**Дифференциальные уравнения. –
2000. – Т. 36. – № 4. — С. 446-451.**

УДК 517.927

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ВХОЖДЕНИЕМ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Ю. В. ЖЕРНОВЫЙ

Установлены условия единственности решения двухточечных краевых задач для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и для системы уравнений второго порядка с нелинейным вхождением старшей производной. Для уравнений второго порядка рассмотрен вопрос об априорных оценках решений краевых задач.

1. Введение. Теоремы единственности решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старшей производной, рассматривались в работах [1, с. 95-114; 2, 3]. В настоящей статье доказаны теоремы единственности решения двухточечных краевых задач для системы двух уравнений первого порядка

$$h(t,x,y,x')=0,\quad f(t,x,y,y')=0,$$

для уравнений второго порядка $F(t,x'')=0$, $F(t,x,x',x'')=0$ и для системы уравнений второго порядка $f(t,x,x',x'')=0$, характерной особенностью которых является нелинейное вхождение старшей производной. Для уравнений второго порядка попутно рассмотрен вопрос об априорных оценках решения краевых задач.

Пусть $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $b>a$, $I=[a,b]$. Если $x(t)$, $t\in I$, есть непрерывная функция, имеющая k непрерывных производных, то будем писать $x\in C^k(I)$, и, аналогично, $x\in AC^k(I)$, если k-я производная абсолютно непрерывна. Если функция $f(t,x_1,\dots,x_p)$: $I\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори [1, с. 15], то будем писать, что $f(t,x_1,\dots,x_p)\in Car(I\times\mathbb{R}^p)$. Ниже там, где встречаются суммируемые функции, подразумеваем, что соответствующее соотношение выполняется почти всюду. Под возрастанием (убыванием) функции по какому-нибудь аргументу понимаем монотоное возрастание (убывание) в строгом смысле.

2. Априорные оценки и единственность решения (уравнения второго порядка). Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$N[x]\equiv F(t,x'')=0,\quad (t,x'')\in I\times\mathbb{R};\tag{1}$$

$$\lambda_1[x]\equiv\varphi\big(x(a),x'(a)\big)=0,\quad \lambda_2[x]\equiv\psi\big(x(b),x'(b)\big)=0.\tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть функция $F(t,x'')$ имеет непрерывную частную производную*

по x''*, причем*

$$\frac{\partial F}{\partial x''} > 0, \quad (t, x'') \in I \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

а функции $\varphi(s_1, s_2)$, $\psi(\tau_1, \tau_2)$ *имеют непрерывные частные производные по каждой переменной для всех* $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$, *причем*

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\right| > 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \le 0, \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; \\ \left|\frac{\partial \psi}{\partial \tau_1}\right| + \left|\frac{\partial \psi}{\partial \tau_2}\right| > 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau_1}\,\frac{\partial \psi}{\partial \tau_2} \ge 0, \quad (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2. \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть $x(t)$ *– решение задачи (1), (2),* $z_1(t)$, $z_2(t)$ *– дважды непрерывно дифференцируемые функции, которые удовлетворяют краевым условиям (2). Тогда если* $N[z_1] = \psi_1(t) \ge 0$, $N[z_2] = \psi_2(t) \le 0$, $\forall t \in I$, *то справедливы оценки* $z_1(t) \le x(t) \le z_2(t)$, $\forall t \in I$.

Доказательство. Вычитая почленно равенства $N[z_1] = \psi_1(t)$, $\lambda_1[z_1] = 0$, $\lambda_2[z_1] = 0$ соответственно из равенств $N[x] = 0$, $\lambda_1[x] = 0$, $\lambda_2[x] = 0$, получим

$$\begin{gathered} F(t, x'') - F(t, z_1'') = -\psi_1(t); \\ \varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = 0, \quad \psi\big(x(b), x'(b)\big) - \psi\big(z_1(b), z_1'(b)\big) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Поскольку функции $F(t, x'')$, $\varphi(s_1, s_2)$, $\psi(\tau_1, \tau_2)$ удовлетворяют условиям леммы Адамара [4, с. 81], то найдутся такие непрерывная для $t \in I$ функция $r(t)$ и постоянные α_0, α_1, β_0, β_1, что

$$F(t, x'') - F(t, z_1'') = r(t)u''(t), \quad \psi\big(x(b), x'(b)\big) - \psi\big(z_1(b), z_1'(b)\big) = \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b),$$

$$\varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a), \tag{6}$$

где $u(t) = x(t) - z_1(t)$. Тогда из (5) получим

$$u'' = -\frac{\psi_1(t)}{r(t)}, \quad l_1[u] \equiv \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \quad l_2[u] \equiv \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0. \tag{7}$$

Из условия (3) вытекает, что $r(t) > 0$ $\forall t \in I$, а из (4) имеем, что

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| > 0, \quad \alpha_0\alpha_1 \le 0, \quad \beta_0\beta_1 \ge 0. \tag{8}$$

При выполнении условий (8) функция Грина задачи (7)

$$G(t, s) = \begin{cases} \big[\alpha_0(s - a) - \alpha_1\big]\big[\beta_0(b - t) + \beta_1\big]/P, & a \le s \le t \le b; \\ \big[\beta_0(b - s) + \beta_1\big]\big[\alpha_0(t - a) - \alpha_1\big]/P, & a \le t \le s \le b, \end{cases}$$

где $P = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_0\beta_0(b - a)$, удовлетворяет условию $G(t, s) \le 0$ для $(t, s) \in I \times I$. Записав решение задачи (7) в виде

$$u(t) = -\int_a^b G(t, s)\frac{\psi_1(s)}{r(s)}ds,$$

получим, что $u(t) = x(t) - z_1(t) \ge 0$ $\forall t \in I$. Теорема доказана.

Замечание 1.1. *Условие (3) можно заменить условием*

$$\frac{\partial F}{\partial x''} < 0, \quad (t, x'') \in I \times \mathbb{R}. \tag{9}$$

Тогда для решения задачи (1), (2) получим оценки $z_2(t) \le x(t) \le z_1(t)$.

Замечание 1.2. *В случае линейных краевых условий* $l_1[x] = A$, $l_2[x] = B$ *условия (4) принимают вид (8).*

Следствием теоремы 1 является теорема о единственности решения задачи (1), (2).

Теорема 2. *Если выполняются условия (3) (либо (9)) и (4), то краевая задача (1), (2) не может иметь двух решений.*

Доказательство. Предположим, что $x_1(t) \ne x_2(t)$ – два решения задачи (1), (2). Тогда, положив $x_1(t) = z_1(t)$, из теоремы 1 получим, что $x_1(t) \le x_2(t)$. С другой стороны, положив $x_2(t) = z_1(t)$, будем иметь, что $x_2(t) \le x_1(t)$. Поэтому $x_1(t) = x_2(t)$.

Замечание 2.1. *Условие (3) (либо (9)) для функции* F *является существенным. В самом деле, рассмотрим краевую задачу*

$$x'' - \alpha(t) \sin x'' = 0, \qquad l_1[x] = A, \quad l_2[x] = B, \tag{10}$$

в предположении, что условия (8) выполняются. Если $\alpha(t) > 1 \ \forall t \in I$, *то условие (3) не выполняется и задача (10) имеет не менее трех решений (они соответствуют общим решениям уравнений*

$$x''(t) = c_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad k \ge 3,$$

где $_i(t)$ *– абсциссы точек пересечения графиков функций* $y = x$, $y = \alpha(t) \sin x$, $t \in I$*). Если же* $0 < \alpha(t) < 1 \ \forall t \in I$, *то условие (3) выполняется и задача (10) имеет единственное решение, соответствующее общему решению уравнения* $x'' = 0$. *Условие (3) выполняется также, например, для задачи,*

$$x'' + (x'')^3 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

емеющей единственное решение.

Теперь рассмотрим краевую задачу

$$M[x] \equiv F(t, x, x', x'') = 0, \quad (t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3; \tag{11}$$

$$\lambda_1[x] \equiv \varphi\big(x(a), x'(a)\big) = 0, \quad \nu_2[x] \equiv \psi\big(x(b)\big) = 0. \tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть функция* $F(t, x, x', x'')$ *имеет непрерывные производные по* x, x', x'', *функция* $\varphi(s_1, s_2)$ *– по* s_1, s_2 *для всех* $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, *а функция* $\psi(s)$ *непрерывна и дифференцируема при всех* $s \in \mathbb{R}$, *причем*

$$\frac{\partial F}{\partial x} \le M_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x'}\right| \le M_2, \quad \frac{\partial F}{\partial x''} \ge M_3 > 0, \quad (t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3, \tag{13}$$

и выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\right| > 0, \ \ \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \le 0, \ \ (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; \ \ \psi'(s) \ne 0, \ \ s \in \mathbb{R}; \\ \frac{p^2 A_0^2(s_1, s_2) M_1}{8 M_3} + \frac{p A_0(s_1, s_2) M_2}{2 M_3} - 1 \le 0, \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$p = b - a, \quad A_0(s_1, s_2) = \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} - 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\right) \Big/ \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\right)$$

и $M_1 = 0$, *если* $\partial F/\partial x < 0$ *для* $(t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3$. *Пусть* $x(t)$ – *решение задачи (11), (12),* $z_1(t)$, $z_2(t)$ – *дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие краевым условиям (12). Тогда если* $M[z_1] = \psi_1(t) \geq 0$, $M[z_2] = \psi_2(t) \leq 0\ \forall t \in I$, *то справедливы оценки* $z_1(t) \leq x(t) \leq z_2(t)$, $\forall t \in I$.

Доказательство. Вычитая почленно равенства $M[z_1] = \psi_1(t)$, $\lambda_1[z_1] = 0$, $\nu_2[z_1] = 0$ соответственно из равенств $M[x] = 0$, $\lambda_1[x] = 0$, $\nu_2[x] = 0$, получим

$$\begin{gathered} F(t, x, x', x'') - F(t, z_1, z_1', z_1'') = -\psi_1(t); \\ \varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = 0, \quad \psi\big(x(b)\big) - \psi\big(z_1(b)\big) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Положив $u(t) = x(t) - z_1(t)$ и применив лемму Адамара и теорему о среднем, получим соотношения

$$F(t, x, x', x'') - F(t, z_1, z_1', z_1'') = q(t)u + p(t)u' + r(t)u'', \ \ \psi\big(x(b)\big) - \psi\big(z_1(b)\big) = \beta_0 u(b) = 0,$$

где $\beta \neq 0$, и равенство (6). Поэтому из (15) будем иметь

$$u'' + \tilde{p}(t)u' + \tilde{q}(t)u = -\tilde{\psi}_1(t), \quad \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = u(b) = 0, \tag{16}$$

где

$$\tilde{p}(t) = p(t)/r(t), \quad \tilde{q}(t) = q(t)/r(t), \quad \tilde{\psi}_1(t) = \psi_1(t)/r(t).$$

Из условий (13) вытекает, что

$$q(t) \leq M_1, \quad |p(t)| \leq M_2, \quad r(t) \geq M_3 > 0, \quad t \in I,$$

а из (14) получим неравенства

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \ \ \alpha_0\alpha_1 \leq 0; \quad \frac{p^2 a_0^2 M_1}{8M_3} + \frac{p a_0 M_2}{2M_3} - 1 \leq 0, \tag{17}$$

где $a_0 = (p\alpha_0 - 2\alpha_1)/(p\alpha_0 - \alpha_1)$. Поэтому справедливы оценки

$$\tilde{q}(t) \leq M_1/M_3, \quad |\tilde{p}(t)| \leq M_2/M_3,$$

которые вместе с условиями (17) гарантируют существование функции Грина $G(t, s)$ задачи (16), причем $G(t, s) \leq 0$ для $(t, s) \in I \times I$ (см. следствие теоремы 4 и теорему 7 работы [3]). Записав решение задачи (16) в виде

$$u(t) = -\int_a^b G(t, s)\tilde{\psi}_1(s)\,ds,$$

получим, что $u(t) = x(t) - z_1(t) \geq 0\ \forall t \in I$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. *Аналогичная теорема справедлива для уравнения (11) з краевыми условиями*

$$\nu_1[x] \equiv \varphi\big(x(a)\big) = 0, \quad \lambda_2[x] \equiv \psi\big(x(b), x'(b)\big) = 0.$$

Из теоремы 3, так же, как и из теоремы 1, следует

Теорема 4. *Если выполняются условия (13), (14), то краевая задача (11), (12) не может иметь двух решений.*

3. Система двух уравнений первого порядка. Рассмотрим краевую задачу

$$h(t,x,y,x') = 0, \qquad f(t,x,y,y') = 0, \tag{18}$$

$$x(a) = A, \qquad x(b) = B, \tag{19}$$

где h, $f \in C(I\times\mathbb{R}^3)$, A, $B \in \mathbb{R}$. Пусть x_1, x_2, y_1, $y_2 \in C^1(I)$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
H_x(t) &= \big[h\big(t,x_1(t),y_1(t),x_1'(t)\big) - h\big(t,x_2(t),y_1(t),x_1'(t)\big)\big]/\big(x_1(t)-x_2(t)\big),\\
H_{x'}(t) &= \big[h\big(t,x_2(t),y_2(t),x_1'(t)\big) - h\big(t,x_2(t),y_2(t),x_2'(t)\big)\big]/\big(x_1'(t)-x_2'(t)\big),\\
F_y(t) &= \big[f\big(t,x_2(t),y_1(t),y_1'(t)\big) - f\big(t,x_2(t),y_2(t),y_1'(t)\big)\big]/\big(y_1(t)-y_2(t)\big),\\
F_{y'}(t) &= \big[f\big(t,x_2(t),y_2(t),y_1'(t)\big) - f\big(t,x_2(t),y_2(t),y_2'(t)\big)\big]/\big(y_1'(t)-y_2'(t)\big).
\end{aligned}$$

Эти обозначения имеют смысл только для тех $t \in I$, для которых $x_1(t) \neq x_2(t)$, $x_1'(t) \neq \neq x_2'(t)$, $y_1(t) \neq y_2(t)$, $y_1'(t) \neq y_2'(t)$ соответственно и лишь для таких значений t они и будут использоваться в доказательствах.

Теорема 5. *Пусть $h(t,x,y,x')$ возрастает по x и по y и убывает по x', $f(t,x,y,y')$ возрастает по x, не возрастает по y и убывает по y'. Тогда краевая задача (18), (19) не может иметь двух решений.*

Доказательство. Предположим, что задача (18), (19) имеет два решения $\big(x_1(t),y_1(t)\big)$ и $\big(x_2(t),y_2(t)\big)$, так что

$$\max_{t\in I}\big(|x_1(t)-x_2(t)| + |y_1(t)-y_2(t)|\big) > 0.$$

Тогда не может быть, что $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall t \in I$, поскольку, в силу возрастания функции h по y, из уравнений

$$h(t,x_1,y_1,x_1') = 0, \quad h(t,x_1,y_2,x_1') = 0$$

следует, что $y_1(t) = y_2(t)$ $\forall t \in I$. Рассмотрим $u(t) = x_1(t) - x_2(t) \not\equiv 0$, $t \in I$. Можем считать, что существует точка $\tau \in I$, в которой $u(\tau) > 0$. Пусть (t_1,t_2), $t_1 < t_2$ – наибольший интервал, содержащий точку τ, в котором $u(t) > 0$. Учитывая краевые условия (19), имеем: $u(t_1) = u(t_2) = 0$.

Покажем, что для любого $t \in [t_1,t_2]$ $\quad v(t) = y_1(t) - y_2(t) \geq 0$. Если это не так, то найдется точка $t_0 \in (t_1,t_2)$, в которой $v(t_0) < 0$. Тогда предположим, что существует точка $t_* \in (t_1,t_0)$, такая, что $v(t_*) = 0$, $v(t) < 0$ $\forall t \in (t_*,t_0]$, значит, $v'(t_*) \leq 0$. Используя второе уравнение (18), получим

$$0 = f\big(t_*,x_1(t_*),y_1(t_*),y_1'(t_*)\big) - f\big(t_*,x_2(t_*),y_1(t_*),y_2'(t_*)\big) > 0,$$

с учетом того, что f возрастает по x и убывает по y'. Полученное противоречие доказывает, что $v(t) < 0$ $\forall t \in (t_1,t_0]$.

В окрестности точки t_0, кроме тех точек, в которых $v'(t) = 0$, функция $v(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$v' = \tilde{a}(t) + F_{yy'}(t)\,v, \tag{20}$$

где

$$\tilde{a}(t) = a(t)\alpha_{y'}(t), \quad F_{yy'}(t) = F_y(t)\alpha_{y'}(t) \le 0, \quad \alpha_{y'}(t) = -1/F_{y'}(t) > 0,$$
$$a(t) = f\big(t, x_1(t), y_1(t), y_1'(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_1(t), y_1'(t)\big) > 0.$$

Покажем, что $v'(t) \neq 0\ \forall t \in (t_1, t_0]$. Пусть существует точка $\tau_* \in (t_1, t_0]$ такая, что $v'(\tau_*) = 0$. Поскольку $u(\tau_*) > 0$, $v(\tau_*) < 0$, то, учитывая возрастание $f(t, x, y, y')$ по x и не возрастание по y, из второго уравнения (18) получим противоречие

$$0 = f\big(\tau_*, x_1(\tau_*), y_1(\tau_*), y_1'(\tau_*)\big) - f\big(\tau_*, x_2(\tau_*), y_2(\tau_*), y_1'(\tau_*)\big) > 0,$$

которое доказывает, что $v'(t) \neq 0\ \forall t \in (t_1, t_0]$. Интегрируя уравнение (20), получаем

$$v(t) = \big(v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{a}(\tau) \exp\big(-B(\tau)\big) d\tau\big) \exp\big(B(t)\big), \tag{21}$$

где

$$B(t) = \int\limits_{t_0}^{t} F_{yy'}(\tau)\, d\tau \ge 0, \quad t \in [t_1, t_0], \quad v(t_0) < 0, \quad \tilde{a}(\tau) > 0, \quad \tau \in (t_1, t_0].$$

Из (21) при $t \to t_1$ следует, что

$$v(t_1) \le v(t_0) \exp\big(B(t_1)\big) \le v(t_0) < 0.$$

Таким образом, $v(t) < 0\ \forall t \in [t_1, t_0]$.

Итак, в точке $t = t_1$ имеем: $u(t_1) = 0$, $u'(t_1) \ge 0$ и $v(t_1) < 0$. С учетом монотонности h по y и x' из первого уравнения (18) выводим, что

$$0 = h\big(t_1, x_1(t_1), y_1(t_1), x_1'(t_1)\big) - h\big(t_1, x_1(t_1), y_2(t_1), x_2'(t_1)\big) < 0.$$

Полученное противоречие показывает ошибочность предположения о том, что найдется точка $t_0 \in (t_1, t_2)$, где $v(t_0) < 0$, поэтому $v(t) \ge 0\ \forall t \in [t_1, t_2]$.

Далее, используя первое уравнение системы (18), находим, что $u(t)$ для $t \in (t_1, t_2)$, кроме тех точек, в которых $u'(t) = 0$, удовлетворяет уравнению

$$u' = \tilde{a}_0(t) + H_{xx'}(t)\, u, \tag{22}$$

где

$$\tilde{a}_0(t) = a_0(t)\beta_{x'}(t), \quad H_{xx'}(t) = H_x(t)\beta_{x'}(t) > 0, \quad \beta_{x'}(t) = -1/H_{x'}(t) > 0,$$
$$a_0(t) = h\big(t, x_2(t), y_1(t), x_1'(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_2(t), x_1'(t)\big) \ge 0.$$

Покажем, что $u'(t) \neq 0\ \forall t \in (t_1, t_2)$. Пусть существует точка $\tau_0 \in (t_1, t_2)$ такая, что $u'(\tau_0) = 0$. Поскольку $u(\tau_0) > 0$, $v(\tau_0) \ge 0$, то, учитывая возрастание $h(t, x, y, x')$ по x и y, из первого уравнения (18) получим противоречие

$$0 = h\big(\tau_0, x_1(\tau_0), y_1(\tau_0), x_1'(\tau_0)\big) - h\big(\tau_0, x_2(\tau_0), y_2(\tau_0), x_1'(\tau_0)\big) > 0,$$

которое доказывает, что $u'(t) \neq 0\ \forall t \in (t_1, t_2)$.

Интегрируя уравнение (22) от $t = \tau_1 \in (t_1, t_2)$ до $t \in [\tau_1, t_2)$, получим

$$u(t) = \big(u(\tau_1) + \int\limits_{\tau_1}^{t} \tilde{a}_0(\tau) \exp\big(-B_0(\tau)\big) d\tau\big) \exp\big(B_0(t)\big), \quad t \in [\tau_1, t_2), \tag{23}$$

где

$$B_0(t) = \int\limits_{\tau_1}^{t} H_{xx'}(\tau)\, d\tau > 0, \quad t \in (\tau_1, t_2], \quad u(\tau_1) > 0, \quad \tilde{a}_0(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [\tau_1, t_2].$$

Из (23) при $t \to t_2$ будем иметь

$$u(t_2) \geq u(\tau_1) \exp\big(B_0(t_2)\big) > u(\tau_1) > 0,$$

а это противоречит условию $u(t_2) = 0$, что и доказывает теорему 5.

Рассмотрим систему

$$x' = h(t, x, y), \quad f(t, x, y, y') = 0 \tag{24}$$

з краевыми условиями (19), где $h \in Car(I \times \mathbb{R}^2)$, $f \in C(I \times \mathbb{R}^3)$.

Для x_1, $x_2 \in AC(I)$, y_1, $y_2 \in C^1(I)$ введем обозначение

$$H_x(t) = \big[h\big(t, x_1(t), y_1(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_1(t)\big)\big] / \big(x_1(t) - x_2(t)\big).$$

Теорема 6. *Пусть $h(t, x, y)$ возрастает по y, $f(t, x, y, y')$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и для любого $M > 0$ существует суммируемая на I функция $k(t) \geq 0$, такая, что*

$$|H_x(t)| \leq k(t) \tag{25}$$

для любых x_1, $x_2 \in AC(I)$, y_1, $y_2 \in C^1(I)$, $|x_i(t)| \leq M$, $|y_i(t)| \leq M$ $\forall t \in I$ $(i = 1, 2)$, причем неравенство (25) выполняется почти для всех t в каждом интервале из отрезка I, где $x_1(t) \neq x_2(t)$. Тогда краевая задача (24), (19) не может иметь двух решений.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$ и $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$. Так же как и в доказательстве теоремы 5, легко показать, что не может быть случая, когда $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall t \in I$. Поэтому $u(t) = x_1(t) - x_2(t) \not\equiv 0$. Пусть (t_1, t_2) – наибольший интервал, в котором $u(t) > 0$. Очевидно, что $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ и $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Как и в доказательстве теоремы 5, из предположения, что $v(t_0) < 0$, где $t_0 \in (t_1, t_2)$, получим, что $v(t) < 0$ $\forall t \in [t_1, t_0]$. После этого доказательство заканчивается, как в теореме 1 работы [1, с. 96–97].

Рассмотрим систему

$$h(t, x, y, x') = 0, \quad y' = f(t, x, y) \tag{26}$$

з краевыми условиями (19), где $h \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, $f \in Car(I \times \mathbb{R}^2)$. Для x_1, $x_2 \in C^1(I)$, y_1, $y_2 \in AC(I)$ введем обозначение

$$F_y(t) = \big[f\big(t, x_2(t), y_1(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_2(t)\big)\big] / \big(y_1(t) - y_2(t)\big).$$

Теорема 7. *Пусть $h(t,x,y,x')$ удовлетворяет условиям теоремы 5, $f(t,x,y)$ не убывает по x и для любого $M>0$ существует суммируемая на I функция $k_1(t)$, такая, что*

$$F_y(t) \le k_1(t) \tag{27}$$

для любых x_1, $x_2 \in C^1(I)$, y_1, $y_2 \in AC(I)$, $|x_i(t)| \le M$, $|y_i(t)| \le M$ $\forall t \in I$ $(i=1,2)$, причем неравенство (27) выполняется в каждом интервале из отрезка I, где $y_1(t) \ne y_2(t)$. Тогда краевая задача (26), (19) не может иметь двух решений.

Доказательство. Начиная доказательство, как и в теореме 5, получим, что (t_1,t_2) – наибольший интервал, в котором $u(t)>0$. Используя условие (27), приходим к выводу, как в доказательстве теоремы 1 работы [1, с. 96–97], что $v(t)<0$ $\forall t \in [t_1,t_0]$. После этого доказательство заканчивается, как в теореме 5.

Замечание 7.1. *Теоремы 5–7 остаются справедливыми, если краевые условия (19) заменить условиями*

$$L_1\big(x(a),y(a)\big)=0, \qquad L_2\big(x(a),x(b),y(a),y(b)\big)=0,$$

где $L_1 \in C(\mathbb{R}^2)$, $L_2 \in C(\mathbb{R}^4)$, $L_1(s_1,-s_2)$ возрастает по s_1 и не убывает по s_2, а $L_2(z_1,z_2,z_3,z_4)$ возрастает по z_2 и не убывает по z_1, z_3, z_4. Доказательство проводится, как в теореме 3 работы [1, с. 102].

4. Уравнения второго порядка как частный случай системы двух уравнений первого порядка. Рассмотрим краевую задачу

$$F(t,x,x',x'')=0, \tag{28}$$

$$x(a)=\varphi\big(x'(a)\big), \quad x(b)=-\psi\big(x'(b)\big), \tag{29}$$

где $F \in C(I\times\mathbb{R}^3)$, φ, $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Следствием теоремы 6 и замечания 7.1 является

Теорема 8. *Пусть $\varphi(s)$, $\psi(s)$ не убывают по s (в частности, постоянные), а $F(t,x,x',x'')$ возрастает по x, не возрастает по x' и убывает по x''. Тогда задача (28), (29) не может иметь двух решений.*

Замечание 8.1. *Условия монотонности для функции F при выполнении всех других условий теоремы 8 являются достаточными, но не необходимыми для единственности решения краевой задачи (28), (29). Например краевая задача (10) при $0<\alpha(t)<1$, $t \in I$, имеет единственное решение, хотя условия теоремы 8 для функции $F=x''-\alpha(t)\sin x''$ не выполняются. То же самое можно сказать и о простейшей линейной задаче*

$$x''+x=0, \quad x(a)=A, \quad x(b)=b,$$

для которой F возрастает по x и x''. Вместе с тем можно привести примеры, когда при не выполнении условий теоремы 8 единственность решения краевой задачи нарушается. Так, задача

$$x''=(x'')^3, \quad x(a)=A, \quad x(b)=B \tag{30}$$

имеет 3 решения. Отметим, что для задачи (30) не выполняются также условия (3) и (9) теоремы 2.

Замечание 8.2. *Иногда с помощью теоремы 8 можно сделать вывод о разрешимости нелинейной краевой задачи. Так, краевая задача*

$$x^3 - (x'')^3 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

для которой выполняются условия теоремы 8, может иметь только единственное решение. Поскольку

$$x^3 - (x'')^3 = (x - x'')\big((x'')^2 + xx'' + x^2\big),$$

а задача

$$x - x'' = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

имеет единственное решение, то решение задачи

$$(x'')^2 + xx'' + x^2 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

не существует, если $|A| + |B| > 0$.

Для уравнения (28) рассмотрим задачу

$$x'(a) = \varphi\big(x(a)\big), \quad x'(b) = -\psi\big(x(b)\big), \tag{31}$$

где $F \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, φ, $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Теорема 9. *Пусть функции* $\varphi(s)$, $\psi(s)$ *удовлетворяют условиям теоремы 8, а* $F(t, x, x', x'')$ *возрастает по* x *и по* x' *и убывает по* x''. *Тогда задача (28), (31) не может иметь двух решений.*

Данная теорема является следствием утверждения, которое получается из теоремы 5 и замечания 7.1, если в них заменить x на y и y на x.

1. *Васильев Н. И., Клоков Ю. А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1978.
2. *Клоков Ю. А.* // Дифференц. уравнения. 1972. Т.8, №8. С. 1377–1385.
3. *Пак С. А.* // Дифференц. уравнения. 1967. Т.3, №6. С. 890–897.
4. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М, 1970.