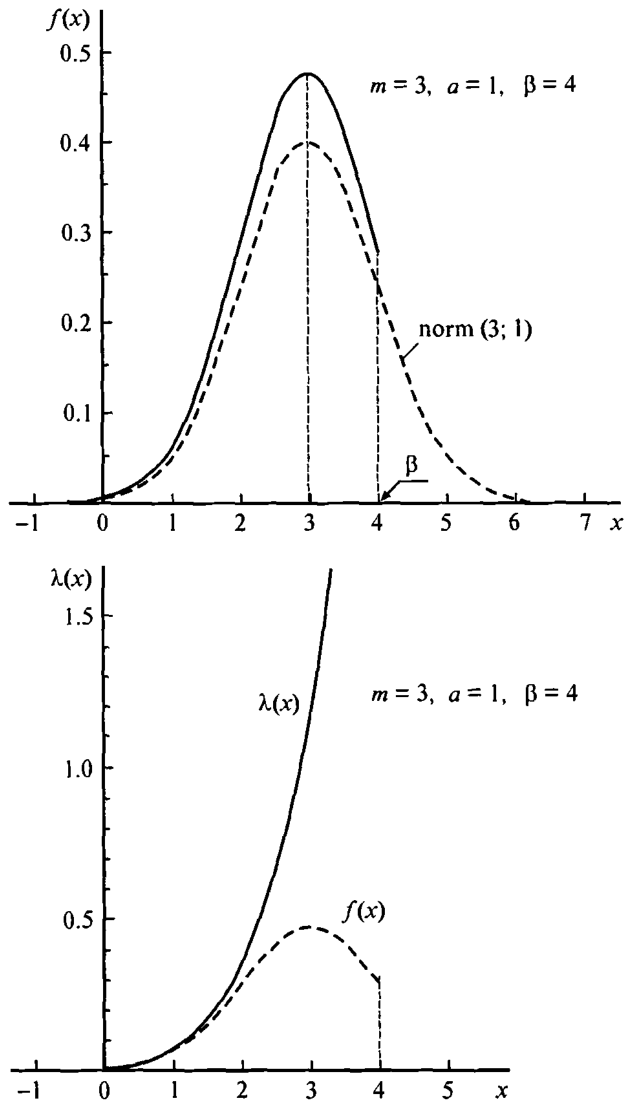


Рис. 3.39. Плотность вероятности и функция риска усеченного нормального распределения (*усечение справа*).

Генерирование случайных чисел

1. $u :=$ norm;
2. $y := m + au$;
3. Если $y > \beta$, то на 1, иначе — на 4;
4. $x := y$.

3.24. ОБРАТНОЕ ГАУССОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВАЛЬДА)

Плотность вероятности

$$f(x)=\sqrt{\frac{c\mu}{2\pi x^3}}\exp\left[-\frac{c}{2}\left(\frac{x}{\mu}+\frac{\mu}{x}-2\right)\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{c\mu}{2\pi x^3}}\exp\left[\frac{c(x-\mu)^2}{2\mu x}\right],\quad x\ge 0,$$

где μ — параметр положения (математическое ожидание); c — параметр формы ($c>0$)

Функция распределения

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0\left[\left(\frac{x}{\mu}-1\right)\sqrt{\frac{c\mu}{x}}\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{2}-\Phi_0\left(\left(\frac{x}{\mu}+1\right)\sqrt{\frac{c\mu}{x}}\right)\right]e^{2c}$$

Математическое ожидание

$$\bar{x}=\mu$$

Мода

$$\hat{x}=\frac{\mu}{2c}\left(\sqrt{9+4c^2}-3\right)$$

Дисперсия

$$D_x=\frac{\mu^2}{c}$$

Стандартное отклонение

$$\sigma_x=\frac{\mu}{\sqrt{c}}$$

Коэффициент вариации

$$v_x=\frac{1}{\sqrt{c}}$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk}=\frac{3}{\sqrt{c}}>0$$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex}=\frac{15}{c}$$

Начальные моменты

$$m_2=\frac{\mu^2}{c}(1+c),\quad m_3=\frac{\mu^3}{c^2}(3+3c+c^2),$$

$$m_4=\frac{\mu^4}{c^3}(15+15c+6c^2+c^3)$$

Центральные моменты

$$\mu_3=\frac{3\mu^3}{c^2},\quad \mu_4=\frac{3\mu^4}{c^3}(5+c)$$

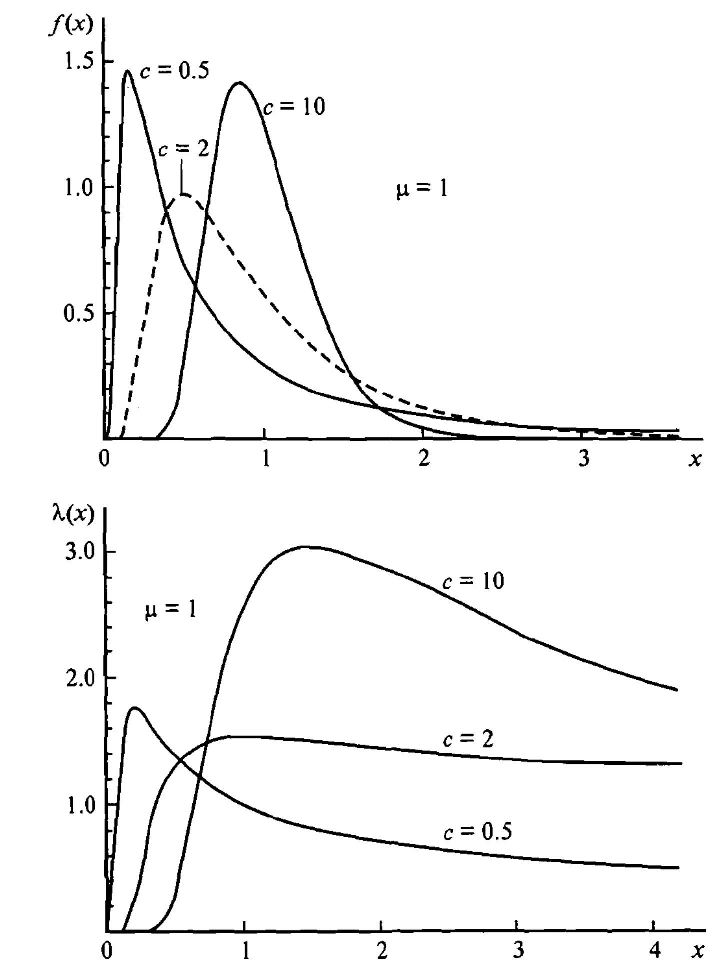


Рис. 3.40. Плотность вероятности и функция риска обратного гауссовского распределения.

Примечание. Обратное гауссовское распределение с параметром положения $\mu=1$ называется *распределением Вальда.*

Соотношения между распределениями

1. Среднее арифметическое n независимых случайных величин, имеющих обратное гауссовское распределение с параметрами μ, c, имеет обратное гауссовское распределение с параметром положения μ и параметром формы nc.

2. Если случайная величина X имеет обратное гауссовское распределение с параметрами μ, c, то случайная величина

$Y = c(X-\mu)^2/(\mu X)$ имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $\nu = 1$.

3. При $c \to \infty$ и фиксированном μ обратное гауссовское распределение стремится к нормальному распределению с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением 1.

4. Если случайная величина X имеет обратное гауссовское распределение с параметрами μ, c, то при $\mu \to \infty$ и $\mu c = \text{const}$ распределение случайной величины $Y = 1/X$ стремится к гамма-распределению с параметром масштаба $\lambda = \mu c/2$ и параметром формы $\alpha = 1/2$.

5. Для случайной величины $X(\mu, c)$, имеющей обратное гауссовское распределение с параметрами μ, c, и случайной величины $X(1, c)$, имеющей распределение Вальда с параметром формы c, справедливы следующие очевидные соотношения:

$$X(\mu,\ c) \sim \mu X(1,\ c) \quad \text{и} \quad X(1,\ c) \sim X(\mu,\ c)/\mu.$$

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^*,\quad c^* = \frac{1}{(v_x^*)^2} \ (\text{ММ});\quad \mu^* = \bar{x}^*,\quad c^* = \frac{1}{\bar{x}^*\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\right)-1} \ (\text{ММП}).$$

Генерирование случайных чисел

Для генерирования случайных чисел могут быть использованы метод исключения (метод Неймана) и метод кусочной аппроксимации плотности распределения (см. [37, с. 288—290, 294—296]).

Таблицы

[5]. Даны значения функции распределения и плотности вероятности обратного гауссовского распределения с параметром положения $\mu = 1$ и параметром формы c (распределение Вальда с параметром c) для $c = 0.01(0.01)0.1(0.1)4.0(0.2)5.0(0.5)10$; $6D$.

Приведены значения моды $\hat{x}$ распределения Вальда и значения плотности вероятности этого распределения в точке $x = \hat{x}$ для $c = 0.0001(0.0001)0.01(0.01)1.0(0.1)6.0(1)54$; $60(10)550$; $800(100)5700$; $60000(10000)550000$; $6D$.

Техника вычислений

При вычислениях могут быть использованы таблицы распределения Вальда [5]. Функция распределения $F(x;\mu,c)$, плотность вероятности $f(x;\mu,c)$ и мода $\hat{x}_\Gamma$ обратного гауссовского

распределения с параметрами μ, c связаны с функцией распределения $F(x;\ 1,\ c)$, плотностью вероятности $f(x;\ 1,\ c)$ и модой $\hat{x}_\text{В}$ распределения Вальда соотношениями:

$$F(x;\ \mu,\ c) = F\left(\frac{x}{\mu};\ 1,\ c\right),\quad f(x;\ \mu,\ c) = \frac{1}{\mu} f\left(\frac{x}{\mu};\ 1,\ c\right),\quad \hat{x}_\Gamma = \mu\hat{x}_\text{В}.$$

При больших x для вычисления функции распределения Вальда $F(x;\ 1,\ c)$ можно использовать приближенную формулу

$$F(x;\ 1,\ c) \approx 1 - \exp\left(-\frac{c}{2}(x-2)\right)\ln x.$$

В. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ОГРАНИЧЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

3.25. РАВНОМЕРНОЕ (ПРЯМОУГОЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности	$f(x) = \dfrac{1}{\beta-\alpha}$, $\alpha \le x \le \beta$, где α, β — границы области возможных значений случайной величины. Левая граница α области возможных значений случайной величины является параметром положения, а длина $\beta-\alpha$ области возможных значений — параметром масштаба
Функция распределения	$F(x) = \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$
Функция риска	$\lambda(x) = \dfrac{1}{\beta-x}$
Характеристическая функция	$\chi(t) = \dfrac{e^{i\beta t} - e^{i\alpha t}}{i(\beta-\alpha)t}$
Математическое ожидание	$\bar{x} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$
Медиана	$x_{0.5} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$
Мода	Нет
Дисперсия	$D_x = \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$
Коэффициент вариации	$v_x = \dfrac{\beta-\alpha}{(\beta+\alpha)\sqrt{3}}$
Срединное отклонение	$E = \dfrac{\beta-\alpha}{4}$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = 0$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = -1.2$
Начальные моменты	$m_2 = \dfrac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)},\quad m_3 = \dfrac{\beta^4-\alpha^4}{4(\beta-\alpha)},$ $m_4 = \dfrac{\beta^5-\alpha^5}{5(\beta-\alpha)},\quad m_s = \dfrac{\beta^{s+1}-\alpha^{s+1}}{(s+1)(\beta-\alpha)}$
Центральные моменты	$\mu_3 = 0,\quad \mu_4 = \dfrac{(\beta-\alpha)^4}{80},$ $\mu_s = \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ \dfrac{(\beta-\alpha)^s}{2^s(s+1)}, & s \text{ — четное} \end{cases}$
p-квантиль	$x_p = \alpha + (\beta-\alpha)p$

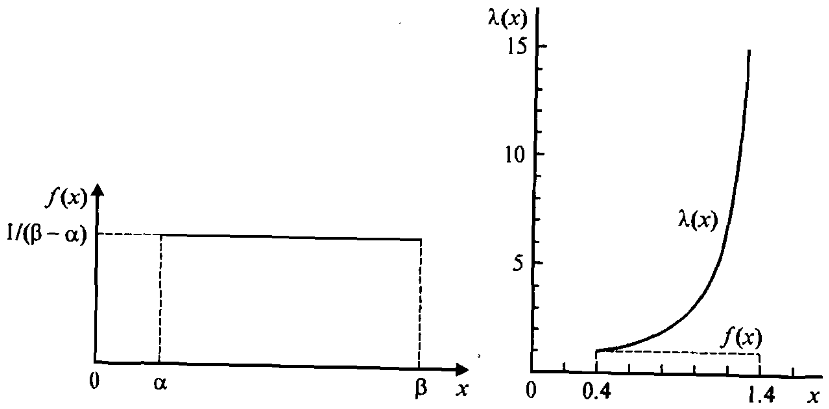


Рис. 3.41. Плотность вероятности и функция риска равномерного распределения.

Соотношения между распределениями

1. С помощью линейного преобразования $R = (X-\alpha)/(\beta-\alpha)$ распределение, равномерное в интервале $[\alpha,\ \beta]$, сводится к распределению, равномерному в интервале $[0,\ 1]$.

2. Если случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F_x(x)$, то случайная величина $R = F_x(X)$ имеет равномерное распределение в интервале $[0, 1]$. Это обстоятельство широко используется в имитационном (статистическом) моделировании.

3. Равномерное распределение является частным случаем обобщенного бета-распределения (см. п. 3.26.1).

4. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же непрерывную функцию распределения. Тогда распределение дробной части их суммы сходится к равномерному на интервале $[0, 1]$ распределению.

5. С ростом числа n слагаемых распределение случайной величины $\sqrt{\dfrac{12}{n}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} R_i - \dfrac{n}{2}\right)$ быстро сходится к стандартному нормальному распределению. (Здесь R_i — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

6. Пусть случайные величины X и Y имеют абсолютно непрерывное совместное распределение. Тогда при $t \to \infty$ распределение дробной части случайной величины $Xt + Y$ сходится к равномерному на интервале $[0, 1]$ распределению.

Оценивание параметров

$$\alpha^* = \bar{x}^* - \sqrt{3}\,S_x,\quad \beta^* = \bar{x}^* + \sqrt{3}\,S_x \quad \text{(ММ)},$$

$$\alpha^* = x_{(1)},\qquad \beta^* = x_{(n)} \quad \text{(ММП)},$$

где $x_{(1)}$ — минимальный и $x_{(n)}$ — максимальный элементы выборки.

Обе оценки максимального правдоподобия смещенные. Несмещенные оценки определяются по формулам

$$\alpha^* = x_{(1)} - \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1},\quad \beta^* = x_{(n)} + \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x = \alpha + (\beta-\alpha)r.$$

О генерировании случайных чисел r, равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$, см. [40], [43] и [14].

3.26. БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА

3.26.1. КЛАССИЧЕСКОЕ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{B(u,v)} x^{u-1}(1-x)^{v-1} = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} x^{u-1}(1-x)^{v-1},\ 0<x<1,$$

где u, v — параметры формы ($u>0, v>0$);

$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt$ — бета-функция (эйлеров интеграл первого рода)

Функция распределения

$F(x) = I_x(u,v)$,

где $I_x(u,v) = \frac{1}{\mathrm{B}(u,v)} \int_0^x t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$ — отношение неполной бета-функции

Характеристическая функция

$$\chi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(u+1)\dots(u+k-1)}{(u+v)(u+v+1)\dots(u+v+k-1)} \frac{(it)^k}{k!} = M(u, u+v; it),$$

где $M(a, b; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{u}{u+v}$$

Медиана

Медиана $x_{0.5}$ является корнем уравнения $I_{x_{0.5}}(u, v) = 0.5$

Мода

$$\hat{x} = \frac{u-1}{(u-1)+(v-1)} = \frac{u-1}{u+v-2}$$

($u \geq 1, v > 1$ или $u > 1, v \geq 1$)

Антимода (для U-образного распределения)

$$\check{x} = \frac{1-u}{(1-u)+(1-v)} = \frac{1-u}{2-u-v}$$

($u < 1$, $v < 1$)

Дисперсия

$$D_x = \frac{uv}{(u+v)^2(u+v+1)}$$

Стандартное отклонение

$$\sigma_x = \frac{1}{u+v}\sqrt{\frac{uv}{u+v+1}}$$

Коэффициент вариации

$$v_x = \sqrt{\frac{v}{u(u+v+1)}}$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk} = \frac{2(v-u)}{u+v+2}\sqrt{\frac{u+v+1}{uv}}$$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = \frac{6\left[(u-v)^2(u+v+1) - uv(u+v+2)\right]}{uv(u+v+2)(u+v+3)}$$

Начальные моменты

$$m_2 = \frac{u(u+1)}{(u+v)(u+v+1)},$$

$$m_3 = \frac{u(u+1)(u+2)}{(u+v)(u+v+1)(u+v+2)},$$

$$m_4 = \frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{(u+v)(u+v+1)(u+v+2)(u+v+3)},$$

$$m_s = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{u+k}{u+v+k}$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = \frac{2uv(v-u)}{(u+v)^3(u+v+1)(u+v+2)},$$

$$\mu_4 = \frac{3uv\left[2(v-u)^2 + uv(u+v+2)\right]}{(u+v)^4(u+v+1)(u+v+2)(u+v+3)}$$

Квантиль x_p порядка p вычисляется путем решения уравнения $I_{x_p}(u,v) = p$.

Соотношения между распределениями

1. При $u = v = 1$ бета-распределение совпадает с распределением, равномерным на интервале [0, 1].

2. При $u = v = 1/2$ бета-распределение совпадает с распределением арксинуса с параметром положения $\mu = 1/2$ и параметром масштаба $\lambda = 1/2$.

При $u = 1-\alpha$ и $v = \alpha$ бета-распределение называется *обобщенным распределением арксинуса* (см. п. 3.28).

3. Бета-распределение соответствует распределению типа I в системе кривых Пирсона.

4. Если независимые случайные величины Y и Z имеют гамма-распределение с параметром масштаба $\lambda = 1$ и параметрами формы u и v соответственно, то случайная величина

$X = Y/(Y+Z)$ имеет бета-распределение первого рода с параметрами u, v.

5. Если случайная величина X имеет бета-распределение первого рода с параметрами u, v, то случайная величина $Z = X/(1-X)$ имеет бета-распределение второго рода с параметрами u, v, а случайная величина $U = (1-X)/X$ имеет бета-распределение второго рода с параметрами v, u.

6. Случайная величина $F(m,n)$, распределенная по закону Фишера—Снедекора с m, n степенями свободы, и случайная величина $X(m/2, n/2)$, имеющая бета-распределение первого рода с параметрами $u = m/2, v = n/2$, связаны между собой следующим образом:

$$P\{F(m,n) < x\} = P\left\{X\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right) < \frac{mx}{n+mx}\right\} = I_{mx/(n+mx)}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right).$$

Эта формула позволяет находить значения функции распределения Фишера—Снедекора с помощью таблиц отношения неполной бета-функции $I(u,v)$ (см., например, [8]).

7. Случайная величина $T(\text{v})$, распределенная по закону Стьюдента с v степенями свободы, и случайная величина $X(\text{v}/2, 1/2)$, имеющая бета-распределение первого рода с параметрами $u = \text{v}/2$, $v = 1/2$, связаны между собой соотношениями:

$$P\{T(\text{v}) < t\} = 1 - \frac{1}{2}P\left\{X\left(\frac{\text{v}}{2},\frac{1}{2}\right) > \frac{\text{v}}{\text{v}+t^2}\right\} = 1 - \frac{1}{2}I_{\text{v}/(\text{v}+t^2)}\left(\frac{\text{v}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

$$P\{|T(\text{v})| < t\} = 1 - P\left\{X\left(\frac{\text{v}}{2},\frac{1}{2}\right) > \frac{\text{v}}{\text{v}+t^2}\right\} = 1 - I_{\text{v}/(\text{v}+t^2)}\left(\frac{\text{v}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

8. Для биномиальной случайной величины $Y(n,p)$ и случайной величины $X(y, n-y+1)$, имеющей β-распределение первого рода с параметрами $u = y$, $v = n-y+1$, справедливо соотношение

$$P\{Y(n,\ p) \ge y\} = P\{X(y,\ n-y+1) < p\},\quad y = 0, 1, \ldots, n.$$

9. Для случайной величины $Z(m,\ p)$, имеющей отрицательное биномиальное распределение 1 с параметрами m, p, и случайной величины $X(u,\ v)$, имеющей бета-распределение первого рода с параметрами u, v, справедливы соотношения

$$P\{Z(m,p) \ge z\} = P\{X(z,m) < 1-p\} = 1 - P\{X(m,z) < p\}.$$

10. Если u и v — натуральные числа, то случайную величину $X(u,v)$, имеющую бета-распределение первого рода с параметрами u, v, можно представить в виде отношения

$$X(u,v) = \frac{Z(2u)}{Z(2u)+Z(2v)},$$

где $Z(2u)$ и $Z(2v)$ — независимые случайные величины, имеющие χ^2-распределение с числом степеней свободы $2u$ и $2v$ соответственно.

11. Бета-распределение появляется, например, как распределение порядковых статистик. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и равномерно распределены на интервале [0, 1] и $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ — упорядоченные по возрастанию величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то k-я порядковая статистика $X_{(k)}$ имеет бета-распределение первого рода с параметрами $u = k$ и $v = n-k+1$.

Оценивание параметров

$$u^* = \bar{x}^*\left[\frac{\bar{x}^*(1-\bar{x}^*)}{S_x^2} - 1\right],\quad v^* = (1-\bar{x}^*)\left[\frac{\bar{x}^*(1-\bar{x}^*)}{S_x^2} - 1\right]\ \text{(ММ)}.$$

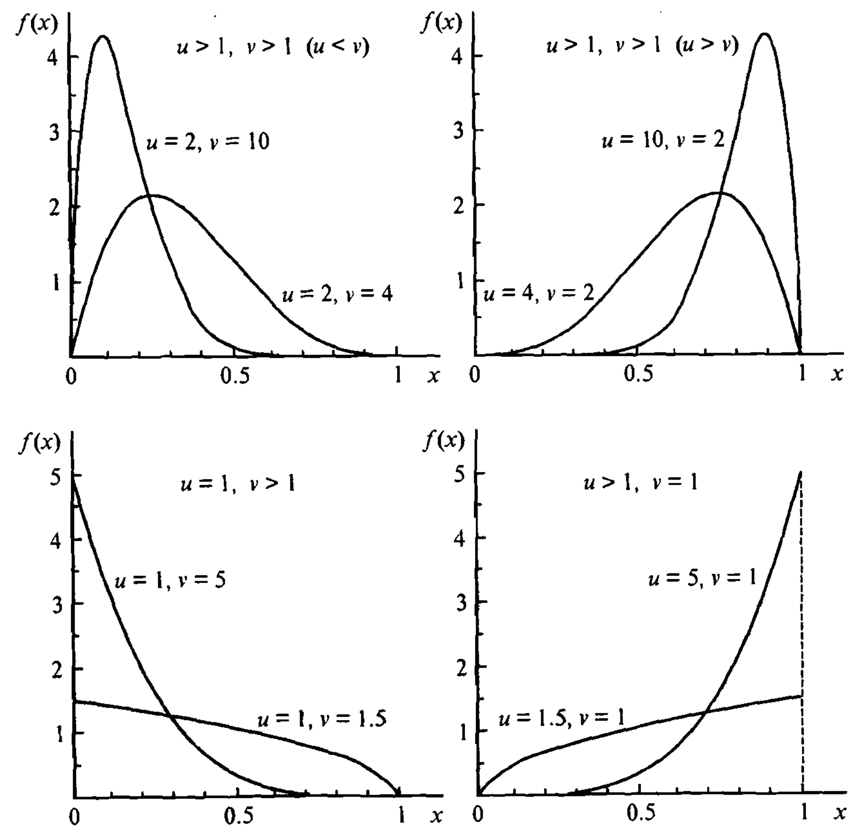


Рис. 3.42. Плотность вероятности бета-распределения первого рода.

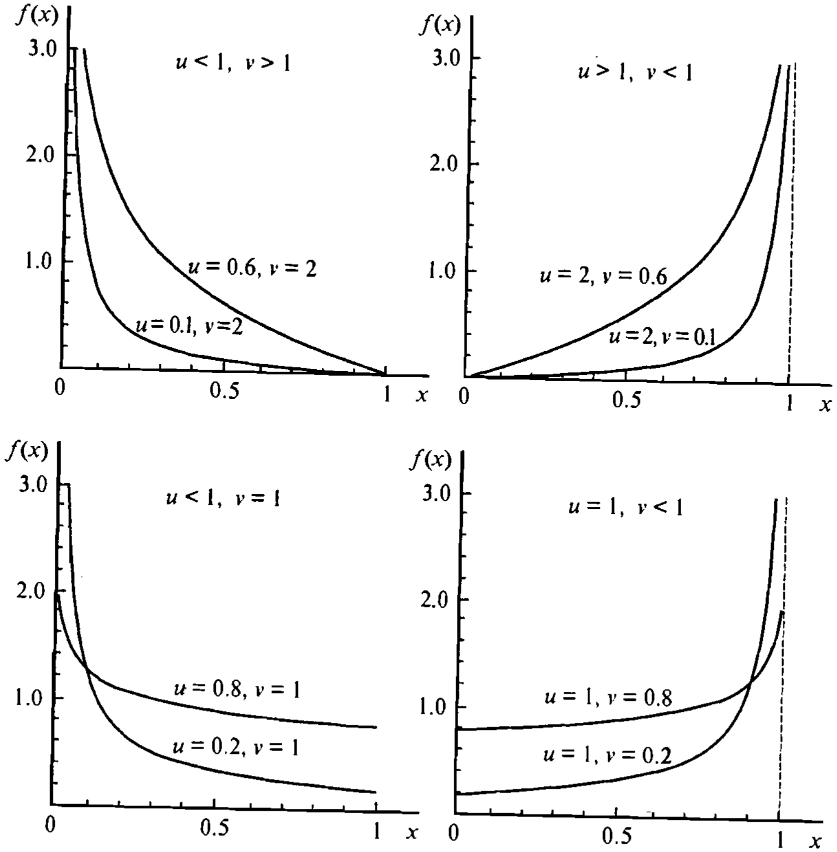


Рис. 3.42 (*продолжение*).

Генерирование случайных чисел

Алгоритм 1 (алгоритм Йонка):

1. $r_1 := \text{rand}$; $r_2 := \text{rand}$;
2. $S_1 := r_1^{1/u}$; $S_2 := r_2^{1/v}$;
3. Если $S_1 + S_2 < 1$, то на 4, иначе — на 1;
4. $x := S_1 / (S_1 + S_2)$.

Алгоритм 2 $(u > 1, v > 1)$:

1. $r_1 := \text{rand}$; $r_2 := \text{rand}$;
2. $\xi := r_1$; $\eta := r_2 h$;
3. $y := k\xi^{u-1}(1-\xi)^{v-1}$;
4. Если $\eta \le y$, то на 5, иначе — на 1;
5. $x := \xi$.

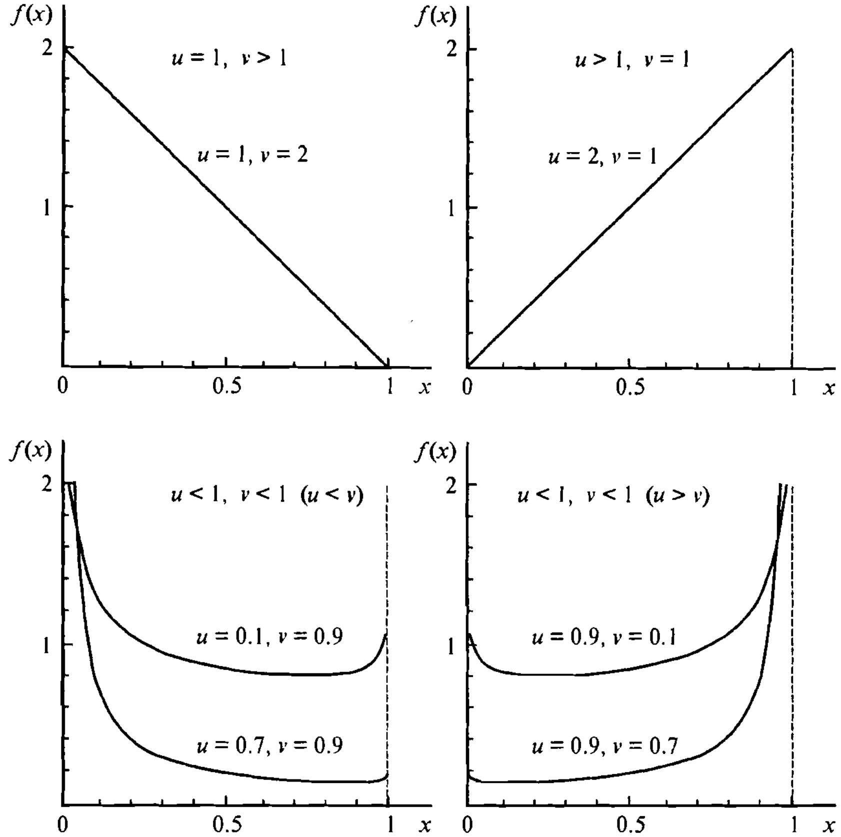


Рис. 3.42 (*продолжение*).

Здесь $k = \dfrac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)}$ и $h = \max\limits_{0<x<1} f(x) = \dfrac{k(u-1)^{u-1}(v-1)^{v-1}}{(u+v-2)^{u+v-2}}$.

Если параметры u и v — натуральные числа, то для генерирования случайных чисел могут быть использованы формулы:

$$x = \frac{\ln(r_1\ r_2 \ldots r_u)}{\ln(r_1 \ldots r_u r_{u+1} \ldots r_{u+v})} \quad \text{или} \quad x = \frac{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2u}^2}{u_1^2 + \ldots + u_{2u}^2 + u_{2u+1}^2 + \ldots + u_{2(u+v)}^2},$$

где $u_1, u_2, \ldots$ — стандартные нормальные случайные числа.

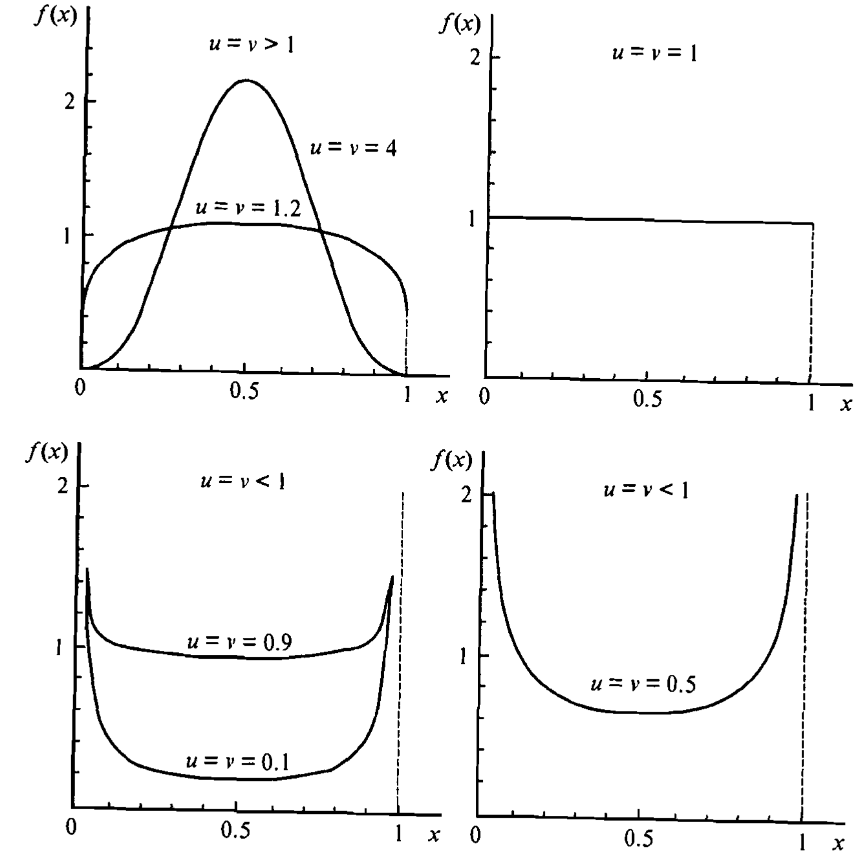


Рис. 3.42 (*продолжение*).

Таблицы

1. [8]. Приведены значения отношения неполной бета-функции $I_x(u,v)$ для $x = 0.01(0.01)1$; $u, v = 0.5(0.5)11(1)50$; $u \geq v$; $7S$.

2. [2, с. 179—181, табл. 3.3а, 3.3б]. Даны значения вспомогательных функций, предназначенных для вычисления отношения неполной бета-функции $I_x(u,v)$.

[2, с. 182—199, табл. 3.4]. Приведены значения p-квантилей бета-распределения для $p = 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, 0.0025, 0.001$; $\nu_1 = 2v = 1(1)10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$ и $\nu_2 = 2u = 1(1)30, 40, 60, 120, \infty$; $5S$.

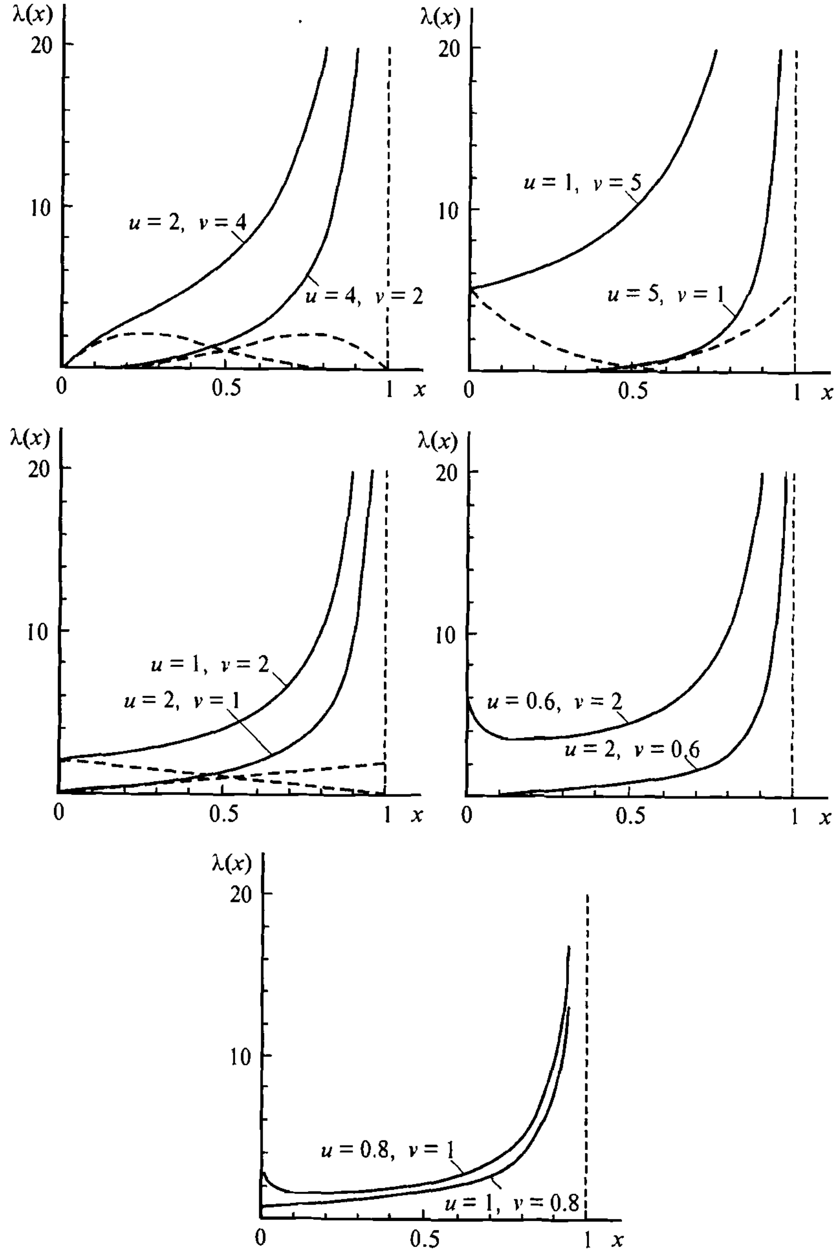


Рис. 3.43. Функция риска бета-распределения первого рода.

Техника вычислений

Бета-функция $B(u,v)$ «симметрична» относительно своих аргументов:

$$B(u, v) = B(v, u).$$

Она связана с гамма-функцией соотношением

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Если u и v — натуральные числа, то

$$B(u, v) = \frac{(u-1)!(v-1)!}{(u+v-1)!}.$$

Таблицы отношения неполной бета-функции [8] составлены для $u \geq v$. Для вычисления значений функции $I_x(u, v)$ при $u < v$ используется тождество

$$I_x(u, v) \equiv 1 - I_{1-x}(v, u).$$

Из этого тождества следует, что p-квантиль $x(p;\ u,\ v)$ бета-распределения с параметрами u, v и $(1-p)$-квантиль $x(1-p;\ v,\ u)$ бета-распределения с параметрами v, u связаны между собой соотношением

$$x(p;\ u,\ v) + x(1-p;\ v,\ u) \equiv 1.$$

В связи с этим для вычисления квантилей бета-распределения во всем диапазоне (0, 1) изменений p достаточно иметь таблицу квантилей только для $p \leq 0.5$.

Для облегчения расчетов, связанных с бета-распределением, следует шире использовать стандартные программные средства ЭВМ (см., например, [46], стандартная подпрограмма BDTR, или [41], функция INCOMPLETE_BETA(x,z,w)).

Для вычисления значений функции распределения $F(x;\ u,\ v) = I_x(u, v)$ удобно использовать разложение функции $I_x(u, v)$ в ряд Маклорена

$$I_x(u,v) = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)}\frac{x^u}{u}\left[1 + u\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-v)(2-v)\ldots(i-v)}{(u+i)\cdot i!}x^i\right]. \quad (1)$$

При $0.5 < x < 1$ для ускорения сходимости ряда (1) целесообразно воспользоваться разложением функции $I_{1-x}(v,u) = 1 - I_x(u, v)$. Первые 10 членов разложения (1) обеспечивают относительную погрешность $|\delta| < 10^{-4}$ (равномерно по u и v), а 14 членов разложения обеспечивают относительную погрешность $|\delta| < 10^{-5}$.

Если параметр формы $v > 1$, то с помощью рекуррентной формулы

$$I_x(u, v) = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)}\frac{x^u(1-x)^{v-1}}{u} + I_x(u+1, v-1)$$

следует уменьшить значение параметра v так, чтобы оно стало меньше единицы (при этом значение параметра u возрастет, что также ускорит сходимость ряда (1)).

Для вычисления p-квантили $x(p;\ u,\ v)$ можно использовать приближенную формулу

$$x(p;\ u,\ v) \approx \frac{u}{u + v\exp(2\omega)},$$

где

$$\omega = \frac{u_{1-p}\sqrt{a+c}}{a} - b\left(c - \frac{2}{3a} + \frac{5}{6}\right), \quad a = \frac{(2u-1)(2v-1)}{u+v-1},$$

$$b = \frac{2(u-v)}{2(u-1)(2v-1)}, \quad c = \frac{u_{1-p}^2 - 3}{6},$$

u_{1-p} — квантиль порядка $1-p$ стандартного нормального распределения, и приближенную формулу

$$x(p;u,v) \approx \frac{2\cdot z(p;\ 2u)}{\frac{2}{t} + z(p;2u) - \frac{\left\{2(u^2-1) + (u-1)\cdot z(p;2u) - [z(p;2u)]^2\right\}t}{6}},$$

где $t = \frac{1}{2v+u-1}$, $z(p;\ 2u)$ — квантиль порядка p ($100(1-p)$-процентная точка) χ^2-распределения с $\nu = 2u$ степенями свободы.

3.26.2. ОБОБЩЕННОЕ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности

$$f(y) = \frac{1}{B(u,v)}\frac{(y-\alpha)^{u-1}(\beta-y)^{v-1}}{(\beta-\alpha)^{u+v-1}}$$

$$(\alpha < y < \beta),$$

где u, v — параметры формы ($u > 0, v > 0$); α, β — границы области возможных значений случайной величины ($\alpha < \beta$)

Функция распределения

$$F(y) = I_{\frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}}(u, v)$$

Характеристическая функция

$$\chi(t)=\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u(u+1)\ldots(u+k-1)}{(u+v)(u+v+1)\ldots(u+v+k-1)}\,\frac{[i(\beta-\alpha)t]^k}{k!}\right]e^{i\alpha t}=$$

$$=e^{i\alpha t}M\bigl(u,\,u+v;\,i(\beta-\alpha)t\bigr)$$

Математическое ожидание $\quad \bar{y}=\dfrac{\alpha v+\beta u}{u+v}$

Мода $\quad \hat{y}=\dfrac{\alpha(v-1)+\beta(u-1)}{u+v-2}$

$(u\ge 1,\ v>1$ или $u>1,\ v\ge 1)$

Антимода (для U-образного распределения) $\quad \check{y}=\dfrac{\alpha(1-v)+\beta(1-u)}{2-u-v}$

$(u<1,\ v<1)$

Дисперсия $\quad D_y=\dfrac{(\beta-\alpha)^2uv}{(u+v)^2(u+v+1)}$

Асимметрия $\quad \mathrm{Sk}=\dfrac{2(v-u)}{u+v+2}\sqrt{\dfrac{u+v+1}{uv}}$

Эксцесс $\quad \mathrm{Ex}=\dfrac{6\left[(u-v)^2(u+v+1)-uv(u+v+2)\right]}{uv(u+v+2)(u+v+3)}$

Начальные моменты

$$m_s=\frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)}\sum_{k=0}^{s}C_s^k(\beta-\alpha)^k\alpha^{s-k}\,\frac{\Gamma(u+k)}{\Gamma(u+v+k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}C_s^k\alpha^k(\beta-\alpha)^{s-k}\prod_{i=0}^{s-1-k}\frac{u+i}{u+v+i}+\alpha^s$$

Центральные моменты

$$\mu_s=(\beta-\alpha)^s\frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k\left(\frac{u}{u+v}\right)^k\frac{\Gamma(u+s-k)}{\Gamma(u+v+s-k)}=$$

$$=(\beta-\alpha)^s\left[\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^kC_s^k\left(\frac{u}{u+v}\right)^k\prod_{i=0}^{s-1-k}\frac{u+i}{u+v+i}+(-1)^s\left(\frac{u}{u+v}\right)^s\right]$$

Квантиль y_p порядка p вычисляется путем решения уравнения $I_{(y_p-\alpha)/(\beta-\alpha)}(u,\,v)=p$.

Соотношения между распределениями

1. Обобщенное бета-распределение описывает распределение случайной величины $Y=\alpha+(\beta-\alpha)X$, представляющей собой линейную функцию случайной величины X, которая имеет классическое бета-распределение первого рода с параметрами $u,\ v\ (\beta>\alpha)$.

2. Если случайная величина Y имеет обобщенное бета-распределение с параметрами $\alpha,\ \beta,\ u,\ v$, то случайная величина $X=(Y-\alpha)/(\beta-\alpha)$ имеет классическое бета-распределение первого рода с параметрами $u,\ v$.

Оценивание параметров

Случай первый. Неизвестны все четыре параметра: $\alpha,\ \beta,\ u,\ v$.

а) Используя выборочные оценки параметров $\beta_1=(\mathrm{Sk})^2$ и $\beta_2=\mathrm{Ex}+3$, вычислить:

$$r=\frac{6(\beta_2-\beta_1-1)}{3\beta_1-2\beta_2+6}\quad\text{и}\quad \varepsilon=\frac{r^2}{\left[\dfrac{\beta_1(r+2)^2}{4(r+1)}+4\right]}.$$

б) Найти корни квадратного уравнения $z^2-rz+\varepsilon=0$:

$$z_1=\frac{r-\sqrt{r^2-4\varepsilon}}{2},\quad z_2=\frac{r+\sqrt{r^2-4\varepsilon}}{2}.$$

в) Если $\mathrm{Sk}>0$, то $u=z_1,\ v=z_2$, иначе — $u=z_2,\ v=z_1$.

г) Найти границы распределения:

$$\alpha=\bar{y}-\sqrt{(u+v+1)\frac{u}{v}D_y}\,,\quad \beta=\bar{y}+\sqrt{(u+v+1)\frac{v}{u}D_y}\,.$$

Случай второй. Известна левая граница α распределения, параметры $\beta,\ u,\ v$ неизвестны.

а) Используя выборочные оценки числовых характеристик $m_1\equiv\bar{y},\ m_2,\ m_3$, вычислить:

$$m_1'=m_1-\alpha,\quad m_2'=m_2-2\alpha m_1+\alpha^2,\quad m_3'=m_3-3\alpha m_2+3\alpha^2m_1-\alpha^3.$$

б) Найти вспомогательные параметры

$$\lambda_1=\frac{(m_1')^2}{m_2'}\quad\text{и}\quad \lambda_2=\frac{m_1'm_2'}{m_3'}\,.$$

в) Вычислить параметры формы

$$u=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{1-2\lambda_1+\lambda_2},\quad v=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{2\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}-u.$$

г) Найти правую границу распределения

$$\beta=\alpha+m_1'\frac{u+v}{u}.$$

При $\alpha=0$ процедура нахождения параметров β, u, v заметно упрощается:

$$\lambda_1=\frac{m_1^2}{m_2},\quad \lambda_2=\frac{m_1m_2}{m_3};\qquad u=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{1-2\lambda_1+\lambda_2},$$

$$v=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{2\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}-u;\quad \beta=m_1\frac{u+v}{u}.$$

Случай третий. Известна правая граница β распределения, параметры α, u, v неизвестны.

а) Используя выборочные оценки числовых характеристик $m_1\equiv\bar{y}$, m_2, m_3, вычислить:

$$m_1'=\beta-m_1,\ \ m_2'=\beta^2-2\beta m_1+m_2,\ \ m_3'=\beta^3-3\beta^2m_1+3\beta m_2-m_3.$$

б) Найти вспомогательные параметры

$$\lambda_1=\frac{(m_1')^2}{m_2'}\ \text{ и }\ \lambda_2=\frac{m_1'm_2'}{m_3'}.$$

в) Вычислить параметры формы

$$v=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{1-2\lambda_1+\lambda_2},\quad u=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{2\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}-v.$$

г) Найти левую границу распределения

$$\alpha=\beta-m_1'\frac{u+v}{u}.$$

Случай четвертый. Известны границы α,β распределения, параметры u, v неизвестны.

Оценки параметров вычисляются по формулам

$$u=\frac{\bar{y}-\alpha}{\beta-\alpha}\left[\frac{(\bar{y}-\alpha)(\beta-\bar{y})}{\sigma_y^2}-1\right],$$

$$v=\frac{\beta-\bar{y}}{\beta-\alpha}\left[\frac{(\bar{y}-\alpha)(\beta-\bar{y})}{\sigma_y^2}-1\right].$$

Примечание. Для упрощения записей в приведенных выше формулах в символах, обозначающих выборочные числовые характеристики случайной величины Y, опущен верхний индекс (*).

Генерирование случайных чисел

$$y=\alpha+(\beta-\alpha)x,$$

где x — реализация случайной величины X, имеющей классическое бета-распределение первого рода с параметрами u, v (см. п. 3.26.1).

Техника вычислений

Функция распределения $F_y(y)$ и функция плотности $f_y(y)$ обобщенного бета-распределения с параметрами α, β, u, v связаны с функцией распределения $F_x(x)$ и функцией плотности $f_x(x)$ классического бета-распределения первого рода с параметрами u, v соотношениями

$$F_y(y)=F_x\left(\frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=I_{(y-\alpha)/(\beta-\alpha)}(u,v),$$

$$f_y(y)=\frac{1}{\beta-\alpha}f_x\left(\frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}\right).$$

3.27. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Плотность вероятности

$$f(x)=\frac{6(x-\alpha)(\beta-x)}{(\beta-\alpha)^3},\quad \alpha\le x\le\beta,$$

где α,β — границы области возможных значений случайной величины ($\alpha<\beta$). В данном случае α — параметр положения; $(\beta-\alpha)$ — параметр формы

Функция распределения

$$F(x)=\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)-6\alpha\beta x+3(\alpha+\beta)x^2-2x^3}{(\beta-\alpha)^3}$$

Характеристическая функция

$$\chi(t)=36e^{i\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[i(\beta-\alpha)t]^k}{k!(3+k)!}$$

Математическое ожидание	$\bar{x} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$
Медиана	$x_{0.5} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$
Мода	$\hat{x} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{(\beta - \alpha)^2}{20}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\beta - \alpha}{2\sqrt{5}}$
Коэффициент вариации	$v_x = \dfrac{\beta - \alpha}{(\alpha + \beta)\, 2\sqrt{5}}$
Срединное отклонение	$E = (\beta - \alpha)\sin\dfrac{\pi}{18} \approx 0.1736\,(\beta - \alpha)$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = 0$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = -\dfrac{6}{7} \approx -0.8571$
Начальные моменты	$m_2 = \dfrac{3\alpha^2 + 4\alpha\beta + 3\beta^2}{10}$,
	$m_3 = \dfrac{2\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 2\beta^3}{10}$,
	$m_4 = \dfrac{5\alpha^4 + 8\alpha^3\beta + 9\alpha^2\beta^2 + 8\alpha\beta^3 + 5\beta^4}{35}$,
	$m_s = 6\sum\limits_{k=0}^{s} \dfrac{C_s^k (\beta - \alpha)^k \alpha^{s-k}}{(2+k)(3+k)}$
Центральные моменты	$\mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \dfrac{3}{560}(\beta - \alpha)^4$
p-квантиль	$x_p = \dfrac{\alpha + \beta}{2} + (\beta - \alpha)\sin\left(\dfrac{1}{3}\arcsin(2p - 1)\right)$

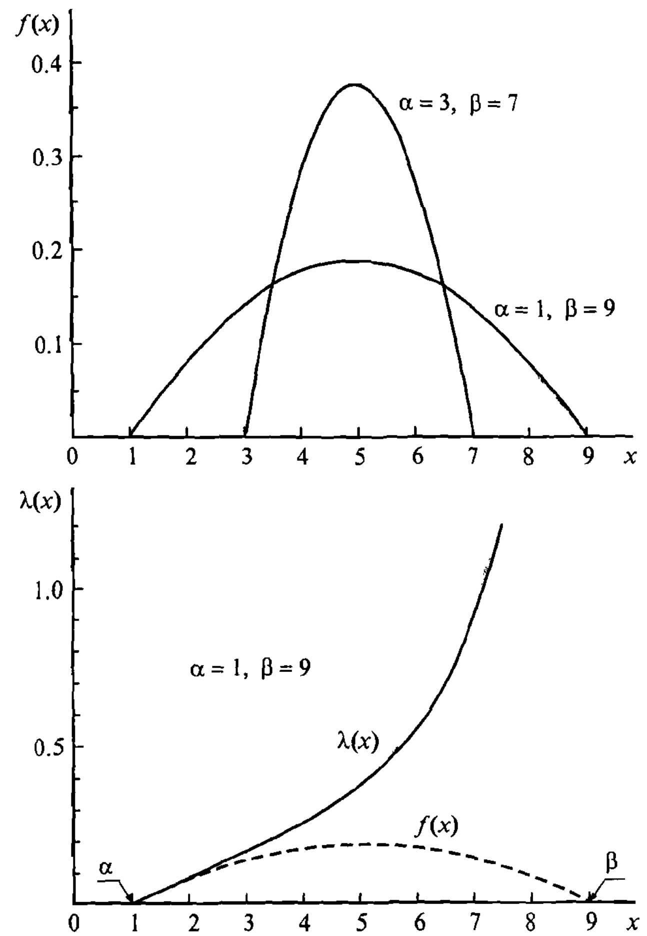


Рис. 3.44. Плотность вероятности и функция риска параболического распределения.

Соотношения между распределениями

1. Параболическое распределение является частным случаем обобщенного бета-распределения первого рода при $u = 2$ и $v = 2$.

2. Если случайная величина Y имеет бета-распределение первого рода с параметрами $u = 2$ и $v = 2$, то случайная величина $X = \alpha + (\beta - \alpha)Y$ имеет параболическое распределение с параметрами α, β.

Оценивание параметров

$$\alpha^* = \bar{x}^* - \sqrt{5}\,S_x; \quad \beta^* = \bar{x}^* + \sqrt{5}\,S_x \quad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x = \frac{\ln(r_1 r_2)}{\ln(r_1 r_2 r_3 r_4)}.$$

3.28. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АРКСИНУСА

Плотность вероятности	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{\lambda^2 - (x-\mu)^2}}$ (1) $(\mu - \lambda < x < \mu + \lambda)$, где μ — параметр положения, математическое ожидание; λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$)
Функция распределения	$F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x-\mu}{\lambda}$
Характеристическая функция	$\chi(t) = e^{i\mu t} J_0(\lambda t)$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка
Математическое ожидание	$\bar{x} = \mu$
Медиана	$x_{0.5} = \mu$
Антимода	$\check{x} = \mu$
Дисперсия	$D_x = \dfrac{\lambda^2}{2}$
Стандартное отклонение	$\sigma_x = \dfrac{\lambda}{\sqrt{2}} \approx 0.7071\lambda$
Срединное отклонение	$E = \dfrac{\lambda}{\sqrt{2}} \approx 0.7071\lambda$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = 0$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = -1.5$
Начальные моменты	$m_2 = \mu^2 + \dfrac{\lambda^2}{2}$, $m_3 = \mu\left(\mu^2 + \dfrac{3}{2}\lambda^2\right)$, $m_4 = \mu^2(\mu^2 + 3\lambda^2) + \dfrac{3}{8}\lambda^4$
Центральные моменты	$\mu_3 = 0$, $\mu_4 = \dfrac{3}{8}\lambda^4$, $\mu_s \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ \dfrac{(s-1)!!}{s!!}\lambda^s, & s \text{ — четное} \end{cases}$
p-квантиль	$x_p = \mu + \lambda \sin[\pi(p - 0.5)]$

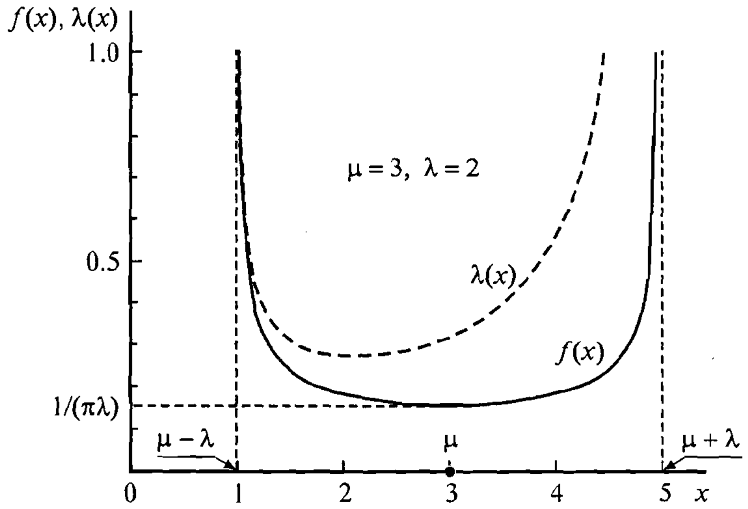


Рис. 3.45. Плотность вероятности и функция риска распределения арксинуса.

Соотношение между распределениями

1. Пусть случайная величина Y распределена равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Тогда при любом y_0 случайная величина $X = \mu + \lambda \sin(Y + y_0)$ распределена по закону арксинуса с параметром положения μ и параметром масштаба λ.

2. Распределение арксинуса является частным случаем бета-распределения первого рода (см. п. 3.26.1).

Оценивание параметров

$$\mu^* = \bar{x}^*, \quad \lambda^* = \sqrt{2}\, S_x \quad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x = \mu + \lambda \sin[\pi(r - 0.5)].$$

Примечание. В [21] в качестве распределения арксинуса приводится распределение с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x - x^2}}, \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

которое является частным случаем распределения арксинуса с плотностью (1) при $\mu = \lambda = 1/2$. Там же рассматривается *обобщенное распределение арксинуса* с плотностью вероятности

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} x^{-\alpha}(1 - x)^{\alpha - 1}, \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

где α — параметр формы ($0 < \alpha < 1$). Это распределение представляет собой не что иное, как бета-распределение первого рода с параметрами $u = 1 - \alpha$ и $v = \alpha$ (см. п. 3.26.1). Распределение (2) является частным случаем распределения (3) при $\alpha = 1/2$.

3.29. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИМПСОНА

Плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4(x-\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}, & \alpha \le x \le \dfrac{\alpha+\beta}{2}; \\ \dfrac{4(\beta-x)}{(\beta-\alpha)^2}, & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \le x \le \beta. \end{cases}$$

Более компактная запись плотности вероятности имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{2}{\beta-\alpha}\left[1 - \frac{|\alpha+\beta-2x|}{\beta-\alpha}\right], \quad \alpha \le x \le \beta.$$

Здесь α — параметр положения, левая граница области возможных значений случайной величины X; $(\beta - \alpha)$ — параметр масштаба, длина области возможных значений случайной величины

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2}, & \alpha \le x \le \dfrac{\alpha+\beta}{2}; \\ 1 - \dfrac{2(\beta-x)^2}{(\beta-\alpha)^2}, & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \le x \le \beta \end{cases}$$

Функция риска

$$\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{4(x-\alpha)}{(\beta-\alpha)^2 - 2(x-\alpha)^2}, & \alpha \le x \le \dfrac{\alpha+\beta}{2}; \\ \dfrac{2}{(\beta-x)}, & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \le x \le \beta \end{cases}$$

Характеристическая функция

$$\chi(t) = -\frac{4(e^{i\beta t/2} - e^{i\alpha t/2})^2}{(\beta-\alpha)^2 t^2}$$

Математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Медиана

$$x_{0.5} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Мода

$$\hat{x} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Дисперсия

$$D_x = \frac{(\beta-\alpha)^2}{24} \approx 0.0417(\beta-\alpha)^2$$

Стандартное отклонение

$$\sigma_x = \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{24}} \approx 0.2041(\beta-\alpha)$$

Коэффициент вариации

$$v_x = \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{6}(\alpha+\beta)} \approx 0.4082\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}$$

Срединное отклонение

$$E = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(\beta-\alpha) \approx 0.1464(\beta-\alpha)$$

Асимметрия

$$\mathrm{Sk} = 0$$

Эксцесс

$$\mathrm{Ex} = -0.6$$

Начальные моменты

$$m_2 = \frac{1}{3(\beta-\alpha)^2}\left[\alpha^4 + \beta^4 - \frac{(\alpha+\beta)^4}{8}\right],$$

$$m_3 = \frac{1}{5(\beta-\alpha)^2}\left[\alpha^5 + \beta^5 - \frac{(\alpha+\beta)^5}{16}\right],$$

$$m_4 = \frac{1}{15(\beta-\alpha)^2}\left[\alpha^6 + \beta^6 - \frac{(\alpha+\beta)^6}{32}\right],$$

$$m_s = 4\frac{\alpha^{s+2} + \beta^{s+2} - 2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{s+2}}{(s+1)(s+2)(\beta-\alpha)^2}$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{(\beta-\alpha)^4}{240},$$

$$\mu_s = \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ \dfrac{(\beta-\alpha)^s}{2^{s-1}(s+1)(s+2)} & s \text{ — четное} \end{cases}$$

p-квантиль

$$x_p = \begin{cases} \alpha + (\beta-\alpha)\sqrt{\dfrac{p}{2}}, & 0 \le p \le \dfrac{1}{2}; \\ \beta - (\beta-\alpha)\sqrt{\dfrac{1-p}{2}}, & \dfrac{1}{2} \le p \le 1 \end{cases}$$

Соотношения между распределениями

Если X_1 и X_2 — независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке $[\alpha/2, \beta/2]$, то случайная величина $X = X_1 + X_2$ имеет распределение Симпсона на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Оценивание параметров

$$\alpha^* = \bar{x}^* - \sqrt{6}S_x, \quad \beta^* = \bar{x}^* + \sqrt{6}S_x \quad \text{(ММ)}.$$

Генерирование случайных чисел

$$x_i = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}(r_{2i-1} + r_{2i}).$$

Примечания: 1. Сумма двух независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке [0, 1], имеет распределение Симпсона на отрезке [0, 2] с плотностью вероятности

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1; \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

2. Сумма трех независимых случайных величин с равномерным распределением на отрезке [0, 1] распределена на отрезке [0, 3] с плотностью вероятности

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{x^2 - 3(x-1)^2}{2}, & 1 \le x \le 2; \\ \dfrac{x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2}{2}, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

3. В общем случае сумма n независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке [0, 1], распределена на отрезке [0, n] с плотностью вероятности

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x-k)_+^{n-1}, \quad 0 \le x \le n,$$

где $z_+ = \begin{cases} 0, & z \le 0; \\ z, & z > 0. \end{cases}$

В некоторых пособиях такое распределение называют *распределением Симпсона порядка n.*

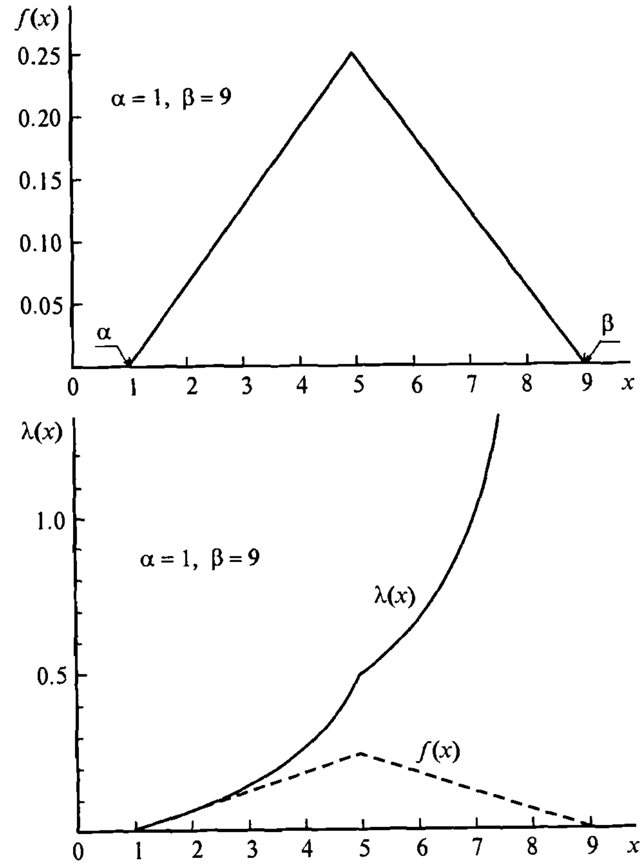


Рис. 3.46. Плотность вероятности и функция риска распределения Симпсона.

3.30. УСЕЧЕННОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (ДВУХСТОРОННЕЕ УСЕЧЕНИЕ)

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\gamma a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2a^2}\right), \quad \alpha \le x \le \beta,$$

где α, β — границы области возможных значений случайной величины (*левая* и *правая точки усечения*); m — параметр положения; a — параметр масштаба ($a > 0$) и

$$\gamma = \Phi_0\left(\frac{\beta - m}{a}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{a}\right).$$

Число $1-\gamma$, равное вероятности того, что исходная (неусеченная) нормальная случайная величина окажется вне интервала (α, β), называется *степенью усечения*

Функция распределения

$$F(x)=\frac{1}{\gamma}\left[\Phi_0\left(\frac{x-m}{a}\right)-\Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{a}\right)\right],\ \alpha\le x\le\beta$$

Характеристическая функция

$$\chi(t)=\frac{1}{\gamma}\left[\Phi_0\left(\frac{\beta-m}{a}-iat\right)-\Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{a}-iat\right)\right]\exp\left(imt-\frac{a^2t^2}{2}\right)$$

Математическое ожидание

$$\bar{x}=m+\frac{a}{\gamma}[\varphi(u_1)-\varphi(u_2)],$$

где $\varphi(u)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $u_1=(\alpha-m)/a$ и $u_2=(\beta-m)/a$ — *стандартизированные* (центрированные, нормированные) *точки усечения*

Медиана

Медиана $x_{0.5}$ является корнем уравнения

$$\Phi_0\left(\frac{x_{0.5}-m}{a}\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{a}\right)+\Phi_0\left(\frac{\beta-m}{a}\right)\right]$$

Мода

$$\hat{x}=\begin{cases}\alpha, & \alpha\ge m;\\ m, & \alpha<m<\beta;\\ \beta, & \beta\le m\end{cases}$$

Дисперсия

$$D_x=a^2\left\{1+\frac{1}{\gamma}[u_1\varphi(u_1)-u_2\varphi(u_2)]-\frac{1}{\gamma^2}[\varphi(u_1)-\varphi(u_2)]^2\right\}=$$

$$=a^2\left\{1+\frac{1}{\gamma}[u_1\varphi(u_1)-u_2\varphi(u_2)]\right\}-(\bar{x}-m)^2$$

Начальные моменты

$$m_2=m^2+a^2+\frac{a}{\gamma}(2mk_0+ak_1),$$

$$m_3=m^3-3a^2m+\frac{a}{\gamma}[(2a^2+3m^2)k_0+3amk_1+a^2k_2],$$

$$m_4=m^4+6a^2m^2+3a^4+\frac{a}{\gamma}[4m(2a^2+m^2)k_0+$$

$$+3a(a^2+2m^2)k_1+4a^2mk_2+a^3k_3],$$

где $k_i=u_1^i\varphi(u_1)-u_2^i\varphi(u_2),\quad i=0,1,2,3$

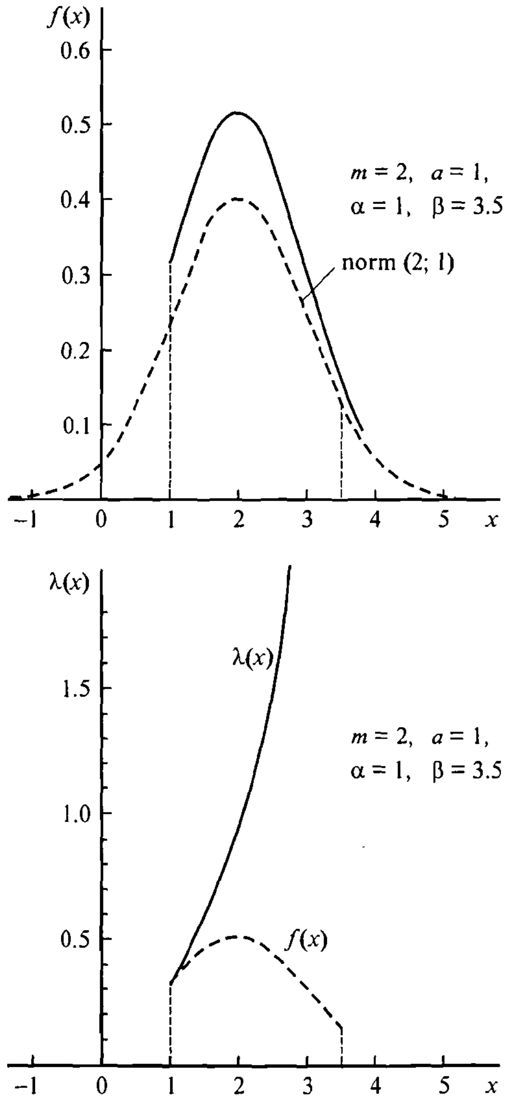


Рис. 3.47. Плотность вероятности и функция риска усеченного нормального распределения (*двухстороннее усечение*).

Центральные моменты $\mu_3 = a^3\left[\frac{1}{\gamma}(k_2 - k_0) - \frac{3}{\gamma^2}k_0k_1 + \frac{2}{\gamma^3}k_0^3\right]$,

$$\mu_4 = a^4\left[3 + \frac{1}{\gamma}(3k_1 + k_3) - \frac{2}{\gamma^2}(k_0^2 + 2k_0k_2) + \frac{6}{\gamma^3}k_0^2k_1 - \frac{3}{\gamma^4}k_0^4\right]$$

При симметричном относительно m расположении точек усечения α и β, т. е. при $m - \alpha = \beta - m$:

$$\gamma = 2\Phi_0(\delta),\ \text{где}\ \delta = (m - \alpha)/a = (\beta - m)/a;$$

$$\bar{x} = x_{0.5} = \hat{x} = m;\quad D_x = a^2(1-k);$$

$$m_2 = m^2 + a^2(1-k),\quad m_3 = m^3 + 3a^2m(1-k),$$

$$m_4 = m^4 - a^4\delta^2k + 3a^2(a^2 + 2m^2)(1-k);$$

$$\mu_3 = 0,\quad \mu_4 = a^4[3(1-k) - \delta^2k],$$

где $k = \delta\varphi(\delta)/\Phi_0(\delta)$.

Оценивание параметров

В том случае, когда точки усечения α и β известны, для нахождения оценок максимального правдоподобия параметров m и a можно использовать следующие рекуррентные соотношения:

$$u_{1i} = \frac{\alpha - m_i}{a_i},\quad u_{2i} = \frac{\beta - m_i}{a_i};$$

$$m_{i+1} = \bar{x}^* + a_i\frac{\varphi(u_{2i}) - \varphi(u_{1i})}{\Phi_0(u_{2i}) - \Phi_0(u_{1i})};$$

$$a_{i+1} = D_x^* + (\bar{x}^* - m_{i+1})^2 - a_i^2\frac{u_{2i}\varphi(u_{2i}) - u_{1i}\varphi(u_{1i})}{\Phi_0(u_{2i}) - \Phi_0(u_{1i})}.$$

Здесь m_i и a_i — i-е приближение оценок максимального правдоподобия параметров m и a; $\varphi(u)$ — плотность вероятности стандартного нормального распределения; $\Phi_0(u)$ — функция Лапласа; $\bar{x}^*$ и D_x^* — выборочные оценки математического ожидания $\bar{x}$ и дисперсии D_x, найденные по реализациям усеченной нормальной случайной величины.

В качестве «нулевых» (начальных) приближений m_0 и a_0^2 можно использовать выборочные оценки $\bar{x}^*$ и D_x^*. Однако, учитывая эффект усечения, a_0^2 следует взять несколько больше D_x^*, а для получения m_0 необходимо немного «подправить» $\bar{x}^*$ в сторону большего усечения.

В том случае, когда точки усечения α и β неизвестны, а объем выборки достаточно велик, в качестве α можно взять число несколько меньшее наименьшего элемента выборки $x_{(1)}$, а в качестве β — число, несколько превышающее наибольший из элементов выборки $x_{(n)}$.

Генерирование случайных чисел

1. $u := \text{norm}$;
2. $y := m + au$;
3. Если $y < \alpha$, то на 1, иначе — на 4;
4. Если $y > \beta$, то на 1, иначе — на 5;
5. $x := y$.

Г. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

3.31. χ^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПИРСОНА

Плотность вероятности $\quad f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{n/2-1}e^{-x/2},\quad x > 0,$

где n — параметр формы, *число степеней свободы*, положительное целое число

Функция распределения $\quad F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}, \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = I\left(\frac{x}{2}, \frac{n}{2}\right),$

где $I(x,\alpha) = \Gamma(x,\alpha)/\Gamma(\alpha)$ — отношение неполной гамма-функции

Характеристическая функция $\quad \chi(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$

Математическое ожидание $\quad \bar{x} = n$

Медиана $\quad x_{0.5} \approx n - 0.67$

Мода $\quad \hat{x} = n - 2,\ n \geq 2$

Дисперсия $\quad D_x = 2n$

Стандартное отклонение $\quad \sigma_x = \sqrt{2n}$

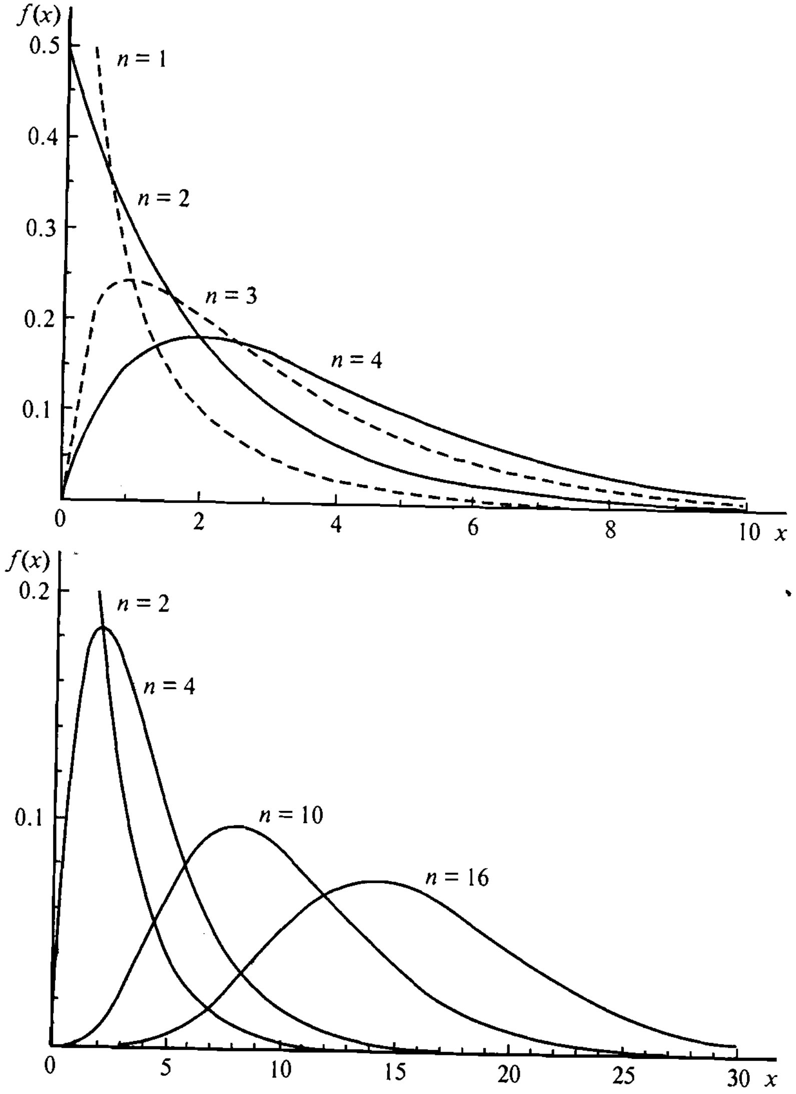


Рис. 3.48. Плотность вероятности χ^2-распределения Пирсона.

Коэффициент вариации	$v_x = \sqrt{\dfrac{2}{n}}$
Асимметрия	$\mathrm{Sk} = \sqrt{\dfrac{8}{n}}$
Эксцесс	$\mathrm{Ex} = \dfrac{12}{n}$
Начальные моменты	$m_2 = n(n+2),\quad m_3 = n(n+2)(n+4),$ $m_4 = n(n+2)(n+4)(n+6),$ $m_s = n(n+2)\ldots[n+2(s-1)] = \prod_{k=0}^{s-1}(n+2k)$
Центральные моменты	$\mu_3 = 8n,\quad \mu_4 = 12n(n+4)$

Точками перегиба функции плотности $f(x)$ являются точки $x = n - 2 \mp \sqrt{2(n-2)}$ (при условии, что x — действительное положительное число).

Соотношения между распределениями

1. Если $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, то случайная величина $U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2$ имеет χ^2-распределение с n степенями свободы.

2. χ^2-распределение с n степенями свободы совпадает с гамма-распределением с параметром масштаба $\lambda = 1/2$ и параметром формы $\alpha = n/2$.

3. Случайная величина $X(n)$, имеющая χ^2-распределение с n степенями свободы, и случайная величина $Y(1,\ n/2)$, имеющая гамма-распределение с параметром масштаба $\lambda = 1$ и параметром формы $\alpha = n/2$, связаны соотношением $X(n) \sim 2Y(1,\ n/2)$.

4. Сумма независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k$, имеющих χ^2-распределение с $n_1, n_2, \ldots, n_k$ степенями свободы соответственно, имеет χ^2-распределение с $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ степенями свободы.

5. Независимые случайные величины $X(n)$ и $X(m)$, имеющие χ^2-распределение с n и m степенями свободы соответственно, связаны со случайной величиной $F(n,m)$, имеющей F-распределение Фишера—Снедекора с n и m степенями свободы, соотношением

$$\frac{X(n)}{n} \Big/ \frac{X(m)}{m} = \frac{mX(n)}{nX(m)} \sim F(n,m).$$

6. Случайная величина $X(n)$ имеет такое же распределение, как и случайная величина $nF(n,\infty)$, т. е. $X(n) \sim nF(n,\infty)$.

7. Случайная величина $X(n)$, имеющая χ^2-распределение с n степенями свободы, связана со случайной величиной $T(n)$, имеющей распределение Стьюдента с n степенями свободы, и независимой от $T(n)$ стандартной нормальной случайной величиной U следующим соотношением:

$$\frac{U}{T(n)/n} = \frac{nU}{T(n)} \sim X(n).$$

8. При четном n случайная величина $X(n)$ связана со случайной величиной $Y(x/2)$, распределенной по закону Пуассона с параметром $\mu = x/2$, соотношением

$$P\{X(n) > x\} = P\left\{Y\left(\frac{x}{2}\right) \le \frac{n}{2} - 1\right\}.$$

Этому соотношению эквивалентны соотношения:

$$P(x;\, n) = F_y\left(\frac{n}{2}; \frac{x}{2}\right) = 1 - \tilde{\Psi}\left(\frac{n}{2}; \frac{x}{2}\right), \quad n \ge 2,\ \text{целое};$$

$$F_y(k;\, \mu) = P(2\mu;\, 2k), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Здесь $P(x;n) = P\{X(n) > x\}$ — интеграл вероятностей χ^2-распределения; $F_y(k;\mu) = P\{Y(\mu) < k\}$ — функция распределения Пуассона с параметром μ; $\tilde{\Psi}(x;\, \mu) = e^{-\mu}\sum\limits_{i=x}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!}$ (см. п. 2.2).

9. При $n \to \infty$ случайная величина $[X(n) - n]/\sqrt{2n}$ сходится к стандартному нормальному распределению. Однако эта сходимость довольно медленная. Гораздо быстрее сходится к стандартному нормальному распределению случайная величина $\sqrt{2X(n)} - \sqrt{2n-1}$.

Генерирование случайных чисел

Алгоритм 1

$$x = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2,$$

где u_i — стандартные нормальные случайные числа (i =1, 2, ..., n).

Алгоритм 2

$$x = \begin{cases} -2\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n/2} r_i\right), & n \text{ — четное;} \\ -2\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{(n-1)/2} r_i\right) + u^2, & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

При $n = 1$

$$x = u^2.$$

Здесь r — стандартные равномерные, u — стандартные нормальные случайные числа.

Таблицы

1. [2, с. 140—159, табл. 2.1а]. Даны значения интеграла вероятностей $P(x;\, n) = P(X > x)$ для $n = 1(1)32(2)70$; $5D$.

[2, с. 166—170, табл. 2.2б]. Приведены процентные точки χ^2-распределения для $n = 1(1)100$ и $Q = 99.95$, 99.9, 99.5, 99, 97.5, 95, 90(10)10, 5, 2.5, 1, 0.5, 0.1, 0.05 %.

2. [13, с. 502—504, табл. XII]. Приведены значения функции χ^2-распределения для $n = 1(1)20$ и $x = 1(1)30$; $4D$.

[13, с. 505, табл. XIIа]. Даны значения квантилей χ^2-распределения порядка $p = (1-\gamma)/2$ и $p = (1+\gamma)/2$ для $k = 1(1)30$ и $\gamma = 0.99$, 0.95 и 0.90; $3S$.

3. [3, с. 36—39, табл. 6]. Приведены значения интеграла вероятностей $P(x;\, n)$ для $n = 1(1)15$, $x = 0.0(0.5)20(1)40.0$ и $n = 16(1)30$, $x = 3.0(1)10.0(0.5)20.0(1)40(2)64$; $3D$.

4. [16, с. 94, 95, табл. 1.1.2.7]. Даны критические точки, соответствующие вероятностям α = 0.99, 0.98, 0.95, 0.90(0.10)0.10, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002, 0.001, для $n = 1\ (1)\ 30$; $3S$.

Обширные таблицы функции χ^2-распределения приведены в [7] и [9].

Техника вычислений

При $n \ge 30$ достаточную для практики точность обеспечивают приближенные формулы:

$$F(x;n) = P\{X(n) < x\} \approx \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\sqrt{4.5n}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{n}} - 1 + \frac{2}{9n}\right)\right);$$

$$P(x;n) = P\{X(n) \ge x\} \approx \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\sqrt{4.5n}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{n}} - 1 + \frac{2}{9n}\right)\right);$$

$$x_p \approx n\left[1-\frac{2}{9n}+u_p\sqrt{\frac{2}{9n}}\right]^3,$$

где u_p — квантиль порядка p стандартного нормального распределения.

При $n \ge 100$ можно пользоваться более простыми приближенными формулами:

$$F(x;n) \approx \frac{1}{2}+\Phi_0(\sqrt{2x}-\sqrt{2n-1}),$$

$$P(x;n) \approx \frac{1}{2}-\Phi_0(\sqrt{2x}-\sqrt{2n-1}),$$

$$x_p \approx \frac{1}{2}(\sqrt{2n-1}+u_p)^2.$$

При вычислениях на ЭВМ могут быть использованы формулы:

$$P(x;1)=2[1-\Phi(\sqrt{x})], \quad P(x;2)=e^{-x/2},$$

$$P(x;n)=\begin{cases} 2\left[1-\Phi(\sqrt{x})+\varphi(\sqrt{x})\sum\limits_{i=1}^{(n-1)/2}\dfrac{x^{i-1}}{(2i-1)!!}\right], & n \text{ — нечетное}\\ \left[1+\sum\limits_{i=1}^{(n-2)/2}\dfrac{x^i}{(2i)!!}\right]e^{-x/2}, & n \text{ — четное.}\end{cases}$$

При больших x (при $x>n$) целесообразно использовать асимптотическое разложение

$$P(x;n)=\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n/2-1}e^{-x/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{(2-n)\ldots(2i-n)}{x^i}\right].$$

В системе символьной математики DERIVE имеется функция CH_SQUARE $(x,\nu)=I\left(\dfrac{x}{2};\dfrac{\nu}{2}\right)$ (см. [41], утилиты PROBABIL.MTH).

3.32. χ-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПИРСОНА

Плотность вероятности	$f(x)=\dfrac{1}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{n-1}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right),\ x>0,$

	где n — параметр формы, *число степеней свободы*, положительное целое число
Функция распределения	$F(x)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{x^2}{2},\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}=I\left(\dfrac{x^2}{2},\dfrac{n}{2}\right),$ где $I(x,\alpha)=\Gamma(x,\alpha)/\Gamma(\alpha)$ — отношение неполной гамма-функции
Характеристическая функция	$\chi(t)=\dfrac{(n-1)!}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}D_{-n}(it)e^{-t^2/4},$ где $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра
Математическое ожидание	$\bar{x}=\sqrt{2}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{(n-2)!!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & n \text{ — четное;}\\ \dfrac{(n-1)!!}{(n-2)!!}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, & n \text{ — нечетное}\end{cases}$
Мода	$\hat{x}=\sqrt{n-1}$
Дисперсия	$D_x=n-\bar{x}^2$
Асимметрия	$\mathrm{Sk}=\bar{x}\dfrac{1-2n+2\bar{x}^2}{D_x^{3/2}}$
Эксцесс	$\mathrm{Ex}=\dfrac{2\bar{x}^2(4n-2-3\bar{x}^2)-2n(n-1)}{D_x^2}$
Начальные моменты	$m_2=n,\ m_3=(n+1)\bar{x},$ $m_4=n(n+2),\ m_s=2^{s/2}\Gamma\left(\dfrac{n+s}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$
Центральные моменты	$\mu_3=\bar{x}(1-2n+2\bar{x}^2),$ $\mu_4=\bar{x}^2[2(n-2)-3\bar{x}^2]+n(n+2)$

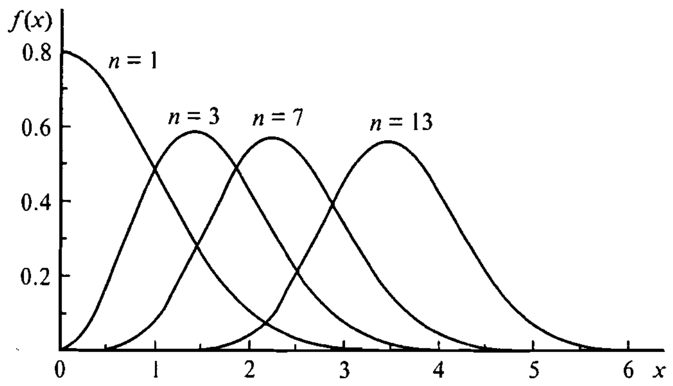


Рис. 3.49. Плотность вероятности χ-распределения Пирсона.

Соотношения между распределениями

1. Если U_1, U_2, ..., U_n — независимые стандартные нормальные случайные величины, то случайная величина $X = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2}$ имеет χ-распределение с n степенями свободы.

2. χ-Распределение является частным случаем распределения модуля n-мерного случайного вектора (см. п. 3.14).

3. Пусть $X(n)$ — случайная величина, имеющая χ-распределение с n степенями свободы; $Y(a, n)$ — случайная величина, имеющая распределение модуля n-мерного случайного вектора с параметром масштаба a; $Z(n)$ — случайная величина, имеющая χ^2-распределение с n степенями свободы. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$X(n) \sim \sqrt{Z(n)} \sim Y(1,n) \sim \frac{1}{a}Y(a,n).$$

4. Распределение случайной величины $X(n)$, имеющей χ-распределение с n степенями свободы, совпадает с распределением случайной величины $\sqrt{Y\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}$, где $Y\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)$ — случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметром масштаба $\lambda = 1/2$ и параметром формы $\alpha = n/2$.

Генерирование случайных чисел

Алгоритм 1

$$x = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2},$$

где u_i — стандартные нормальные случайные числа ($i = 1, 2, ..., n$).

Алгоритм 2

$$x = \begin{cases} \sqrt{-2\ln\left(\prod_{i=1}^{n/2} r_i\right)}, & n \text{ — четное;} \\ \sqrt{-2\ln\left(\prod_{i=1}^{(n-1)/2} r_i\right) + u^2}, & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

При $n = 1$

$$x = \sqrt{u^2}.$$

Здесь r_i — стандартные равномерные, u — стандартные нормальные случайные числа.

3.33. *t*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Плотность вероятности

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty,$$

где ν — параметр формы, *число степеней свободы*, положительное целое число

Характеристическая функция

$$\chi(\zeta) = \frac{\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{\nu}}\right)^{\nu/2}}{\pi\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} Y_{\nu/2}\left(\frac{|\zeta|}{\sqrt{\nu}}\right),$$

где $Y_n(z)$ — функция Бесселя второго рода

Характеристики положения

$\bar{t} = 0$, $\nu > 1$; $t_{0.5} = \hat{t} = 0$

Дисперсия

$D_t = \frac{\nu}{\nu - 2}$, $\nu > 2$

Стандартное отклонение

$\sigma_t = \sqrt{\frac{\nu}{\nu - 2}}$, $\nu > 2$

Асимметрия

$\mathrm{Sk} = 0$, $\nu > 3$

Эксцесс $\qquad \mathrm{Ex} = \dfrac{6}{\nu - 4}, \quad \nu > 4$

Моменты $\qquad m_3 = \mu_3 = 0, \quad \nu > 3,$

$$m_4 = \mu_4 = \frac{3\nu^2}{(\nu-2)(\nu-4)}, \quad \nu > 4,$$

$$m_s = \mu_s = \begin{cases} 0, & s \text{ — нечетное;} \\ \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (s-1)}{(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\nu-s)}\nu^{s/2}, & s \text{ — четное,} \\ & \nu > s \end{cases}$$

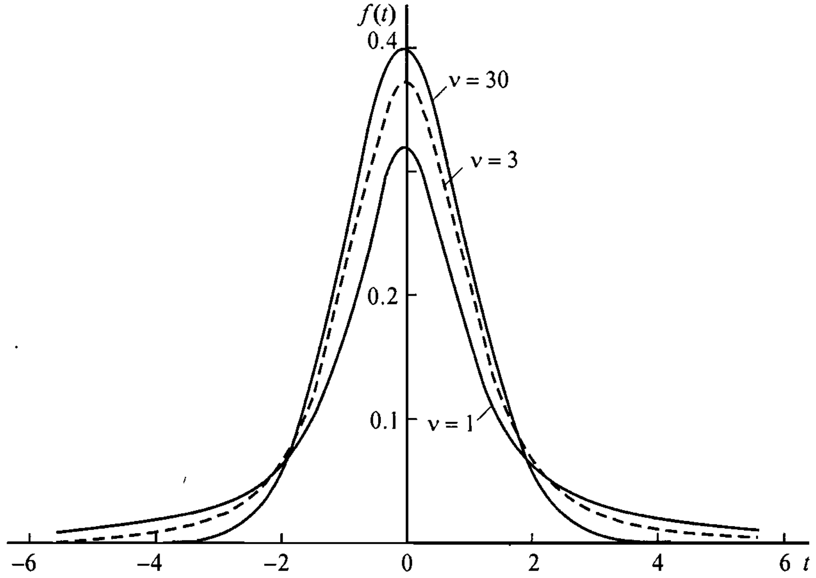


Рис. 3.50. Плотность вероятности распределения Стьюдента.

Соотношения между распределениями

1. При $\nu = 1$ распределение Стьюдента совпадает с распределением Коши с параметром положения $\mu = 0$ и параметром масштаба $\lambda = 1$.

2. Для случайных величин: $T(\nu)$, имеющей распределение Стьюдента с ν степенями свободы; $X(0, 1)$, распределенной по стандартному нормальному закону; $Z(\nu)$, имеющей χ^2-распределение с ν степенями свободы; $F(1, \nu)$, распределенной по закону Фишера—Снедекора с 1, ν степенями свободы, — справедливы следующие утверждения:

$$[T(\nu)]^2 \sim \frac{Z(1)}{Z(\nu)/\nu} \sim \frac{[X(0,1)]^2}{Z(\nu)/\nu} \sim F(1,\nu); \quad T(\nu) \sim \frac{X(0,1)}{\sqrt{Z(\nu)/\nu}}.$$

3. Для случайной величины $T(\nu)$, имеющей распределение Стьюдента с ν степенями свободы, и случайной величины $F(1,\nu)$, распределенной по закону Фишера—Снедекора с 1, ν степенями свободы, справедливо соотношение

$$P\{T(\nu) < t\} = \frac{1}{2}\left[1 - P\{F(1,\nu) < t^2\}\right].$$

4. Для случайной величины $T(\nu)$ и случайной величины $X(\nu/2, 1/2)$, имеющей бета-распределение первого рода с параметрами $u = \nu/2$ и $\nu = 1/2$, справедливо соотношение

$$P\{T(\nu) < t\} = 1 - \frac{1}{2}P\left\{X\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right) < \frac{\nu}{\nu + t^2}\right\} = 1 - \frac{1}{2}I_{\nu/(\nu+t^2)}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

5. При $\nu \to \infty$ распределение Стьюдента сходится к стандартному нормальному распределению.

Таблицы

1. [2, с.174—176, табл. 3.1]. Даны значения функции распределения Стьюдента для $\nu = 1(1)\,20$ и $t = 0.0(0.1)4.0(0.2)8.0$; $5D$.

[2, с. 176]. Приведены верхние критические (процентные) точки распределения Стьюдента для $\nu = 1\,(1)10$ и $Q = 0.0005$, 0.001, 0.01, 0.1 %.

[2, с. 178, табл. 3.2]. Приведены верхние критические (процентные) точки распределения Стьюдента для $\nu = 1(1)30(2)50(5)70(10)100(20)120(30)150(50)300(100)500$ и $Q = 40, 25, 10, 5, 1, 0.5, 0.25, 0.1, 0.05$ %; $4D$.

2. [13, с. 506—508, табл. XIII]. Даны значения функции распределения Стьюдента для $\nu = 1(1)19$ и $t = 0.0(0.1)2.0(0.2)6.0$; $3D$.

[13, с. 508, табл. XIIIa]. Приведены критические точки распределения Стьюдента для $\nu = 1(1)10$ и $Q = 0.005$, 0.025, 0.05; $3D$.

3. [16, с. 96, табл. 1.1.2.8]. Даны квантили порядка $1 - \alpha/2$ для $\nu = 1(1)\,10(2)\,30$ и $\alpha = 0.0005$, 0.001, 0.0015, 0.0025, 0.005, 0.01, 0.0125, 0.025, 0.05; $3D$.

4. [3, с. 60, 61, табл. 9]. Приведены значения функции распределения Стьюдента для $\nu = 1(1)19$ и $t = 0.0(0.1)2.0(0.2)6.0(1)8.0$; $3D$.

[3, с. 65, 66, табл. 10]. Даны квантили порядка p для $\nu = 1(1)30(2)50(5)70(10)100$, 120, $150(50)300(100)500$ и $p = 0.8$, 0.9, 0.95, 0.99, 0.995, 0.9975, 0.999; $3D$.

5. [6, с. 28—30, табл 2.1]. Приведены квантили порядка p распределения Стьюдента для $\nu = 1(1)100\,(2)150$, $200(100)1000$ и $p = 0.75$, 0.90, 0.975, 0.99, 0.995; $4D$.

Подробные таблицы плотности и функции распределения Стьюдента приведены в [11].

Во всех таблицах значения плотности вероятности $f(t;\nu)$ и функции распределения $F(t;\nu)$ приводятся только для положительных значений аргумента t. При отрицательных значениях t следует пользоваться формулами $f(-t;\nu)=f(t;\nu)$ и $F(-t;\nu)=1-F(t;\nu)$.

Таблицы p-квантилей t_p распределения Стьюдента составлены только для интервала $0.5<p<1$ (т. е. в таблицах даны только положительные значения квантилей t_p). При $0<p<0.5$ надо пользоваться формулой $t_p=-t_{1-p}$.

Техника вычислений

При вычислениях на ЭВМ могут быть использованы формулы

$$F(t;\nu)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t, & \nu=1;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left\{\theta+\sin\theta\begin{bmatrix}\cos\theta+\dfrac{2}{3}\cos^3\theta+\ldots+\\ +\dfrac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(\nu-3)}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(\nu-2)}\cos^{\nu-2}\theta\end{bmatrix}\right\}, & \nu>1 \text{ — нечетное};\end{cases}$$

$$F(t;\nu)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{t}{2\sqrt{2+t^2}}, & \nu=2;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\theta\begin{bmatrix}1+\dfrac{1}{2}\cos^2\theta+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\cos^4\theta+\ldots+\\ +\dfrac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(\nu-3)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(\nu-2)}\cos^{\nu-2}\theta\end{bmatrix}, & \nu>2 \text{ — четное},\end{cases}$$

где $F(t;\nu)$ — функция распределения Стьюдента с ν степенями свободы и $\theta=\operatorname{arctg}(t/\sqrt{\nu})$.

При больших ν справедлива приближенная формула

$$F(t;\nu)\approx\frac{1}{2}+\Phi_0(x),$$

где $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа и $x=t\left(1-\dfrac{1}{4\nu}\right)\Big/\sqrt{1+\dfrac{t^2}{2\nu}}$.

При больших t и $\nu\le5$

$$F(t;\nu)\approx1-\left(\frac{a_\nu}{t^\nu}+\frac{b_\nu}{t^{\nu+1}}\right),$$

где

$a_1=0.3183$, $a_2=0.4991$, $a_3=1.1094$, $a_4=3.0941$, $a_5=9.948$;

$b_1=0$, $b_2=0.0518$, $b_3=-0.0460$, $b_4=-2.756$, $b_5=-14.05$.

Квантили порядка p распределения Стьюдента с числом степеней свободы $\nu=1$, 2 и 4 определяются по формулам:

$$t_p=\operatorname{tg}[\pi(p-0.5)],\quad \nu=1;\qquad t_p=\frac{2p-1}{\sqrt{2p(1-p)}},\quad \nu=2;$$

$$t_p=\frac{4\cos\theta}{\sqrt{1-4\cos^2\theta}},\quad \nu=4,$$

где $\theta=[\pi+\arccos(2p-1)]/3$.

В общем случае справедливо следующее асимптотическое разложение

$$t_p\approx u_p\left[1+\frac{g_1(u_p)}{\nu}+\frac{g_2(u_p)}{\nu^2}+\frac{g_3(u_p)}{\nu^3}+\ldots\right],$$

где u_p — квантиль порядка p стандартного нормального распределения;

$$g_1(x)=\frac{x^2+1}{4},\quad g_2(x)=\frac{5x^4+16x^2+3}{96},$$

$$g_3(x)=\frac{3x^6+19x^4+17x^2-15}{384},$$

$$g_4(x)=\frac{79x^8+776x^6+1482x^4-1920x^2-945}{92160}.$$

При больших ν справедлива приближенная формула

$$t_p\approx\frac{u_p}{\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{4\nu}\right)^2-\dfrac{u_p^2}{2\nu}}}.$$

В [41, утилита PROBABIL.MTH, п. 15] имеется функция STUDENT(t, ν), позволяющая вычислять значение функции $A(t;\nu)=P(|T|<t)$ (в описании эта функция ошибочно названа функцией распределение Стьюдента). Функция $A(t;\nu)$ связана с функцией распределения Стьюдента $F(t;\nu)$ соотношением $F(t;\nu)=[1+A(t;\nu)]/2$.

3.34. *F*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА — СНЕДЕКОРА (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО ОТНОШЕНИЯ)

Плотность вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\dfrac{u}{2},\dfrac{v}{2}\right)}\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}x^{(u/2)-1}\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{-(u+v)/2}\quad(x>0),$$

где u — параметр формы, число степеней свободы числителя; v — параметр формы, число степеней свободы знаменателя; u, v — целые положительные числа

Функция распределения $F(x) = I_{\frac{ux}{v+ux}}\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)$,

где $I_x(u,v)$ — отношение неполной бета-функции

Характеристическая функция $\chi(t) = M\left(\frac{u}{2}, -\frac{v}{2}; -\frac{ivt}{u}\right)$,

где $M(a, b; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера

Математическое ожидание $\bar{x} = \frac{v}{v-2}, \quad v > 2$

Мода $\hat{x} = \frac{v(u-2)}{u(v+2)}, \quad u \geq 2$

Дисперсия $D_x = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}, \quad v > 4$

Асимметрия $\mathrm{Sk} = \frac{2(2u+v-2)}{v-6}\sqrt{\frac{2(v-4)}{u(u+v-2)}}, \quad v > 6$

Эксцесс $\mathrm{Ex} = \frac{12[(v-2)^2(v-4)+u(5v-22)(u+v-2)]}{u(u+v-2)(v-6)(v-8)}, \quad v > 8$

Начальные моменты

$$m_2 = \left(\frac{v}{u}\right)^2 \frac{u(u+2)}{(v-2)(v-4)}, \quad v > 4;$$

$$m_3 = \left(\frac{v}{u}\right)^3 \frac{u(u+2)(u+4)}{(v-2)(v-4)(v-6)}, \quad v > 6;$$

$$m_4 = \left(\frac{v}{u}\right)^4 \frac{u(u+2)(u+4)(u+6)}{(v-2)(v-4)(v-6)(v-8)}, \quad v > 8;$$

$$m_s = \left(\frac{v}{u}\right)^s \frac{u(u+2)(u+6)\ldots(u+2s-2)}{(v-2)(v-4)(v-6)\ldots(v-2s)}, \quad v > 2s$$

Центральные моменты

$$\mu_3 = \left(\frac{v}{u}\right)^3 \frac{8u(u+v-2)(2u+v-2)}{(v-2)^3(v-4)(v-6)}, \quad v > 6;$$

$$\mu_4 = \left(\frac{v}{u}\right)^4 \frac{12u(u+v-2)[u(v+10)(u+v-2)+4(v-2)^2]}{(v-2)^4(v-4)(v-6)(v-8)}, \quad v > 8$$

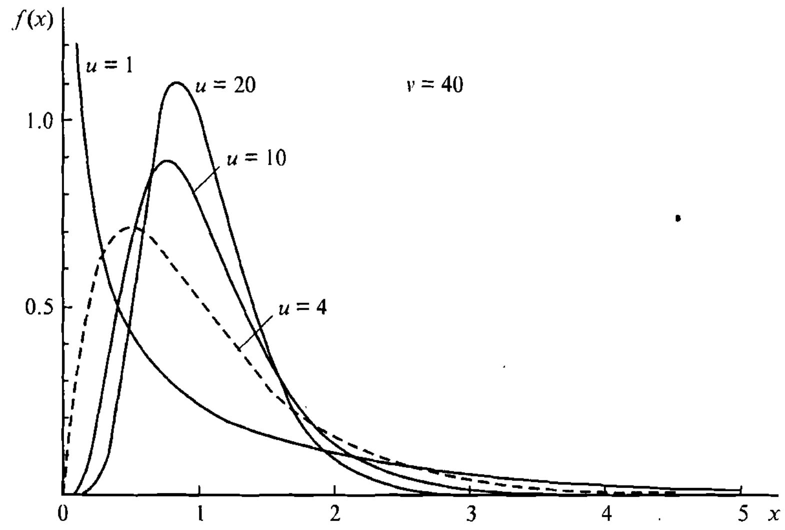


Рис. 3.51. Плотность вероятности распределения Фишера—Снедекора.

Соотношения между распределениями

1. Квантиль $x_p(u,v)$ порядка p F-распределения с u, v степенями свободы и квантиль $x_{1-p}(v,u)$ порядка $1-p$ F-распределения с v, u степенями свободы связаны соотношением $x_p(u,v) = 1/x_{1-p}(v,u)$. Этому соотношению эквивалентно соотношение $F(x;u,v) = 1 - F(1/x;v,u)$.

Приведенные соотношения делают ненужным табулирование F-распределения для значений аргумента $x < 1$. При необходимости найти значение функции распределения для $x < 1$ следует перейти к значению аргумента равному $1/x$ и воспользоваться последним из приведенных выше соотношений.

2. Если χ_u^2 и χ_v^2 — независимые случайные величины, имеющие χ^2-распределение с u и v степенями свободы соответственно, то случайная величина

$$X = \frac{\chi_u^2/u}{\chi_v^2/v} = \frac{v\chi_u^2}{u\chi_v^2}$$

имеет F-распределение с u, v степенями свободы.

3. Если случайная величина $X(n,\infty)$ имеет F-распределение с параметрами $u = n$, $v = \infty$, а случайная величина $Z(n)$ имеет χ^2-распределение с n степенями свободы, то справедливы следующие соотношения:

$$P\{X(n,\infty) < x\} = P\{Z(n) < nx\}, \; x_p(n,\infty) = \frac{1}{n} z_p(n),$$

$$X(n,\infty) \sim \frac{1}{n} Z(n).$$

4. Квантиль $x_p(1,\nu)$ порядка p F-распределения с параметрами $u=1$, $v=\nu$ связана с квантилью $t_{(1+p)/2}(\nu)$ порядка $(1+p)/2$ t-распределения Стьюдента с ν степенями свободы соотношением

$$x_p(1,n)=[t_{(1+p)/2}(\nu)]^2.$$

5. Случайная величина $X(u,\ v)$, имеющая F-распределение с $u,\ v$ степенями свободы, связана со случайной величиной $Y(u/2,\ v/2)$, имеющей бета-распределение первого рода с параметрами $u/2$, $v/2$, соотношениями

$$F(x;u,v)=P\{X(u,v)<x\}=$$
$$=P\left\{Y\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)<\frac{ux}{v+ux}\right\}=I_{\frac{ux}{v+ux}}\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)=1-I_{\frac{v}{v+ux}}\left(\frac{v}{2},\frac{u}{2}\right);$$

$$x_p(u,v)=\frac{v}{u}\,\frac{y_p\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)}{1-y_p\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)}.$$

Первое из этих соотношений используется для вычисления значений функции распределения $F(x;\ u,\ v)$ Фишера—Снедекора с помощью таблиц неполной бета-функции.

6. Если $u+v$ — четное число, то F-распределение с параметрами $u,\ v$ связано с биномиальным распределением с числом испытаний $n=(u+v-2)/2$ и вероятностью успеха p соотношением

$$P\left\{X(u,v)<\frac{vp}{u(1-p)}\right\}=1-P\left\{Y\left(\frac{u+v-2}{2},p\right)\le\frac{u-2}{2}\right\},$$

где $Y(n,\ p)$ — случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами $n,\ p$.

7. F-распределение сводится к бета-распределению второго рода (распределение VI — по классификации Пирсона).

8. При возрастании u и v F-распределение приближается к нормальному распределению.

9. Если $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ — выборка объема m из нормальной генеральной совокупности с параметрами $\bar{x}$, σ, а $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — выборка объема n из нормальной генеральной совокупности с параметрами $\bar{y}$, σ, то статистика

$$F=\frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x}^*)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}^*)^2}=\frac{S_x^2}{S_y^2}$$

имеет F-распределение Фишера—Снедекора с $u=m-1$ и $v=n-1$ степенями свободы. (Здесь $\bar{x}^*=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$ и $\bar{y}^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ — выборочные оценки математических ожиданий $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно).

Таблицы

1. [2, с. 200—215, табл. 3.5]. Даны Q — процентные точки F-распределения для $Q=50,\ 25,\ 10,\ 5,\ 2.5,\ 1,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.05\,\%$; $u=1(1)10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 24,\ 30,\ 40,\ 60,\ 120,\ \infty$; $v=1(1)30,\ 40,\ 60,\ 120,\ \infty$; $5S$.
2. [16, с. 98—103, табл. 1.1.2.10]. Приведены квантили F-распределения порядка $p=0.95$ и 0.99 для $u=1(1)12,\ 14,\ 16,\ 20,\ 24,\ 30,\ 40,\ 50,\ 75,\ 100,\ 200,\ 500,\ \infty$; $v=1(1)30(2)50(5)70,\ 80,\ 100,\ 125,\ 150,\ 200,\ 400,\ 1000,\ \infty$; $3S$.
3. [3, с. 72—80, табл. 11а, 11б, 11в]. Даны критические значения F-распределения, соответствующие вероятности $\delta=0.05,\ 0.025,\ 0.01$ для $u=1(1)10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 24,\ 30,\ 40,\ 60,\ 120,\ \infty$; $v=1(1)30,\ 40,\ 60,\ 120,\ \infty$; $4S$.
4. [6, с. 64—87, табл. 4.1]. Приведены квантили F-распределения порядка $p=0.5,\ 0.75,\ 0.9,\ 0.95,\ 0.975,\ 0.99,\ 0.995$ для $u=1(1)15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30,\ 48,\ 60,\ 120,\ \infty$; $v=1(1)30,\ 40,\ 48,\ 60,\ 80,\ 120,\ \infty$; $5S$.
5. [14, с. 774—777, табл. 26.9]. Даны Q — процентные точки F-распределения для $Q=0.5,\ 0.25,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.025,\ 0.01,\ 0.005,\ 0.001$; $u=1(1)6,\ 8,\ 12,\ 20,\ 30,\ 60,\ \infty$; $v=1(1)30,\ 40,\ 60,\ 120,\ \infty$; 3—$5S$.

Техника вычислений

Для вычисления значений функции распределения $F(x;\ u,\ v)$ Фишера—Снедекора могут быть использованы следующие формулы:

- при u четном

$$F(x;u,v)=1-\tau^{v/2}\left[\begin{array}{l}1+\frac{v}{2}(1-\tau)+\frac{v(v+2)}{2\cdot4}(1-\tau)^2+\ldots+\\ \quad+\frac{v(v+2)\ldots(v+u-4)}{2\cdot4\ldots(u-2)}(1-\tau)^{(u-2)/2}\end{array}\right]=$$

$$=1-\tau^{(u+v-2)/2}\left[\begin{array}{l}1+\frac{u+v-2}{2}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)+\frac{(u+v-2)(u+v-4)}{2\cdot4}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^2+\ldots+\\ \quad+\frac{(u+v-2)(u+v-4)\ldots(v+2)}{2\cdot4\ldots(u-2)}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^{(u-2)/2}\end{array}\right],$$

• при ν четном

$$F(x;u,\nu)=(1-\tau)^{u/2}\left[1+\frac{u}{2}\tau+\frac{u(u+2)}{2\cdot 4}\tau^2+\ldots+\frac{u(u+2)\ldots(u+\nu-4)}{2\cdot 4\ldots(\nu-2)}\tau^{(\nu-2)/2}\right]=$$

$$=(1-\tau)^{(u+\nu-2)/2}\left[1+\frac{u+\nu-2}{2}\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)+\ldots+\frac{(u+\nu-2)\ldots(u+2)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(\nu-2)}\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\frac{\nu-2}{2}}\right],$$

где $\tau=\nu/(\nu+ux)$;

• при $u,\ \nu$ нечетных ($u>1,\ \nu>1$)

$$F(x;u,\nu)=\frac{2}{\pi}\left\{\theta+\sin\theta\left[\cos\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta+\ldots+\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(\nu-3)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(\nu-2)}\cos^{\nu-2}\theta\right]\right\}-$$

$$-\frac{2\left(\frac{\nu-1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right)}\sin\theta\cos^2\theta\left\{\begin{aligned}&1+\frac{\nu+1}{3}\sin^2\theta+\ldots+\\&+\frac{(\nu+1)(\nu+3)\cdot\ldots\cdot(\nu+u-4)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(u-2)}\sin^{u-3}\theta\end{aligned}\right\},$$

где $\theta=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{u}{\nu}x}$.

В частности:

$$F(x;\ 1,\ 1)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{x};$$

$$F(x;\ u,\ 1)=2\left[1-F_{\mathrm{C}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}};u\right)\right];\quad F(x;\ 1,\ \nu)=2F_{\mathrm{C}}(\sqrt{x};\nu)-1;$$

$$F(x;\ u,\ 2)=\left[\frac{ux}{2+ux}\right]^{u/2};\qquad F(x;\ 2,\nu)=1-\left(1+\frac{2x}{\nu}\right)^{-\nu/2},$$

где $F_{\mathrm{C}}(t;\nu)$ — функция распределения Стьюдента с ν степенями свободы.

При больших $u,\ \nu$ функцию распределения Фишера—Снедекора можно аппроксимировать функцией стандартного нормального распределения

$$F(x;u,\nu)=\Phi(z)+\varepsilon(u,\nu)=\frac{1}{2}+\Phi_0(z)+\varepsilon(u,\nu),$$

где

$$z=\frac{\sqrt{4.5}\left[\left(1-\frac{2}{9\nu}\right)x^{1/3}-\left(1-\frac{2}{9u}\right)\right]}{\sqrt{\frac{1}{u}+\frac{1}{\nu}x^{2/3}}},\qquad |\varepsilon(u,\nu)|\le 5\cdot 10^{-4}.$$

Для вычисления p-квантили $x(p;\ u,\ \nu)$ распределения Фишера—Снедекора с $u,\ \nu$ степенями свободы можно использовать формулы:

$$x(p;\ 1,\ 1)=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi p}{2}\right);$$

$$x(p;u,1)=\frac{1}{\left[t\left(1-\frac{p}{2};\ u\right)\right]^2};\qquad x(p;\ 1,\ \nu)=\left[t\left(\frac{1+p}{2};\nu\right)\right]^2;$$

$$x(p;\ u,2)=\frac{2}{u\left(\frac{1}{p^{2/u}}-1\right)};\qquad x(p;\ 2,\ \nu)=\frac{\nu\left[\frac{1}{(1-p)^{2/\nu}}-1\right]}{2},$$

где $t(p;\nu)$ — квантиль порядка p распределения Стьюдента с ν степенями свободы.

При достаточно больших $u,\ \nu$ могут быть использованы приближенные формулы:

$$x(p;u,\nu)\approx\left[\frac{\left(1-\frac{2}{9u}\right)\left(1-\frac{2}{9\nu}\right)+\sqrt{\frac{u_p^2}{4.5}\left[\frac{1}{u}\left(1-\frac{2}{9\nu}\right)^2+\left(1-\frac{2}{9u}\right)^2-\frac{u_p^2}{4.5\,u\nu}\right]}}{\left(1-\frac{2}{9\nu}\right)^2-\frac{u_p^2}{4.5\nu}}\right]^3,$$

где u_p — квантиль стандартного нормального распределения порядка p;

$$x(p;\ u,\ \nu)\approx\exp\left\{2\left[\frac{u_p\sqrt{a+c}}{a}+b\left(c-\frac{2}{3a}+\frac{5}{6}\right)\right]\right\},$$

где $a=\dfrac{2(u-1)(\nu-1)}{u+\nu-2}$, $b=\dfrac{u-\nu}{(u-1)(\nu-1)}$, $c=\dfrac{u_p^2-3}{6}$;

$$x(p;u,\nu)\approx$$

$$\approx\begin{cases}\dfrac{\nu}{u}\,\dfrac{\dfrac{2[z(1-p;\nu)]^2-(\nu-2)z(1-p;\nu)+4-\nu^2}{6(2u+\nu-2)}+2u+\nu-2-z(1-p;\nu)}{2z(1-p;\nu)} & u>\nu;\\[2ex] \dfrac{\nu}{u}\,\dfrac{2z(p;u)}{\dfrac{2[z(p;u)]^2-(u-2)z(p;u)+4-u^2}{6(u+2\nu-2)}+u+2\nu-2-z(p;u)}, & u<\nu,\end{cases}$$

где $z(p;\ n)$ — квантиль порядка p χ^2-распределения с n степенями свободы.

В системе символьной математики DERIVE имеется функция F_DISTRIBUTION(x,u,v), дополняющая функцию распределения $F(x;\,u,\,v)$ Фишера—Снедекора до единицы:

$$\text{F\_DISTRIBUTION}(x;\ u,\ v) = P\big(X(u,v) > x\big) = 1 - F(x;u,v)$$

(см. [41], утилиты PROBABIL.MTH).

3.35. Z-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА

Плотность вероятности
$$f(z) = \frac{2u^{u/2}v^{v/2}}{B\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)} e^{uz}\left(v + e^{2z}\right)^{-(u+v)/2}, \quad -\infty < z < \infty,$$

где $u,\ v$ — параметры формы, *степени свободы*, целые положительные числа

Функция распределения
$$F(z) = I_\zeta\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right), \quad \text{где } \zeta = \frac{ue^{2z}}{v + ue^{2z}}$$

Характеристическая функция
$$\chi(t) = \left(\frac{v}{u}\right)^{it/2} \frac{\Gamma\left(\frac{u+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$$

Математическое ожидание
$$\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)$$

Мода
$$\hat{z} = 0$$

Дисперсия
$$D_z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{u}\right)$$

Соотношения между распределениями

1. Если случайная величина X имеет F-распределение с $u,\ v$ степенями свободы, то случайная величина $Z = (\ln X)/2$ имеет Z-распределение с $u,\ v$ степенями свободы.

2. Функция распределения $F(z;\,u,\,v)$ Z-распределения с $u,\ v$ степенями свободы связана с функцией распределения $F(z;\ v,\ u)$ Z-распределения с $v,\ u$ степенями свободы равенством $F(z;u,v) = 1 - F(-z;v,u)$. Это соотношение позволяет табулировать Z-распределение только для положительных значений z. Если необходимо найти значение функции распределе-

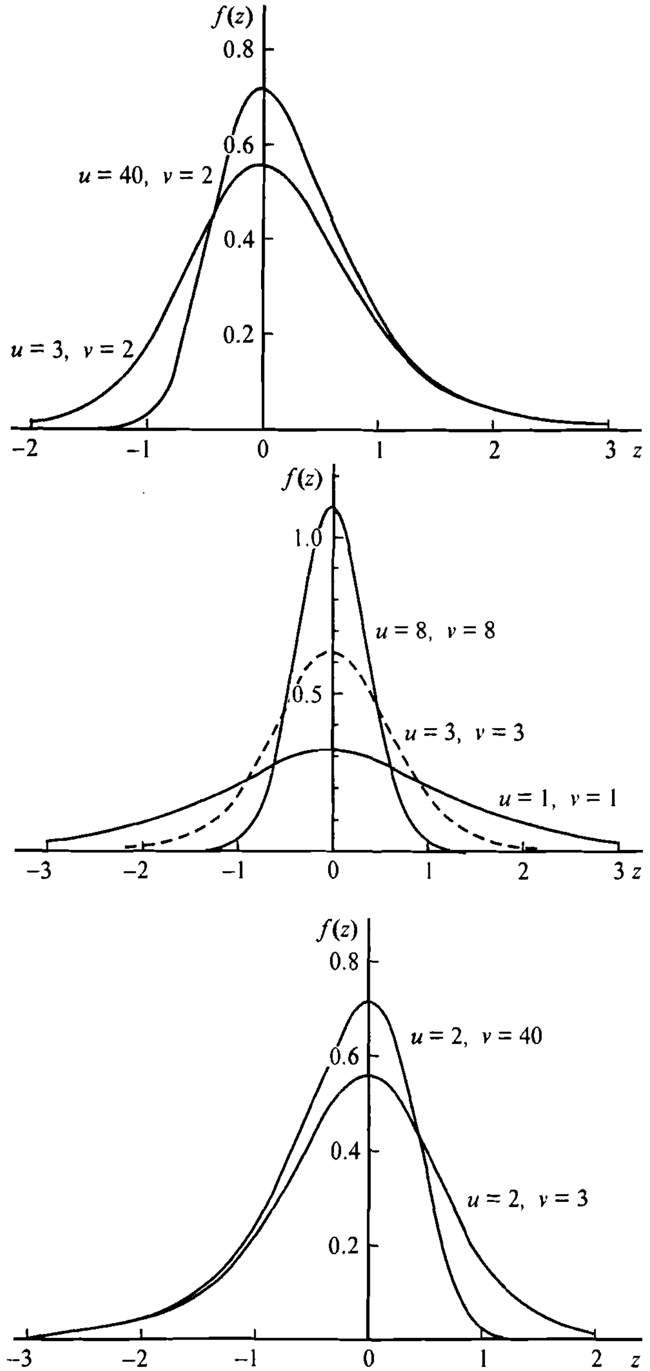


Рис. 3.51. Плотность вероятности распределения Фишера—Снедекора.

ния для отрицательных z, надо поменять знак у z и использовать приведенное выше соотношение.

3. Если случайная величина Z имеет Z-распределение с параметрами u, v, то случайная величина $X = \exp(2Z)$ имеет F-распределение с теми же параметрами.

4. При больших u, v случайная величина Z, имеющая Z-распределение с параметрами u, v, распределена приближенно нормально с параметрами $\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)$ и $D_z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{u}\right)$.

Примечание. Z-распределение было введено в дисперсионный анализ Р. Фишером. По его замыслу оно должно было стать основным распределением при проверке статистических гипотез в дисперсионном анализе. Однако в современной математической статистике используют более простую статистику F и связанное с этой статистикой F-распределение Фишера—Снедекора.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ГРАФИКИ ДЛЯ ВЫБОРА ТИПА СГЛАЖИВАЮЩЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Если величины $b_1 = \mathrm{Sk}^2$ и $b_2 = \mathrm{Ex} - \mathrm{Sk}^2 + 2$ рассматривать как координаты точки плоскости Ob_1b_2, то различным типам распределений вероятностей случайных величин будут соответствовать определенные области, линии и точки первого квадранта этой плоскости. При этом распределениям с двумя параметрами формы будут соответствовать определенные области, распределениям с одним параметром формы — линии, а распределениям, не имеющим параметра формы, — определенные точки. На рис. П.1.1, П.1.2 показаны области, линии и точки плоскости Ob_1b_2, соответствующие распределениям вероятностей непрерывных случайных величин, рассмотренных в данном справочнике.

На рис. П.1.1 показаны области, соответствующие U-, J- и «колоколообразному» бета-распределениям первого рода. Линия, отделяющая область J-образного бета-распределения от области «колоколообразного» бета-распределения, соответствует так называемому *степенному распределению*. Это распределение является частным случаем бета-распределения с параметрами: $u \neq 1$, целое и $v = 1$ (плотность вероятности этого распределения $f(x) = ux^{u-1}$, $0 < x < 1$).

На рис. П.1.3 гамма-распределению, имеющему один параметр формы α, соответствует линия *6*. Жирные точки на этой линии соответствуют распределению Эрланга и нормированному распределению Эрланга. Точка *13* соответствует распределению Эрланга первого порядка (показательное распределение), точка с координатами (2, 3) — распределению Эрланга второго порядка и т. д. Точка с координатами (0.4, 2.2) соответствует распределению Эрланга порядка $m = 10$. Из графика следует, что по мере увеличения порядка m распределения Эрланга точки, соответствующие этому распределению, постепенно приближаются к точке *5*, соответствующей нормальному закону распределения. Этот факт хорошо согласуется с центральной предельной теоремой теории вероятностей, которая утверждает, что с увеличением числа m независимых, одинаково распределенных слагаемых закон распределения суммы сходится к нормальному распределению.

Графики, приведенные на рис. П.1.1—П.1.3, помогают выбрать распределение вероятностей, наилучшим образом под ходящее для сглаживания эмпирической кривой распределе-

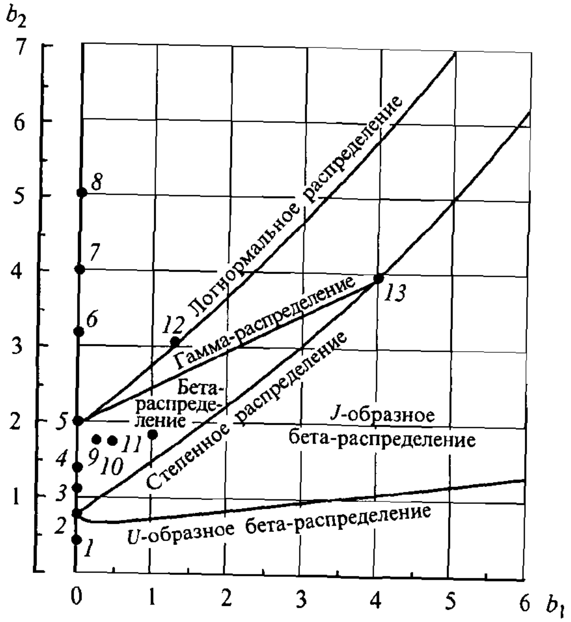


Рис. П.1.1. Графики для выбора типа сглаживающего распределения.

1 — распределение арксинуса; *2* — равномерное распределение; *3* — параболическое распределение; *4* — распределение Симпсона; *5* — нормальное распределение; *6* — логистическое распределение; *7* — распределение Чампернауна; *8* — распределение Лапласа; *9* — распределение Максвелла; *10* — распределение Рэлея; *11* — отраженное нормальное распределение с параметром положения $m = 0$; *12* — двойное показательное распределение, распределение экстремального значения; *13* — показательное распределение.

ния. При выборе типа сглаживающего распределения вместо неизвестных числовых характеристик b_1 и b_2 используются их выборочные оценки $b_1^* = (\mathrm{Sk}^*)^2$ и $b_2^* = \mathrm{Ex}^* - (\mathrm{Sk}^*)^2 + 2$. Точка с найденными по данным наблюдения координатами b_1^*, b_2^* наносится на график. В качестве сглаживающего распределения выбирается то распределение, в область которого попала точка (b_1^*, b_2^*), или же распределение, «характеристическая» линия (или точка) которого находится ближе всего к точке (b_1^*, b_2^*).

При подборе типа сглаживающего распределения вероятностей по графикам, приведенным на рис. П.1.1—П.1.3, следует учитывать, что выборочные оценки b_1^* и b_2^* очень чувствительны к «экстремальным» элементам выборки и вследствие этого подвержены весьма существенному разбросу. Поэтому рассматриваемые графики следует использовать с осторожностью, особенно в тех случаях, когда число наблюдений не очень велико, например меньше 200.

На рис. П.1.1—П.1.3 используются следующие условные обозначения распределений:

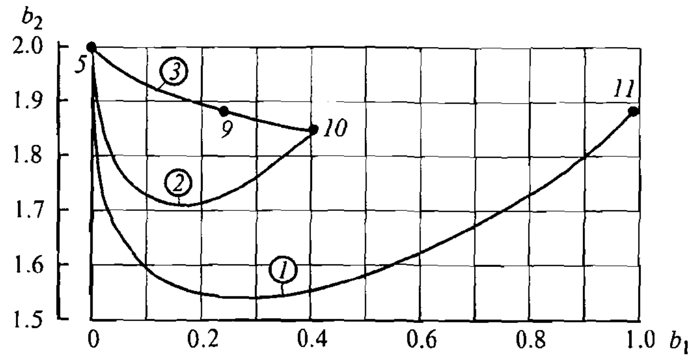


Рис. П.1.2. Графики для выбора типа сглаживающего распределения.

1 — отраженное нормальное распределение; 2 — распределение Рэлея—Райса; 3 — распределение модуля *n*-мерного случайного вектора; *5* — нормальное распределение; *9* — распределение Максвелла; *10* — распределение Рэлея; *11* — отраженное нормальное распределение с параметром положения $m = 0$.

1 — распределение модуля нормальной случайной величины (отраженное нормальное распределение);

2 — обобщенное распределение Рэлея (распределение Рэлея—Райса);

3 — распределение модуля *n*-мерного случайного вектора;

4 — распределение Накагами;

5 — распределение Вейбулла—Гнеденко;

6 — гамма-распределение;

7 — обобщенное распределение Эрланга второго порядка;

8 — гиперэкспоненциальное распределение второго порядка;

9 — распределение Парето;

10 — обратное гауссовское распределение (распределение Вальда);

11 — логарифмически нормальное распределение;

1 — распределение арксинуса;

2 — равномерное распределение;

3 — параболическое распределение;

4 — распределение Симпсона;

5 — нормальное (гауссовское) распределение;

6 — логистическое распределение;

7 — распределение Чампернауна;

8 — двустороннее показательное распределение (распределение Лапласа);

9 — распределение Максвелла;

10 — распределение Рэлея;

11 — отраженное нормальное распределение с параметром положения $m = 0$;

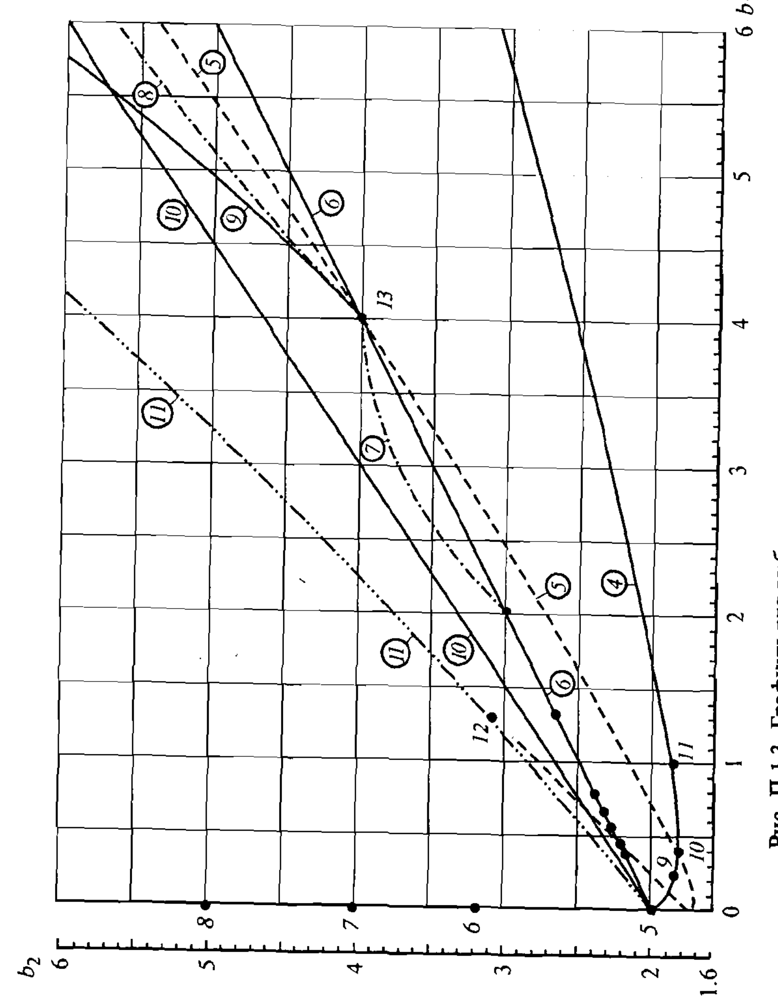


Рис. П.1.3. Графики для выбора типа сглаживающего распределения.

Распределения:

④ — Накагами;
⑤ — Вейбулла–Гнеденко;
⑥ — гамма-распределение;
⑦ — обобщенное распределение Эрланга второго порядка;
⑧ — гиперэкспоненциальное распределение второго порядка;
⑨ — Парето;
⑩ — обратное гауссовское;
⑪ — логарифмически нормальное;
5 — нормальное;
6 — логистическое;
7 — Чампернауна;
8 — Лапласа;
9 — Максвелла;
10 — Рэлея;
11 — отраженное нормальное распределение с параметром положения $m = 0$;
12 — двойное показательное, распределение экстремального значения;
13 — показательное.

12 — двойное показательное распределение, распределение экстремального значения;

13 — показательное (экспоненциальное) распределение.

Номера распределений, которым соответствуют «характеристические» линии, обведены кружками.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАКЕТАХ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ ПЭВМ

Подробную справочную информацию об основных вероятностных распределениях можно найти в статистических пакетах прикладных программ, таких, например, как **STADIA, STATGRAPHICS, STATISTICA** и **SPSS**. Эти пакеты содержат подробные сведения о свойствах вероятностных распределений, наиболее часто используемых на практике, успешно заменяя тем самым громоздкие статистические таблицы. В табл. П.2.1 перечислены распределения, справочные данные о которых находятся в перечисленных выше пакетах.

Таблица П.2.1

Распределение	Название пакета			
	STADIA v.6.0	STATGRAPHICS v.7.0	STATISTICA v.5.0	SPSS v.8.0.2
Дискретное равномерное	–	+	–	–
Пуассона	+	+	+	+
Бернулли	–	+	–	+
Биномиальное	+	+	+	+
Геометрическое	+	+	+	+
Отрицательное биномиальное	+	+	–	+
Гипергеометрическое	+	–	–	+
Нормальное	+	+	+	+
Двухстороннее показательное (Лапласа)	–	–	+	+
Коши	–	–	+	+
Экстремального значения	+	–	+	–
Логистическое	+	–	+	+
Показательное (экспоненциальное)	+	+	+	+
Гамма-	–	+	+	+
Эрланга	+	+	–	–

Таблица П.2.1 (*продолжение*)

Распределение	Название пакета			
	STADIA v.6.0	STATGRAPHICS v.7.0	STATISTICA v.5.0	SPSS v.8.0.2
Вейбулла—Гнеденко	–	+	+	+
Рэлея	+	–	+	+
Логарифмически нормальное	+	+	+	+
Парето	–	–	+	+
Равномерное (прямоугольное)	–	+	–	+
Бета-	–	+	+	+
Нецентральное бета-	–	–	–	+
Треугольное	–	+	–	–
χ^2-Пирсона	–	+	+	+
Нецентральное χ^2	–	–	–	+
t-Стьюдента	–	+	+	+
Нецентральное t-	–	–	–	+
F-Фишера	–	+	+	+
Нецентральное F-	–	–	–	+

Пакет STATGRAPHICS

Пакет обеспечивает возможность работы с шестью дискретными и двенадцатью непрерывными распределениями (см. табл. П.2.1). Для того чтобы получить доступ к нужному распределению, необходимо:

- В главном меню пакета выделить раздел **H. Distribution functions** (функции распределения).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.

На экране появится диалоговое меню этого раздела (рис. П.2.1).

```
DISTRIBUTION FUNCTIONS
1. Distribution Fitting
2. Distribution Plotting
3. Tail Area Probabilities
4. Critical Values
5. Random Number Generation
```

Рис. П.2.1. Меню процедур, используемых при работе с распределениями.

Процедуры этого меню имеют следующее назначение:

1. **Distribution Fitting** (проверка согласия). Эта процедура позволяет с помощью критериев Пирсона и Колмогорова проверить согласие между выборочным распределением и выбранным для его сглаживания гипотетическим распределением.

2. **Distribution Plotting** (графики распределения). С помощью этой процедуры можно построить графики следующих функций, характеризующих свойства выбранного распределения:
   - *функции плотности* (**Density function**);
   - *функции распределения* (**Cumulative d. f.**);
   - *функции выживания* (**Survivor function**) (эта функция дополняет функцию распределения до единицы; в теории надежности она называется *функцией надежности*);
   - *логарифмической функции выживания* (**Log. survivor function**);
   - *функции риска* (**Hazard function**).

3. **Tail Area Probabilities** (вероятности хвостов). Эта процедура вычисляет значение функции распределения $F(x)$ выбранного закона распределения, соответствующее заданному значению x ее аргумента.

4. **Critical Values** (критические значения). Данная процедура по заданному порядку p-квантили вычисляет саму квантиль x_p выбранного распределения. Эта процедура является обратной по отношению к процедуре **Tail Area Probabilities**.

5. **Random Number Generation** (генерирование случайных чисел). Эта процедура предназначена для генерирования последовательности случайных (вернее, псевдослучайных) чисел, которые можно рассматривать как независимые реализации случайной величины, подчиняющейся выбранному закону распределения.

Рассмотрим несколько примеров, поясняющих порядок использования перечисленных выше процедур.

Пример 1. Построить графики функции плотности нормальных распределений с параметрами: $\bar{x}_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$; $\bar{x}_2 = 0$, $\sigma_2 = 2$; $\bar{x}_3 = 2$, $\sigma_3 = 1$.

Для того чтобы решить эту задачу, необходимо:

- В главном меню пакета выделить раздел **H. Distribution Functions** (функции распределения).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.
- В открывшемся диалоговом меню раздела **H. Distribution Functions** выделить процедуру **2. Distribution Plotting** (графики распределения).

• Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.

На экране появится окно процедуры **Distribution Plotting** с полем ввода **Distribution number**: (номер распределения), в котором, по умолчанию, записан номер **14** нормального распределения (рис. П.2.2).

```
                    Distribution Plotting
Distributions available
(1) Bernoulli            (7) Beta           (13) Lognormal
(2) Binomial             (8) Chi-square     (14) Normal
(3) Discrete uniform     (9) Erlang         (15) Student's t
(4) Geometric           (10) Exponential    (16) Triangular
(5) Negative binomial   (11) F              (17) Uniform
(6) Poisson             (12) Gamma          (18) Weibull
Distribution number:     14
```

Рис. П.2.2. Диалоговое окно процедуры Distribution Plotting.

- В поле ввода **Distribution number** сохранить предлагаемый пакетом номер **14** нормального распределения.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

В окне процедуры **Distribution Plotting** появятся поля ввода **Mean** (среднее) и **Standard deviation** (стандартное отклонение), предназначенные для ввода параметров нормального распределения (рис. П.2.3).

- Заполнить поля ввода значениями параметров нормальных распределений, приведенными в условиях примера (см. рис. П.2.3). (Переход от одного поля ввода к другому осуществляется с помощью клавишей управления курсором и клавиши **Tab**).
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

```
                    Distribution Plotting
Distributions available
(1) Bernoulli            (7) Beta           (13) Lognormal
(2) Binomial             (8) Chi-square     (14) Normal
(3) Discrete uniform     (9) Erlang         (15) Student's t
(4) Geometric           (10) Exponential    (16) Triangular
(5) Negative binomial   (11) F              (17) Uniform
(6) Poisson             (12) Gamma          (18) Weibull
Distribution number:     14
   Mean                      Standard deviation
   0                         1
   0                         2
   2                         1
```

Рис. П.2.3. Заполнение полей ввода процедуры Distribution Plotting.

В правой нижней части окна **Distribution Plotting** появится диалоговое окно, позволяющее выбрать нужную форму описания распределения (рис. П.2.4).

```
Density function
Cumulative d.f.
Survivor function
Log. survivor function
Hazard function
```

Рис. П.2.4. Меню форм представления непрерывного распределения.

- В открывшемся диалоговом окне выделить строку **Density function**.
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.

Откроется окно с полями для ввода параметров оформления графиков (рис. П.2.5). Три верхних поля ввода: **Top title** (заголовок графика), **X-Axis Title** (наименование оси *X*), **Y-Axis Title** (наименование оси *Y*) — предназначены для оформления заголовка графика и наименования осей координат. Поля **X-axis lower limit** (нижняя граница по оси *X*) и **X-axis upper limit** (верхняя граница по оси *X*) служат для задания границ интервала, на котором будет построен график. В поле **Resolution** (разрешение) задается число точек, по которым будет строиться график. Чем больше число таких точек, тем точнее график, выводимый на экран, и тем меньше скорость вывода графика. Поля **Legends** (легенды) предназначены для указания соответствия между типами линий графиков и параметрами кривых распределения, выводимых на график. Эти данные выводятся в правом верхнем углу графика. В рассматриваемом случае каждой линии графика соответствует свой набор параметров нормального распределения — среднее (математическое ожидание) и стандартное отклонения. В поля ввода **Legends** можно вводить и символьные записи.

```
                  Distribution Plot Options
Top title:           Prob. Density Fcn.
(2 lines)            Normal
X-Axis Title:        X
Y-Axis Title:        prob. density
          X-axis lower limit:   -10
          X-axis upper limit:   10
          Resolution:           50
Legends:  0 1
          0 2
          2 1
```

Рис. П.2.5. Заполнение полей ввода параметров графиков распределений.

Поля ввода заполнены самим пакетом на основании введенных ранее исходных данных. При необходимости можно изменить заполнение полей ввода.

- Сохранить заполнение полей ввода окна **Distribution Plot Options**, предлагаемое пакетом.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

На экране появятся три кривые нормальных распределений, рассматриваемых в данном примере (рис. П.2.6). Вдоль правой границы экрана располагается панель, используемая при модификации графиков. С помощью этой панели можно устанавливать нужные атрибуты графика: цвет, изображение точек и линий, размер графика и т. д.

П р и м е ч а н и я: 1. Число полей ввода параметров распределения и их наименование зависят от выбранного распределения. Так, например, для того чтобы задать бета-распределение, необходимо ввести два параметра формы этого распределе-

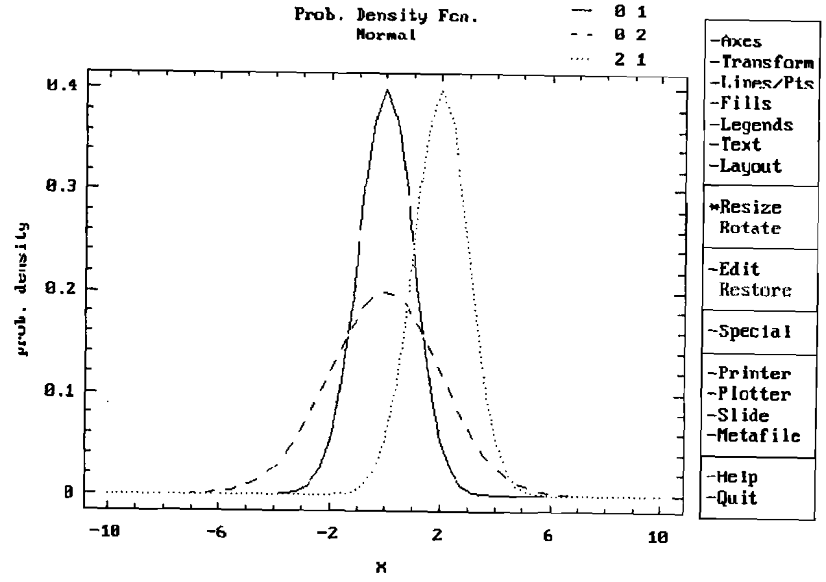


Рис. П.2.6. Графики функций плотности нормальных распределений с параметрами: $\bar{x}_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$; $\bar{x}_2 = 0$, $\sigma_2 = 2$; $\bar{x}_3 = 2$, $\sigma_3 = 1$.

ния — **Alpha** и **Beta**, тогда как для задания треугольного распределения надо ввести три параметра — **Lower limit** (нижняя граница распределения), **Central point** (мода) и **Upper limit** (верхняя граница), и т. д.

2. Содержание диалогового окна выбора формы представления распределения (см. рис. П.2.4) также зависит от выбранного распределения. В нем перечисляются только те функции, которые доступны для данного распределения.

3. Процедура **Distribution Plotting** позволяет выводить на экран до пяти однотипных кривых одного и того же распределения. Несколько сложнее получить на одном графике разнотипные кривые одного и того же распределения и даже однотипные кривые различных распределений. Делается это с помощью процедуры наложения одного графика на другой (см. раздел **C. Report Writer and Graphics Replay** (составитель отчета и воспроизведение графиков) главного меню, процедура **Splitscreen/Overlay Plotting** (разделение экрана/наложение графиков)).

Пример 2. Вычислить вероятности биномиального ряда распределения с параметрами $n = 5$ и $p = 0.4$.

Для решения поставленной задачи необходимо:

- В главном меню пакета выделить раздел **H. Distribution Functions** (функции распределения).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.
- В открывшемся диалоговом меню раздела **H. Distribution Functions** выделить процедуру **2. Distribution Plotting** (графики распределения).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.

На экране появится окно процедуры **Distribunion Plotting** с полем ввода **Distribution number**: (номер распределения), в котором, по умолчанию, записан номер **14** нормального распределения (см. рис. П.2.2).

- В поле ввода **Distribution number** ввести номер **2** биномиального распределения.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

В окне процедуры **Distribunion Plotting** появятся поля ввода **Number of trials** (число испытаний) и **Event probability** (вероятность события), предназначенные для ввода параметров биномиального распределения.

- В поле ввода **Number of trials** ввести число **5**, а в поле ввода **Event probability** — число **0.4**.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

В правой нижней части окна **Distribution Plotting** появится диалоговое окно, позволяющее выбрать нужную форму описания распределения (рис. П.2.7).

- В открывшемся диалоговом окне выделить строку **Prob. Mass function** (функция вероятности).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.

Откроется окно с полями для ввода параметров оформления графика.

```
Prob. Mass function
Cumulative d.f.
Survivor function
Log. survivor function
```

Рис. П.2.7. Меню форм представления дискретного распределения.

- В случае необходимости ввести нужные изменения в предлагаемые системой параметры оформления графика.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

На экране появится график биномиального ряда распределения с параметрами $n = 5$, $p = 0.4$ (рис. П.2.8).

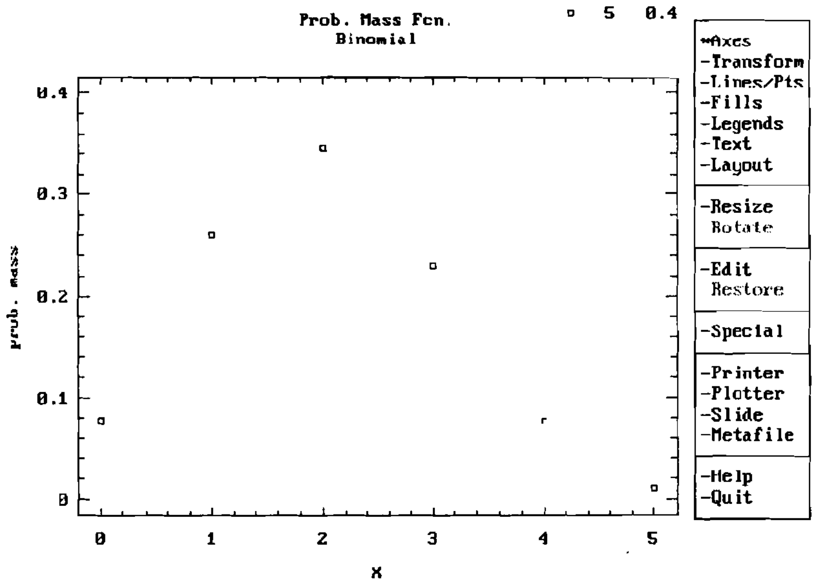


Рис. П.2.8. График биномиального ряда распределения с параметрами $n = 5$, $p = 0.4$.

Для того чтобы получить конкретные числовые значения вероятностей биномиального ряда распределения, необходимо:

- Нажать на клавиатуре клавишу ⟨**S**⟩ (или щелкнуть левой клавишей мыши по полю **Special** на панели модификации графиков, расположенной у правой границы экрана).
- Нажать на клавиатуре клавишу ⟨**I**⟩ (первая буква команды **Identify**).

Курсор мыши, ранее имевший форму стрелки, примет форму креста.

- Подвести крест курсора к точке с координатами $(0,\ p_0)$, где $p_0 = P(X = 0)$ — вероятность того, что случайная величина X, распределенная по биномиальному закону с параметрами $n = 5$, $p = 0.4$, примет значение 0.
- Щелкнуть левой клавишей мыши.

Точка изменит цвет, а в правой части экрана появится запись: **Row: 1, X: 0, Y: 0.07776**. Это запись означает, что вероятность $p_0 = P(X = 0) = 0.07776$.

Повторяя рассмотренные действия с каждой точкой графика, получим значения остальных вероятностей p_x, $x = 1, 2, ..., 5$, образующих ряд распределения случайной величины X, которая подчиняется биномиальному закону распределения с параметрами $n = 5$, $p = 0.4$:

p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
0.07776	0.2592	0.3456	0.2304	0.0768	0.01024

Здесь $p_x = P(X = x)$ — вероятность того, что биномиальная случайная величина X примет значение x.

Пример 3. Найти критические значения порядка 0.05, 0.025, 0.01 χ^2-распределения с девятью степенями свободы.

Решение. Критические значения распределения порядка 0.05, 0.025, 0.01 есть не что иное, как квантили порядка 0.95, 0.975, 0.99 того же распределения, т. е.

$$x_{(0.05)} \equiv x_{0.95}, \quad x_{(0.025)} \equiv x_{0.975}, \quad x_{(0.01)} \equiv x_{0.99}.$$

Для того чтобы найти эти квантили, необходимо:

- В главном меню пакета выделить раздел **H. Distribution Functions** (функции распределения).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.
- В открывшемся диалоговом меню раздела **H. Distribution Functions** выделить процедуру **4. Critical Values** (критические значения).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.

Откроется окно процедуры **Critical Values** с полем ввода **Distribution number**: (номер распределения), в котором по умолчанию записан номер **14** нормального распределения.

- В поле ввода **Distribution number** ввести номер **8** хи-квадрат-распределения.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

В нижней части окна **Critical Values** появится поле ввода **Degrees of freedom** (число степеней свободы).

- Ввести в поле ввода **Degrees of freedom** заданное число **9** степеней свободы.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

В нижней части окна **Critical Values** появятся четыре поля ввода **Area at or below** (площадь в точке и левее). В активной части этих полей по умолчанию записаны числа **0.5**.

- В первые три поля ввода **Area at or below** ввести нужные значения порядка p квантилей (рис. П.2.9).

```
                         Critical Values
Distributions available
(1) Bernoulli               (7) Beta          (13) Lognormal
(2) Binomial                (8) Chi-square    (14) Normal
(3) Discrete uniform        (9) Erlang        (15) Student's t
(4) Geometric              (10) Exponential   (16) Triangular
(5) Negative binomial      (11) F             (17) Uniform
(6) Poisson                (12) Gamma         (18) Weibull

Distribution number:      8

Degrees of freedom:       9

Area at or below                  =   0.95
Area at or below                  =   0.975
Area at or below                  =   0.99
Area at or below                  =   0.5
```

Рис. П.2.9. Заполнение полей ввода процедуры «Critical Values».

- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

В нижней части окна **Critical Values**, слева от каждого из введенных значений порядка p, появятся искомые значения квантилей (критических значений):

$$x_{0.95} \equiv x_{(0.05)} = 16.9258; \quad x_{0.975} \equiv x_{(0.025)} = 19.0453;$$
$$x_{0.99} \equiv x_{(0.01)} = 21.6676.$$

Примечания: 1. Процедура **4. Critical Values** наряду с процедурой **3.Tail Area Probabilities** с успехом заменяет громоздкие таблицы математической статистики.

2. Во всех процедурах раздела **H. Distribution Functions** используется аналогичный порядок выбора распределения и заполнения полей ввода, соответствующих выбранному распределению.

Пример 4. Сформировать последовательность из десяти случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0; 1).

Для формирования требуемой последовательности необходимо:

- В главном меню пакета выделить раздел **H. Distribution Functions** (функции распределения).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.
- В открывшемся диалоговом меню раздела **H. Distribution Functions** выделить процедуру **5. Random Number Generation** (генерирование случайных чисел).
- Нажать клавишу ⟨**Enter**⟩.

На экране появится окно процедуры **Random Number Generation** с полем ввода **Distribution number**, в котором по умолчанию записан номер **14** нормального распределения (окно процедуры **Random Number Generation** имеет такой же вид, как и окно процедуры **Distribution Plotting** (см. рис. П.2.2)).

- В поле ввода **Distribution number** ввести номер **17** равномерного распределения.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

В окне процедуры **Random Number Generation** появятся поля ввода **Lover limit** (нижний предел), **Upper limit** (верхний предел), **Number of samples** (объем выборки), предназначенные для ввода параметров равномерного распределения и числа членов формируемой последовательности. Эти поля заполнены по умолчанию самим пакетом (**Lover limit: 0, Upper limit: 1, Number of samples: 100**). Под полями ввода находится поле **Seed** (ячейка), которое содержит исходное число (исходную константу) равномерной случайной (точнее, псевдослучайной) последовательности, с помощью которой формируются все остальные случайные числа этой последовательности. Исходная константа должна быть целым положительным числом, не превышающим по величине числа 2 147 483 646. Она устанавливается по умолчанию самой системой и обновляется после каждого обращения к процедуре генерирования случайных чисел. Процесс обновления определяется текущим временем на системном таймере ПЭВМ.

- Оставить без изменения содержимое полей ввода **Lover limit** и **Upper limit**.
- В поле ввода **Number of samples** ввести число **10**.
- Нажать клавишу ⟨**F6**⟩.

На экране появится запрос **Enter variables in which to save the samples** («Введите имя переменной, в которой сохранить выборку»). Под запросом находятся поля ввода **File** (файл) и **Variable** (переменная). Пакет предлагает сохранить сформированную последовательность в рабочей области (файле) **WORKAREA** в переменной **SAMPLES**.

- Нажатием клавиши ⟨**F6**⟩ подтвердить согласие с предложением системы по сохранению сформированной пакетом случайной последовательности.

В результате последовательность случайных чисел, сформированная пакетом, записывается в рабочую область **WORKAREA**, в переменную с именем **SAMPLES**. На рис. П.2.10 приведено содержимое рабочей области **WORKAREA**.

```
FILE:   WORKAREA
Row     SAMPLES
      1 .264862027
      2 .787888543
      3 .305657230
      4 .942209051
      5 .511257508
      6 .945102616
      7 .465175573
      8 .778779021
      9 .324196141
     10 .232401697
```

Рис. П.2.10. Последовательность случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0; 1).

Следует иметь в виду, что данные, записанные в рабочую область **WORKAREA**, сохраняются только в течение текущего сеанса работы с пакетом. При завершении сеанса эти данные безвозвратно теряются. В том случае, когда необходимо сохранить сформированную последовательность случайных чисел для использования в последующих сеансах работы с пакетом, ее следует записать не в рабочую область **WORKAREA**, а в какой-либо файл.

Примечание. При формировании заданной последовательности случайных чисел использовалась исходная константа **1503238552**. При следующей попытке сформировать последовательность из десяти случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0; 1), система введет другую исходную константу, отличную от константы, использованной в нашем примере, и сформирует другой набор случайных чисел, отличающийся от приведенного на рис. П.2.10. Для того чтобы получить точно такую же последовательность, как в данном примере, необходимо при заполнении полей ввода окна **Random Number Generation** ввести в ячейку **Seed** исходную константу 1503238552.

Пакет STATISTICA

Пакет обеспечивает возможность работы с тремя дискретными и пятнадцатью непрерывными распределениями. В табл. П.2.2 приведены имена встроенных функций, с помощью которых выполняются вычисления, связанные с этими распределениями.

Таблица П.2.2

Дискретные распределения			
Распределение	Функция вероятности	Функция распределения	
Пуассона	poisson (x, l)	ipoisson (x, l)	
Биномиальное	binom (x, p, n)	ibinom (x, p, n)	
Геометрическое	geom (x, p)	igeom (x, p)	
Непрерывные распределения			
Распределение	Функция плотности	Функция распределения	Функция, обратная функции распределения
Нормальное	normal (x, m, s)	inormal (x, m, s)	vnormal (x, m, s)
Лапласа	laplace (x, a, b)	ilaplace (x, a, b)	vlaplace (x, a, b)
Коши	cauchy (x, h, q)	icauchy (x, h, q)	vcauchy (x, h, q)
Экстремального значения	extreme (x, a, b)	iextreme (x, a, b)	vextreme (x, a, b)
Логистическое	logis (x, a, b)	ilogis (x, a, b)	vlogis (x, a, b)
Показательное (экспоненциальное)	expon (x, l)	iexpon (x, l)	vexpon (x, l)
Гамма-	gamma (x, c)	igamma (x, c)	vgamma (x, c)
Вейбулла—Гнеденко	weibull (x, b, c, q)	iweibull (x, b, c, q)	vweibull (x, b, c, q)
Рэлея	rayleigh (x, b)	irayleigh (x, b)	vrayleigh (x, b)
Логнормальное	lognorm (x, m, s)	ilognorm (x, m, s)	vlognorm (x, m, s)
Парето	pareto (x, c)	ipareto (x, c)	vpareto (x, c)
Бета-	beta (x, n, w)	ibeta (x, n, w)	vbeta (x, n, w)
χ^2-Пирсона	chi2 (x, n)	ichi2 (x, n)	vchi2 (x, n)
t-Стьюдента	student (x, df)	istudent (x, df)	vstudent (x, df)
F-Фишера	F (x, n, w)	iF (x, n, w)	vF (x, n, w)

Для того чтобы запустить пакет STATISTICA, необходимо:

- Нажать кнопку **Start** (пуск), расположенную в левой части панели задач системы Windows.

Откроется главное меню системы Windows.

- Установить указатель мыши на пункте **Programs** (программы) этого меню.

На рабочем столе системы Windows появится подменю **Programs** (программы).

- В подменю **Programs** (программы) установить указатель мыши на папке **STATISTICA**.
- В открывшемся перечне программ, находящихся в этой папке, установить указатель мыши на программе **STATISTICA** и нажатием левой клавиши мыши запустить эту программу.

После запуска программы **STATISTICA** на экране появится переключатель модулей пакета STATISTICA (**STATISTICA Module Switcher**) (рис. П.2.11). Этот переключатель позволяет быстро выбрать нужный статистический модуль пакета. Пакет готов к работе.

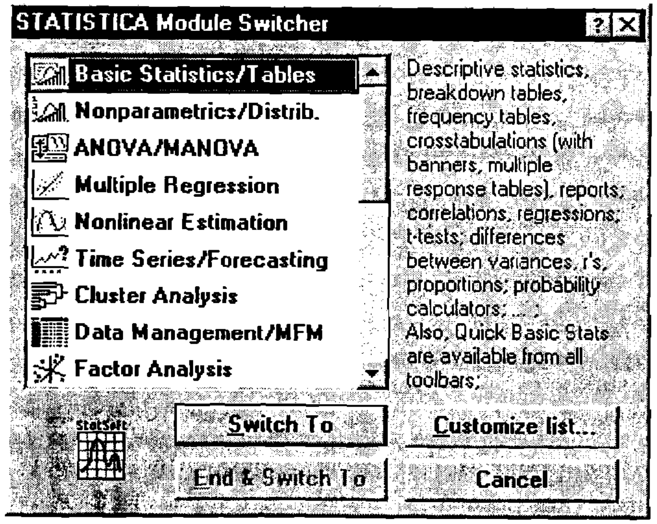


Рис. П.2.11. Переключатель модулей пакета STATISTICA.

В пакете STATISTICA дискретные распределения реализуются только с помощью встроенных функций, задающих функцию вероятности и функцию распределения выбранного дискретного закона распределения.

Непрерывные распределения могут быть реализованы как с помощью встроенных функций, так и с помощью вероятностного калькулятора (**Probability calculator**), который находится в модуле **Basic Statistics and Tables** (основные статистики и таблицы) (см. рис. П.2.11).

Для того чтобы получить доступ к модулю **Basic Statistics and Tables**, необходимо:

- В переключателе модулей **STATISTICA Module Switcher** выделить строку **Basic Statistics/Tables** (основные статистики/таблицы) (см. рис. П.2.11).
- Нажать кнопку **Switch to** (перейти в), расположенную в нижней части переключателя модулей (или нажать одновременно клавиши ⟨**Alt**⟩ и ⟨**S**⟩).

Откроется окно **Basic Statistics and Tables** (рис. П.2.12).

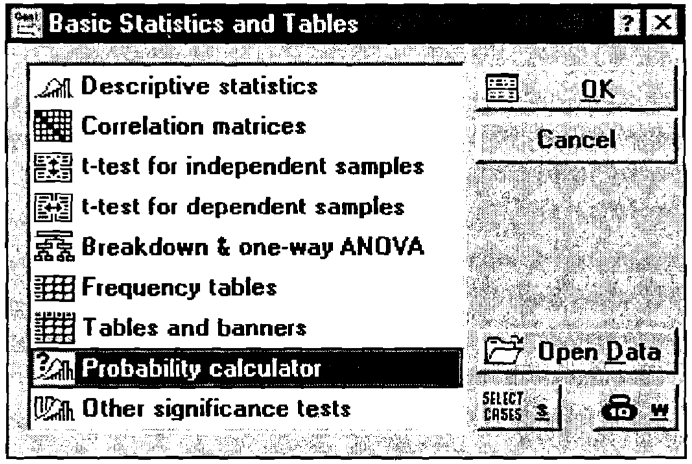


Рис. П.2.12. Диалоговое окно модуля «Basic Statistics and Tables».

- В открывшемся окне **Basic Statistics and Tables** выделить строку **Probability calculator** (вероятностный калькулятор).
- Нажать кнопку **OK** в верхней части окна (или клавишу ⟨**Enter**⟩ на клавиатуре).

Откроется диалоговое окно **Probability Distribution calculator** (калькулятор вероятностных распределений) (рис. П.2.13).

В левой части этого окна расположен список распределений **Distribution** (распределение). Для того чтобы активизировать нужное распределение, необходимо установить курсор

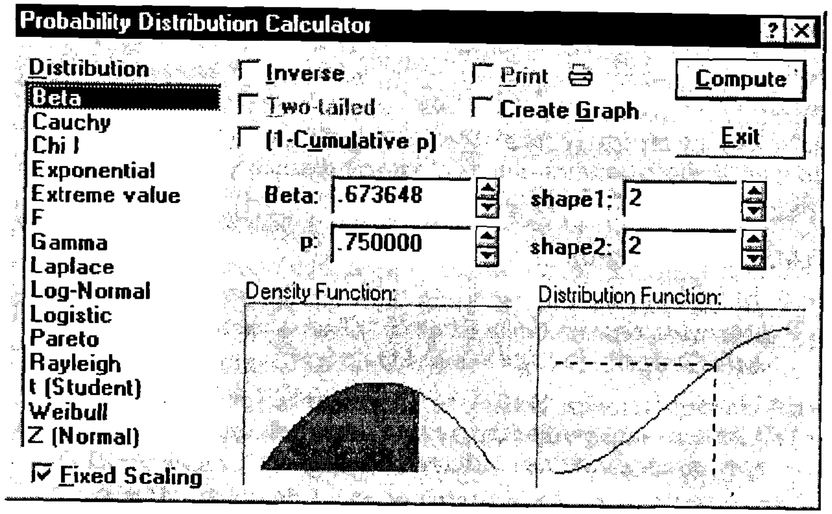


Рис. П.2.13. Диалоговое окно вероятностного калькулятора (начальное состояние).

мыши на название этого распределения и щелкнуть левой клавишей мыши. При этом справа от списка распределений появятся эскизы графиков функции плотности (**Density Function**) и функции распределения (**Distribution Function**), а над графиком функции распределения откроются поля ввода исходных данных и параметров выбранного распределения. Число полей ввода и их наименование зависят от выбранного распределения. Например, при выборе бета-распределения появляются два окна ввода параметров этого распределения **shape1** (параметр формы 1) и **shape2** (параметр формы 2) (см. рис. П.2.13), а при выборе показательного распределения — одно окно **lambda**.

Под списком распределений находится флажок **Fixed Scaling** (фиксированная шкала). В том случае, когда этот флажок установлен, все графики, следующие за первым, изображаются в том же самом масштабе, что и первый график. Это позволяет сразу же увидеть те изменения графика, которые обусловлены изменениями параметров распределения. Однако при очень больших изменениях параметров это может привести к выходу нового графика «за экран». В таких случаях флажок следует сбросить.

В верхней части окна, правее списка распределений, находятся флажки: **Inverse** (функция, обратная функции распределения), **Two-tailed** (двухстороннее), **(1—Cumulative p)** (1—накопленная p), **Print** (печать) и **Creat Graph** (построить график).

Табл. П.2.3 поясняет назначение и взаимную связь флажков **Inverse**, **Two-tailed** и **(1—Cumulative p)**.

Таблица П.2.3

Исходная величина	Активные флажки	Результат вычислений
		Прямая задача
z	Нет	$\mathbf{p} = P(X < z) = F(z)$ — значение функции распределения $F(x)$, выбранного распределения, в точке $x = z$
	Two-tailed	$\mathbf{p} = P(\bar{x} - z < X < \bar{x} + z)$ — вероятность того, что рассматриваемая случайная величина X попадет в интервал $(\bar{x} - z,\ \bar{x} + z)$. Здесь и далее $\bar{x}$ — среднее значение (математическое ожидание) рассматриваемой случайной величины X
	(1—Cumulative p)	$\mathbf{p} = P(\bar{x} + z < X < \infty)$ — вероятность того, что рассматриваемая случайная величина X попадет в интервал $(\bar{x} + z,\ \infty)$
	Two-tailed (1—Cumulative p)	$\mathbf{p} = 1 - P(\bar{x} - z < X < \bar{x} + z)$ — вероятность того, что рассматриваемая случайная величина X не попадет в интервал $(\bar{x} - z,\ \bar{x} + z)$
		Обратная задача
p	Inverse	Квантиль x_p порядка p. На графике функции плотности отмечена точка x_p
	Inverse Two-tailed	Квантиль $x_{(1+p)/2}$ порядка $(1+p)/2$. На графике функции плотности отмечены точки: $-x_{(1+p)/2}$ и $x_{(1+p)/2}$
	Inverse (1—Cumulative p)	Квантиль x_{1-p} порядка $1-p$. На графике функции плотности отмечена точка x_{1-p}
	Inverse Two-tailed (1—Cumulative p)	Квантиль $x_{1-p/2}$ порядка $1-p/2$. На графике функции плотности отмечены точки: $-x_{1-p/2}$ и $x_{1-p/2}$

Примечания: 1. Флажок **Two-tailed** используется только при работе с симметричными распределениями.

2. Всякий раз, когда в поле **p** вводится какое-нибудь число, автоматически активизируется флажок **Inverse** (в связи с этим не совсем ясно, для чего нужен этот флажок).

В центре окна, под флажками, расположены поля, предназначенные для ввода исходных данных и выдачи результата вычислений (в случае нормального распределения — это поля **Z** и **p**). Использование этих полей зависит от решаемой задачи. Так, например, при вычислении значения функции распределения $F(x)$ в заданной точке x (т. е. при решении прямой задачи) поле **Z** является полем ввода (в него вводится заданное значение x аргумента), а поле **p** — полем выдачи результата вычислений (в него выводится вычисленное пакетом значение функции распределения $F(x)$ в заданной точке x). При вычислении квантили x_p (т. е. при решении обратной задачи) полем ввода является поле **p** (в него вводится порядок p квантили), а полем выдачи результата — поле **Z** (в него выводится квантиль x_p).

В правом верхнем углу окна находится кнопка **Compute** (вычислить). С помощью этой кнопки подается команда на выполнение вычислений. Процесс построения графиков запускается нажатием кнопки **Compute** при включенном флажке **Creat Graph**.

Рассмотрим примеры, поясняющие использование вероятностного калькулятора.

Пример 5. Найти нижнюю и верхнюю пятипроцентные точки t-распределения Стьюдента с десятью степенями свободы.

Для того чтобы решить эту задачу, необходимо:

- В переключателе модулей **STATISTICA Module Switcher** выделить модуль **Basic Statistics/Tables**.
- Нажать кнопку **Switch to**.
- В открывшемся окне **Basic Statistics and Tables** выделить строку **Probability calculator**.
- Нажать кнопку **OK** (или клавишу ⟨**Enter**⟩).
- В открывшемся окне **Probability Distribution calculator**, в списке распределений, установить курсор мыши на строке **t (Student)** (t-распределение Стьюдента) и щелкнуть левой клавишей мыши.

Справа от списка распределений появятся эскизы графиков функции плотности (**Density Function**) и функции распределения (**Distribution Function**) t-распределения Стьюдента, а над графиком функции распределения откроется поле **df** (degrees of freedom) — число степеней свободы.

- Установить флажки **Inverse, Two-tailed**.
- В поле ввода **p** ввести число **0.9**, а в поле **df** — число **10**.
- Нажать кнопку **Compute**.

В поле **t**, предназначенном для выдачи результата вычислений, появится число **1.812460**. Это и есть верхняя пятипроцентная точка t-распределения Стьюдента с десятью степенями свободы, т. е. $x^{\text{в}}_{(0.05)} = 1.812460$. В силу симметрии t-распределения Стьюдента нижняя пятипроцентная точка этого распределения $x^{\text{н}}_{(0.05)} = -1.812460$.

Результат вычислений можно представить в графическом виде. Для этого необходимо:

- Включить флажок **Creat Graph**.
- Нажать кнопку **Compute**.

На экране появятся график функции плотности t-распределения Стьюдента с десятью степенями свободы и график функции $P(-|x| < X < |x|) = 1 - 2(1 - F_{\text{С}}(|x|))$, где $F_{\text{С}}(x)$ — функция распределения t-распределения Стьюдента (рис. П.2.14).

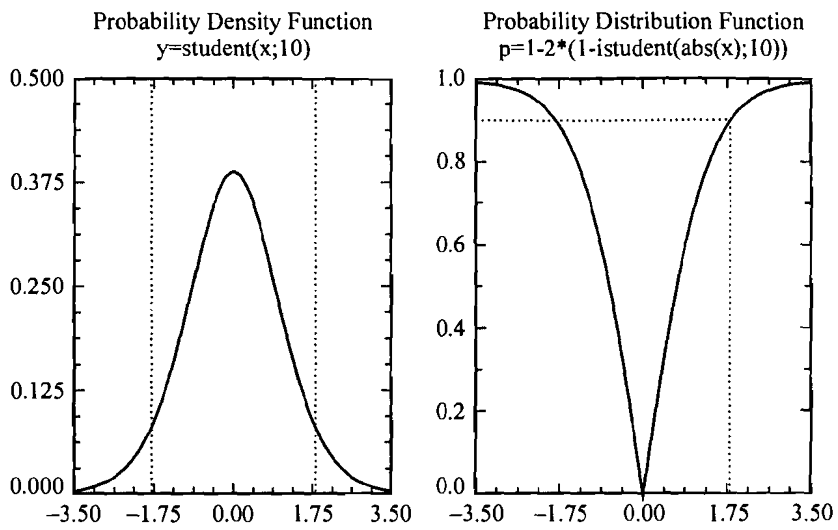


Рис. П.2.14. Кривые распределения Стьюдента с десятью степенями свободы.

Рассматриваемую задачу можно решить и по-другому.

- Сразу же после активизации t-распределения Стьюдента, не включая никаких флажков, ввести в поле ввода **p** число **0.95**. (При этом автоматически включится флажок **Inverse**. Так происходит всякий раз, когда в поле **p** вводится какое-нибудь число).
- В поле **df** ввести число **10**.
- Нажать кнопку **Compute**.

В поле **t** выдачи результата вычислений появится число **1.812460**.

Возможен и такой вариант решения:

- Сразу же после активизации t-распределения Стьюдента установить флажки **Two-tailed** и (**1−Cumulative p**).
- В поле ввода **p** ввести число **0.1**. (При этом автоматически включится флажок **Inverse**).
- В поле **df** ввести число **10**.
- Нажать кнопку **Compute**.

В поле **t** выдачи результата вычислений появится число **1.812460**.

Пример 6. Вычислить вероятности биномиального ряда распределения с параметрами $n = 5$ и $p = 0.4$.

В вероятностном калькуляторе пакета STATISTICA v. 5.0 нет дискретных распределений. Поэтому все вычисления, связанные с этими распределениями, реализуются с помощью встроенных функций, задающих функцию вероятности и функцию распределения выбранного дискретного закона распределения. В частности, вычисления, связанные с биномиальным распределением, выполняются с помощью встроенных функций

$$\mathbf{binom\,(x, p, n)} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \text{ и}$$

$$\mathbf{ibinom\,(x, p, n)} = \sum_{i=0}^{x} C_n^i p^i (1-p)^{n-i},$$

$$x = 0, 1, \ldots, n.$$

Примечание. В англоязычной литературе по теории вероятностей под функцией распределения понимается функция $F(x) = P(X \le x)$. В отечественной литературе функцией распределения называется функция $F(x) = P(X < x)$.

Решение задачи начинается с создания пустой электронной таблицы. Для создания этой таблицы необходимо следующее.

- В переключателе модулей **STATISTICA Module Switcher** выделить модуль **Basic Statistics/Tables** (основные статистики/таблицы).
- Нажать кнопку **Switch to** (перейти в), расположенную в нижней части переключателя модулей.

Откроется рабочее окно системы STATISTICA (рис. П.2.15).

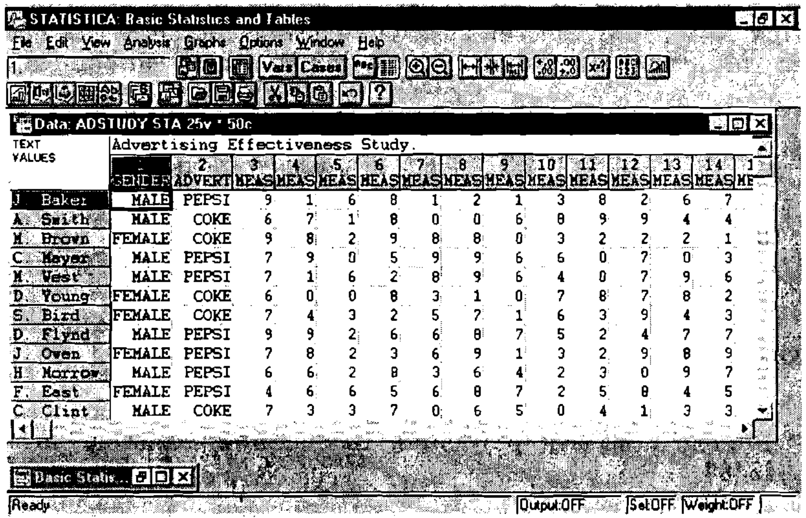


Рис. П.2.15. Рабочее окно системы STATISTICA.

В рабочей области открывшегося окна находится электронная таблица, содержащая данные, которые использовались в

предыдущем сеансе работы с системой STATISTICA. При первом запуске системы автоматически открывается электронная таблица, содержащая файл **ADSTUDY.STA 25v * 50c**, который входит в набор примеров, поставляемых с системой (именно этот случай изображен на рис. П.2.15).

- Подвести курсор мыши к пункту **File** (файл) и щелкнуть левой клавишей мыши.
- В меню, открывшемся после щелчка мыши, выбрать команду **New Data** (новые данные).

Откроется окно **New Data: Specify File Name** (новые данные: определить имя файла) (рис. П.2.16).

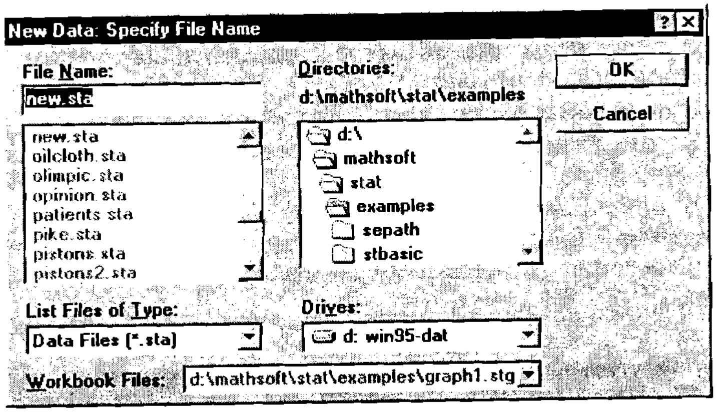


Рис. П.2.16. Окно «Новые данные: Определить имя файла» (начальное состояние).

- В поле ввода **File Name** (имя файла) открывшегося диалогового окна **New Data: Speciify File Name** ввести имя **BINDIST.STA**. (Это имя представляет собой комбинацию из начальных фрагментов двух слов: **bin**omial (биномиальное) и **dist**ribution (распределение). Можно было бы использовать и какое-нибудь другое имя, например BD).
- Нажать кнопку **OK**.

В рабочей области откроется пустая электронная таблица, в заголовке которой записаны ее имя и размер: **Bindist.sta 10v*10c** (рис. П.2.17). Размер таблицы **10v*10c** (10 столбцов-переменных*10 строк-случаев) и имена переменных **VAR1, VAR2, ..., VAR10**, которые предполагается хранить в таблице, предложены системой по умолчанию.

- Дважды щелкнуть левой клавишей мыши по имени переменной **VAR1**.

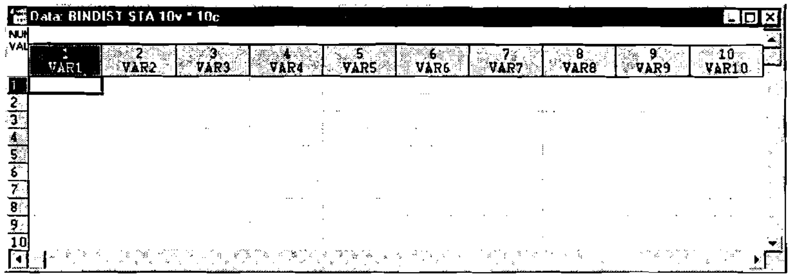


Рис. П.2.17. Пустая электронная таблица для биномиальных вероятностей.

Откроется диалоговое окно **Variable 1** с окнами ввода **Name** (имя переменной), **Column width** (ширина столбца), **Decimals** (число десятичных знаков после разделительной точки), **Long name** (длинное имя) (рис. П.2.18).

- В поле **Name** ввести имя переменной **ВЕРОЯТ**.
- В поле **Column width** ввести число **6**, а в поле **Decimals** — число **5**.
- В поле **Long name** ввести знак равенства и имя **=Binom(v0-1,0.4,5)** функции вероятности биномиального распределения с заданными параметрами $p = 0.4$ и $n = 5$ (см. рис. П.2.18).

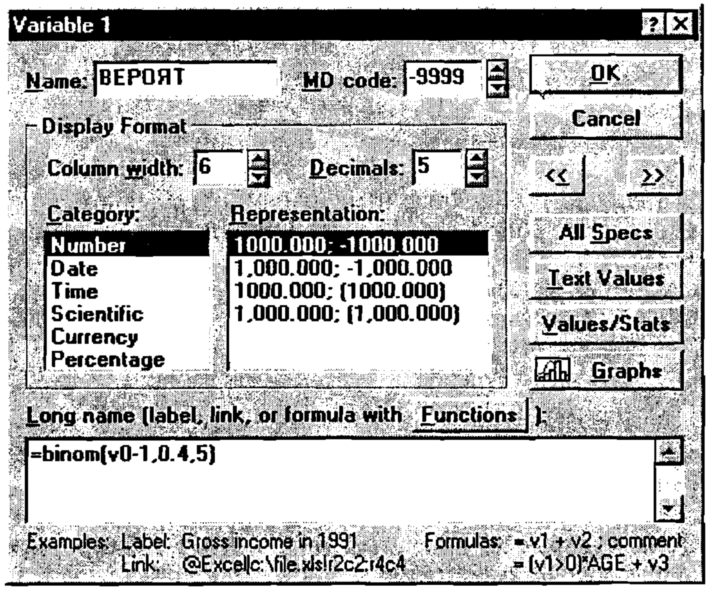


Рис. П.2.18. Окно спецификации переменной «Variable 1».

- Нажать кнопку **OK**.

На экране появится диалоговое окно с сообщением **Expression OK** (выражение правильное) и запросом **Recalculate the variable now?** («Пересчитать переменную?») (рис. П.2.19).

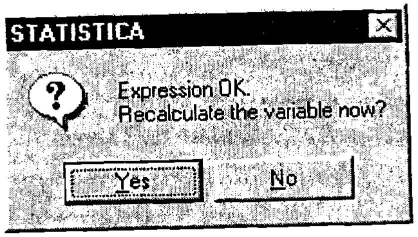


Рис. П.2.19.

- Нажать кнопку **Yes**.

Электронная таблица примет вид, изображенный на рис. П.2.20. Из таблицы следует, что

$$p_0 = 0.07776,\ p_1 = 0.25920,\ p_2 = 0.34560,\ p_3 = 0.23040,$$
$$p_4 = 0.07680,\ p_5 = 0.01024.$$

(Сравните эти результаты с результатами решения примера *2*).

Замечание. При решении примера *6* вычисление биномиальных вероятностей осуществлялось с помощью встроенной функции binom(x,p,n), где $x = 0, 1, \ldots, 5$, $p = 0.4$ и $n = 5$. При этом в качестве аргумента этой функции использовалось выражение v0 − 1, где v0 — номер текущей строки электронной таблицы. Таким образом, при заполнении первой строки таблицы (т. е. при v0 = 1) аргумент x принимал значение 0 (x = v0 − 1 = = 1 − 1 = 0), при заполнении второй строки (т. е. при v0 = 2),

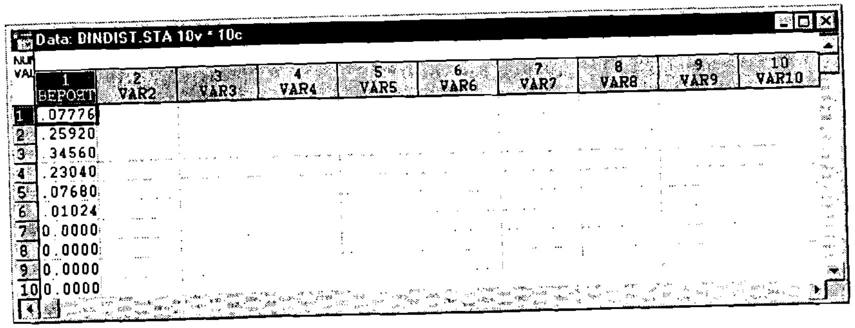


Рис. П.2.20. Электронная таблица с биномиальными вероятностями ($p = 0.4$, $n = 5$).

аргумент x принимал значение 1 ($x = v0 - 1 = 2 - 1 = 1$) и т. д. В [35, с. 74, 79, 81, 82, 85—87, 90] в качестве «длинного имени» использовалось «имя» binom(v0,0.4,5). В результате ни в одном из примеров не вычислена вероятность $p_0 = P(X = 0)$.

Пример 7. Найти нижнюю и верхнюю однопроцентные точки хи-квадрат-распределения Пирсона с пятью степенями свободы.

Для решения этой задачи необходимо:

- В переключателе модулей **STATISTICA Module Switcher** выделить модуль **Basic Statistics/Tables**.
- Нажать кнопку **Switch to**.
- В открывшемся окне **Basic Statistics and Tables** выделить строку **Probability calculator**.
- Нажать кнопку **OK** (или клавишу ⟨**Enter**⟩).
- В открывшемся окне **Probability Distribution calculator**, в списке распределений, установить курсор мыши на строке **Chi I** (хи-квадрат-распределение) и щелкнуть левой клавишей мыши.

Справа от списка распределений появятся эскизы графиков функции плотности (**Density Function**) и функции распределения (**Distribution Function**) хи-квадрат-распределения Пирсона, а над графиком функции распределения откроется поле ввода **df** (deegres of freedom — число степеней свободы).

- В поле ввода **p** ввести число **0.01**, а в поле **df** — число **5**.
- Нажать кнопку **Compute**.

В поле **Chi I** появится нижняя однопроцентная точка $x^{н}_{(0.01)} = 0.554285$ хи-квадрат-распределения с пятью степенями свободы.

- В поле ввода **p** ввести число **0.99**.
- Нажать кнопку **Compute**.

В поле **Chi I** появится верхняя однопроцентная точка $x^{в}_{(0.01)} = 15.088091$ хи-квадрат-распределения с пятью степенями свободы. Таким образом, с точностью до третьего десятичного знака $x^{н}_{(0.01)} = 0.554$, $x^{в}_{(0.01)} = 15.088$. На рис. П.2.21 приведены графики функции плотности и функции распределения хи-квадрат-распределения с пятью степенями свободы. На графике отмечена верхняя однопроцентная точка $x^{в}_{(0.01)} = 15.088$.

Пример 8. Сформировать последовательность из 12 случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0, 1).

Для формирования требуемой последовательности необходимо:

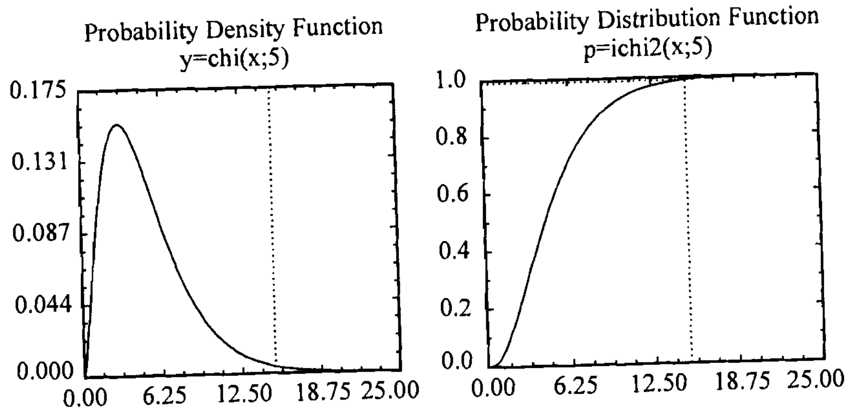


Рис. П.2.21. Графики функции плотности и функции распределения хи-квадрат распределения с пятью степенями свободы.

- Создать пустую электронную таблицу и присвоить ей имя, например **Sample1**.
- На панели инструментов нажать кнопку **Cases** (случаи).
- В открывшемся диалоговом окне выбрать команду **Add...** («Добавить»).

Откроется окно **Add Cases** («Добавить случаи (строки)») (рис. П.2.22).

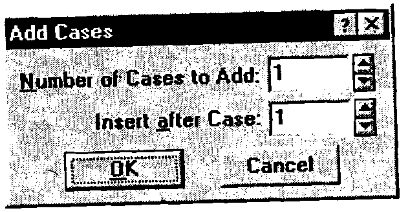


Рис. П.2.22. Окно «Добавить строки в таблицу».

- В поле **Number of Cases to Add** (число добавляемых строк) ввести число **2**, а в поле **Insert after Case** («Вставить после строки») — число **10**.
- Нажать кнопку **OK**.

В электронную таблицу **SAMPLE1.STA** добавятся две дополнительные строки.

- Дважды щелкнуть левой клавишей мыши по имени переменной **VAR1**.

Откроется диалоговое окно **Variable 1**.

- В поле **Name** ввести имя переменной **R** (первая буква слова «random» — случайный).
- В поле **Column width** ввести число **6**, а в поле **Decimals** — число **5**.
- В поле **Long name** ввести имя **=Rnd(1)** генератора стандартных равномерных случайных чисел (случайных чисел, распределенных равномерно в интервале (0, 1)).
- Нажать кнопку **OK**.
- В открывшемся диалоговом окне STATISTICA нажать кнопку **Yes**.

На экране отобразится электронная таблица **SAMPLE1.STA**, в первом столбце которой записаны 12 случайных чисел стандартной равномерной последовательности (рис. П.2.23).

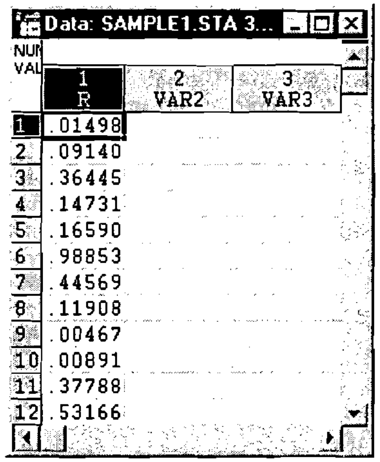


Рис. П.2.23. Последовательность случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0; 1), сформированная пакетом.

Пример 9. Сформировать последовательность из 15 стандартных нормальных случайных чисел, т. е. нормальных случайных чисел с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением 1.

Для формирования требуемой последовательности необходимо:

- Создать пустую электронную таблицу и присвоить ей имя **Sample**.
- На панели инструментов нажать кнопку **Cases** («случаи»).
- В открывшемся диалоговом окне выбрать команду **Add...** («добавить»).

- В открывшемся окне **Add Cases**, в поле **Number of Cases to Add** ввести число **5**, а в поле **Insert after Case** — число **10**.
- Нажать кнопку **OK**.

В электронную таблицу **SAMPLE.STA** добавятся пять дополнительных строк.

- Дважды щелкнуть левой клавишей мыши по имени переменной **VAR1**.

Откроется диалоговое окно **Variable 1**.

- В поле **Name** ввести имя переменной **Z**.
- В поле **Column width** ввести число **8**, а в поле **Decimals** — число **4**.
- В поле **Long name** ввести имя **=Vnormal(Rnd(1),0,1)** функции, формирующей последовательность стандартных нормальных случайных чисел, т. е. случайных чисел, распределенных по нормальному закону с параметрами 0 и 1.
- Нажать кнопку **OK**.
- В открывшемся диалоговом окне STATISTICA нажать кнопку **Yes**.

На экране отобразится электронная таблица **SAMPLE.STA**, в первом столбце которой записаны 15 случайных чисел стандартной нормальной последовательности (рис. П.2.24).

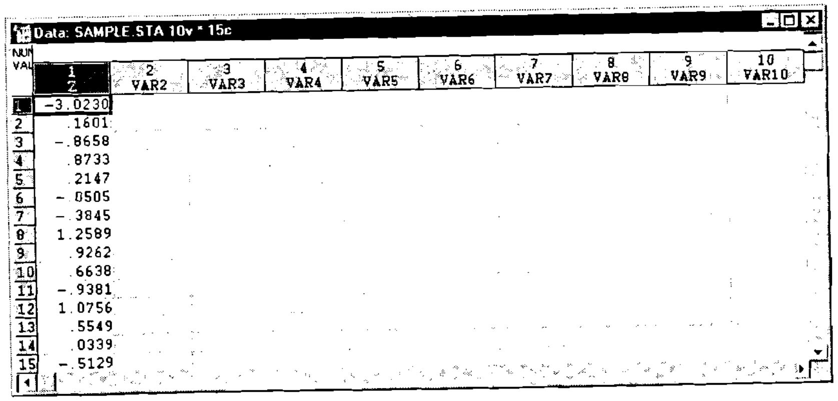


Рис. П.2.24. Последовательность стандартных нормальных случайных чисел, сформированная пакетом.

ЛИТЕРАТУРА

Таблицы

1. *Барк Л. С. и др.* Таблицы распределения Рэлея—Райса. М.: ВЦ АН СССР, 1964.
2. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
3. *Ганин М. П.* Таблицы для вероятностных и статистических расчетов. Л.: ВМА, 1986.
4. *Келли Т. Л.* Статистические таблицы. М.: ВЦ АН СССР, 1966.
5. *Крапивин В. В.* Таблицы распределения Вальда. М.: Наука, 1965.
6. *Оуэн Д. Б.* Сборник статистических таблиц. М.: ВЦ АН СССР, 1966.
7. *Пагурова В. Н.* Таблицы неполной гамма-функции. М.: ВЦ АН СССР, 1963.
8. *Пирсон К.* Таблицы неполной бета-функции. М.: ВЦ АН СССР, 1974.
9. *Слуцкий Е. Е.* Таблицы для вычисления неполной гамма-функции и функции вероятностей χ^2. Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
10. *Таблицы* нормального интеграла, нормальной плотности и ее нормированных производных / Под ред. Н. В. Смирнова. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
11. *Таблицы* функций распределения и плотностей распределения Стьюдента / Под ред. Н. В. Смирнова. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
12. *Таблицы* вероятностных функций. Т. 2. М.: ВЦ АН СССР, 1959.

Справочники

13. *Абезгауз Г. Г. и др.* Справочник по вероятностным расчетам. М.: Воениздат, 1970.
14. *Абрамовитц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
15. *Айвазян С. А. и др.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983.
16. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980.
17. *Вадзинский Р. Н.* Гамма- и бета-распределения. Л.: ВМА, 1989.
18. *Королюк В. С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Киев: Наукова думка, 1978.
19. *Поллард Дж.* Справочник по вычислительным методам статистики М.: Финансы и статистика, 1982.
20. *Хастингс Н., Пикок Дж.* Справочник по статистическим распределениям. М.: Статистика, 1980.
21. *Математическая* энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1977.
22. *Johnson N. L., Kotz S.* Distributions in Statistics. Vol. 1. Discrete Distributions. Boston: Houghton Mufflin, 1969.

23. *Johnson N. L., Kotz S.* Distributions in Statistics. Vol. 2. Continuous Univariate Distributions. Boston: Houghton Mufflin, 1970.
24. *Johnson N. L., Kotz S.* Distributions in Statistics. Vol. 3. Continuous Univariate Distributions. Boston: Houghton Mufflin, 1970.

Государственные стандарты

25. ГОСТ 11.001—73. Прикладная статистика: Ряды предпочтительных численных значений статистических характеристик. М.: Изд-во стандартов, 1973.
26. ГОСТ 11.002—73 (СТ СЭВ 545—77). Прикладная статистика: Правила оценки анормальности результатов наблюдений. М.: Изд-во стандартов, 1982.
27. ГОСТ 11.003—73. Прикладная статистика: Равномерно распределенные случайные числа. М.: Изд-во стандартов, 1973.
28. ГОСТ 11.004—74 (СТ СЭВ 876—78). Прикладная статистика: Правила определения оценок и доверительных границ для параметров нормального распределения. М.: Изд-во стандартов, 1981.
29. ГОСТ 11.005—74. Прикладная статистика: Правила определения оценок и доверительных границ для параметров экспоненциального распределения и распределения Пуассона. М.: Изд-во стандартов, 1974.
30. ГОСТ 11.006—74 (СТ СЭВ 1190—78). Прикладная статистика: Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. М.: Изд-во стандартов, 1981.
31. ГОСТ 11.007—74. Прикладная статистика: Правила определения оценок и доверительных границ для параметров распределения Вейбулла. М.: Изд-во стандартов, 1980.
32. ГОСТ 11.008—75. Прикладная статистика: Правила построения и применения вероятностных сеток. М.: Изд-во стандартов, 1976.
33. ГОСТ 11.009—73. Прикладная статистика: Правила определения оценок и доверительных границ для параметров логарифмически нормального распределения. М.: Изд-во стандартов, 1980.
34. ГОСТ 11.010—81. Прикладная статистика: Правила определения оценок параметров и доверительных интервалов для биномиального и отрицательного биномиального распределения. М.: Изд-во стандартов, 1981.

Руководства общего характера

35. *Боровиков В. П.* Популярное введение в программу STATISTICA. М.: Компьютер пресс, 1998.
36. *Боровиков В. П., Боровиков И. П.* STATISTICA. Статистический анализ и обработка данных в среде Windows. М.: ФИЛИНЪ, 1997.
37. *Бусленко Н. П. и др.* Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М.: ГИФМЛ, 1962.
38. *Ганин М. П., Свешников А. А.* Теория вероятностей и ее применение для решения задач ВМФ. Л.: ВМОЛА, 1968.
39. *Ганин М. П.* Решение прикладных задач теории вероятностей. Вып. 2. Случайные величины. Л.: ВМОЛУА, 1973.
40. *Голенко Д. И.* Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М.: Наука, ГРФМЛ, 1969.
41. *Дьяконов В. П.* Справочник по системе символьной математики DERIVE. М.: СК ПРЕСС, 1998.

42. *Иванов В. Р.* Методы вычислений на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1986.
43. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1977.
44. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимация. М.: Мир, 1980.
45. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1984.
46. *Сборник* научных программ на Фортране. Вып. 1. Статистика. М.: Статистика, 1974.
47. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, ГРФМЛ, 1973.
48. *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.* Статистический анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА · М, 1998.
49. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.
50. *Хан Г., Шапиро С.* Статистические модели в инженерных задачах. М.: Мир, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

Глава 2

ДИСКРЕТНЫЕ (ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Глава 3

НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. Распределения с возможными значениями на всей числовой оси

Б. Распределения с возможными значениями на положительной полуоси

В. Распределения с возможными значениями на ограниченном интервале

Г. Распределения, используемые в математической статистике

Научное издание

Ратмир Николаевич ВАДЗИНСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО ВЕРОЯТНОСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ

Редактор издательства Л. С. Тихомирова
Художник Л. А. Яценко
Технический редактор Е. Г. Коленова
Корректоры О. М. Бобылева, Н. И. Журавлева и Н. А. Тюрина
Компьютерная верстка И. Ю. Илюхиной

Лицензия ИД № 02980 от 06 октября 2000 г.
Сдано в набор 15.08.2000. Подписано к печати 14.03.2001.
Формат 60 x 90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура таймс.
Усл. печ. л. 18.5. Уч.-изд. л. 16.2. Тираж 1000 экз.
Тип. зак. № 3406. С 59

Санкт-Петербургская издательская фирма «Наука» РАН
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская лин., 1
nauka@aspid.nw.ru

Санкт-Петербургская типография «Наука» РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 лин., 12