Инженерно-физический журнал. –
1998. – Т. 71. – № 5. — С. 910–916.

УДК 536.25 : 517.95

Ю. В. Жерновый, М. Т. Сайчук

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТЕФАНА

Показано, что использование вспомогательной функции Грина, т. е. функции Грина краевой задачи для оператора Лапласа с искусственно введенным на части границы условием третьего рода, дает возможность находить численные решения многомерных задач Стефана с любыми граничными условиями. Эффективность метода проверена для задачи Стефана, имеющей точное решение.

В работе [1] предложен численно-аналитический метод, позволяющий находить приближенные решения одномерных нестационарных задач Стефана с учетом зависимости коэффициентов уравнения теплопроводности от температуры. Сущность данного подхода состоит в последовательном применении преобразования Кирхгофа искомой температуры, метода прямых и метода функций Грина. Численное решение полученной системы интегральных уравнений типа Гаммерштейна ищется проекционно-сеточным (зональным) методом с сохранением стабильной расчетной сетки на каждом шаге по времени. По сравнению с разностными схемами с явным выделением фронта [2–4] метод [1] отличается логической простотой, а по экономичности не уступает разностному алгоритму сквозного счета [5–6]. Ниже рассматриваются особенности применения подхода [1] к решению многомерных нестационарных задач Стефана.

Различия в постановке и алгоритме решения задачи Стефана в одномерном и многомерном случаях полностью раскрываются уже при сопоставлении одномерного и двумерного случаев. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением задачи Стефана с двумя пространственными переменными. Ради простоты ограничимся случаем двухфазной задачи Стефана, хотя метод пригоден для любого числа фаз. Будем рассматривать только такие граничные условия, которые требуют построения вспомогательной функции Грина [1], тем самым охватывая случаи как нелинейных граничных условий, так и линейных граничных условий второго или третьего рода, Задачи Стефана с граничными условиями первого рода (когда на части границы задан закон изменения температуры) решаются при мпомощи обычной функции Грина.

Предполагая, что прямые, параллельные оси Ox, пересекают границу раздела фаз только в одной точке, т. е. ее уравнение $\Phi(x, y, t) = 0$ представимо в виде $x = z(y, t)$, запишем общую постановку нестационарной задачи Стефана с двумя пространственными переменными для случаев прямоугольной области $(k = 0)$ и осевой симметрии темпера-

турного поля $T(x,y,t)$ ($k=1$, область – ограниченный цилиндр):

$$
\begin{gathered}
x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\gamma(T)\frac{\partial T}{\partial t}-w(x,y,t,T)+\\
+px^k|z_t(y,t)|\delta_{(k)}(x-z(y,t)),\quad 0<x>a,\quad 0<y<b,\ t>0;\quad k=0;\,1;\\
T(x,y,0)=T^0(x,y);\qquad T\big(z(y,t),y,t\big)=T_*;\\
z(y,0)=z_0(y),\quad 0<z_0(y)<a;\\
\lambda(T)T_x=-\varepsilon_k q_0(y,t,T),\quad x=0;\qquad \lambda(T)T_x=q_1(y,t,T),\quad x=a;\\
\lambda(T)T_y=-p_0(x,t,T),\quad y=0;\qquad \lambda(T)T_y=p_1(x,t,T),\quad y=b.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $\varepsilon_0=1$; $\varepsilon_1=0$; $p=const$, $p>0$ в случае плавления и $p<0$ при кристаллизации, $T_*=const$ – температура фазового перехода. Заданные функции $\lambda(T)$, $\gamma(T)$ и $w(x,y,t,T)$ могут иметь разрыв по T типа скачка при переходе через границу раздела фаз, подлежащую определению вместе с температурным полем.

Предполагая, что $T(x,y,t)\ge T_0=const$, после применения преобразования Кирхгофа

$$
u(x,y,t)=u(T)=\int\limits_{T_0}^{T(x,y,t)}\lambda(T)\,dT
$$

для определения функции $z(y,t)$ и модифицированной температуры $u(x,y,t)$ получим задачу Стефана в виде, удобном для дальнейшего решения:

$$
\begin{gathered}
\Delta_k u=\Gamma(u)u_t-W(x,y,t,u)+p|z_t(y,t)|x^k\delta_{(k)}(x-z(y,t)),\quad 0<x>a,\\
0<y<b,\quad t>0;\\
u(x,y,0)=u_0(x,y);\qquad u(z(y,t),y,t)=u_*;\qquad z(y,0)=z_0(y);\\
u_x=-\varepsilon_k Q_0(y,t,u),\quad x=0;\qquad u_x=Q_1(y,t,u),\quad x=a;\\
u_y=-P_0(x,t,u),\quad y=0;\qquad u_y=P_1(x,t,u),\quad y=b.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Здесь $\Gamma(u)=\gamma\big(T(u)\big)dT(u)/du$; $W(x,y,t,u)=w\big(x,y,t,T(u)\big)$; $Q_i(y,t,u)=q_i\big(y,t,T(u)\big)$; $P_i(x,t,u)=p_i\big(x,t,T(u)\big)$; $i=0;\,1$; $u_*=u(T_*)$, $T(u)$ – обратная функция к $u(T)$.

Для приближенного решения задачи (2) воспользуемся методом прямых [7, 8]. Введем обозначения: $t_m=m\tau$, $u_m(x,y)=u(x,y,t_m)$, $z_m(y)=z(y,t_m)$, $W_m(x,y,u_m)=$ $=W(x,y,t_m,u_m)$, $Q_{im}(y,u_m)=Q_i(y,t_m,u_m)$, $P_{im}(x,u_m)=P_i(x,t_m,u_m)$, $i=0;\,1$, получим нелинейную краевую задачу для определения функции $u_m(x,y)$ на текущем временно́м слое $t=t_m$:

$$
\begin{gathered}
\Delta_k u_m=\Gamma(u_m)(u_m-u_{m-1})/(\sigma\tau)-W_m(x,y,u_m)+p\,x^k|z_m(y)-z_{m-1}(y)|\delta_{(k)}(x-\\
-z_m(y))/(\sigma\tau)-(1-\sigma)(\Delta_k u_{m-1}+W_{m-1}(x,y,u_{m-1}))/\sigma,\qquad 0<x<a,\quad 0<y<b;\\
u_{mx}=-\varepsilon_k Q_{0m}(y,u_m),\quad x=0;\qquad u_{mx}=Q_{1m}(y,u_m),\quad x=a;\\
u_{my}=-P_{0m}(x,u_m),\quad y=0;\qquad u_{my}=P_{1m}(x,u_m),\quad y=b;\qquad m=1,\,2,\ldots,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

и дополнительное условие для нахождения $z_m(y)$

$$
u_m(z_m(y),y)=u_*;\qquad m=1,\,2,\ldots.
\tag{4}
$$

Покажем, что краевая задача (3), (4) аппроксимирует задачу Стефана (2) в момент времени $t = t_m$ с погрешностью $O(\tau)$ при $\sigma = 1$ и с погрешностью $O(\tau^2)$ при $\sigma = 1/2$. Для $x \neq z_m(y)$ справедливость этого утверждения очевидна [8]. Введя обозначение $\Phi_(x, y) = x - z_m(y)$, рассмотрим точку P на поверхности $\Phi_m = 0$ и построим симметричный относительно этой поверхности цилиндр достаточно малого обьема с центром в точке P и с образующей, параллельной нормали $n(P)$ к $\Phi_m = 0$ в точке P. Пусть S_1 – боковая поверхность, S_2^- – нижнее, S_2^+ – верхнее основание цилиндра; их площади обозначим соответственно через $|S_1|$, $|S_2| = |S_2^-| = |S_2^+|$. Умножим дифференциальное уравнение задачи (3) на x^k, проинтегрируем по объему цилиндра и устремим $|S_1|$, а затем и $|S_2|$ к нулю. После преобразований объемных интегралов, аналогичных проделанным в [5, с. 818–819] в пределе получим соотношение

$$\big((\operatorname{grad} u_m)_{P+0} - (\operatorname{grad} u_m)_{P-0},\ \operatorname{grad}\Phi_m\big) = p\,|\Phi_m(x,y) - \Phi_{m-1}(x,y)|/(\sigma\tau) - \\ -(1-\sigma)\big\{\big((\operatorname{grad} u_{m-1})_{P+0} - (\operatorname{grad} u_{m-1})_{P-0},\ \operatorname{grad}\Phi_m\big)\big\}/\sigma,$$

которое является аппроксимацией для $t = t_m$ известного условия Стефана

$$\big((\operatorname{grad} u)_{P+0} - (\operatorname{grad} u)_{P-0},\ \operatorname{grad}\Phi\big) = p\,|\Phi_t|,$$

с погрешностью $O(\tau)$ при $\sigma = 1$ и с погрешностью $O(\tau^2)$ при $\sigma = 1/2$. Здесь индексами $P + 0$ и $P - 0$ отмечены предельные значения величин при стремлении к точке P, находящейся на фазовом фронте, из областей с меньшим и большим удельным теплосодержанием [6].

Поскольку функция Грина соответствующей (3) линейной краевой задачи (второй краевой задачи для оператора Лапласа) не существует [9], то, представив одно из граничных условий задачи (3), например, при $x = a$ в виде

$$u_{mx} + h\,u_m = Q_{1m}(y, u_m) + h\,u_m, \qquad x = a$$

(h – произвольное положительное число), рассмотрим вспомогательную функцию Грина $G_k(x, y;\, \xi, \eta)$ как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered} \Delta_k G_k(x, y;\, \xi, \eta) = -\delta_{(k)}(x - \xi)\delta(y - \eta), \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ G_{kx} = 0, \quad x = 0; \qquad G_{ky} = 0, \quad y = 0; \\ G_{kx} + h\,G_k = 0, \quad x = a; \qquad G_{ky} = 0, \quad y = b. \end{gathered} \tag{5}$$

Из (5) найдем:

$$G_k(x, y;\, \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\big\{G_n(y, \eta)\varphi_{kn}(\xi)\varphi_{kn}(x)/\Phi_{kn}\big\}, \quad k = 0;\, 1; \tag{6}$$

где при $k = 0$ (плоская задача)

$$\varphi_{0n}(x) = \cos(\gamma_n x), \quad \Phi_{0n} = \big(\gamma_n^2 a + h\,\cos^2(\gamma_n a)\big)\big(1 - \exp(-2\gamma_n b)\big)/\gamma_n, \\ \gamma_n > 0, \quad \operatorname{ctg}(\gamma_n a) = \gamma_n/h, \quad n = 1,\, 2, \ldots,$$

а при $k = 1$ (осесимметричная адача)

$$\varphi_{1n}(x) = J_0(\gamma_n x), \quad \Phi_{1n} = a^2(\gamma_n^2 a + h^2)\big(1 - \exp(-2\gamma_n b)\big)J_0^2(\gamma_n a)/\gamma_n, \\ \gamma_n > 0, \quad hJ_0(\gamma_n a) = \gamma_n J_1(\gamma_n a), \quad n = 1,\, 2, \ldots.$$

В дальнейшем для упрощения изложения вместо Δ_k, G_k, φ_{kn}, Φ_{kn} мы будем писать Δ, G, φ_n, Φ_n.

Воспользовавшись второй формулой Грина для оператора Δ, примененного к функциям u_m и G, получим интегральное представление для решения $u_m(x,y)$ краевой задачи (3)

$$\begin{aligned} u_m(x,y) = \int\limits_0^a \big[G(x,y;\,\xi,b)P_{1m}(\xi,\,u_m(\xi,b)) + G(x,y;\,\xi,0)P_{0m}(\xi,\,u_m(\xi,0))\big]\xi^k d\xi + \\ + \int\limits_0^b \big\{a^k G(x,y;\,a,\eta)\big[hu_m(a,\eta) + Q_{1m}(\eta,\,u_m(a,\eta))\big] + \varepsilon_k G(x,y;\,0,\eta)\times \\ \times Q_{0m}(\eta,\,u_m(0,\eta))\big\}d\eta - \int\limits_0^a\int\limits_0^b G(x,y;\,\xi,\eta)F_m(\xi,\eta,\,u_m(\xi,\eta))\xi^k d\xi d\eta - \\ -p\int\limits_{y_{0m}}^{y_{1m}} G(x,y;\,z_m(\eta),\eta)|z_m(\eta) - z_{m-1}(\eta)|z_m^k(\eta)d\eta/(\sigma\tau), \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} F_m(x,y,u) = \frac{\Gamma(u)(u-u_{m-1})}{\sigma\tau} - W_m(x,y,u) - \\ - \frac{(1-\sigma)(\Delta u_{m-1} + W_{m-1}(x,y,u_{m-1}))}{\sigma}; \end{aligned}$$

y_{0m}, y_{1m} – ординаты точек пересечения кривой $x = z_m(y)$ для $x \in [0,\,a]$ с осью Oy; $y_{1m} > y_{0m}$; предполагаем, что таких точек может быть не больше двух. Здесь возможны и такие случаи: $y_{0m} = 0$, $y_{1m} = b$ (вообще нет точек пересечения), $y_{0m} = 0$, $y_{1m} \in \in (0,\,b]$ и $y_{0m} \in [0,\,b)$, $y_{1m} = b$ (существует только одна точка пересечения). Нелинейное интегральное уравнение (7) следует решать совместно с условием (4).

Решение уравнения (7) ищем в виде ряда по собственным функциям $\varphi_n(x)$ разложения (6) функции Грина $G(x,y;\,\xi,\eta)$

$$u_m(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{nm}(y)\varphi_n(x). \tag{8}$$

Для приближенного решения задачи ограничимся в рядах (6) и (8) суммами первых N членов (N – достаточно большое), тогда после подстановки этих частных сумм в урав-

нение (7) получим систему N нелинейных интегральных уравнений

$$g_{nm}(y) = \Bigg\{ \int\limits_0^a \big[G_n(y,b)P_{1m}(\xi,\, v_{1m}(\xi)) + G_n(y,0)P_{0m}(\xi, v_{0m}(\xi))\big]\varphi_n(\xi)\xi^k d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^b \big\{a^k\varphi_n(a)\big[hw_{1m}(\eta) + Q_{1m}(\eta,\, w_{1m}(\eta))\big] + \varepsilon_k\varphi_n(0)Q_{0m}(\eta,\, w_{0m}(\eta))\big\}G_n(y,\eta)d\eta -$$

$$- \int\limits_0^a \int\limits_0^b G_n(y,\eta)\varphi_n(\xi)F_m(\xi,\eta,\, \sum_{s=1}^N g_{sm}(y)\varphi_s(\xi))\xi^k d\xi d\eta - \tag{9}$$

$$-p \int\limits_{y_{0m}}^{y_{1m}} G_n(y,\eta)|z_m(\eta) - z_{m-1}(\eta)|z_m^k(\eta)d\eta/(\sigma\tau)\Bigg\} \Big/ \Phi_n; \quad 0 \le y \le b; \quad n = \overline{1,\, N},$$

где

$$v_{0m}(x) = \sum_{s=1}^N g_{sm}(0)\varphi_s(x), \qquad v_{1m}(x) = \sum_{s=1}^N g_{sm}(b)\varphi_s(x),$$

$$w_{0m}(y) = \sum_{s=1}^N g_{sm}(y)\varphi_s(0), \qquad w_{1m}(y) = \sum_{s=1}^N g_{sm}(y)\varphi_s(a).$$

Уравнения (9) представляют собой систему интегральных уравнений типа Гаммерштейна относительно $g_{nm}(y)$, $n = \overline{1,\, N}$, которая, кроме того, содержит неизвестные постоянные $g_{nm}(0)$ (при $k = 0$), $g_{nm}(b)$, $n = \overline{1,\, N}$, y_{0m}, y_{1m}, а также неизвестную функцию $z_m(y)$. Прежде всего эту систему необходимо дополнить еще $(\varepsilon_k + 1)N$ уравнениями, положив в (9) последовательно $y = 0$ и $y = b$. Тогда получим систему $(\varepsilon_k+2)N$ уравнений относительно $g_{nm}(y)$, $g_{nm}(0)$ и $g_{nm}(b)$, $n = \overline{1,\, N}$. Что касается неизвестных y_{0m}, y_{1m} и $z_m(y)$, то в первом приближении их можно принять равными известным значениям, полученным на предыдущем временно́м слое, а затем при необходимости уточнить решение, используя метод итераций.

Численное решение полученной системы $(\varepsilon_k + 2)N$ нелинейных интегральных уравнений удобно искать с помощью проекционно-сеточного зонального метода [10], что позволяет свести ее к системе $(\varepsilon_k + 1 + M)N$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $g_{nm}(0)$ (при $k = 0$), $g_{nm}(b)$ и усредненных по интервалам $(y_{i-1},\, y_i)$ разбиения отрезка $[0,\, b]$ значений

$$g_{nmi} = (k+1) \int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} g_{nm}(y)y^k dy/(y_i^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}), \qquad i = \overline{1,\, M}, \quad n = \overline{1,\, N},$$

функций $g_{nm}(y)$. После решения этой системы одним из эффективных итерационных методов, например методом Ньютона, используя в качестве начального приближения решение системы на предыдущем временно́м слое, и приближенного вычисления в (9) интегралов вида

$$\int\limits_0^b f(\eta,\, g_{nm}(\eta))\, d\eta \approx \sum_{n=1}^M \int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} f(\eta,\, g_{nmi})\, d\eta,$$

соотношения (9) могут быть использованы для определения функций $g_{nm}(y)$. Далее находим координаты точек границы раздела фаз с помощью условия (4), а именно y_{0m}, y_{1m} определяем как решения уравнения

$$\sum_{n=1}^{N} g_{nm}(y)\varphi_n(0) = u_*$$

для $y \in [0,\, b]$. Затем, разбивая отрезок $[y_{0m},\, y_{1m}]$ на K частей, ищем $x_{mi} = z_m(y_{mi})$, где $y_{mi} = y_{0m} + i(y_{1m} - y_{0m})/K$, $i = \overline{0,\, K}$, из уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} g_{nm}(y_{mi})\varphi_n(x) = u_*, \quad i = \overline{0,\, K-1},$$

каждое из которых, согласно сделанному выше предположению, для $x \in [0,\, a]$ имеет единственный корень. Функцию $z_m(y)$ можно затем интерполировать, используя найденные значения $x_{mi} = z_m(y_{mi})$.

В случае, когда функции q_0, q_1, p_0, p_1 в граничных условиях задачи (1) не зависят от T (линейные граничные условия), а зависимости функций $\lambda(T)$, $\gamma(T)$ и $w(x,y,t,T)$ от T имеют вид кусочно-постоянных

$$\begin{gathered}\beta(T) = \begin{cases}\beta_S = \text{const}, & T < T_*,\\ \beta_L = \text{const}, & T \geq T_*,\end{cases} \qquad \beta = \lambda;\ \gamma;\\ w(x,y,t,T) = \begin{cases} w_S(x,y,t), & T < T_*,\\ w_L(x,y,t), & T \geq T_*,\end{cases}\end{gathered} \tag{10}$$

система интегральных уравнений (9) становится линейной относительно $g_{nm}(y)$ и не содержит $g_{nm}(0)$ и $g_{nm}(b)$.

Предложенная методика численного решения двумерных нестационарных задач Стефана проверена путем сравнения результатов расчета с точным решением

$$T(x,y,t) = B_L - A_L(x^2+y^2)/(t_0-t), \quad 0 \leq x \leq z(y,t); \quad 0 \leq y \leq y(t);$$

$$T(x,y,t) = B_S - A_S(x^2+y^2)/(t_0-t), \quad \begin{cases} z(y,t) \leq x \leq a,, & 0 \leq y \leq y(t),\\ 0 \leq x \leq a, & y(t) \leq y \leq b;\end{cases}$$

$$z(y,t) = \left(\alpha^2(t_0-t) - y^2\right)^{1/2}, \quad y(t) = \alpha(t_0-t)^{1/2}, \quad 0 \leq t < t_0;$$

$$A_S = \left(4\lambda_L(B_L - T_*) + p\alpha^2\right)/(4\lambda_S\alpha^2); \quad A_L = (B_L - T_*)\alpha^{-2}; \quad B_S = T_* + \alpha^2 A_S$$

задачи с границей раздела фаз, имеющей форму окружности [5], которая записана нами в виде (1) при $k = 0$, $q_0(y,t,T) = p_0(x,t,T) = 0$; $q_1(y,t,T) = -2A_S\lambda_S a/(t_0-t)$; $p_1(x,t,T) = -2A_S\lambda_S b/(t_0-t)$; $w(x,y,t,T) = A(T)\big(4\lambda(T)(t_0-t) - \gamma(T)(x^2+y^2)\big)(t_0-t)^{-2}$, где зависимости $\lambda(T)$, $\gamma(T)$ и $A(T)$ имеют вид (10).

Расчеты проводились при $t_0 = 25$; $T_* = 0$; $B_L = 1$; $\alpha = 0,2$; $p = -1$; $\lambda_S = 0,5$; $\lambda_L = 0,75$; $\gamma_S = 2$; $\gamma_L = 1,25$; $a = b = 2$; $\sigma = 1$; $h = 1$, значениях шага по времени $\tau = 1$; $\tau = 1,5$ и шага по пространственной переменной $\delta = 0,5$ $(M = 4)$ и $\delta = 0,33$ $(M = 6)$. При решении системы для g_{nmi}, $i = \overline{1,\, M}$, $n = \overline{1,\, N}$, использовались значения $z_m(y)$ из предыдущего временн ó ого слоя. Точность результатов расчета зависит от значения

Т а б л и ц а 1. **Сравнение результатов расчета значений $y(t)$ с точным решением**

t	$y(t)$				
	$N=60$, $M=4$, $\tau=1$	$N=60$, $M=6$, $\tau=1$	$N=80$, $M=4$, $\tau=1{,}5$	$N=80$, $M=4$, $\tau=1$	точное значение
3	0,9399	0,9397	0,9343	0,9377	0,9381
6	0,8791	0,8791	0,8648	0,8730	0,8717
9	0,8105	0,8101	0,7850	0,8001	0,8000
12	0,7277	0,7272	0,6882	0,7135	0,7211
15	0,6214	0,6217	0,5606	0,6247	0,6325

Т а б л и ц а 2. **Сравнение результатов расчета значений функции $z(y,t)$, полученных при $\tau=1$, $\delta=0{,}5$, $N=80$, $t=10$, с точным решением**

y	$z(y,t)$	
	вычисленное значение	точное значение
0,0000	0,7796	0,7746
0,0773	0,7758	0,7707
0,1546	0,7643	0,7590
0,2319	0,7443	0,7391
0,3092	0,7154	0,7102
0,3865	0,6761	0,6713
0,4638	0,6253	0,6204
0,5411	0,5596	0,5542
0,6184	0,4710	0,4664
0,6957	0,3457	0,3405
0,7730	0,0000	0,0497
0,7746	–	0,0000

Т а б л и ц а 3. **Сравнение результатов расчета значений $T(x,y,t)$, полученных при $\tau=1$, $\delta=0{,}5$, $N=80$, $t=5$; 10; 15, с точным решением (верхняя строка – вычисленное значение; нижняя – точное)**

y	x		
	0	1	2
		$t=5$	
0	1,0098	–0,3747	–6,0978
	1,0000	–0,3800	–6,0800
1	–0,3566	–2,2557	–7,9641
	–0,3800	–2,2800	–7,9800
2	–5,9139	–7,7824	–13,1663
	–6,0800	–7,9800	–13,6800
		$t=10$	
0	1,0110	–1,0146	–8,6625
	1,0000	–1,0133	–8,6133
1	–0,9893	–3,5298	–11,1584
	–1,0133	–3,5467	–11,1467
2	–8,4317	–10,9315	–18,1271
	–8,6133	–11,1467	–18,7467
		$t=15$	
0	0,9429	–2,4178	–13,9535
	1,0000	–2,2800	–13,6800
1	–2,3823	–6,2276	–17,7343
	–2,2800	–6,0800	–17,4800
2	–13,6256	–17,4109	–28,2671
	–13,6800	–17,4800	–28,8800

вспомогательного параметра h, поскольку h влияет на скорость сходимости рядов, и для достижения одинаковой точности при различных h необходимо брать различные величины N. Результаты расчетов, приведенные в табл. 1–3, показывают, что данный метод позволяет получить решение с достаточной точностью. Как и в случае одной пространственной переменной [1], уменьшение шага по времени дает лучшие результаты, чем такое же уменьшение шага по пространственной переменной.

Таким образом, предложенный в настоящей работе численно-аналитический метод решения многомерных нестационарных задач Стефана отличается логической простотой, не требует перестройки расчетной сетки на каждом шаге по времени, пригоден для любых граничных условий и для областей, допускающих построение функции Грина первой или третьей краевой задачи для оператора Лапласа.

Обозначения

T – температура; x, y – пространственные координаты; t – время; T_* – температура фазового перехода; T^0 – начальное распределение температуры; λ – коэффициент теплопроводности; $\gamma = c\rho$, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность; w – распределение внутренних источников тепла; $x = z(y,t)$ – уравнение границы фазового перехода; $y(t)$ – ордината точки пересечения кривой $x = z(y,t)$ с осью Oy; $p = L\rho_L(T_*)$; L – скрытая теплота фазового перехода; ρ_L – плотность для жидкой фазы; q_0, q_1, p_0, p_1 – тепловые потоки на границах $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ соответственно; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $\delta_{(k)}(x)$ – дельта-функция Дирака с весом x^k; $\Delta_k u = x^{-k}(x^k u_x)_x + u_{yy}$ – оператор Лапласа для случаев плоской ($k = 0$) и цилиндрической ($k = 1$) симметрии; $u_x = \partial u/\partial x$; $u_{yy} = \partial^2 u/\partial y^2$; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно.

Литература

1. **Жерновый Ю. В., Сайчук М. Т.** // ИФЖ. 1998. Т. 71, № 3. С. 564–570.
2. **Васильев Ф. П., Успенский А. Б.** // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3, № 5. С. 874–886.
3. **Бакирова О. И.** // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 3. С. 451–500.
4. **Абрашин В. Н., Якубеня А. Н.** // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1055–1066.
5. **Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.** // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
6. **Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б.** // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.
7. **Лисковец О. А.** // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 12. С. 1662–1678.
8. **Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.** Вычислительные методы. Т. 2. М., 1977.
9. **Арсенин В. Я.** Методы математической физики и специальные функции. М., 1974.
10. **Марчук Г. И., Агошков В. И.** Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.

Львовский государственный университет им. И. Франко

Поступила 12.02.97.