**Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т.35. – №6. – С.784-792.**

УДК 517.957

# ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Ю. В. Жерновый

**1. Введение. Постановка задачи.** Наиболее общие результаты по разрешимости краевых задач для нелинейных и квазилинейных уравнений второго порядка эллиптического типа приведены, в частности, в монографиях [1, гл. 6; 2, с. 321; 3, гл. 4, 5, 10]. Условия существования и единственности неотрицательных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений с нелинейностями вида $f(x_1,\dots,x_m,u,u_{x_1}\dots,u_{x_m})$ и $f(x_1,\dots,x_m,u)$ получены в работе [4, с. 277-283]. Ниже для эллиптических уравнений с нелинейностью вида $f(x_1,\dots,x_m,u)$ установлены условия однозначной разрешимости задачи Дирихле и задачи с краевым условием третьего рода с нелинейностью $\varphi(x_1,\dots,x_m,u)$, а также найдены условия существования и единственности классических неотрицательных решений нелинейной задачи Неймана. Следует отметить, что приведенные ниже результаты не могут быть получены как частный случай из условий разрешимости более общих краевых задач, рассмотренных в [1-3].

В области $D\subset\mathbb{R}^n$, ограниченной замкнутой достаточно гладкой поверхностью $S$, рассмотрим уравнение второго порядка

$$Mu\equiv\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^m b_i(x)\,u_{x_i}=-f(x,u),\qquad x=(x_1,\dots,x_m)\in D. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ и уравнение (1) строго эллиптично в $\overline{D}=D\cup S$, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\ge\gamma\sum_{i=1}^m\xi_i^2,\qquad \gamma=const>0. \tag{2}$$

Рассмотрим для уравнения (1) задачу Дирихле

$$Mu=-f(x,u),\quad x\in D;\qquad u(x)=\varphi(x),\qquad x\in S, \tag{3}$$

и третью краевую задачу с нелинейностью в граничном условии

$$Mu=-f(x,u),\quad x\in D;\qquad Pu\equiv a(x)\frac{\partial u}{\partial\nu}+\beta(x)u=\varphi(x,u),\qquad x\in S. \tag{4}$$

Здесь $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $f(x,u)$, $\varphi(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x,u)$ – заданные функции,

$$a(x)=\left[\sum_{j=1}^m\Big(\sum_{i=1}^m a_{ij}(x)\cos(n,x_i)\Big)^2\right]^{1/2}, \tag{5}$$

$n$ – единичный вектор нормали к $S$, а направление $\nu$ конормали к $S$ определяется формулами

$$\cos(n,x_k)=(1/a(x))\sum_{i=1}^m a_{ij}(x)\cos(n,x_i),\quad k=\overline{1,m}.$$

Будем рассматривать классические решения задач (3) и (4), т. е. решения задачи (3), принадлежащие множеству $U_1=\{u(x),\ x\in\overline{D}\colon\ u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})\}$ и решения задачи (4) из множества $U_3=\{u(x),\ x\in\overline{D}\colon\ u\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})\}$.

**2. Условия единственности решений задач (3) и (4).** Если выполняется условие (2), функция $f(x,u)$ обладает ограниченной производной по $u$ и $\partial f/\partial u\le 0$, то, согласно [2, с. 321], задача (3) может иметь не более одного решения $u(x)\in U_1$, т. е. для нее справедлива теорема единственности.

Установим условия единственности решения для задачи (4). Если $a_{ij}(x)\in C^1(\overline{D})$, функции $e_i(x)=b_i(x)-\sum_{j=1}^m\partial a_{ij}(x)/\partial x_j$, $i=\overline{1,m}$, также принадлежат классу $C^1(\overline{D})$, то для функций $u(x)$, $v(x)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ в области $D$ класса $C^1$ (области, ограниченной поверхностью класса $C^1$) можно записать формулу Грина [1, с. 21]

$$\int_D(v\,Mu-uM^*v)dx=\int_S\left[a(x)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)+b(x)uv\right]dS, \tag{6}$$

где $M^*v=\sum_{i,j=1}^m\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial x_i}(e_iv)$ – сопряженный оператор для оператора $M$, $a(x)$ определяется согласно (5), $b(x)=\sum_{i=1}^m e_i(x)\cos(n,x_i)$.

Формулу Грина (6) можно привести к виду

$$\int_D(v\,Mu-uM^*v)dx=\int_S(v\,Pu-u\,Qv)dS, \tag{7}$$

где $Q\,v = a(x)\frac{\partial v}{\partial \nu} + (\beta(x) - b(x))v$. Если в формуле (7) заменить $u$ на $u^2$ и положить $v = 1$, то получим

$$\int_D \left(u\,Mu + \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\,u_{x_i}u_{x_j}\right)dx = \frac{1}{2}\int_D c^* u^2 dx + \int_S u\left[P\,u - \left(\beta - \frac{b}{2}\right)u\right]dS, \qquad (8)$$

где $c^*(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial e_i(x)}{\partial x_i}$ , есть коэффициент при $v$ в $M^*v$. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – два решения задачи (4) такие, что $u(x) = u_1(x) - u_2(x) \not\equiv 0$. Тогда $u(x)$ есть решение краевой задачи

$$Mu = -\big(f(x,u_1) - f(x,u_2)\big), \quad x \in D; \qquad Pu = \varphi(x,u_1) - \varphi(x,u_2), \quad x \in S. \qquad (9)$$

Подставляя значения $M\,u$ и $P\,u$ из (9) в (8), получим равенство

$$\int_D \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\,u_{x_i}u_{x_j}dx = \int_D (u_1 - u_2)[f(x,u_1) - f(x,u_2)]dx + \frac{1}{2}\int_D c^* u^2 dx +$$
$$+\int_S (u_1 - u_2)[\varphi(x,u_1) - \varphi(x,u_2)]dS - \frac{1}{2}\int_S (2\,\beta - b)u^2 dS.$$

При выполнении условия (2) левая часть последнего равенства неотрицательна, поэтому можем сформулировать теорему единственности решения задачи (4).

**Теорема 1.** *Пусть для эллиптического оператора $M$ функции $a_{ij}(x)$, $e_i(x) \in \mathrm{C}^1(\overline{D})$, $\beta(x) \in C(S)$, функции $f(x,u)$, $\varphi(x,u)$ непрерывны по $x, u$ и не возрастают по переменной $u$, область $D$ ограничена поверхностью $S$ класса $\mathrm{C}^1$ и выполняются условия*

$$c^*(x) \le 0, \qquad 2\beta(x) - b(x) \ge 0, \qquad (10)$$

*причем если $\beta(x) \equiv 0$, то хотя бы одна из функция $f$, $\varphi$ зависит от $u$. Тогда краевая задача (4) может иметь не более одного решения $u(x) \in U_3$.*

**3. Априорные оценки решений задач (3), (4).** Введем обозначения:

$$M_{D0} = \max_{\overline{D}} f(x,0), \quad m_{D0} = \min_{\overline{D}} f(x,0), \quad M_S = \max_S \varphi(x), \quad m_S = \min_S \varphi(x), \quad M_{S0} = \max_S \varphi(x,0),$$

$$m_{S0} = \min_S \varphi(x,0), \quad M_D = \begin{cases} M_{D0}/\alpha_0, & M_{D0} \ge 0, \\ M_{D0}/\alpha_1, & M_{D0} \le 0; \end{cases} \quad m_D = \begin{cases} m_{D0}/\alpha_1, & m_{D0} \ge 0, \\ m_{D0}/\alpha_0, & m_{D0} \le 0; \end{cases}$$

$$M_{S3} = \begin{cases} M_{S0}/B_0, & M_{S0} \ge 0, \\ M_{S0}/B_1, & M_{S0} \le 0; \end{cases} \quad m_{S3} = \begin{cases} m_{S0}/B_1, & m_{S0} \ge 0, \\ m_{S0}/B_0, & m_{S0} \le 0. \end{cases}$$

**Лемма 1.** *Если выполняются условия (2), область $D$ ограничена поверхностью класса $\mathrm{C}^1$, $\beta(x) \in C(S)$, функции $f(x,u)$, $\varphi(x,u)$ непрерывны по $x, u$ и обладают ограниченными производными по $u$, причем можно указать постоянные $\alpha_0$, $\alpha_1$, $B_0$, $B_1$ такие, что*

$$\partial f/\partial u < 0, \qquad 0 < \alpha_0 \le |\partial f/\partial u| \le \alpha_1, \qquad 0 < B_0 \le \beta(x) - \partial\varphi/\partial u \le B_1, \qquad (11)$$

*то для каждого решения $u(x) \in U_3$ задачи (4) справедливы неравенства $m_3 \le u(x) \le M_3$, $x \in \overline{D}$, где $m_3 = \min\{m_D, m_{S3}\}$, $M_3 = \max\{M_D, M_{S3}\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения:

$$\alpha(x,u) = \int_0^1 \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\bigg|_{z=\tau u} d\tau, \qquad B(x,u) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi(x,z)}{\partial z}\bigg|_{z=\tau u} d\tau.$$

Поскольку $f(x,u) = \alpha(x,u)u + f(x,0)$, $\varphi(x,u) = B(x,u)u + \varphi(x,0)$, то краевую задачу (4) можно записать в виде

$$Mu + \alpha(x,u)u = -f(x,0), \quad x \in D; \qquad a\frac{\partial u}{\partial \nu} + [\beta - B(x,u)u] = \varphi(x,0), \quad x \in S. \qquad (12)$$

Очевидно, что $\alpha(x,u) < 0$, $\beta(x) - B(x,u) > 0$, $0 < \alpha_0 \le |\alpha(x,u)| \le \alpha_1$, $0 < B_0 \le \beta(x) - -B(x,u) \le B_1$.

Пусть $u(x_0) = \max_{\overline{D}} u(x)$, причем $x_0 \in D$. Тогда [1, с. 12] $Mu(x_0) \le 0$ и из (12) следует неравенство $\alpha(x_0, u(x_0))u(x_0) \ge -f(x_0,0)$. Поэтому

$$\max_{\overline{D}} u(x) = u(x_0) \le f(x_0,0)/|\alpha(x_0,u(x_0))| \le M_D.$$

Если же

$$\max_{\overline{D}} u(x) = u(x_1), \qquad x_1 \in S,$$

то $\partial u(x_1)/\partial \nu \ge 0$, и из (12) получим неравенство

$$\left[\beta(x_1) - B\left(x_1, u(x_1)\right)\right]u(x_1) \le \varphi(x_1,0),$$

в силу которого

$$\max_{\overline{D}} u(x) = u(x_1) \le \varphi(x_1,0)\Big/\left[\beta(x_1) - B\left(x_1, u(x_1)\right)\right] \le M_{S3}.$$

Аналогичные рассуждения в точке минимума $u(x)$ приводят к оценке $u$ снизу. Лемма доказана.

Таким же образом доказывается утверждение об оценках решений задачи Дирихле (3).

**Лемма 2.** *Если выполнено условие (2), функция $f(x,u)$ непрерывна по $x,u$ и обладает ограниченной производной по $u$, причем можно указать такие постоянные $\alpha_0$, $\alpha_1$, что*

$$\partial f/\partial u < 0, \qquad 0 < \alpha_0 \le |\partial f/\partial u| \le \alpha_1, \tag{13}$$

*то для каждого решения $u(x) \in U_1$ задачи (3) справедливы неравенства $m_1 \le u(x) \le M_1, x \in \overline{D}$, где $m_1 = \min\{m_D, m_S\}$, $M_1 = \max\{M_D, M_S\}$.*

**4. Сведение задач (3), (4) к интегральным уравнениям.** Сохраняя предположения относительно коэффициентов оператора $M$ и области $D$, при которых справедлива формула Грина (7), для произвольной функции $u \in C^2(D)\bigcap C^1(\overline{D})$ можем записать формулу Стокса [1, с. 25, 26]

$$u(x) = \int_D \left[u(y)M_y^* L(x,y) - L(x,y)Mu(y)\right]dy + \int_S \left[L(x,y)Pu(y) - uQ_y L(x,y)\right]dS_y. \tag{14}$$

Здесь $L(x,y)-$ функция Леви [1, с. 24, 25], относительно которой сохраним дополнительные предположения [1, с. 25], при которых справедлива формула (14). Обозначения $M_y^* L$, $Q_y L$ следует понимать так, что операторы $M^*$ и $Q$ применяются к функции $L(x,y)$ как к функции от $y$.

Следуя [1, с. 26], функцией Грина $G_1(x,y)$ задачи Дирихле для оператора $M$ назовем функцию Леви, которая как функция точки $y$ для всех $x \in D$ является решением краевой задачи $M_y^* G_1(x,y) = 0$, $y \in D\backslash\{x\}$; $G_1(x,y) = 0$, $y \in S$, а функцией Грина $G_3(x,y)$ третьей краевой задачи для оператора $M$ назовем функцию Леви, которая как функция точки $y$ для всех $x \in D$ является решением краевой задачи

$$M_y^* G_3(x,y) = 0, \quad y \in D\backslash\{x\}; \quad Q_y G_3(x,y) = 0, \quad y \in S. \tag{15}$$

Подставляя в формулу Стокса (14) вместо функции Леви $L(x,y)$ сначала $G_1(x,y)$, а потом $G_3(x,y)$, получим, что любое решение задачи Дирихле (3) $u(x) \in C^2(D)\bigcap C^1(\overline{D})$ должно удовлетворять нелинейному интегральному уравнению

$$u(x) = \int_D G_1(x,y) f\big(y,u(y)\big)dy - \int_S \varphi(y) Q_y G_1(x,y) dS_y, \qquad x \in \overline{D}, \tag{16}$$

где $Q_y G_1 = a\,\partial G_1/\partial \nu_y$, а любое решение задачи (4) $u(x) \in U_3 -$ нелинейному интегральному уравнению

$$u(x) = \int_D G_3(x,y) f\big(y,u(y)\big)dy + \int_S G_3(x,y)\varphi\big(y,u(y)\big)dS_y, \qquad x \in \overline{D}. \tag{17}$$

Учитывая свойства функций Грина $G_1(x,y)$ и $G_3(x,y)$, установленные в [1, с. 81-88], и приведенные там же результаты по исследованию интегральных представлений решений линейных первой и третьей краевых задач для оператора $M$ через функцию Грина, можем сформулировать следующие утверждения.

**Лемма 3.** *Пусть $M -$ эллиптический оператор, заданный в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ класса $C^{1+\alpha}$ [3, с. 29-31], коэффициенты которого удовлетворяют условиям: $a_{ij}$, $e_i \in C^{1+\alpha}(\overline{D})$. Пусть, кроме того, $\varphi(x) \in C(S)$, $c^*(x) \le 0$ и для каждой фиксированной $u(x) \in U_1$ функция $\tilde{f}(x) = f\big(x,u(x)\big) \in C^\alpha(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда существует единственная функция Грина $G_1(x,y)$ и задача (3) эквивалентна интегральному уравнению (16), т. е. любое решение задачи (3), принадлежащее множеству $U_1$, является решением интегрального уравнения (16) и, наоборот, всякое решение интегрального уравнения (16) является решением задачи (3), принадлежащим множеству $U_1$.*

**Лемма 4.** *Пусть $M -$ эллиптический оператор, заданный в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ класса $C^{1+\alpha}$, причем $a_{ij}$, $e_i \in C^{1+\alpha}(\overline{D})$. Пусть, кроме того, $\beta(x) \in C(S)$, $c^*(x) \le 0$, $2\beta(x) - b(x) \ge 0$ и для каждой фиксированной $u(x) \in U_3$ функция $\tilde{f}(x) = f\big(x,u(x)\big) \in C^\alpha(D) \cap C(\overline{D})$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi\big(x,u(x)\big) \in C^\alpha(S)$, причем функция $\beta(x) \not\equiv 0$. Тогда существует единственная функция Грина $G_3(x,y)$ и задача (4) эквивалентна интегральному уравнению (17) в смысле решений $u(x) \in U_3$.*

**Замечания. 1.** В [1, с. 15-17] рассматриваются решения третьей краевой задачи из множества $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ (в каждой точке $S$ требуется существование только производной $\partial u/\partial \nu$), поэтому, чтобы обеспечить принадлежность задачи (4) множеству $U_3$, когда $u(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, в условиях леммы 4 дополнительно предполагается, что функция $\tilde{\varphi}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера (см. теорему 14.VII [1, с. 45]).

**2.** Если $f(x,u)$ непрерывна по Гёльдеру по переменным $x$ и $u$, то $\tilde{f}(x) = f\big(x,u(x)\big)$ непрерывна по Гёльдеру по $x$.

**3.** Условия лемм 3, 4 можно несколько ослабить. В таком виде они обеспечивают также существование функций Грина $G_1^*(x,y)$, $G_3^*(x,y)$ соответствующих сопряженных задач, которые будут использованы ниже.

**5. Существование решений задач (3), (4).** Рассмотрим некоторые свойства функций Грина $G_1(x,y)$ и $G_3(x,y)$.

**Лемма 5.** *Если выполняются условия леммы 3, кроме условий на функции $\tilde{f}(x)$, $\varphi(x)$, то $G_1(x,y) \geq 0$ для $(x,y) \in D \times \overline{D}$, $x \neq y$, и для $(x,y) \in \overline{D} \times D$, $x \neq y$.*

Доказательство. Условия леммы 3 обеспечивают существование функции Грина $G_1^*(x,y)$, причем $G_1(x,y) = G_1^*(y,x)$ [1, с.28]. Утверждение леммы следует непосредственно из принципа максимума (теорема 3.III в [1, с. 14]), если применить его к операторам $M$ и $M^*$ и учесть, что для оператора $M$ имеет место $c(x) \equiv 0$, а для $M^*$ $c^*(x) \leq 0$.

**Лемма 6.** *Если выполнены условия леммы 4, кроме условий на функции $\tilde{f}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, и неравенства $\beta(x) - b(x) > 0, \beta(x) > 0$, то $G_3(x,y) \geq 0$ для $(x,y) \in D \times \overline{D}$, $x \neq y$, и для $(x,y) \in \overline{D} \times D$, $x \neq y$.*

Доказательство. Условия леммы 4 обеспечивают существование функции Грина $G_3^*(x,y)$, для которой для всех $x \in D$ $M_y G_3^*(x,y) = 0$, $y \in D \backslash \{x\}$; $P_y G_3^*(x,y) = 0$, $y \in S$. Поскольку $G_3(x,y) = G_3^*(y,x)$ [1, с.28], то для всех $y \in D$

$$M_x\, G_3(x,y) = 0, \quad x \in D\backslash\{y\}; \qquad P_x G_3(x,y) = 0, \quad x \in S. \tag{18}$$

Пусть y$\in D -$ фиксированная точка. Функция $G_3(x,y) \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow y$, поэтому найдется такая окрестность $D_y$ точки $y$, что $G_3(x,y) > 0$ для $x \in D_y \backslash \{y\}$. Обозначим $D_1 = D \backslash D_y$. Для $x \in D_1$ $M_x\, G_3(x,y) = 0$, поэтому отрицательный минимум функции $G_3(x,y)$ для $x \in \overline{D_1}$ может достигаться только при $x \in \partial D_1$ (см. теорему 3.III из [1, с. 14]), а точнее при $x \in S$. Предположим, что существует точка $x_0 \in S$, для которой $G_3(x_0,y) < 0$, причем пусть $G_3(x_0,y) = \min\limits_{x \in S} G_3(x,y)$. Для $x \in S$ из (18) получим, что $G_3 = -(a/\beta)\, \partial G_3/\partial \nu_x$, значит $\partial G_3(x_0,y)/\partial \nu_x > 0$, а это невозможно, поскольку согласно теореме 3.IV [1, с. 14], в таких случаях должно быть $\partial G_3/\partial \nu_x < 0$. Таким образом, $G_3(x,y) \geq 0$ для всех $(x,y) \in \overline{D} \times D$, $x \neq y$. Аналогично доказывается, что $G_3(x,y) \geq 0$ для $(x,y) \in D \times \overline{D}$, $x \neq y$. Для этого необходимо использовать уравнение (15) и учесть, что $c^*(x) \leq 0$, поэтому для оператора $M^*$ справедливы теоремы 3.III и 3.IV [1, с. 14], а также учесть, что $\beta(x) - b(x) > 0$. Лемма доказана.

Введем интегральные операторы

$$A_1 u(x) = \int_D G_1(x,y) f\big(y,u(y)\big) dy - \int_S \varphi(y) Q_y G_1(x,y) dS_y, \qquad x \in \overline{D},$$
$$A_3 u(x) = \int_D G_3(x,y) f\big(y,u(y)\big) dy + \int_S G_3(x,y) \varphi\big(y,u(y)\big) dS_y, \qquad x \in \overline{D}.$$

Оператор $A_1$ будем рассматривать на множестве $K_1 = \{u(x) \in U_1 \colon m_1 \leq u(x) \leq M_1\}$, а $A_3 -$ на множестве $K_3 = \{u(x) \in U_3 \colon m_3 \leq u(x) \leq M_3\}$. Определим условия, при которых оператор $A_1$ преобразует множество $K_1$ в себя, а оператор $A_3 -$ множество $K_3$ в себя, предполагая, что выполнены условия лемм 3-6, а также неравенства (11) и (13).

Обозначим:

$$\beta_0 = \min_S \beta(x), \quad \beta_1 = \max_S \beta(x), \quad b_{0i} = \min_D f(x,M_i), \quad b_{1i} = \max_D f(x,m_i), \quad i = 1,3;$$
$$b_0 = \min_{x \in S,\ u \in [m_3,M_3]} \varphi(x,u), \quad b_1 = \max_{x \in S,\ u \in [m_3,M_3]} \varphi(x,u); \qquad H_{1S}(x) = \int_S Q_y G_1(x,y) dS_y,$$
$$H_{1S\varphi}(x) = \int_S \varphi(y) Q_y G_1(x,y) dS_y, \ \ H_{iD}(x) = \int_D G_i(x,y) dy, H_{iDf}(x) = \int_D G_i(x,y) \tilde{f}(y) dy, \ i = 1,3;$$
$$H_{iD} = \max_D H_{iD}(x), \ \ h_{iD} = \min_D H_{iD}(x), \quad i = 1,3;$$
$$H_{3S}(x) = \int_S G_3(x,y) dS_y, \qquad H_{3S\varphi}(x) = \int_S G_3(x,y) \tilde{\varphi}(y) dS_y.$$

Учитывая, что функция $H_{1S}(x)$ непрерывна в $\overline{D}$, а функция Грина является функцией Леви, из формулы (15.5) в [1, с. 47] получим равенство $H_{1S}(x) = -1$, $x \in \overline{D}$. Кроме того, $Q_y G_1(x,y) = a(y) \partial G_1(x,y)/\partial \nu_y \leq 0$, $m_S(-Q_y G_1(x,y)) \leq M_S(-Q_y G_1(x,y))$ для $x \in D$, $y \in S$. Поэтому имеют место оценки

$$m_S \leq -H_{1S\varphi}(x) \leq M_S, \qquad x \in \overline{D}. \tag{19}$$

Справедливость неравенств (19) для x$\in S$ легко доказать, используя непрерывность функции $H_{1S\varphi}(x)$ для $x \in \overline{D}$ и теорему об устойчивости знака непрерывной функции, предполагая от противного, что существует точка $x_0 \in S$, для которой $m_S + H_{1S\varphi}(x_0) > 0$ и $M_S + H_{1S\varphi}(x_0) < 0$.

Предположим сначала, что $b_{11} \le 0$, т. е. $f(x,u) \le 0$ для всех $x \in \overline{D}$, $u \in [m_1, M_1]$. Поскольку выполнены условия леммы 5, то $b_{01}G_1(x,y) \le G_1(x,y)\tilde{f}(y) \le b_{11}G_1(x,y) \le 0$, $(x,y) \in \overline{D} \times D$. Поэтому справедливы оценки $b_{01}H_{1D} \le H_{1Df}(x) \le b_{11}h_{1D} \le 0$, $x \in \overline{D}$, с учетом которых и оценок (19) получим, что $A_1 u \le M_1$ для всех $u \in K_1$. Неравенство $A_1 u \ge m_1$ будет выполняться, если

$$m_S + b_{01}H_{1D} \ge m_D. \tag{20}$$

В случае, когда $b_{01} \ge 0$, т. е. $f(x,u) \ge 0$ для всех $x \in \overline{D}$, $u \in [m_1, M_1]$, учитывая (19) и оценки $0 \le b_{01}h_{1D} \le H_{1Df}(x) \le b_{11}H_{1D} \le 0$, $x \in \overline{D}$, заключаем, что $A_1 u \ge m_1$, а условие

$$M_S + b_{11}H_{1D} \le M_D \tag{21}$$

обеспечивает выполнение неравенства $A_1 u \le M_1$.

Наконец предположим, что $b_{01} < 0$, $b_{11} > 0$. Тогда для того, чтобы $A_1 u(x) \in [m_1, M_1]$ достаточно выполнения условий

$$M_S + b_{11}H_{1D} \le M_D, \qquad m_S + b_{01}H_{1D} \ge m_D. \tag{22}$$

Покажем, что оператор $A_1$ вполне непрерывен на множестве $K_1$. Для этого достаточно убедиться, что множество $A_1(K_1) = \{v(x) = A_1 u(x),\ \ u(x) \in K_1\}$ компактно. Очевидно, что для всех $x \in \overline{D}$ $\ v(x) = A_1 u(x) \le M_1$, поэтому множество $A_1(K_1)$ равномерно ограничено. Функции $H_{1D}(x)$, $H_{1S}(x)$ непрерывны в $\overline{D}$ и, значит, равномерно непрерывны в $\overline{D}$. Тогда, учитывая, что для всех $y \in S$ $|\varphi(y)| \le C_S = \max\{|m_S|, |M_S|\}$, для всех $y \in D$ и для каждого фиксированного $u \in K_1$ $f(y,u) \le C_D = \max\{|b_{01}|, |b_{11}|\}$, получим $|v(x_1) - v(x_2) \le C_D|H_{1D}(x_1) - H_{1D}(x_2)| + C_S|\ H_{1S}(x_1) - H_{1S}(x_2)| < C_D\varepsilon/(C_D + C_S) = \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и для любых $x_1$, $x_2 \in \overline{D}$ как только $|x_1 - x_2| < \delta$ независимо от выбора функции $v(x) \in A_1(K_1)$, что означает равностепенную непрерывность функций $v(x) \in A_1(K_1)$, а, следовательно, и компактность множества $A_1(K_1)$ (теорема Арцела).

Таким образом, доказана

**Лемма 7.** *Пусть справедливы неравенства (20), если $b_{11} \le 0$, (21), если $b_{01} \ge 0$, и (22), если $b_{01} < 0$, $b_{11} > 0$. Тогда если выполнены условия леммы 3 и неравенства (13), то оператор $A_1$ преобразует множество $K_1$ в себя и вполне непрерывен на $K_1$.*

Переходя к исследованию оператора $A_3$, из формулы 15.5 в [1, с. 47] получим равенство

$$\int_S G_3(x,y)\beta(y)dS_y = 1 + \int_S Q_y G_3(x,y)dS_y = 1.$$

Поскольку $0 < \beta_0 \le \beta(x) \le \beta_1$; $G_3(x,y) \ge 0$ для $(x,y) \in \overline{D} \times D$, $x \ne y$, то отсюда следуют оценки $1/\beta_1 \le H_{3S}(x) \le 1/\beta_0$, $x \in \overline{D}$. Поэтому можем утверждать, что $h_{3S\varphi} \le H_{3S\varphi}(x) \le H_{3S\varphi}$, $x \in \overline{D}$, где постоянные $h_{3S\varphi}$ и $H_{3S}\varphi$ определяются в зависимости от знаков $b_0$, $b_1$. Так, если $b_0 \ge 0$, то $h_{3S\varphi} = b_0/\beta_1$, а если $b_0 < 0$, то $h_{3S\varphi} = b_0/\beta_0$. Если же $b_1 \le 0$, то $H_{3S\varphi} = b_1/\beta_1$, а если $b_1 > 0$, то $H_{3S\varphi} = b_1/\beta_0$. Кроме того, $h_{3Df} \le H_{3Df}(x) \le H_{3Df}$. Здесь аналогично если $b_{03} \ge 0$, то $h_{3Df} = b_{03}h_{3D}$, в противном случае $h_{3Df} = b_{03}H_{3D}$; если $b_{13} \le 0$, то $H_{3Df} = b_{13}h_{3D}$, в противном случае $H_{3Df} = b_{13}H_{3D}$.

Полная непрерывность оператора $A_3$ доказывается так же, как это сделано выше для оператора $A_1$. Действительно, множество функций $A_3(K_3) = \{v(x) = A_3(u(x),\ u(x) \in K_3\}$ равномерно ограничено, поскольку $v(x) = A_3(u(x) \le M_3$, $x \in \overline{D}$. Далее используется равномерная непрерывность функций $H_{3D}(x)$ и $H_{3S}(x)$ для $x \in \overline{D}$ и ограниченность функций $f(y,u)$ и $\varphi(y,u)$.

Таким образом, можем сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 8.** *Если выполнены условия лемм 4 и 6, неравенства (11) и условия*

$$H_{3Df} + H_{3S\varphi} \le M_3, \qquad h_{3Df} + h_{3S\varphi} \ge m_3, \tag{23}$$

*то оператор $A_3$ преобразует множество $K_3$ в себя и вполне непрерывен на $K_3$.*

**Замечание 4.** Первое из условий (23) не будет выполняться, если $b_{03} > 0$, $b_0 > 0$, а $M_3 < 0$; второе не будет выполняться в случае, когда $b_{13} < 0$, $b_1 < 0$, а $m_3 > 0$.

Существование решений задач (3) и (4) следует из теоремы Шаудера [3, теорема 10.6, с. 381] о существовании хотя бы одной неподвижной точки $u \in K$ для оператора $A$, который вполне непрерывен на замкнутом выпуклом множестве $K$ и преобразует это множество в себя. Сформулируем основные теоремы о разрешимости задач (3) и (4).

**Теорема 2.** *Если выполнены условия леммы 7, то задача Дирихле (3) имеет единственное решение в классе функций $U_1$, принадлежащее множеству $K_1$.*

**Замечание 5.** Если выполнены условия теоремы 2, то для решения задачи (3) имеем: 1) $u(x) \geq \geq m_1 = m_D,\ x \in \overline{D}$, если $b_{11} \leq 0$; 2) $u(x) \leq M_1 = M_D,\ x \in \overline{D}$, если $b_{01} \geq 0$; 3) $m_D = m_1 \leq\ u(x) \leq \leq M_1 = M_D,\ x \in \overline{D}$, если $b_{01} < 0, b_{11} > 0$.

**Теорема 3.** *Если выполнены условия леммы 8, то краевая задача (4) имеет хотя бы одно решение в классе функций $U_3$, принадлежащее множеству $K_3$. Если, кроме того, $\partial\varphi/\partial u \leq 0$, то такое решение единственно.*

**Замечание 6.** Условие $\partial\varphi/\partial u \leq 0$ является единственным из условий теоремы 1, выполнение которого не гарантировано условиями леммы 8.

**6. Пример проверки условий разрешимости для задачи (3).** Пусть в задаче (3) $f(x,u) = = \cos u - A(x)u$. Тогда $f(x,0) = 1$ и $m_{D0} = M_{D0} = 1$. Предположим, что $A_0 = \min\limits_{\overline{D}} A(x) > 1$, $A_1 = \max\limits_{\overline{D}} A(x)$. Тогда $\partial f/\partial u < 0$, $|\partial f/\partial u| = A(x) + \sin u$, причем $0 < A_0 - 1 \leq A(x) + \sin u \leq \leq A_1 + 1$, т. е. $\alpha_0 = A_0 - 1$, $\alpha_1 = A_1 + 1$. Найдем ограничения на функции $A(x)$, $\varphi(x)$, которые следуют из условий разрешимости задачи (3). Поскольку $M_1 \geq M_D = 1/(A_0 - 1) > 0$, то $b_{01} = \min\limits_{\overline{D}} f(x, M_1) = \cos M_1 - A_1 M_1 \leq \cos M_1 - A_1/(A_0 - 1) < 0$ и, используя замечание 5, получаем, что $m_1 = m_D = 1/(A_1 + 1)$, $b_{11} = \cos(1/(A_1 + 1)) - A_0/(A_1 + 1)$. Поскольку $A_0 \leq A_1$, то $\cos(1/(A_1 + 1)) - A_1/(A_1 + 1) \leq b_{11}$. Покажем, что $\cos(1/(z + 1)) - z/(z + 1) > 0$, т. е. $(1 + + 1/z)\cos(1/(z + 1)) > 0$. Действительно

$$(1 + 1/z)\cos(1/(z + 1)) = (1 + 1/z)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(z + 1)^{-2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + (2z + 1)/(2z(z + 1)) + (1 + 1/z)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(z + 1)^{-4n}}{(4n)!} - \frac{(z + 1)^{-(4n+2)}}{(4n + 2)!}\right) > 1.$$

Таким образом, $b_{11} > 0$, поэтому условия разрешимости следует записать в виде (22), т. е.

$$1/(A_1 + 1) + H_{1D}\{A_1/(A_0 - 1) - \cos\,(1/(A_0 - 1))\}\ \leq \varphi(x)\ \leq$$

$$\leq 1/(A_0 - 1) - H_{1D}\{\cos(1/(A_1 + 1)) - A_0/(A_1 + 1)\}, \qquad x \in S.$$

Эти неравенства непротиворечивы, если $H_{1D} \leq (2 + A_1 - A_0)/\{A_1(A_1 + 1) - A_0(A_0 - 1) - -(A_0 - 1)\,(A_1 + 1)[\cos(1/(A_0 - 1)) - \cos(1/(A_1 + 1))]\}$.

**Замечание 7.** Если $M = \Delta$ (оператор Лапласа), то $H_{1D} \leq (1/(m - 2)\sigma_m)\max\limits_{\overline{D}} \int_D |x - y|^{2-m} dy$, $m \geq 3$, $H_{1D} \leq (2\pi)^{-1}\left(\max\limits_{\overline{D}} \int_D \ln|x - y|^{-1} dy + S(D)\ln d\right)$, $m = 2$ (см. [2, с. 273; 5, с. 370]). Здесь $\sigma_m$ — площадь поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^m$, $d$ — наибольшее расстояние между любыми точками $x, y \in \overline{D}$, $S(D)$ — площадь области $D$ (на плоскости). В частности, если $m = 3$ и $D$ — шар радиуса $R$, центр которого находится в начале координат, то, согласно [6, с. 220], $H_{1D} \leq \leq \max\limits_{\overline{D}}((3R^2 - |x|^2)/6) = R^2/2$.

**7. Нелинейная задача Неймана.** Рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения (1) с нелинейностью в граничном условии, т. е. задачу (4) в случае $\beta(x) \equiv 0$

$$Mu = -f(x,u), \quad x \in D; \qquad a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x,u), \quad x \in S. \tag{24}$$

Будем рассматривать классические неотрицательные решения задачи (24), т. е. решения, принадлежащие множеству $U_2 = \{u(x),\ x \in \overline{D}\colon\ u \geq 0,\ u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})\}$.

Теорема единственности решения для задачи (24) следует из теоремы 1 как частный случай при $\beta(x) \equiv 0$. Запишем задачу (24) в виде

$$Mu = -f(x,u), \quad x \in D; \qquad a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu = F(x,u), \quad x \in S, \tag{$24_1$}$$

где $F = \varphi + hu$, $h$ — произвольная постоянная, причем $h \neq 0$. Задачи (24) и ($24_1$) эквивалентны. Применив к задаче ($24_1$) леммы 4 и 6, можем сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 9.** *Пусть $M$ — эллиптический оператор, заданный в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ класса $C^{1+\alpha}$, причем $a_{ij}$, $e_i \in C^{1+\alpha}(\overline{D})$. Пусть, кроме того, для каждой фиксированной $u(x) \in U_2$ функции $\tilde{f}(x) = f(x, u(x)) \in C^{\alpha}(D) \cap C(\overline{D})$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x, u(x)) \in C^{\alpha}(S)$, $c^*(x) \leq 0$, $2h - b(x) \geq 0$, причем постоянная $h \neq 0$. Тогда существует единственная функция Грина $G_3(x,y)$, которая*

*как функция $y$ для всех $x \in D$ является решением краевой задачи (15), где $Q_y G_3 \equiv a\partial G_3/\partial \nu_y + +(h-b)G_3$, и задача (24) эквивалентна интегральному уравнению*

$$u(x) = \int_D G_3(x,y) f\big(y,u(y)\big)dy + \int_S G_3(x,y) F\big(y,u(y)\big)dS_y, \qquad x \in \overline{D}, \tag{25}$$

*в смысле решений $u(x) \in U_2$. Если, кроме того, $h - b(x) > 0$, $h > 0$, то $G_3(x,y) \geq 0$ для $(x,y) \in D \times \overline{D}$, $x \neq y$, и для $(x,y) \in \overline{D} \times D$, $x \neq y$.*

Предположим, что

$$f(x,u) = f_0(x) - f_1(x,u), \quad x \in \overline{D}, \qquad \varphi(x,u) = \varphi_0(x) - \varphi_1(x,u), \quad x \in S, \tag{26}$$

причем хотя бы одна из функций $f_0(x)$, $\varphi_0(x)$ не равна тождественно нулю. Обозначим $q(x) = = \int_D G_3(x,y) f_0(y)dy + \int_S G_3(x,y)\varphi_0(y)dS_y$ и рассмотрим операторы $A_2 u(x) = q(x) - B\,u(x)$,

$$Bu(x) = \int_D G_3(x,y) f_1(y,u(y))dy + \int_S G_3(x,y)\big[\varphi_1\big(y,u(y)\big) - hu(y)\big]dS_y,$$

заданные на множестве $K_2 = \{u(x) \in U_2\colon\ u(x) \leq q(x)\}$. Запишем уравнение (25) в виде

$$u(x) = A_2 u(x), \qquad x \in \overline{D}. \tag{27}$$

**Лемма 10.** *Пусть выполнены условия леммы 9. Пусть, кроме того, существует постоянная $h$, удовлетворяющая условиям леммы 9, такая, что*

$$q(x) > 0, \quad Bq \leq q, \quad x \in \overline{D}; \qquad \varphi_1(x,u) \geq hu, \quad x \in S; \qquad f_1(x,u) \geq 0, \quad x \in D, \tag{28}$$

*для всех $u \in K_2$, причем функции $\varphi_1(x,u) - hu$, $f_1(x,u)$ не убывают по переменной $u$. Тогда оператор $A_2$ преобразует множество $K_2$ в себя, монотонен и вполне непрерывен на $K_2$.*

Доказательство. Из двух последних неравенств (28) и неотрицательности функции Грина для $(x,y) \in D \times \overline{D}$, $x \neq y$, и $(x,y) \in \overline{D} \times D$, $x \neq y$, следует неотрицательность функции $H(x) = = Bu(x)$ для $x \in D$ и фиксированной функции $u \in K_2$. Поскольку функция $H(x)$ непрерывна в $\overline{D}$, то с помощью теоремы об устойчивости знака непрерывной функции легко получить, что $H(x) \geq 0$ для $x \in \overline{D}$. Из монотонности функций $\varphi_1(x,u) - hu$, $f_1(x,u)$ по $u$ (а значит, и монотонности оператора $A_2$) и первых двух неравенств (28) следует, что оператор $A_2$ преобразует множество $K_2$ в себя. Доказательно полной непрерывности оператора$A_2$ проводится так же, как и для операторов $A_1$ и $A_3$. Лемма доказана.

Итак, оператор $A_2$ задан на нормальном конусе $U_2$ непрерывных неотрицательных функций $u(x)$ [4, с. 344], является монотонным и вполне непрерывным на нормальном конусном отрезке $K_2$ и преобразует множество $K_2$ в себя. Поэтому справедлива теорема о существовании на $K_2$ для оператора $A_2$ хотя бы одной неподвижной точки $u \in K_2$ [4, теорема 4.1(в), с. 128], а это значит, что интегральное уравнение (27) имеет хотя бы одно решение $u \in K_2$. Сформулируем теорему о разрешимости задачи (24).

**Теорема 4.** *Пусть функции $f(x,u)$, $\varphi(x,u)$ представимы в виде (26), причем хотя бы одна из функций $f_0(x)$, $\varphi_0(x)$ не равна тождественно нулю. Если выполнены условия леммы 10, то краевая задача (24) имеет хотя бы одно решение в классе функций $U_2$. Если, кроме того, $b(x) \leq 0$, то такое решение единственно.*

**Замечание 8.** Условие $b(x) \leq 0$ следует из второго условия (10) теоремы 1, если в нем положить $\beta(x) \equiv 0$. Выполнений остальных условий теоремы 1 гарантируется условиями леммы 10.

**8. Пример выполнения условий теоремы 4.** Рассмотрим краевую задачу (24) в случае, когда $f(x,u) \equiv 0$, $\varphi(x,u) = q_0 - \varphi_1(u)$, $q_0 = const > 0$. Вновь воспользовавшись формулой (15.5) [1, с. 47], получим равенство $\int_S G_3(x,y)dS_y = 1/h$. Поэтому $q(x) = q_0/h$, $Bq(x) = (\varphi_1(q_0/h) - q_0)/h$ и из условия $Bq \leq q$ получим условие для функции $\varphi_1(u)$: $\varphi_1(q_0/h) \leq 2q_0$. Пусть нас интересуют решения $0 \leq u(x) \leq u_*$. Положим $h = q_0/u_*$. Итак, необходимо, чтобы $\varphi_1(u_*) \leq 2q_0$. Возьмем $\varphi_1(u) = (\alpha u + c)^\mu$, где $\alpha, c, \mu > 0$. Условие $\varphi_1(u) \geq hu$ выполняется для всех $h \leq c^\mu/u_*$, тогда должно выполняться неравенство $q_0 \leq c^\mu$. Таким образом, $(\alpha u_* + c)^\mu \leq 2q_0 \leq 2c^\mu$. Отсюда имеем $c \geq \alpha u_*/(2^{1/\mu} - 1)$. Из требования, чтобы функция $\varphi_1(u) - hu$ была неубывающей, получим неравенство $\mu\alpha(\alpha u_* + c)^{\mu-1}/2 \geq q_0/u_*$, которое будет выполняться, если $q_0 \leq \mu\alpha c^{\mu-1}u_*$. С другой стороны, $(\alpha u_* + c)^\mu/2 \leq q_0 \leq c^\mu$. Поэтому будем требовать, чтобы $q_{0\,max} = c^\mu \leq \mu\alpha c^{\mu-1}u_*$, откуда имеем неравенство $c \leq \mu\alpha u_*$. Учитывая, что $c \geq \alpha u_*/(2^{1/\mu} - 1)$, должно выполняться неравенство $\alpha u_*/(2^{1/\mu} - 1) \leq \mu\alpha u_*$ или $\mu(2^{1/\mu} - 1) \geq 1$. Последнее неравенство справедливо для $0 < \mu \leq 1$.

Однако, если $\mu = 1$, то $c = q_0 = \alpha u_*$, $\varphi(x,u) = -\alpha u$ и получим линейную задачу для уравнения $Mu = 0$ с однородным краевым условием третьего рода, имеющую лишь тривиальное решение $u \equiv 0$.

Итак, условия теоремы 4 выполняются для функции $\varphi_1(u) = (\alpha u + c)^\mu$, где $\alpha > 0$, $0 < \mu < 1$, $\alpha u_*/(2^{1/\mu} - 1) \le c \le \mu\alpha u_*$, если взять $h = q_0/u_*$, $(\alpha u_* + c)^\mu/2 \le q_0 \le c^\mu$, $0 \le u(x) \le u_*$.

**Литература**


1. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
4. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. М., 1962.
5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М., 1981. Т. 4, ч. 2.
6. *Арсенин В.Я.* Методы математической функции и специальные функции. М., 1974.


**РЕФЕРАТ**


Для эллиптического уравнения $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x)\, u_{x_i} = -f(x,u)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^m$ установлены условия существования и единственности классических решений задачи Дирихле и третьей краевой задачи с нелинейностью вида $\varphi(x,u)$ в краевом условии, а также классических неотрицательных решений нелинейной задачи Неймана. Для сведения краевых задач к эквивалентным нелинейным интегральным уравнениям используется аппарат функций Грина. Искусственное введение для задачи Неймана краевого условия третьего рода позволяет использовать для ее исследования функцию Грина третьей краевой задачи.