**Инженерно-физический журнал. –
1998. – Т. 71. – № 3. — С. 564–570.**

УДК 517.95

Ю. В. Жерновый, М. Т. Сайчук

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТЕФАНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА

Предложен метод сведения многомерной стационарной задачи Стефана к системе интегральных уравнений Гаммерштейна. Рассмотрено применение предлагаемого метода к численному решению одномерных нестационарных задач Стефана для случаев внутреннего фазового фронта, совпадения фазового фронта с внешней границей и задач с внешней подвижной границей. Эффективность метода проверена для задачи Стефана, имеющей точное решение.

Известно, что большинство численных методов решения задач теплопроводности с фазовым переходом (задач Стефана) делятся на две группы: схемы сквозного счета [1, 2] и схемы с явным выделением фронта [3–6]. Экономичные разностные алгоритмы сквозного счета особенно широко применяются для многомерных задач, однако точность расчета как значения температуры, так и положения границы раздела фаз сильно зависит от параметра сглаживания, определить который часто довольно непросто. При реализации разностных схем с явным выделением фронта возникают существенные трудности вследствие их сложности и недостаточной экономичности, обусловленной необходимостью перестройки расчетной сетки на каждом шаге по времени. Вместе с тем не исчерпаны возможности применения аналитических методов на начальном этапе исследования данных задач, в частности, использования метода функций Грина (имея в виду функцию Грина соответствующей линейной задачи для оператора Лапласа) для сведения задач Стефана к интегральным уравнениям. Преимущество такого подхода по сравнению с конечно-разностными методами состоит в том, что, во-первых, отпадает необходимость аппроксимации производных искомого решения по пространственным переменным и, во-вторых, для решения полученных интегральных уравнений можно использовать более эффективные методы – проекционно-сеточные [7]. Экономичность расчетов можно также повысить за счет использования стабильной расчетной сетки, которая не требует перестройки на каждом шаге по времени.

Ниже рассматривается общая постановка задачи Стефана с учетом зависимости коэффициентов уравнения теплопроводности от температуры (внутренняя нелинейность) при нелинейных граничных условиях (внешняя нелинейность). Применение преобразования Кирхгофа линеаризует эллиптическую часть нелинейного уравнения теплопроводности, однако даже в простейшем случае линейных граничных условий третьего рода (описывающих теплоотвод по закону Ньютона) трансформирует их в нелинейные. Дальнейшее применение метода функций Грина [8, 9] становится невозможным (кроме случая граничных условий первого рода), поскольку соответствующая функция Грина не существует как функция Грина второй краевой задачи для оператора Лапласа [8]. Нами предлагается способ сведения Кирхоф-преобразованной задачи Стефана к интегральным уравнениям (в случае нестационарной задачи предварительно применяется метод прямых).

Для изложения сущности предлагаемого метода рассмотрим многомерную стационарную задачу Стефана. Метод пригоден для любого числа фаз, но для упрощения изложения мы ограничимся рассмотрением двухфазной задачи. Пусть нагреваемое тело занимает область Ω, ограниченную замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S. Поверхность фазового перехода Γ, местонахождение которой неизвестно, разбивает область Ω на две подобласти $\Omega_S = \{P \in \Omega : T(P) < T_*\}$ и $\Omega_L = \{P \in \Omega : T(P) > T_*\}$, занятые соответственно твердой и жидкой фазой вещества. В каждой из областей Ω_S, Ω_L температура $T(P)$ в точке P удолвлетворяет уравнению стационарной теплопроводности:

$$\operatorname{div}\bigl(\lambda_S(T(P))\operatorname{grad}T(P)\bigr) = 0, \qquad P \in \Omega_S,$$
$$\operatorname{div}\bigl(\lambda_L(T(P))\operatorname{grad}T(P)\bigr) = 0, \qquad P \in \Omega_L,$$

где $\lambda_S(T)$, $\lambda_L(T)$ – заданные непрерывно-дифференцируемые функции. На поверхности S задается нелинейное граничное условие, определяемое особенностями теплоотвода:

$$\lambda(T(P))\frac{\partial T(P)}{\partial n} = q\bigl(P,\, T(P)\bigr), \quad P \in S, \qquad \lambda(T) = \begin{cases} \lambda_S(T), & T < T_*, \\ \lambda_L(T), & T \geq T_*, \end{cases}$$

где $\partial T/\partial n$ – производная по внешней нормали к S. На искомой поверхности раздела фаз Γ, кроме условия равенства температуры $T(P)$ температуре фазового перехода $T(P) = T_*$, $P \in \Gamma$, выполняется стационарное условие Стефана

$$\lambda_S(T(P))\frac{\partial T(P)}{\partial n}\bigg|_{P\in\Omega_S,\, P\to\Gamma} = \lambda_L(T(P))\frac{\partial T(P)}{\partial n}\bigg|_{P\in\Omega_L,\, P\to\Gamma}. \tag{1}$$

Применяя преобразование Кирхгофа

$$u(P) = u(T) = \int\limits_{T_0}^{T(P)} \lambda(T)\,dT, \qquad T_0 \leq \min_{P\in\overline{\Omega}} T(P)$$

(обратное преобразование существует, например, при линейных зависимостях $\lambda_S(T)$ и $\lambda_L(T)$) и учитывая условие равенства тепловых потоков (1), благодаря которому функция $u(P)$ непрерывно дифференцируема даже при переходе через поверхность Γ, сведем исходную задачу к нелинейной краевой задаче для уравнения Лапласа:

$$\Delta u(P) = 0, \quad P \in \Omega, \qquad \frac{\partial u(P)}{\partial n} = f\bigl(P,\, u(P)\bigr), \quad P \in S \tag{2}$$

$\bigl($здесь $f\bigl(P,\, u(P)\bigr) = q\bigl(P,\, T(u(P))\bigr)\bigr)$ и допольнительному условию для определения поверхности Γ

$$u(P) = u_*, \quad P \in \Gamma. \tag{3}$$

Если далее пытаться свести краевую задачу (2) к интегральному уравнению методом функций Грина, то для нахождения функции Грина $G(P,\, Q)$ получим краевую задачу

$$\Delta G(P,\, Q) = -\delta(P,\, Q), \quad P \in \Omega, \qquad \frac{\partial G(P,\, Q)}{\partial n} = 0, \quad P \in S$$

(здесь $\delta(P,\, Q)$ – δ-функция Дирака с особенностью в точке $Q \in \Omega$), которая не имеет решения [8].

Однако возникшую проблему можно решить путем построения функции Грина, которую мы будем называть вспомогательной. Пусть $S = S_1 \cup S_2$, где S_1 – гладкая поверхность, а S_2 – гладкая либо кусочно-гладкая поверхность. Перепишем граничное условие задачи (2) в виде

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + hu(P) = f\big(P,\, u(P)\big) + hu(P), \quad P \in S_1,$$
$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = f\big(P,\, u(P)\big), \quad P \in S_2,$$

где h – произвольное положительное число ($0 < h < \infty$). Теперь можем ввести вспомогательную функцию Грина как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta G(P,\, Q) = -\delta(P,\, Q), \quad P \in \Omega, \qquad \frac{\partial G(P,\, Q)}{\partial n} + hG = 0, \quad P \in S_1,$$
$$\frac{\partial G(P,\, Q)}{\partial n} = 0, \quad P \in S_2. \tag{4}$$

Такая функция существует и единственна [8], а возможность ее практического определения зависит от формы поверхности S. Отметим, что краевое условие третьего рода с введением вспомогательного параметра h можно рассматривать на всей поверхности S, а не только на ее гладкой части S_1.

Если функция Грина найдена из (4), то с ее помощью, воспользовавшись второй формулой Грина для оператора Лапласа, примененного к функциям u и G, можем свести краевую задачу (2) к интегральному соотношению

$$u(P) = \int\limits_{S_1} G(P,\, Q)\big[f\big(Q,\, u(Q)\big) + hu(Q)\big]dS_Q + \int\limits_{S_2} G(P,\, Q) f\big(Q,\, u(Q)\big)dS_Q, \quad P \in \Omega. \tag{5}$$

Рассматривая его на каждой из гладких поверхностей S_1, S_{2i}, $i = \overline{1,\, n}$ $\big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_{2i} = S_2\big)$, получим систему интегральных уравнений Гаммерштейна относительно значений функции $u(P)$ на каждой из этих поверхностей. После ее численного решения функция $u(P)$ определяется соотношением (5) однозначно (не зависит от величины параметра h), поскольку (5) получено после эквивалентного преобразования граничных условий задачи (2). Поверхность раздела фаз определяется численно из (3).

Метод вспомогательной функции Грина был применен нами для численного решения осесимметричной стационарной задачи Стефана – математической модели установившегося температурного режима при электронно-лучевой гарнисажной плавке [10]. В данном случае область $\Omega = \{(r, z) :\ 0 < r < a;\ 0 < z < l\}$ представляет собой цилиндр радиуса a и высоты l. Для твердой фазы рассматривалась линейная зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Численное решение системы интегральных уравнений Гаммерштейна осуществлялось при помощи одного из проекционно-сеточных методов [7] (применялась кусочно-постоянная аппроксимация решения). Полученные результаты не зависели от значений вспомогательного параметра h.

Рассмотрим применение метода вспомогательной функции Грина к решению одномерных нестационарных задач Стефана, вновь ограничиваясь случаем двух фаз, хотя метод пригоден для любого числа фаз. Будем рассматривать только такие граничные условия,

которые требуют построения вспомогательной функции Грина, тем самым охватывая случаи как нелинейных граничных условий, так и линейных граничных условий второго или третьего рода. Задачи Стефана с граничными условиями первого рода (когда на части границы задан закон изменения температуры) сводятся к системе интегральных уравнений при помощи обычной функции Грина.

Сначала рассмотрим задачи с внутренним фазовым фронтом $x = z(t)$, предполагая для определенности, что $\dot{z}\,(t) > 0$:

$$\begin{gathered} L_k T = -w(x,t,T) + p\dot{z}(t)x^k\delta_{(k)}(x - z(t)), \quad 0 < x > R, \ t > 0; \quad k = 0;\, 1;\, 2; \\ T(x,0) = T^0(x); \quad T^0(z_0) = T_*; \qquad T\big(z(t),t\big) = T_*; \quad z(0) = z_0, \quad 0 \le z_0 < R; \\ \lambda(T)T_x = -\varepsilon_k q_0(t,T), \quad x = 0; \qquad \lambda(T)T_x = q_R(t,T), \quad x = R. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь значения $k = 0;\ 1;\ 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрии температурного поля $T(x,t)$; $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$; $L_k T = x^{-k}\times$ $\times\partial\big(\lambda(T)x^k T_x\big)/\partial x - \gamma(T)T_t$. Заданные функции $\lambda(T)$, $\gamma(T)$ и $w(x,t,T)$ могут быть разрывными при переходе через границу раздела фаз.

Применив преобразование Кирхгофа $u(T)$ к функции $T(x,t)$ и к ее значениям при $t = 0$ и $x = z(t)$: $u\big(T^0(x)\big) = u_0(x)$, $u(T_*) = u_*$, для определения функций $u(x,t)$, $z(t)$ получим задачу Стефана в виде, удобном для дальнейшего решения:

$$\begin{gathered} \Delta_k u = \chi(u)u_t - W(x,t,u) + p\dot{z}(t)x^k\delta_{(k)}(x - z(t)), \qquad 0 < x > R, \quad t > 0; \\ u(x,0) = u_0(x); \quad u_0(z_0) = u_*; \qquad u\big(z(t),t\big) = u_*; \quad z(0) = z_0; \\ u_x = -\varepsilon_k Q_0(t,u), \quad x = 0; \qquad u_x = Q_R(t,u), \quad x = R. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\chi(u) = \gamma\big(T(u)\big)dT(u)/du$; $W(x,t,u) = w\big(x,t,T(u)\big)$; $Q_0(t,u) = q_0\big(x,t,T(u)\big)$; $Q_R(t,u) = q_R\big(x,t,T(u)\big)$.

Для приближенного решения задачи (7) воспользуемся методом прямых [11]. Введя обозначения: $t_n = n\tau$, $u_n(x) = u(x,t_n)$, $z_n = z(t_n)$, $W_n(x,u_n) = W(x,t_n,u_n)$, $Q_{0n}(u_n) =$ $= Q_0(t_n,u_n)$, $Q_{Rn}(u_n) = Q_R(t_n,u_n)$, для определения функции $u_n(x)$ и постояноой z_n на текущем временном слое $t = t_n$ получим нелинейную краевую задачу:

$$\begin{gathered} \Delta_k u_n = \chi(u_n)(u_n - u_{n-1})/(\sigma\tau) - W_n(x,u_n) + px^k\delta_{(k)}(x - z_n)(z_n - z_{n-1})/(\sigma\tau) - \\ -(1-\sigma)\big(\Delta_k u_{n-1} + W_{n-1}(x,u_{n-1})\big)/\sigma, \qquad 0 < x > R; \\ u_{nx} = -\varepsilon_k Q_{0n}(u_n), \quad x = 0; \\ u_{nx} = Q_{Rn}(u_n), \quad x = R; \qquad u_n(z_n) = u_*, \quad n = 1,\, 2,\, ... \end{gathered} \tag{8}$$

Покажем, что краевая задача (8) аппроксимирует задачу Стефана (7) для $t = t_n$ с погрешностью $O(\tau)$ при $\sigma = 1$ и $O(\tau^2)$ – при $\sigma = 1/2$. Для $x \ne z_n$ справедливость этого утверждения очевидна [11]. Умножим дифференциальное уравнение задачи (8) на x_k и проинтегрируем по x в границах от $z_n - \varepsilon$ до $z_n + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). В пределе при $\varepsilon \to 0$ получим соотношение

$$u_{nx}(z_n + 0) - u_{nx}(z_n - 0) = p(z_n - z_{n-1})/(\sigma\tau) - (1-\sigma)\big(u_{n-1,x}(z_n + 0) - u_{n-1,x}(z_n - 0)\big)/\sigma,$$

которое является аппроксимацией при $t = t_n$ известного условия Стефана

$$u_x\big(z(t) + 0, t\big) - u_x\big(z(t) - 0, t\big) = p\dot{z}(t)$$

с погрешностью $O(\tau)$ при $\sigma = 1$ и $O(\tau^2)$ – при $\sigma = 1/2$.

Поскольку функция Грина соответствующей (8) линейной краевой задачи существует, то, представив граничное условие для $x = R$ в виде

$$u_{nx}(R) + hu_n(R) = Q_{Rn}(u_n(R)) + hu_n(R) \qquad (0 < h < \infty),$$

введем вспомогательную функцию Грина $G(x, y)$ как решение следующей краевойзадачи:

$$\Delta_k G_k(x, y) = -\delta_{(k)}(x - y), \qquad 0 < x < R;$$
$$G_{kx}(0, y) = 0, \qquad G_{kx}(R, y) + hG_{kx}(R, y) = 0,$$

откуда найдем:

$$G_0(x, y) = \big[1 + h(R - y)\big]/h, \qquad G_1(x, y) = \big[1 + hR\ln(R/y)\big]/(hR),$$
$$G_2(x, y) = \big[hR^2 + (1 - hR)y)\big]/(hR^2 y), \qquad x \le y; \qquad G_k(y, x) = G_k(x, y), \quad k = 0;\ 1;\ 2.$$

Отметим, что для построения вспомогательной функции Грина вместо граничного условия при $x = R$ можно преобразовать граничное условие при $x = 0$ либо оба граничные условия одновременно. Наш выбор здесь продиктован только стремлением к максимальному упрощению последующего решения задачи, поскольку $u_{nx}(0) = 0$ для $k = 1;\ 2$.

Воспользовавшись второй формулой Грина для оператора Δ_k, примененного к функциям u_n и G_k, для решения $u_n(x)$ краевой задачи (8) получим интегральное представление

$$u_n(x) = u_n(R) + Q_{Rn}\big(u_n(R)\big)/h + \varepsilon_k G_k(x, 0) Q_{0n}\big(u_n(0)\big) -$$
$$-pz_n^k(z_n - z_{n-1}) G_k(x, z_n)/(\sigma\tau) - \int\limits_0^R G_k(x, y) F_{k,n}\big(y, u_n(y)\big) y^k\, dy, \quad 0 \le x \le R, \tag{9}$$

где

$$F_{k,n}(y, u) = \chi(u)(u - u_{n-1})/(\sigma\tau) - W_n(y, u) - (1 - \sigma)\big(\Delta_k u_{n-1} + W_{n-1}(y, u_{n-1})\big)/\sigma.$$

Соотношение (9) – интегральное уравнение типа Гаммерштейна относительно $u_n(x)$, которое содержит неизвестные постоянные: $u_n(0)$ (при $k = 0$), $u_n(R)$ и z_n. Для их определения необходимо записать еще три уравнения, положив в (9) последовательно $x = 0$, $x = R$ и $x = z_n$. Приведем лишь уравнение, полученное при $x = R$:

$$R^k\big[\varepsilon_k Q_{0n}\big(u_n(0)\big) + Q_{Rn}\big(u_n(R)\big)\big] - pz_n^k(z_n - z_{n-1})/(\sigma\tau) - \int\limits_0^R F_{k,n}\big(y, u_n(y)\big) y^k\, dy = 0.$$

Примечательно, что оно не содержит вспомогательного параметра h и выражает известное условие [8] разрешимости стационарной задачи (8), если ее рассматривать как вторую краевую задачу для одномерного уравнения Пуассона.

Численное решение полученной системы нелинейных интегральных уравнений удобно искать с помощью проекционно-сеточного зонального метода [7], что позволяет свести ее к системе $(N + 2 + \varepsilon_k)$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $u_n(0)$ (при

$k = 0$), $u_n(R)$, z_n и усредненных по интервалам (x_{i-1}, x_i) разбиения отрезка $[0, R]$ значений

$$u_{ni} = (k+1) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u_n(x) x^k \, dx / (x_i^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}), \qquad i = \overline{1, N},$$

функции $u_n(x)$. При усреднении необходимо учитывать зависимость функций $G_k(x, z_n)$ и $F_{k,n}\big(x, u_n(x)\big)$ от неизвестного значения z_n $\big(F_{k,n}\big(x, u_n(x)\big)$ терпит разрыв при переходе x через значение $z_n\big)$. Поэтому, на первый взгляд, возникает необходимость построения такого разбиения отрезка $[0, R]$, которое каким-либо образом было бы связано с искомым значением z_n, что должно привести к необходимости перестройки сетки на каждом шаге по времени, как это делается во многих численных методах решения задачи Стефана (см. [3–5]). Однако эту проблему можно решить при помощи одного из эффективных итерационных методов, например метода Ньютона, применив его к полученной системе нелинейных алгебраических уравнений в целом. В результате на каждой итерации будем иметь систему линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой зависят от известного приближения решения на предыдущей итерации. При этом будет сохранено стабильное разбиение отрезка $[0, R]$. В качестве начального приближения для метода Ньютона целесообразно использовать решение системы на предыдущем временн ó м слое, тогда сходимость итерационного процесса будет обеспечена за счет уменьшения шага τ.

Теперь остановимся на особенностях решения одномерных задач Стефана с внешней подвижной границей. Здесь возможны случаи, когда внешняя граница совпадает с фазовым фронтом или просто перемещается, но не является границей фазового перехода. Простейший пример задач первого типа – однофазные задачи Стефана ($k = 0; 1; 2$):

$$\begin{gathered} L_k T = -w(x,t,T), \qquad 0 < x < z(t), \quad t > 0; \\ T(x,0) = T^0(x); \quad T^0(z_0) = T_*; \qquad T\big(z(t),t\big) = T_*; \quad z(0) = z_0, \quad z_0 \geq 0; \\ \lambda(T) T_x = -\varepsilon_k q_0(t,T), \quad x = 0; \qquad \lambda(T_*) T_x = q_z(t, T_*) - p\dot{z}(t), \quad x = z(t). \end{gathered} \tag{10}$$

Задачи второго типа возникают при математическом моделировании процессов криодеструкции биологических тканей [12–13] $k = 0; 1; 2$):

$$\begin{gathered} L_k T = -w(x,t,T) - p\dot{z}(t) x^k \delta_{(k)}(x - z(t)), \qquad x_0 < x < X(t), \quad t > 0; \\ T(x,0) = T^0(x); \quad T^0\big(z(0)\big) = T_*; \quad T^0\big(X(0)\big) = T_1; \qquad T\big(z(t),t\big) = T_*; \\ \lambda(T) T_x = -q_0(t,T), \quad x = x_0; \qquad T_x = 0, \quad x = X(t); \qquad T\big(X(t),t\big) = T_1. \end{gathered} \tag{11}$$

Для решения задач (10) и (11) можно применить метод вспомогательной функции Грина. Тогда в случае однофазной задачи (10) приходим к интегральному соотношению

$$\begin{gathered} u_n(x) = u_* + Q_{zn}(u_*)/h + \varepsilon_k G_{kn}(x,0) Q_{0n}\big(u_n(0)\big) - \\ -p(z_n - z_{n-1})/(h\sigma\tau) - \int\limits_0^{z_n} G_{kn}(x,y) F_{k,n}\big(y, u_n(y)\big) y^k \, dy, \quad 0 \leq x \leq z_n, \end{gathered} \tag{12}$$

а интегральное соотношение для задачи криодеструкции (11) имеет вид

$$\begin{gathered} u_n(x) = u_1 + G_{kn}(x, x_0) Q_{0n}\big(u_n(x_0)\big) + p z_n^k (z_n - z_{n-1}) G_{kn}(x, z_n)/(\sigma\tau) - \\ - \int\limits_0^{X_n} G_{kn}(x,y) F_{k,n}\big(y, u_n(y)\big) y^k \, dy, \qquad x_0 \leq x \leq X_n. \end{gathered} \tag{13}$$

Выражение для функций Грина $G_{kn}(x,y)$ легко получить из приведенных выше для $G_k(x,y)$, заменив в них R соответственно на z_n и X_n. Соотношение (12) необходимо дополнить интегральными уравнениями, получаемыми из него при $x=0$ (для $k=0$) и $x=z_n$, а уравнение (13) – тремя уравнениями, получаемыми при $x=x_0$, $x=z_n$ и $x=X_n$. Для численного решения полученных систем интегральных уравнений зональным методом можно построить равномерную сетку, задав величину ее шага δ. Координата последнего узла сетки на каждом временн ó м слое будет совпадать с искомым значением z_n (соответственно X_n), которое будет найдено в процессе решения рассматриваемой системы нелинейных алгебраических уравнений итерационным методом. При этом расстояние между предпоследним и последним узлами сетки будет меньше или равно шагу δ, а общее количество узлов (и число уравнений алгебраической системы) может увеличиваться не только при переходе к следующему временн ó му слою, но и при переходе к следующей итерации на данном временн ó м слое.

Предложенная методика численного решения нестационарных задач Стефана проверена путем сравнения результатов расчета с численным решением, полученным в [1] методом сквозного счета, и точным решением

$$z(t)=a(t_0-t)^{1/2},\quad 0\le t<t_0;\qquad T(x,t)=B_L-A_Lx^2/(t_0-t),\quad 0\le x\le z(t);$$
$$T(x,t)=B_S-A_Sx^2/(t_0-t),\qquad z(t)\le x\le R;$$
$$A_S=\big(4\lambda_L(B_L-T_*)+pa^2\big)/(4\lambda_Sa^2);\quad A_L=(B_L-T_*)/a^2;\quad B_S=T_*+a^2A_S$$

задачи с цилиндрической симметрией, приведенной в [1], которую мы записали в виде (6) (при $k=1$, $\dot z(t)<0$).

Расчеты проводились при $t_0=64$; $T_*=0$; $B_L=1$; $a=0,2$; $p=1$; $\lambda_S=0,5$; $\lambda_L=0,75$; $\gamma_S=2$; $\gamma_L=1,25$; $R=2$; $\sigma=1$, значениях шага по времени $\tau=0,5$; $\tau=0,25$ и шага по пространственной переменной $\delta=0,1$ $(N=20)$ и $\delta=0,05$ $(N=40)$. Результаты не зависят от величины вспомогательного параметра h $(h\ne 0)$.

В табл. 1 и 2 приведены результаты расчета значений $z(t)$ и $T(x,t)$, полученные после трех итераций метода Ньютона (в [1] приведены результаты также после трех итераций). Итерационный процесс сходится быстро: после трех итераций достигается точность 0,001 (при сравнении решений системы алгебраических уравнений для предыдущей и следующей итераций). Уменьшение шага по времени дает лучшие результаты, чем такое же уменьшение шага по пространственной переменной.

Таким образом, предложенный в настоящей работе численно-аналитический метод позволяет находить приближенные решения многомерных стационарных и одномерных нестационарных задач Стефана. Особенности применения данного метода к многомерным нестационарным задачам требуют отдельного рассмотрения. Для многомерного случая класс задач, к которым может быть применен метод, определяется возможностью построения функции Грина для конкретных видов областей и ограничивающих их поверхностей. Метод отличается логической простотой и по экономичности не уступает схеме сквозного счета [1].

Т а б л и ц а 1. **Сравнение результатов расчета $z(t)$ со значениями, полученными методом сквозного счета [1], и с точным решением**

t	$z(t)$				
	метод [1], $\tau = 0,5$; $\delta = 0,13$	$\tau = 0,5$; $\delta = 0,1$	$\tau = 0,5$; $\delta = 0,05$	$\tau = 0,25$; $\delta = 0,1$	точное значение
10	1,469	1,468	1,469	1,469	1,470
20	1,324	1,324	1,324	1,325	1,327
30	1,158	1,161	1,162	1,163	1,166
40	0,968	0,970	0,971	0,975	0,980
50	0,724	0,727	0,726	0,738	0,724

Т а б л и ц а 2. **Сравнение результатов расчета $T(x,t)$ при $\tau = 0,5$; $\delta = 0,1$ с точным решением**

x	$T(x,t)$					
	10		30		50	
	I	II	I	II	I	II
0	0,9986	1,0000	0,9917	1,0000	0,9447	1,0000
0,2	0,9801	0,9815	0,9623	0,9706	0,8732	0,9286
0,4	0,9245	0,9529	0,8740	0,8824	0,6586	0,7143
0,6	0,8319	0,8333	0,7268	0,7353	0,3009	0,3571
0,8	0,7022	0,7037	0,5208	0,5294	–0,3045	–0,2171
1,0	0,5355	0,5370	0,2559	0,2647	–1,2851	–1,1943
1,2	0,3317	0,3333	–0,1030	–0,0894	–2,4829	–2,3886
1,4	0,0909	0,0926	–0,6841	–0,6706	–3,8979	–3,8000
1,6	–0,2841	–0,2815	–1,3547	–1,3412	–5,5296	–5,4286
1,8	–0,7625	–0,7600	–2,1148	–2,1012	–7,3778	–7,2743
2,0	–1,2974	–1,2948	–2,9643	–2,9506	–9,4420	–9,3371

П р и м е ч а н и е. I – вычисленное значение, II – точное.

Обозначения

T – температура; x – пространственная координата; t – время; T_* – температура фазового перехода; $T^0(x)$ – начальное распределение температуры; λ_S, λ_L – коэффициенты теплопроводности для твердой и жидкой фазы соответственно; $\gamma = c\rho$, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность; w – распределение внутренних источников тепла; $z(t)$ – координата фазового перехода; $\dot{z}(t) = dz/dt$; $p = L\rho_L(T_*)$; L – скрытая теплота фазового перехода; ρ_L – плотность для жидкой фазы; q_0, q_R, q_z – тепловые потоки на границах $x = 0$, $x = R$, $x = z(t)$ соответственно; $\delta_{(k)}(x)$ – дельта-функция Дирака с весом x^k; $u(T)$ – преобразование Кирхгофа, примененное к T; $u_* = u(T_*)$; $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ – оператор Лапласа; $\Delta_k u = x^{-k}\partial(x^k u_x)/\partial x$ – оператор Лапласа в одномерном случае; $T_x = \partial T/\partial x$, $T_t = \partial T/\partial t$, $u_{nx} = d\,u_n/d\,x$, T_1 – нормальная температура биоткани; $u_1 = u(T_1)$; x_0 – координата поверхности биоткани; $X(t)$ – координата изотермы влияния криовоздействия.

Литература

1. **Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.** // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
2. **Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б.** // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.
3. **Васильев Ф. П., Успенский А. Б.** // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3, № 5. С. 874–886.
4. **Бакирова О. И.** // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 3. С. 451–500.
5. **Абрашин В. Н., Якубеня А. Н.** // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1055–1066.
6. **Никитенко Н. И.** Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. Киев, 1988.
7. **Марчук Г. И., Агошков В. И.** Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
8. **Арсенин В. Я.** Методы математической физики и специальные функции. М., 1974.
9. **Березовский А. А., Довбня В. Д.** // Нелинейные краевые задачи. Киев, 1980. С. 41–57.
10. **Березовский А. А., Жерновый Ю. В., Сайчук М. Т.** // Проблемы спец. электрометаллургии. 1995. № 4. С. 18–25.
11. **Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.** Вычислительные методы. М., 1981.
12. **Митропольский Ю. А., Березовский А. А.** // Мат. физика и нелинейная механика. 1987. Вып. 7(41). С. 50–60.
13. **Березовский А. А.** // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. Киев, 1986. С. 3–18.

Львовский государственный университет им. И. Франко

Поступила 11.04.96.