Основы теории случайных процессов

1.1 Основные определения

По мере нашего продвижения по курсу теории вероятностей перед нами возникают все более и более сложные случайные объекты. Сначала это случайные события, которые можно отождествить с их индикаторами, принимающими значения 0 и 1. Затем (действительнозначные) случайные величины, которые могут своими значениями охватывать всю действительную прямую. Следом появляются комплекснозначные случайные элементы, конечномерные случайные векторы. Наконец, при изучении основных конструкций математической статистики, мы доходим до рассмотрения случайных элементов, принимающих значения в бесконечномерном пространстве (выборки бесконечного объема, как случайные векторы). Естественно, что все эти объекты возникают в результате каких-то случайных экспериментов. Нетрудно представить себе такой эксперимент, результатом которого будет определенная кривая линия или собственно функция. Так мы можем получить случайный элемент, принимающий значения в некотором функциональном пространстве, или случайную функцию. В этом случае говорят о том, что перед нами случайный процесс. Встречаются в литературе также названия вероятностный процесс, стохастический процесс, а иногда и просто процесс, если заранее ясно, о чем речь. Дадим теперь определение.

Пусть T - некоторое множество. $A(T)$ - пространство действительнозначных функций, определенных на T. Рассмотрим также вероятностное пространство $<\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}>$. Отображение $\xi : T \times \Omega \to A(T)$ назовем *случайной функцией* если $\forall t \in T \quad \xi(t) = \xi(t, \cdot)$ - случайная величина. Точка вместо второго аргумента означает здесь и далее, что мы рассматриваем $\xi(t)$ как функцию $\omega \in \Omega$ в этом контексте. Если $T \subset R$ и параметр t интерпретируется как время, то случайную функцию называют *случайным процессом.* Если T представляет собой класс целых чисел $\mathbf{Z}$ или натуральных чисел $\mathbf{N}$, то говорят о *случайной последовательности*. Отметим, что последовательность случайных величин – объект для нас относительно знакомый, поэтому мы будем часто привлекать его в качестве примера.

Если мы фиксируем $\omega \in \Omega$, то полученная неслучайная функция $\xi(\omega, \cdot)$ называется *реализацией* случайного процесса. Наряду с этим термином употребляются также названия *траектория, выборочная функция.* Как обычно, случайный аргумент ω мы условимся опускать в формулах, когда это не может привести к недоразумениям. Функция

$$K(t,s) \ = \ \mathbf{cov}(\xi(t),\, \xi(s)) \ = \ \mathbf{M}\xi(t)\xi(s) \ - \ \mathbf{M}\xi(t)\,\mathbf{M}\xi(s)$$

называется *ковариационной функцией* случайного процесса ξ.

Совместные распределения случайных величин $\xi(t_1)$, ... $\xi(t_n)$ при некотором n и произвольном фиксированном наборе элементов $t_1, ..., t_n$ множества t называют *n-мерными распределениями* случайного процесса. Если же имеются ввиду n-мерные распределения при произвольном (не конкретном) n, то условимся говорить о *конечномерных распределениях.*

Если при каждом $t \in T$ выполнено

$$\mathbf{P}(\xi(t) \ = \ \eta(t)) \ = \ 1,$$

то случайные процессы ξ, η называют *стохастически эквивалентными*. При этом, хотя все конечномерные распределения таких процессов совпадают, стохастически эквивалентные процессы могут иметь траектории, обладающие существенно различными свойствами. На это указывает следующий

Пример 1. Пусть $T \ = \ [0,1]$, τ – случайная величина, имеющая абсолютно непрерывное распределение, сосредоточенное на T. Положим $\xi(t,\omega) \equiv 0$,

$$\eta(t,\omega) \ = \ \mathbf{I}_{\{\tau=t\}}(\omega) \ = \ \begin{cases} 1, \ \tau = t, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что все реализации ξ постоянны, а следовательно, непрерывны, в то время, как каждая траектория η имеет (устранимый) разрыв. При этом

$$\mathbf{P}(\xi(t) \neq \eta(t)) \ = \ \mathbf{P}(\tau = t) \ = \ 0,$$

что означает стохастическую эквивалентность рассматриваемых процессов.

1.2 Важнейшие классы случайных процессов

Перечислим некоторые наиболее часто встречающиеся классы случайных процессов. Эти классы, вообще говоря, пересекаются.

1.2.1

Будем говорить, что $\xi(\tau, \omega)$ - *процесс с независимыми приращениями*, если для произвольных $t_1, ..., t_n \in T$, удовлетворяющих условию $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, случайные величины $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1}), ..., \xi(t_3) - \xi(t_2), \xi(t_2) - \xi(t_1)$ независимы. Конечно, в этом определении n может быть произвольным натуральным числом, не меньшим, чем 3.

Например, если $T = \mathbf{N}$, $\xi_1, \xi_2, \ \dots, \xi_n, \dots$ - последовательность независимых случайных величин, то случайный процесс

$$\xi(t, k) = \sum_{n=1}^{k} \xi_n -$$

процесс с независимыми приращениями (Почему?).

Наряду с процессами с независимыми приращениями рассматривают также процессы *с некоррелированными приращениями*, то есть такие, что для произвольного n для любой последовательности $t_1 \leq ... \leq t_n$ выполнено

$$\mathbf{cov}\,(\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j), \xi(t_j) - \xi(t_{j-1})) = 0, \quad j = 2, ..., n-1.$$

1.2.2

Случайный процесс ξ называется *стационарным*, если для произвольного $h \in T$ его конечномерные распределения не меняются при сдвиге на h:

$$\forall n \, \forall t_1, \ \dots, t_n \, \forall x_1, \ \dots, x_n$$

$$\mathbf{P}(\xi(t_1) < x_1, ..., \xi(t_n) < x_n) \ = \ \mathbf{P}(\xi(t_1 + h) < x_1, ..., \xi(t_n + h) < x_n)\,.$$

Простым примером стационарного случайного процесса являются суммы одинаково распределенных, не обязательно независимых случайных величин. Рассмотрим более сложный

ПРИМЕР 2. Пусть A, η, φ - случайные величины, $A, \eta \geq 0$, а φ не зависит от A, η и имеет равномерное на $[0, 2\pi]$ распределение. Положим

$$\xi(t, \omega) = A\cos(\eta t + \varphi)\,.$$

Докажем, что введенный случайный процесс стационарен.Для этого нужно доказать, что для произвольного борелевского $n-$мерного множества C и любых действительных $h, t_1, ..., t_n$ имеет место

$$\mathbf{P}\left((A\cos(\eta(t_1 + h) + \varphi), ..., A\cos(\eta(t_n + h) + \varphi)) \in C\right) \ =$$

$$= \mathbf{P}\left((A\cos(\eta t_1+\varphi), ..., A\cos(\eta t_n+\varphi)) \in C\right) .$$

Обозначим через B множество троек (x,y,z), $x \geq 0, y \geq 0, z \in [0,2\pi]$ таких, что

$$(x\cos(yt_1+z)), ..., x\cos(yt_n+z)) \in C .$$

Для $u \in R$ через $< u >$ условимся обозначать u, приведенное к отрезку $[0,2\pi]$, т.е.

$$< u >= u - k\cdot 2\pi \quad \text{при } k\cdot 2\pi \leq u \leq (k+1)\cdot 2\pi .$$

Тогда доказываемое равенство может быть записано в виде

$$\mathbf{P}((A,\eta,<\varphi+\eta h>) \in B) = \mathbf{P}((A,\eta,\varphi) \in B) .$$

или

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_\varphi\{z : (x,y,<z+yh>) \in B\} d\Phi_{A,\eta}(x,y) =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_\varphi\{z : (x,y,z) \in B\} d\Phi_{A,\eta}(x,y) .$$

где Φ_φ - распределение φ, а $\Phi_{A,\eta}$ - совместное распределение A и η. Но последнее равенство очевидно, поскольку

$$\forall x,y\ \Phi_\varphi\{z : (x,y,<z+yh>) \in B\} =$$
$$= \Phi_\varphi\{z : (x,y,z) \in B\}.$$

в силу инвариантности распределения случайной величины φ относительно сдвигов и приведений по модулю 2π.

Случайный процесс ξ называется *стационарным в широком смысле*, если существуют его первые и вторые моменты, причем они инвариантны относительно сдвигов, то есть при произвольном $h \in T$

$$\mathbf{M}\xi(t+h) = \mathbf{M}\xi(t); \quad K(t+h,s+h) = K(t,s) .$$

Легко видеть, что эти условия эквивалентны следующим:

$$\mathbf{M}(\xi(t)) = m; \quad K(t,s) = K(t-s).$$

Очевидно также, что любой стационарный процесс, обладающий конечным вторым моментом, стационарен в широком смысле.

1.2.3

Случайный процесс ξ называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения нормальны, т.е. для произвольного n и любого набора $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ вектор $(\xi(t_1), ..., \xi(t_n))$ имеет n-мерное нормальное распределение. Многомерная центральная предельная теорема служит основанием того, что гауссовские случайные процессы являются предельными для сумм возрастающего числа независимых случайных процессов. Например, пусть $X = [X]_n$ - выборка из непрерывного распределения. Эмпирическая функция распределения

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}_{(-\infty, x_j)}(x) \quad -$$

случайный процесс. Нетрудно проверить, что $\sqrt{n}(F_n^*(x) - F(x))$, где $F(x)$ - теоретическая функция распределения, при $n \to \infty$ сходится к некоторому гауссовскому случайному процессу.

1.2.4

Рассмотрим некоторые обобщения. *Однородное* (или *стационарное) векторное поле* - это случайная функция, заданная на $T = \mathbf{R}^n$ такая, что ее конечномерные распределения не изменяются при сдвиге на любой неслучайный вектор $h \in \mathbf{R}^n$. *Однородное изотропное поле* - это случайная функция, являющаяся однородным векторным полем, конечномерные распределения которой не меняются также при вращениях вокруг произвольной точки. Аналогичным образом может быть определена изотропность (инвариантность) относительно любой группы преобразований $\mathbf{R}^n$.

1.2.5

Определим класс марковских процессов как таких, для которых при фиксированном настоящем будущее не зависит от прошлого. Дадим более строгое определение. Для этого условимся считать, что множество T линейно упорядочено и обозначим

$$\mathcal{F}_{\le t} \ = \ \sigma\{\xi(s),\ s \in T,\ s \le t\},\ \mathcal{F}_{\ge t} \ = \ \sigma\{\xi(s),\ s \in T,\ s \ge t\},$$

$$\mathcal{F}_{=t} \ = \ \sigma\{\xi(t)\}\,.$$

Наглядный смысл этих σ - алгебр таков: наблюдая процесс $\xi(s)$ до момента t, мы получим информацию о наступлении любого из событий $\mathcal{F}_{\leq t}$. Тем самым, эта σ - алгебра состоит из событий, относящихся к прошлому относительно момента t. В точности также $\mathcal{F}_{\geq t}$ олицетворяет собой будущее, а $\mathcal{F}_{=t}$ - настоящее, т.е. те события, о наступлении которых мы можем судить, наблюдая процесс $\xi(t)$ только в момент времени t.

Случайный процесс назовем *марковским*, если

$$\forall t \in T \, \forall B \in \mathcal{F}_{\geq t} \quad \mathbf{P}(B/\mathcal{F}_{\leq t}) = \mathbf{P}(B/\mathcal{F}_{=t})\,.$$

Любой процесс с независимыми приращениями является марковским (докажите!). Если T состоит только из целых чисел, то марковский процесс называется *цепью Маркова.* Множество, в котором марковский процесс принимает свои значения, называется *фазовым пространством* . Точки фазового пространства называются *состояниями* и интерпретируются как состояния физической системы в некоторые моменты времени. Если мы имеем цепь Маркова с конечным или счетным множеством состояний, то будем говорить о дискретной цепи Маркова. Для них можно дать определение марковского свойства, не вводя σ- алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$, $\mathcal{F}_{\geq t}$, $\mathcal{F}_{=t}$:

Случайная последовательность ξ_t , $t \in \mathbf{Z}$ образует дискретную цепь Маркова с конечным или счетным множеством состояний X, если для произвольных $s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_m \leq t \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ и любых $x_1, ..., x_m$, x, $y_1, ..., y_n \in X$ таких, что $\mathbf{P}(\xi_t = x) \neq 0$, выполнено

$$\mathbf{P}(\xi_{s_1} = x_1, ..., \xi_{s_m} = x_m,\ \xi_{t_1} = y_1, ..., \xi_{t_n} = y_n \,/\xi_t = x) \ =$$
$$= \ \mathbf{P}(\xi_{s_1} = x_1, ..., \xi_{s_m} = x_m \,/\xi_t = x) \cdot \mathbf{P}(\xi_{t_1} = y_1, ..., \xi_{t_n} = y_n \,/\xi_t = x)\,.$$

1.3 Некоторые важные примеры

1.3.1

Назовем процесс $\xi(t, \omega)$, $T = [0, \infty)$ *пуассоновским* с параметром a, если он имеет независимые приращения, $\xi(0, \omega) \equiv 0$ и при произвольных $s, t (s \leq t)$ случайная величина $\xi(t) - \xi(s)$ имеет распределение Пуассона с параметром $a(t-s)$. Можно доказать, что все траектории пуассоновского процесса - неубывающие функции, принимающие лишь целочисленные значения, причем они возрастают лишь скачками величины 1. Очевидно, этот процесс стационарен.

1.3.2

Очень важным примером для нас является *винеровский процесс*, который служит моделью броуновского движения. Винеровским процессом $w(t,\omega)$ мы будем называть гауссовский процесс с независимыми приращениями такой, что $w(0) = 0$, $w(t) - w(s)$ имеет нормальное распределение $N(0, t-s)$ при $t > s$

Выпишем конечномерные распределения для винеровского процесса. Для этого зафиксируем $t_1, ..., t_n$ так, что $0 < t_1 < ... < t_n$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{w} = (w_1, ...w_n)$, где $w_j = w(t_j)$, $j = 1, 2...n$. Заметим, что плотность распределения вектора $X = (w_1, w_2 - w_1, ..., w_n - w_{n-1})$ легко вычислить, т.к. его координаты - независимые нормально распределенные случайные величины:

$$\mathbf{P}_X(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n}([2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-1/2} \exp\{-x_i^2/2(t_i - t_{i-1)})\}),$$

где $t_0 = 0$. При этом $\overrightarrow{w} = AX$, где

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \end{array} \right).$$

Как известно, в этом случае

$$\mathbf{P}_{\overrightarrow{w}}(X) = |\det A|^{-1}\mathbf{P}_X(A^{-1}X).$$

Легко проверить, что $\det A = 1$,

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{array} \right),$$

откуда $A^{-1}X = (x_1, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1})$, и

$$\mathbf{P}_{\overrightarrow{w}}(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n}([2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-1/2} \exp\{-(x_i - x_{i-1})^2/2(t_i - t_{i-1})\}),$$

где $x_0 = 0$. Итак, конечномерные распределения винеровского процесса являются нормальными (гауссовскими).

1.3.3

Рассмотрим процессы размножения и гибели. Пусть в области G имеются некие частицы (например, бактерии), которые могут порождать новые частицы, а также погибать (исчезать, покидать область G и так далее). Если промежуток времени Δt мал, то предположим, что для каждой частицы независимо от остальных вероятность породить новую равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, и вероятность погибнуть - $\mu\Delta t + o(\Delta t)$. При этом положительные константы λ, μ могут, вообще говоря, зависеть от общего числа n частиц, находящихся в данный момент в области G. Если это будет так, то мы условимся этот факт каждый раз отдельно оговаривать. При $\mu = 0$ говорят о процессе чистого размножения, при $\lambda = 0$ - о чистой гибели. *Процессом размножения и гибели* назовем $\xi(t)$, равный количеству частиц в области G в момент времени t.

Найдем одномерные распределения этого процесса, то есть вероятности $p_n(t)$ того, что в момент времени t в области G будет ровно n частиц. Пусть в момент времени t в области n частиц. Найдем вероятность того, что за время Δt число частиц не изменится. Заметим сначала, что вероятность того, что две или более частиц породят новые частицы, равна $o(\Delta t)$ с учетом предположений модели. Такова же и вероятность гибели двух и более частиц одновременно. Поэтому с точностью до $o(\Delta t)$ можно считать, что число новых частиц, как и число погибших, не более 1. Из этих же соображений вероятность появления одной новой (а значит, и хотя бы одной новой) частицы за время Δt равна сумме вероятностей каждой из частиц породить новую частицу, т.е. $n\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Аналогично, вероятность гибели одной частицы $n\mu\Delta t + o(\Delta t)$. Тогда по формуле полной вероятности

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)(1 - n\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t)) +$$

$$+p_{n-1}(t)((n-1)\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - (n-1)\mu\Delta t + o(\Delta t)) +$$

$$+p_{n+1}(t)((n+1)\mu\Delta t + o(\Delta t))(1 - (n+1)\lambda\Delta t + o(\Delta t)).$$

Отсюда нетрудно получить

$$\frac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -n(\lambda+\mu)p_n(t) + (n-1)\lambda p_(n-1)(t) +$$

$$+(n+1)\mu p_{n+1}(t) + o(1).$$

Переходя к пределу, имеем

$$p_n'(t) = -n(\lambda+\mu)p_n(t) + (n-1)\lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t).$$

Здесь предполагалось, что $n \geq 1$. Если же $n = 0$, то аналогичными рассуждениями выводим

$$p_0'(t) = \mu p_1(t).$$

Умножим n-ное уравнение полученной системы на x^n и, складывая, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n'(t)x^n = \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)x^{n-1}n + \lambda x^2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)x^{n-1}n -$$

$$-(\lambda+\mu)\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n n.$$

Если мы теперь обозначим

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n \ ,$$

то полученное выше уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (\mu - (\lambda+\mu)x + \lambda x^2)\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Предположим для простоты, что $p_1(0) = 1$, т.е. в начальный момент времени в области находилась одна частица. Отсюда, в частности, следует, что $p_n(0) = 0$ при $n > 1$. Чтобы решить уравнение в частных производных, составим обыкновенное дифференциальное уравнение.

$$dt \ = \ \frac{-dx}{\mu - (\lambda+\mu)x + \lambda x^2} \ ,$$

откуда

$$c - t = \int \frac{dx}{\mu - (\lambda+\mu)x + \lambda x^2} \ = \ \frac{1}{\mu - \lambda}\int (\frac{1}{1-x} - \frac{\lambda}{\mu - \lambda x})dx \ =$$

$$= \ \frac{1}{\mu-\lambda}\ln\left|\frac{\mu - \lambda x}{1-x}\right|.$$

Общее решение уравнения в частных производных, т.о., будет

$$F(t,x) \;=\; R\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\ln\left|\frac{\mu-\lambda x}{1-x}\right| + t\right)\;,$$

где R - произвольная дифференцируемая функция. При $t=0 \quad F(x,t) = x$, или

$$R\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\ln\left|\frac{\mu-\lambda x}{1-x}\right| + t\right) = x,$$

и R есть обратная функция для $u \;=\; \frac{1}{\mu-\lambda}\ln\left|\frac{\mu-\lambda x}{1-x}\right|$. Следовательно,

$$R(u) = \frac{\mu - e^{(\mu-\lambda)u}}{\lambda - e^{(\mu-\lambda)u}}.$$

Подставляя в это выражение вместо u аргумент R, имеем

$$F(x,t) \;=\; \frac{\mu(1-e^{(\mu-\lambda)t}) + x(\lambda e^{(\mu-\lambda)t} - \mu)}{\lambda - \mu e^{(\mu-\lambda)t} + \lambda x(e^{(\mu-\lambda)u} - 1)}.$$

Разлагая F в ряд по степеням x, нетрудно получить, что

$$p_n(t) = \frac{(\mu-\lambda)^2 e^{(\mu-\lambda)t}(1-e^{(\mu-\lambda)t})\lambda^{n-1}}{(\lambda - \mu e^{(\mu-\lambda)t})^{n+1}} \quad,\; n \geq 1$$

1.4 Обзор методов теории случайных процессов.

Посмотрим сначала на случайный процесс, как на функцию неслучайного аргумента t. Для такой функции можно изучать те же вопросы, что и для обычных функций в математическом анализе - наличие пределов, непрерывность, производные и.т.п. Правда, при этом используемое определение предела необходимо 'подправить' с учетом наличия случайностей.

Например случайный процесс называем *стохастически непрерывным* (или непрерывным по вероятности) в точке t_0, если для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{P}(|\xi(t,\omega) - \xi(t_0)| \geq \varepsilon) = 0.$$

Если же выполнено

$$\mathbf{M}|\xi(t)-\xi(t_0)|^\alpha \;\to\; 0 \text{ при } t\to t_0\,,$$

то говорят, что в точке t_0 процесс $\xi(t)$ *непрерывен в среднем* порядка α. Аналогичным образом нетрудно переформулировать и остальные понятия.

Естественно, что можно группировать различные случайные процессы с этой точки зрения в функциональные пространства. Одним из важнейших здесь пространств является евклидово пространство случайных величин, интегрируемых в квадрате

$$L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$$

В нем задается скалярное произведение

$$<\xi,\eta> = \mathbf{M}\xi\eta.$$

Можно доказать, что известная функция

$$\Pi(s,t)=\mathbf{M}\xi(t)\xi(s)$$

задает $\xi(t,w)$ однозначно с точностью до изометрического преобразования L^2. Поэтому в качестве характеристик случайного процесса $\xi(t,w)$, интегрируемого в квадрате, обычно выбирают его математическое ожидание $a(t)=\mathbf{M}\xi(t)$ и корреляционную функцию

$$K(t,s) \;=\; \Pi(t,s)-a(t)a(s).$$

Раздел теории случайных процессов, занимающийся лишь моментами первых двух порядков носит название *корреляционной теории*. Для многих понятий в рамках этой теории вводятся упрощенные аналоги, сопровождаемые обычно словами "в широком смысле". Например, независимость приращений в широком смысле означает их некоррелируемость, понятие стационарности в широком смысле уже появлялось выше.

Можно, с другой стороны, смотреть на случайный процесс $\xi(t,s)$ как на случайный элемент, принимающий значения в некотором функциональном пространстве. Логично в этом случае рассматривать вероятности вида $\mathbf{P}(\xi\in A)$, где A - какое-то подмножество функционального пространства. Если A - цилиндрическое, т.е. найдутся такие борелевские подмножества $B_1,\ \dots\ ,B_n$ в $\mathbf{R}$, что

$$\mathbf{P}(\xi\in A)=\mathbf{P}(\xi(t_1)\in B_1,\ \dots\ ,\xi(t_n)\in B_n)\,,$$

Рис. 1.1: Траектория случайного процесса, проходящая через воротца.

то мы имеем дело с конечномерными распределениями ξ. Наглядно это означает, что траектория процесса проходит через ряд "вертикальных воротцев"(см. рис.):

Например, корреляционная теория случайных процессов имеет дело лишь с одномерными и двумерными распределениями $(n = 1, 2)$ но задание конечномерных распределений позволяет вычислять вероятности $\mathbf{P}(\xi \in A)$ лишь для борелевских множеств A, тогда как многие интересные множества в функциональных пространствах оказываются не борелевскими. Таким является, например, множество $\{\xi | \sup_{0\le t\le 1} \xi(t) < x\}$ в любом достаточно богатом функциональном пространстве. Действительно, для случайных процессов ξ , η из примера 1

$$\mathbf{P}(\sup_{0\le t\le 1} \xi(t) < 1/2) = 1 \quad , \quad \mathbf{P}(\sup_{0\le t\le 1} \eta(t) < 1/2) = 0,$$

хотя эти процессы имеют одинаковые конечномерные распределения, и следовательно, должны иметь совпадающие вероятности попадания в произвольное борелевское A.

Чтобы обойти трудности такого рода, введем определение сепарабельности. Говорят, что случайный процесс $\xi(t)$ *сепарабелен*, если в T существует такое счетное всюду плотное множество S, что для любого интервала $I \subset T$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{u\in I\bigcap S} \xi(u) = \sup_{u\in I} \xi(u) \, ; \, \inf_{u\in I\bigcap S} \xi(u) = \inf_{u\in I} \xi(u)\right) = 1,$$

Известна теорема о том, что любой случайный процесс имеет сепарабельную модификацию (см. [3]), т.е. стохастически эквивалентный ему сепарабельный процесс.

Заметное отличие теории бесконечномерных распределений от конечномерных состоит в том, что у бесконечномерных распределений не бывает плотностей. Дело в том, что в конечномерном случае имеется особая мера - мера Лебега, инвариантная относительно сдвигов и вращений, а также достаточно просто преобразующаяся при растяжениях и сжатиях. В бесконечномерном случае такой меры нет.

Наконец, можно изучать $\xi(t, \omega)$ как и любую функцию двух переменных. В сущности, у нас при этом возникает лишь одна совсем новая теорема - теорема Фубини, которая представляет из себя обоснование замены математического ожидания интеграла интегралом математического ожидания. Этот прием, тем не менее, позволяет получить достаточно большое число серьезных результатов. Например, в более простом варианте - замена математического ожидания суммы суммой математических ожиданий - он позволил нам вычислить математическое ожидание биномиальной случайной величины. Поэтому сформулируем эту теорему более строго. Назовем случайный процесс $\xi(t, \omega)$ измеримым относительно сигма-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств T, если для произвольного борелевского B выполнено $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}$

Теорема 1 (Фубини) *Пусть $\xi(t, \omega), t \in T$ - измеримый относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$, μ-мера на измеримом пространстве $(T, \mathcal{A})$. Пусть хотя бы один из интегралов*

$$\int_T \mathbf{M}|\xi(t,\omega)|d\mu(t) \text{ и } \mathbf{M}\int_T |\xi(t,\omega)|d\mu(t)$$

конечен. Тогда конечен и второй интеграл, и оба эти интеграла совпадают.

Отметим в заключение этого раздела, что возможны комбинации методов, описанных выше, как, впрочем, и создание специфических методов для изучаемого процесса.

1.5 Производная и интеграл. Канонические разложения.

В этом разделе некоторые факты, полезные для решения задач, приводятся без доказательства. За доказательствами отсылаем читателя к [1, гл. 15] [2] -[3].

Как уже определялось ранее (для произвольного порядка среднего), случайный процесс $\xi(t)$ называется непрерывным в среднем квадратическом в точке t_0, если

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{M}|\xi(t) - \xi(t_0)|^2 = 0.$$

Этот факт принято также записывать

$$\text{l.i.m.}_{t \to t_0} \xi(t) = \xi(t_0).$$

Символом l.i.m. (limit in mean) традиционно обозначают *пределы в среднем квадратическом.* Для непрерывности случайного процесса в среднем квадратическом необходима и достаточна непрерывность $a(t) = \mathbf{M}\xi(t)$ и непрерывность корреляционной функции $K(t,s)$ на прямой $t = s$.

Производной процесса $\xi(t)$ назовем такой процесс $\eta(t)$, что

$$\eta(t,\omega) \ = \ \mathrm{l.i.m.}_{\Delta t \to 0} \frac{\xi(t+\Delta t,\omega) - \xi(t,\omega)}{\Delta t},$$

если только этот предел существует. Обозначение:

$$\eta(t,\omega) = \frac{d}{dt}\xi(t,\omega)\ .$$

При этом можно доказать, что

$$\mathbf{M}\eta(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{M}\xi(t) \quad ; \quad K_\eta(t,s) = \frac{\partial^2 K_\xi}{\partial t \partial s}(t,s).$$

Для существования производных необходимо и достаточно дифференцируемости $a(t)$, а также существования второй частной производной $K(t,s)$ на прямой $t = s$.

Определим теперь интеграл от "взвешенного"при помощи неслучайной функции $g(t,s)$ случайного процесса равенством

$$Y(s) \ = \ \int_o^T g(t,s)\xi(t)dt \ = \ \mathrm{l.i.m.}\sum_{i=1}^{n} g(t_i,s)\xi(t_i)\Delta t_i\ ,$$

где, как обычно, предел в правой части равенства подсчитан в предположении $n \to \infty$, $\max \Delta t_i \to 0$.

Интеграл от случайного процесса - снова случайный процесс, зависящий от аргумента s. Характеристики этого процесса определяются равенствами

$$\mathbf{M}\ Y(s) = \int_0^T g(t,s)\mathbf{M}\xi(t)dt$$

$$K_Y(s,u) = \int_0^T \int_0^T g(t,s)g(b,u)K_\xi(t,b)dtdb.$$

Всякое представление случайного процесса в виде суммы

$$\xi(t) = \mathbf{M}\xi(t) + \sum_n \xi_n\varphi_n(t)\ ,$$

где $\varphi_n(t)$ - неслучайные функции, а случайные величины ξ_n удовлетворяют условиям

$$\mathbf{M}\xi_n = 0, \quad \mathbf{D}\xi_n = d_n \ > \ 0, \quad \mathbf{cov}(\xi_n, \xi_m) = 0 \text{ при } n \neq m$$

называется *каноническим разложением* процесса $\xi(t)$. Очевидно, что если мы сумели найти каноническое разложение $\xi(t)$, то

$$K(s,t) \ = \ \sum_n d_n \varphi_n(t) \varphi_n(s).$$

Выбросом случайного процесса $\xi(t)$ *за уровень* a называют событие $\{\xi(t,\omega) > a\}$. Пусть ξ - стационарный случайный процесс с плотностью одномерного распределения $f(x)$, а $f(x,v)$ - плотность совместного распределения $\xi(t)$ и $\frac{d\xi}{dt}(t)$. Выпишем среднее время $\mathbf{M}T_a$ пребывания ξ над уровнем a за время T, среднее количество выбросов $\mathbf{M}N_a$ за уровень a в течение этого же времени и среднюю длительность $\mathbf{M}\tau_a$ одного такого выброса :

$$\mathbf{M}T_a = T \int_a^\infty f(x)dx \ ; \ \mathbf{M}N_a = T \int_0^\infty v f(u,v)dv \ ; \ \mathbf{M}\tau_a = \frac{\mathbf{M}T_a}{\mathbf{M}N_a}.$$

Среднее число выбросов стационарного процесса в единицу времени равно

$$\mathbf{M}n_a \ = \ \frac{1}{T}\mathbf{M}N_a \ = \ \int_0^\infty v f(a,v)dv.$$

Для стационарного гауссовского случайного процесса эти формулы приобретают вид

$$\mathbf{M}n_a = \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_x} \exp\left\{ -\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\},$$

$$\mathbf{M}\tau_a = \pi \frac{\sigma_x}{\sigma_v} \exp\left\{ \frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \left(1 - \Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x} \right) \right),$$

$$\mathbf{M}N_a = T \cdot \mathbf{M}n_a \ ; \qquad \mathbf{M}T_a = T \cdot \mathbf{M}\tau_a$$

1.6 Задачи.

1. В области G имеются частицы, способные размножаться. Гибель или уменьшение числа частиц не отмечается. За промежуток времени Δt каждая частица независимо от остальных производит новую с вероятностью $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

Составить систему дифференциальных уравнений, определяющих этот процесс. Решить ее. Найти математическое ожидание и дисперсию количества частиц, находящихся в области в момент времени t.

2. В области G в начальный момент $t = 0$ имелось k частиц. Независимо друг от друга каждая из частиц за время Δt покидает область с вероятностью $\mu\Delta t + o(\Delta t)$. Новые частицы не появляются. Найти систему дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс. Решить ее. Найти математическое ожидание и дисперсию количества частиц, находящихся в области в момент времени t.

3. В области G появляются некоторые частицы, которые в дальнейшем не покидают G. Если к моменту $t = 0$ в области имелось n частиц, то вероятность увеличения частиц на единицу в интервал $(t\ ,\ \Delta t)$ равна $\frac{1+an}{1+at}\Delta t + o(\Delta t)$, где a - положительная постоянная. Вероятность увеличения числа частиц на две и более равна $o(\Delta t)$. Составить систему дифференциальных уравнений, определяющих этот процесс. Решить ее. Найти математическое ожидание и дисперсию числа частиц в области к моменту t.

4. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t) = X \sin \omega t$, где ω - постоянная частота, $\mathbf{M}X = 1$, $\mathbf{D}X = 0,2$.

5. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию процесса $\xi(t) = Xe^{-t^2}$, где X - случайная величина, $\mathbf{M}X = 2$, $\mathbf{D}X = 0,01$

6. Пусть U, V - некоррелированные случайные величины, $\mathbf{M}U = 0,5$, $\mathbf{M}V = 0,5$; $\mathbf{D}U = 1$, $\mathbf{D}V = 0,05$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию процесса $X(t) = Ut + Vt^2$.

7. Дан случайный процесс $\xi(t) = 2U \sin \omega t + 3Vt^2 + 5$, где U, V - случайные величины;

$$\mathbf{M}U = 1,\ \mathbf{M}V = 2,\ \mathbf{D}U = 0,1,\ \mathbf{D}V = 0,5,\ \rho(U, V) = -0,3.$$

Найти его математическое ожидание и корреляционную функцию.

8. Процесс $\xi(t)$ изменяет свои значения в случайные моменты времени. Значения $\xi(t)$ в промежутках между скачками не изменяются и представляют из себя независимые случайные величины, каждая из которых имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию процесса.

9. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию процесса Пуассона с параметром λ.

10. Случайные процесс $X(t)$ задан каноническим разложением

$$X(t) = t - 3\cos t + U \cdot (t + \cos t) + V \cos 2t,\ \mathbf{D}U = 1,\ \mathbf{D}V = 2.$$

Найти $\mathbf{M}X(t),\ K(t,s),\ \mathbf{D}X(t)$

11. Дан случайный процесс $X(t) = x_1 t + x_2 \sin t$, где случайный вектор (x_1, x_2) имеет математическое ожидание $(1, -1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Построить каноническое разложение этого случайного процесса. Найти $\mathbf{M}X(t),\ K(t,s)$.

12. Будет ли процесс Пуассона непрерывен? Дифференцируем в среднем квадратичном?

13. Известны характеристики случайного процесса $X(t)\ :\ \mathbf{M}X(t) = 2t + 1\ ;\ K(t,s) = e^{-(t-s)^2}$. Вычислить математическое ожидание и корреляционную функцию его производной.

14. На плоскости движется случайная точка M так, что ее полярный угол φ является случайной функцией времени с корреляционной функцией $K(t,s) = a^2 e^{-b^2(t-s)^2}$. Найти дисперсию угловой скорости ω полярного радиус-вектора точки M.

15. Доказать, что случайный процесс $X(t) = e^{-at}\sin(\omega t + \varphi)$ где a, ω - положительные постоянные, φ имеет нормальное распределение на $[0, 2\pi]$, дифференцируем при всех $t > 0$.

16. Случайный процесс $X(t)$ задан каноническим разложением $X(t) = 1 + t + Ut + Vt^2 + Wt^3$, где $\mathbf{D}U = 2,\ \mathbf{D}V = 1,\ \mathbf{W} = 0,1$. Найти характеристики процесса $\frac{dX}{dt}(t)$.

17. Пусть X - случайный процесс из задачи 11. Найти характеристики случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

18. На вход интегрирующего устройства поступает случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $0,2\cos^2 \omega t$ и корреляционной функцией $K(t,s) = 0,4\cos\omega t\cos\omega s$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию процесса на выходе интегратора.

19. Дифференцируемый в среднем квадратичном случайный процесс $X(t)$ имеет корреляционную функцию $k(t,s)$,
$$Y(t) = X(t) + \frac{dX}{dt}(t).$$
Найти математическое ожидание и корреляционную функцию Y. Что изменится, если процесс X был стационарен?

20. Среднее число выбросов стационарного процесса $\xi(t)$ за нулевой уровень (т.е. за уровень $a = m_x$) в единицу времени равно $0,01$. Дисперсия процесса равна 64. Найти дисперсию процесса $\frac{d\xi}{dt}(t)$.

21. Показать, что стохастически эквивалентные процессы имеют одинаковые конечномерные распределения.

22. Доказать, что процесс, стохастически эквивалентный стохастически непрерывному процессу, стохастически непрерывен.

23. Доказать, что если процесс стохастически непрерывен на компактном множестве, то он на этом множестве равномерно стохастически непрерывен (дайте определение!).

24. Докажите, что если случайный процесс стохастически непрерывен на компактном множестве $A \subset \mathbf{R}$, то он на этом множестве ограничен по вероятности, т.е. при $N \to \infty$
$$\sup_{t\in A} \mathbf{P}(|\xi(t)| > N) \to 0.$$

25. Доказать, что винеровский процесс является марковским.

Литература

[1] Боровков А.А. Теория вероятностей., - М: Наука, гл. ред. физ.-мат. литературы, 1986, - 432 с.

[2] Гихман И.И, Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. - М: Наука, 1977, - 568 с.

[3] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. - М: Наука, гл. ред. физ.-мат. литературы, 1975, - 320 с.