Український математичний журнал. – 1989. – Т. 41. – № 2. — С. 146–151.

УДК 517.946

В. М. Вигак, Ю. В. Жерновый

О решении одномерной обратной задачи Стефана

Рассмотрим одномерную нестационарноую задачу Стефана, которая заключается в определении температурного поля $u(x,t)$ и подвижной координаты раздела фаз $x_0(t)$ из соотношений [1–3]

$$L\big[u(x,t),\, x_0(t)\big] \equiv c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(u)u - \\ -p\dot{x}_0(t)\delta\big(x - x_0(t)\big) = W(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l; \qquad u\big(x_0(t),t\big) = u_s, \quad t > 0, \\ \partial u(0,t)/\partial x = h(u)\big[u(0,t) - \psi_1(t)\big], \quad \partial u(l,t)/\partial x = h(u)\big[\psi_2(t) - u(l,t)\big]. \tag{2}$$

Здесь t – время; x – координата; $W(x,t)$ – поле теплоисточников; $u_0(x)$ – начальное распределение температуры; u_s, p – температура и скрытая теплота фазового перехода; $\dot{x}_0(t) = dx_0(t)/dt$ – скорость перемещения границы раздела фаз; $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – температуры внешних сред; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Предположим, что теплофизические характеристики среды $\lambda(u)$, $c(u)$, $\rho(u)$, $h(u)$, $q(u)$ – кусочно постоянные функции вида $\lambda(u) = \lambda_1 + \lambda_0\eta(u - u_s)$, $\lambda_1 + \lambda_0 = \lambda_2$, $\eta(u - u_s)$ – функция Хевисайда.

При оптимизации тепловых процессов, сопровождающихся фазовыми превращениями среды, возникает обратная задача Стефана: по заданному закону перемещения границы раздела фаз

$$x_0(t) = x_*(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

как следствию, определить причину – поле теплоисточников $W(x,t)$ – кусочно непрерывную по x и t функцию, удовлетворяющую ограничениям

$$W_{\min} \le W(x,t) \le W_{\max}, \qquad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T \tag{4}$$

и обеспечивающую достижение заданного конечного распределения температуры при $t = T > 0$

$$u(x,T) = u_T(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{5}$$

Задачи подобного типа относятся к классу некорректно поставленных [2]. Поэтому все дальнейшие рассуждения строятся в предположении, что решение рассматриваемой обратной задачи существует.

Ниже предложен метод решения обратной задачи (1)–(5) и определены условия, при которых она имеет единственное решение.

1. Предположим, что $u_0(x)$, $u_T(x)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям: $u_0(x_1) = u_T(x_2) = u_s$, $0 < x_1 < x_2 < l$, $0 < u_0 = u_0(0) < u_s < u_l = u_0(l)$, $0 < u_T = u_T(0) < u_s < u_{lT} = u_T(l)$,

$$u_0(x) = \begin{cases} u_{01}(x), & 0 \le x \le x_1, \\ u_{02}(x), & x_1 \le x \le l, \end{cases} \qquad u_T(x) = \begin{cases} u_{11}(x), & 0 \le x \le x_2, \\ u_{12}(x), & x_2 \le x \le l, \end{cases}$$

где $u_{ij}(x)$, $i = 0, 1$; $j = 1, 2$ – дважды дифференцируемые функции. Пусть $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ обладают первыми производными, $x_*(t)$ – достаточно гладкая монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условиям согласования с начальным и конечным распределениями температуры $u_0(x)$, $u_T(x)$

$$\begin{gathered} x_*(0) = x_1, \quad x_*(T) = x_2, \quad \dot{x}_*(0) = \big[\lambda_1 u_{01}'(x_1) - \lambda_2 u_{02}'(x_1)\big]/p, \\ \dot{x}_*(T) = \big[\lambda_1 u_{11}'(x_2) - \lambda_2 u_{12}'(x_2)\big]/p, \qquad u_{ij}'(x) = du_{ij}(x)/dx, \quad i = 0,\, 1;\ j = 1,\, 2. \end{gathered} \tag{6}$$

Для решения обратной задачи (1)–(5) обратимся к идее метода подстановки, применяемого для решения задач терминального управления [4–6]. Если построить непрерывную в замкнутой области $\Omega = \{\,(x,t):\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\,\}$ функцию $u\big(x,t;x_*(t)\big)$, удовлетворяющую условиям (2), (5) и условию теплового баланса на границе фазового перехода

$$\lambda_1 u_x\big(x_*(t) - 0, t;\, x_*(t)\big) - \lambda_2 u_x\big(x_*(t) + 0, t;\, x_*(t)\big) = p\dot{x}_*(t), \quad 0 \le t \le T \tag{7}$$

(u_x обозначает частную производную $\partial u/\partial x$), то распределение $W\big(x,t;x_*(t)\big)$ найдем по формуле

$$W\big(x,t;x_*(t)\big) = L\big[u\big(x,t;x_*(t)\big),\, x_*(t)\big], \quad (x,t) \in \Omega, \tag{8}$$

т. е. путем подстановки в левую часть уравнения (1) заданной зависимости $x_*(t)$ и специально подобранной функции $u\big(x,t;x_*(t)\big)$.

Определение функции $u\big(x,t;x_*(t)\big)$ сведем к решению следующей задачи двумерной интерполяции: построить непрерывную в замкнутой области Ω функцию

$$u\big(x,t;x_*(t)\big) = \begin{cases} u_1\big(x,t;x_*(t)\big), & 0 \le x \le x_*(t),\ 0 \le t \le T, \\ u_2\big(x,t;x_*(t)\big), & x_*(t) \le x \le l,\ 0 \le t \le T, \end{cases}$$

удовлетворяющую условиям интерполяции:

$$\begin{gathered} u_1\big(x,0;\, x_*(0)\big) = u_{01}(x), \quad u_1\big(x,T;\, x_*(T)\big) = u_{11}(x), \quad u_1(0,t;\, x_*) = \mu_0(t), \\ u_1(x_*,t;\, x_*) = u_s, \quad u_{1x}(0,t;\, x_*) = \eta_0(t), \quad u_{1x}(x_*,t;\, x_*) = g_1(t), \\ u_2\big(x,0;\, x_*(0)\big) = u_{02}(x), \quad u_2\big(x,T;\, x_*(T)\big) = u_{12}(x), \quad u_2(x_*,t;\, x_*) = u_s, \\ u_2(l,t;\, x_*) = \mu_1(t), \quad u_{2x}(x_*,t;\, x_*) = g_2(t), \quad u_{2x}(l,t;\, x_*) = \eta_1(t). \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $g_1(t)$, $\eta_0(t) = h_1\big[\mu_0(t) - \psi_1(t)\big]$, $\eta_1(t) = h_2\big[\psi_2(t) - \mu_1(t)\big]$, $g_2(t) = \big[\lambda_1 g_1(t) - p\dot{x}_*(t)\big]/\lambda_2$, $0 \le t \le T$ – дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям сопряжения:

$$\begin{gathered} \mu_0(0) = u_{01}(0) = u_0, \quad u_0(x_1) = u_s, \quad \mu_1(0) = u_{02}(l) = u_l, \quad \mu_0(T) = u_{11}(0) = u_T, \\ u_T(x_2) = u_s, \quad \mu_1(T) = u_{12}(l) = u_{lT}, \quad \eta_0(0) = u_{01}'(0) = h_1\big[u_0 - \psi_1(0)\big], \\ \eta_0(T) = u_{11}'(0) = h_1\big[u_T - \psi_1(T)\big], \quad g_1(0) = u_{01}'(x_1), \quad g_2(0) = u_{02}'(x_1), \\ g_1(T) = u_{11}'(x_2), \quad g_2(T) = u_{12}'(x_2), \quad \eta_1(0) = u_{02}'(l) = h_2\big[\psi_2(0) - u_l\big], \\ \eta_1(T) = u_{12}'(l) = h_2\big[\psi_2(T) - u_{lT}\big], \end{gathered} \tag{10}$$

где u_0, u_l, u_T, u_{lT} – заданные положительные числа. Граничные условия при $x = 0$, $x = l$ и условие Стефана (7) для функции $u\big(x,t;x_*(t)\big)$ выполняются за счет специального выбора зависимостей $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$ и $g_2(t)$.

В пространстве переменных x, t, u уравнения $u = u_1\big(x, t;\, x_*(t)\big)$, $u = u_2\big(x, t;\, x_*(t)\big)$ описывают четырехсторонние порции поверхности [7], которые необходимо интерполировать по заданным граничным кривым и граничным наклонам в направлениях, трансверсальных границам (условия интерполяции (9)). Решение рассматриваемой задачи иетерполяции, в отличие от решенной в [7], усложняется тем, что области определения функций $u = u_i\big(x, t;\, x_*(t)\big)$, $i = 1,\, 2$ ограничены кривой $x = x_*(t)$, непараллельной осям координат. Эта трудность оказывается преодолимой, если искомые интерполирующие функции представить в виде

$$
\begin{gathered}
u_1\big(x, t;\, x_*(t)\big) = u_{01}(x;\, x_*)[1 - g_{11}(t)] + u_{11}(x;\, x_*)g_{21}(t) + \big\{\mu_0(t) - \\
-u_0[1 - g_{11}(t)] - u_T g_{21}(t)\big\}\big[1 - g_{31}(x;\, x_*)\big] + u_s\big[g_{11}(t) - g_{21}(t)\big]g_{41}(x;\, x_*) + \\
+\big\{\eta_0(t) - u_{01}^{'}(0)[1 - g_{11}(t)] - u_{11}^{'}(0)g_{21}(t)\big\}g_{51}(x;\, x_*) + \\
+\big\{g_1(t) - u_{01}^{'}(x_1)[1 - g_{11}(t)] - u_{11}^{'}(x_2)g_{21}(t)\big\}g_{61}(x;\, x_*), \\
u_2\big(x, t;\, x_*(t)\big) = u_{02}(x;\, x_*)[1 - g_{12}(t)] + u_{12}(x;\, x_*)g_{22}(t) + u_s\big[g_{12}(t) - \\
-g_{22}(t)\big]\big[1 - g_{32}(x;\, x_*)\big] + \big\{\mu_1(t) - u_l[1 - g_{12}(t)] - u_{lT}g_{22}(t)\big\}g_{42}(x;\, x_*) + \\
+\big\{g_2(t) - u_{02}^{'}(x_1)[1 - g_{12}(t)] - u_{12}^{'}(x_2)g_{22}(t)\big\}g_{52}(x;\, x_*) + \\
+\big\{\eta_1(t) - u_{02}^{'}(l)[1 - g_{12}(t)] - u_{12}^{'}(l)g_{22}(t)\big\}g_{62}(x;\, x_*).
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Здесь $u_{01}\big(x;\, x_*(t)\big)$, $u_{11}\big(x;\, x_*(t)\big)$, $g_{i1}\big(x;\, x_*(t)\big)$, $0 \le x \le x_*(t)$; $u_{02}\big(x;\, x_*(t)\big)$, $u_{12}\big(x;\, x_*(t)\big)$, $g_{i2}\big(x;\, x_*(t)\big)$, $x_*(t) \le x \le l$; $i = \overline{3,\, 6}$ – дважды дифференцируемые по x, $g_{ij}(t)$, $0 \le t \le T$, $i,\, j = 1,\, 2$ – дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям, обеспечивающим выполнение (9):

$$
\begin{gathered}
u_{ij}(x_*;\, x_*) = u_s, \quad i = 0,\, 1; \quad j = 1,\, 2, \\
u_{01x}(0;\, x_*) = u_{01}^{'}(0), \quad u_{01x}(x_*;\, x_*) = u_{01}^{'}(x_1), \quad u_{11x}(0;\, x_*) = u_{11}^{'}(0), \\
u_{11x}(x_*;\, x_*) = u_{11}^{'}(x_2), \quad u_{02x}(x_*;\, x_*) = u_{02}^{'}(x_1), \quad u_{02x}(l;\, x_*) = u_{02}^{'}(l), \\
u_{12x}(x_*;\, x_*) = u_{12}^{'}(x_2), \quad u_{12x}(l;\, x_*) = u_{12}^{'}(l), \quad u_{01}\big(x;\, x_*(0)\big) = u_{01}(x), \\
u_{11}\big(x;\, x_*(T)\big) = u_{11}(x), \quad u_{02}\big(x;\, x_*(0)\big) = u_{02}(x), \quad u_{12}\big(x;\, x_*(T)\big) = u_{12}(x), \\
g_{i1}(0;\, x_*) = 0, \quad g_{i2}(x_*;\, x_*) = 0, \quad i = \overline{3,\, 6}, \\
g_{31}(x_*;\, x_*) = g_{41}(x_*;\, x_*) = g_{32}(l;\, x_*) = g_{42}(l;\, x_*) = 1, \quad g_{51}(x_*;\, x_*) = \\
= g_{61}(x_*;\, x_*) = g_{52}(l;\, x_*) = g_{62}(l;\, x_*) = 0, \quad g_{i1x}(0;\, x_*) = g_{i1x}(x_*;\, x_*) = \\
= g_{i2x}(x_*;\, x_*) = g_{i2x}(l;\, x_*) = 0, \quad i = 3,\, 4, \quad g_{51x}(0;\, x_*) = g_{61x}(x_*;\, x_*) = \\
= g_{52x}(x_*;\, x_*) = g_{62x}(l;\, x_*) = 1, \quad g_{61x}(0;\, x_*) = g_{51x}(x_*;\, x_*) = g_{52x}(l;\, x_*) = \\
= g_{62x}(x_*;\, x_*) = 0, \quad g_{ij}(0) = 0, \qquad g_{ij}(T) = 1, \quad i\, j = 1,\, 2.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Эти функции, как и $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $g_1(t)$, можно построить, например, в виде степенных полиномов $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{N} \gamma_n z^n$, $z = x,\, t$. Тогда при $N > 1$ для $z = t$ и при $N > 3$ для $z = x$ часть коэффициентов γ_n может выбираться произвольно. Подстановка функций (11) и заданной зависимости $x_*(t)$ в (8) дает ограниченное решение обратной задачи (1) – (5).

2. Анализ соотношений (11) позволяет выделить случай, когда существует единственное решение обратной задачи Стефана (1) – (5). Пусть $\ddot{\psi}_i(t) = 0$, $i = 1,\, 2$, а начальное и

конечное температурные состояния $u_0(x)$, $u_T(x)$ определяются зависимостями

$$u_{01}(x) = \big\{x_1\big[u_{01}'(x_1) + u_{01}'(0)\big] - 2(u_s - u_0)\big\}x_1^{-3}x^3 + \big\{3(u_s - u_0) - \\ -x_1\big[u_{01}'(x_1) + 2u_{01}'(0)\big]\big\}x_1^{-2}x^2 + u_{01}'(0)x + u_0,$$

$$u_{02}(x) = \big\{(l - x_1)\big[u_{02}'(x_1) + u_{02}'(l)\big] - 2(u_l - u_s)\big\}(l - x_1)^{-3}(x - x_1)^3 + \\ +\big\{3(u_l - u_s) - (l - x_1)\big[2u_{02}'(x_1) + u_{02}'(l)\big]\big\}(l - x_1)^{-2}(x - x_1)^2 + \\ +u_{02}'(x_1)(x - x_1) + u_s,$$

$$u_{11}(x) = \big\{x_2\big[u_{11}'(0) + u_{11}'(x_2)\big] - 2(u_s - u_T)\big\}x_2^{-3}x^3 + \\ +\big\{3(u_s - u_T) - x_2\big[2u_{11}'(0) + u_{11}'(x_2)\big]\big\}x_2^{-2}x^2 + u_{11}'(0)x + u_T,$$

$$u_{12}(x) = \big\{(l - x_2)\big[u_{12}'(x_2) + u_{12}'(l)\big] - 2(u_{lT} - u_s)\big\}(l - x_2)^{-3}(x - x_2)^3 + \\ +\big\{3(u_{lT} - u_s) - (l - x_2)\big[2u_{12}'(x_2) + u_{12}'(l)\big]\big\}(l - x_2)^{-2}(x - x_2)^2 + \\ +u_{12}'(x_2)(x - x_2) + u_s.$$

В этом случае справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а. а) *Для заданного закона перемещения границы раздела фаз (3) в классе функций, удовлетворяющих уравнениям*

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u\big(x, t;\, x_*(t)\big) = 0, \quad (x,\, t) \in \Omega \tag{12}$$

(здесь производная по t понимается как частная производная по одной из трех переменных x, t, x_*), существует единственное представление для непрерывной в замкнутой области Ω функции $u\big(x, t;\, x_*(t)\big)$, которая удовлетворяет условиям (2), (5), (7).

б) *Если для заданных зависимостей $x_*(t)$, $u_0(x)$, $u_T(x)$ ограниченное решение обратной задачи (1) – (5) существует, то распределению температуры $u\big(x, t;\, x_*(t)\big)$, удовлетворяющему условиям п. а), соответствует единственное распределение теплоисточников $W\big(x, t;\, x_*(t)\big)$, определяемое формулой (8).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, наличие только условий (10), (12) недостаточно для однозначного определения зависимостей $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $g_1(t)$, $u_{ij}\big(x;\, x_*(t)\big)$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$; $g_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$; $g_{ij}\big(x;\, x_*(t)\big)$, $i = \overline{3, 6}$, $j = 1, 2$, а значит, и функций $u_1\big(x, t;\, x_*(t)\big)$ и $u_2\big(x, t;\, x_*(t)\big)$ в виде (11). Однако функции (11) удовлетворяют уравнениям (13) лишь в единственном случае, когда перечисленные зависимости построены в виде полиномов минимальной степени, достаточной для удовлетворения условиям (10), (12): третьей степени по x и первой – по t. Итак, представления (11) в рассматриваемом случае однозначны. Докажем, что они единственны для функций $u\big(x, t;\, x_*(t)\big)$, удовлетворяющих условиям(2), (5), (7) и уравнениям (13). Для этого построим решения $u_i\big(x, t;\, x_*(t)\big)$, $i = 1, 2$ уравнения $\partial^4 u/\partial x^4 = 0$, удовлетворяющие условиям

$$u_1\big(x_*(t), t;\, x_*\big) = u_s, \qquad \frac{\partial u_1(0, t;\, x_*)}{\partial x} = h_1\big[u_1(0, t;\, x_*) - \psi_1(t)\big], \\ \frac{\partial u_1\big(x_*(t), t;\, x_*\big)}{\partial x} = g_1(t);$$

$$u_2\big(x_*(t),t;\,x_*\big)=u_s,\qquad \frac{\partial u_2\big(x_*(t),t;\,x_*\big)}{\partial x}=g_2(t),$$
$$\frac{\partial u_2(l,t;\,x_*)}{\partial x}=h_2\big[\psi_2(t)-u_2(l,t;\,x_*)\big];$$
$$u_i\big(x,0;\,x_*(0)\big)=u_{0i}(x),\qquad u_i\big(x,T;\,x_*(T)\big)=u_{1i}(x),\qquad i=1,\,2\,.$$

Получим

$$\begin{gathered}u_1\big(x,t;\,x_*(t)\big)=\big\{x_*(t)\big[\eta_0(t)+g_1(t)\big]-2\big[u_s-\mu_0(t)\big]\big\}x_*^{-3}(t)x^3+\\+\big\{3\big[u_s-\mu_0(t)\big]-x_*(t)\big[2\eta_0(t)+g_1(t)\big]\big\}x_*^{-2}(t)x^2+\eta_0(t)x+\mu_0(t),\\u_2\big(x,t;\,x_*(t)\big)=\big\{\big[l-x_*(t)\big]\big[g_2(t)+\eta_1(t)\big]-2\big[\mu_1(t)-u_s\big]\big\}\big[l-\\-x_*(t)\big]^{-3}\big[x-x_*(t)\big]^3+\big\{3\big[\mu_1(t)-u_s\big]-\big[l-x_*(t)\big]\big[2g_2(t)+\\+\eta_1(t)\big]\big\}\big[l-x_*(t)\big]^{-2}\big[x-x_*(t)\big]^2+g_2(t)\big[x-x_*(t)\big]+u_s,\end{gathered}\tag{14}$$

где $\eta_0(t)=h_1\big[\mu_0(t)-\psi_1(t)\big]$, $g_2(t)=\big[\lambda_1 g_1(t)-p\dot{x}_*(t)\big]/\lambda_2$, $\eta_1(t)=h_2\big[\psi_2(t)-\mu_1(t)\big]$ и с учетом второго уравнения (13) $\mu_0(t)=u_0-(u_0-u_T)t/T$; $\mu_1(t)=u_l-(u_l-u_{lT})t/T$, $g_1(t)=u_{01}'(x_1)-\big[u_{01}'(x_1)-u_{11}'(x_2)\big]t/T$. С другой стороны, подстановка в (11) зависимостей $u_{ij}\big(x;\,x_*(t)\big)$, $i=0,\,1$, $j=1,\,2$; $g_{ij}(t)$, $i,\,j=1,\,2$; $g_{ij}\big(x;\,x_*(t)\big)$, $i=\overline{3,\,6}$, $j=1,\,2$, построенных в виде полиномов третьей степени по x и первой – по t, также приводит к выражениям (14). Теорема доказана.

П р и м е р. Пусть область, занятая теплонесущей средой, представляет протяженный цилиндр длины l и небольшого радиуса $R\ll l$, затвердевающий с одного конца при плоском фронте кристаллизации [8, 9]. Если с поверхности цилиндра осуществляется теплоотвод во внешнюю среду по закону Ньютона, то определение усредненного по радиусу температурного поля в цилиндре $u(x,t)$ и подвижной координаты фронта кристаллизации $x_0(t)$ сводится к решению одномерной нестационарной задачи Стефана (1), (2), где $q(u)=2\alpha(u)/R$; $W(x,t)=2\alpha(u)\varphi(x,t)/R$; $\alpha(u)=\alpha_1+\alpha_0\eta(u-u_s)$; $\alpha_1+\alpha_0=\alpha_2$; $\alpha_1,\,\alpha_2$ – коэффициенты теплообмена; $\varphi(x,t)$ – температура внешней среды на боковой поверхности цилиндра [10].

В данном случае обратная задача Стефана (1)–(5) состоит в определении такого распределения температуры внешней среды $\varphi(x,t)$, причем $0\le\varphi(x,t)\le\varphi_{\max}$, $(x,t)\in\Omega$, при котором координата фронта кристаллизации $x_0(t)$ изменяется во времени согласно заданному закону (3) и обеспечивается достижение заданного конечного распределения усредненной температуры (5). Согласно (8) решение рассматриваемой обратной задачи записывается в виде

$$\varphi\big(x,t;\,x_*(t)\big)=\frac{R}{2\alpha(u)}L\big[u\big(x,t;\,x_*(t)\big),\,x_*(t)\big],\qquad (x,t)\in\Omega.\tag{15}$$

В частности, для цидиндра с теплоизолированным торцом $x=l$ $\big(u_{02}'(l)=u_{12}'(l)=0$, $\eta_1(t)\equiv 0\big)$ при исходных данных $l=10$ см, $T=1600$ с, $x_1=1$ см, $x_2=9$ см, $R/l=0,05$, $u_0'(x_1)=\alpha_1(l-x_1)(u_0-\psi_1)/\lambda_1 l$, $\psi_1=980\,K$, $u_0=1180\,K$, $u_l=1310\,K$, $u_T=1010\,K$, $u_{lT}=1220\,K$, $u_s=1210\,K$ (теплонесущая среда – германий [11, 12]) для случаев

$$x_*(t)=x_1+(x_2-x_1)t/T,$$
$$x_*(t)=x_1+(x_2-x_1)(2T^2+Tt-t^2)t/2T^3$$

по формуле (15) с использованием $u\big(x,t;\,x_*(t)\big)$ в виде (14) рассчитано распределение температуры внешней среды $\varphi\big(x,t;\,x_*(t)\big)$. Полученные решения $\varphi\big(x,t;\,x_*(t)\big)$ представляют ограниченные функции, принимающие значения соответственно в пределах $705\,K\le\varphi\big(x,t;\,x_*(t)\big)\le 9937\,K$, $153\,K\le\varphi\big(x,t;\,x_*(t)\big)\le 6574\,K$ и терпящие разрывы первого рода при $x=x_*(t)$.

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

2. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40,** № 5. – С. 133–185.

3. *Березовский А. А.* Проекционно-сеточный метод решения одномерных задач Стефана // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1985. – Вып. 4. – С. 71–76.

4. *Колесников К. С., Крищенко А. П., Жевнин А. А.* Управление обьектами с распределенными параметрами // ДАН СССР. – 1983. – **268,** № 5. – С. 1071–1074.

5. *Жевнин А. А., Колесников К. С., Крищенко А. П., Толокнов В. И.* Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепций обратных задач динамики // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1985. – № 4. – С. 180–188.

6. *Метод* подстановки для расчета распределенных управлений / А. Г. Бутковский, В. А. Кубышкин, А. Г. Смирнов и др.// Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 9. – С. 52–61.

7. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

8. *Флемингс М.* Процессы затвердевания. – М.: Мир, 1977. – 423 с.

9. *Пфанн В.* Зонная плавка. – М.: Мир, 1970. – 366 с.

10. *Данилюк И. И.* Об одном варианте двухфазной задачи Стефана // Общая теория граничных задач. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 73–81.

11. *Сомсонов Г. В.* Свойстка элементов. Справочник: В 2-х т. – М.: Металлургия, 1976. – Т. 1. – 599 с.

12. *Глазов В. М., Чижевская С. Н., Глаголева Н. Н.* Жидкие полупроводники. – М.: Наука, 1967. – 244 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов