Український математичний журнал. –
1999. – Т. 51. – № 4. — С. 562–567.

УДК 517.95

Ю. В. Жерновий (Львівський нац. ун-т ім. І. Франка)

УМОВИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Установлены условия существования и единственности неотрицательных решений нелинейных стационарных задач теплопроводности — задачи Дирихле и нелинейной задачи Неймана — с учетом зависимости коэффициента теплопроводности и внутренних источников тепла от температуры.

При математичному моделюванні високотемпературних теплових процесів необхідно враховувати як залежність від температури теплофізичних характеристик тіла, що нагрівається (тобто залежність коефіцієнтів рівняння теплопровідності від температури — внутрішню нелінійність) [1], так і наявність теплових потоків випромінювання і випаровування з поверхні тіла (зовнішню нелінійність) [2, 3]. Крім цього, нелінійність диференціального рівняння теплопровідності може зумовлюватись залежністю внутрішніх джерел тепла від температури [1].

Надзвичайно важливим завданням з точки зору прогнозування та оптимізації теплових процесів є розв'язання питання про існування стаціонарного теплового стану тіла — теплової рівноваги. Питання існування та єдиності розв'язку стаціонарних задач тепловипромінювання розглядались у роботі [2] в припущенні, що коефіцієнт теплопровідності і джерела тепла не залежать від температури, а випромінювання відбувається лише з частини поверхні тіла (мішана крайова задача). Нижче проведено дослідження стаціонарних задач теплопровідності з урахуванням залежності коефіцієнта теплопровідності та внутрішніх джерел тепла від температури і з заданням нелінійної крайової умови на всій поверхні тіла.

Обмежимось розглядом областей з $\mathbb{R}^3$, зауваживши, що всі одержані результати справедливі й для $\mathbb{R}^n$. В області $D \subset \mathbb{R}^3$, обмеженій замкненою достатньо гладкою поверхнею S, розглянемо нелінійну крайову задачу

$$\operatorname{div}\big(\lambda(T)\operatorname{grad}T(x)\big) = -W(x,T), \quad x \in D; \qquad \lambda(T)\frac{\partial T(x)}{\partial n} = \varphi\big(x, T(x)\big), \quad x \in S. \tag{1}$$

Тут $x = (x_1, x_2, x_3)$; n — одиничний вектор зовнішньої нормалі в точці $x \in S$; задані функції λ, W, φ — достатньо гладкі, причому $\lambda(T) > 0$.

Згідно з фізичним змістом задачі (1), $T(X)$ — стаціонарний розподіл температури, $\lambda(T)$ та $W(x,T)$ — відповідно коефіцієнт теплопровідності та густина розподілу внутрішніх джерел тепла, залежні від температури, а функція $\varphi(x,T)$ може задаватися лінійною по T, якщо на поверхні S відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона [1], або нелінійною, якщо враховується відведення тепла через S за рахунок випромінювання [2, 3]. Враховуючи, що для реальних теплових процесів значення температури обмежене знизу абсолютним нулем, будемо розглядати невід'ємні розв'язки задачі (1).

Зауважимо, що задача (1) є частковим випадком відповідної крайової задачі для квазілінійного еліптичного рівняння, дослідження існування розв'язків якої зведено в [4] до встановлення апріорної оцінки максимуму модуля розв'язку через дані задачі. Відомо, що в загальному випадку це зробити не вдається. Умовою єдиності розв'язку для загального випадку [4] є досить жорстка вимога необмеженої розв'язності відповідної задачі у варіаціях. Нижче будуть з'ясовані умови існування та єдиності класичних невід'ємних розв'язків задачі (1), а також відповідної задачі Діріхле, які не можуть бути одержані з [4].

Виконавши в задачі (1) заміну шуканої функції (перетворення Кірхгофа)

$$u(T) = \int\limits_0^T \lambda(\tau)d\tau,$$

одержимо нелінійну крайову задачу для оператора Лапласа

$$\Delta\, u(x) = -w\big(x, u(x)\big), \quad x \in D; \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = f\big(x, u(x)\big), \quad x \in S. \tag{2}$$

Тут $f(x,u) = \varphi\big(x, T(u)\big)$, $w(x,u) = W\big(x, T(u)\big)$, а умова $\lambda(T) > 0$ забезпечує існування оберненої функції $T(u) = u^{-1}(T)$. Будемо розглядати класичні невід'ємні розв'язки задачі (2) $u(x) \in U_+ = \{\, u(x),\ x \in \overline{D} :\ u \geq 0,\ u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})\,\}$.

Лема 1. *Якщо для функцій $w(x,u)$, $x \in D$, $f(x,u)$, $x \in S$, де $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, виконується хоча б одна з двох умов*

$$\partial w/\partial u \leq 0, \quad \partial f/\partial u < 0 \qquad \textit{або} \qquad \partial w/\partial u < 0, \quad \partial f/\partial u \leq 0,$$

то задача (2) може мати лише єдиний розв'язок.

Доведення. Нехай $u_1(x)$ і $u_2(x)$ $\big(u_1(x) \neq u_2(x)\big)$ — два розв'язки задачі (2). Тоді їхня різниця $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ є розв'язком крайової задачі

$$\Delta\, u(x) = -\big[w(x,u_1) - w(x,u_2)\big], \quad x \in D; \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x,u_1) - f(x,u_2), \quad x \in S. \tag{3}$$

Запишемо першу формулу Гріна для оператора Лапласа

$$\int\limits_D u\Delta\, u\, dx = -\int\limits_D (\operatorname{grad} u)^2\, dx + \int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\, dS.$$

Враховуючи (3), одержуємо

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u)^2\, dx = \int\limits_D (u_1 - u_2)\big[w(x,u_1) - w(x,u_2)\big]\, dx + \\ + \int\limits_S (u_1 - u_2)\big[f(x,u_1) - f(x,u_2)\big]\, dS.$$

З умов монотонності функцій $w(x,u)$ і $f(x,u)$ відносно u випливає, що остання рівність може виконуватися лише при $u_1(x) - u_2(x) \equiv 0$. Лему доведено.

Для з'ясування умов існування розв'язку задачі (2) використаємо апарат функцій Гріна. Як відомо [5, 6], для задачі Неймана існує тільки узагальнена функція Гріна, але з її допомогою ми не досягнемо поставленої мети. Тому розглянемо функцію Гріна для третьої крайової задачі для оператора Лапласа, тобто функцію $G(x;\, y)$, яка задовольняє такі умови як функція точки x для довільної фіксованої точки $y \in D$ [7]:

$$\Delta_x G = 0, \quad x \in D, \quad x \neq y; \qquad \frac{\partial G}{\partial n_x} + hG = 0, \quad x \in S, \quad h = const > 0; \tag{4}$$

$$G(x;\, y) = \frac{1}{4\pi r(x,\, y)} + g(x;\, y), \quad x \in \overline{D},$$

де $r(x,\, y) = |x - y|$;

$$\Delta_x g = 0, \quad x \in D; \qquad \frac{\partial g}{\partial n_x} + hg = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{r} + \frac{h}{r}\right], \quad x \in S.$$

Якщо S — достатньо гладка поверхня (поверхня Ляпунова [7]), то існує і однозначно визначена функція $g(x;\, y)$ (а, отже, і функція Гріна $G(x;\, y)$), неперервна по x як розв'язок третьої крайової задачі для рівняння Лапласа.

Лема 2. *Функція Гріна третьої крайової задачі (4) не може набувати від'ємних значень:* $G(x;\, y) \geq 0$ *для всіх* $(x, y) \in \overline{D} \times D$.

Доведення. Для $x = y$ $G(x;\, y) = \infty$. Запишемо крайову умову задачі (4) у вигляді

$$G = -\frac{1}{h}\frac{\partial G}{\partial n_x}, \qquad x \in S. \tag{5}$$

Нехай $y \in D$ — фіксована точка. Тоді в області $D_y \subset D$, де D_y — окіл точки y, маємо $G(x;\, y) > 0$. Розглянемо область $D_1 = D \backslash D_y$. Функція $G(x;\, y)$ гармонійна в області D_1, тому для неї справедливий принцип максимуму. Припустимо, що існує точка $x_0 \in S$, для якої $G(x_0;\, y) < 0$, причому нехай $G(x_0;\, y) = \min\limits_{x \in S} G(x;\, y)$. Тоді, згідно з (5), $\partial G(x_0;\, y)/\partial n_x > 0$, а отже, існує точка $x_1 \in D_1$ з околу точки x_0 така, що $G(x_1;\, y) < G(x_0;\, y)$, що суперечить принципу максимуму (мінімуму). Отже, $G(x;\, y) \geq 0$ для всіх $(x, y) \in \overline{D} \times D$. Лему доведено.

Використовуючи функцію Гріна (4) і другу формулу Гріна, можна показати, що для розв'язку $u(x)$ крайової задачі (2) виконується інтегральне співвідношення

$$u(x) = \int\limits_D G(x;y) w\big(y, u(y)\big)\, dy + \int\limits_S G(x;y) F\big(y, u(y)\big)\, dS_y, \qquad x \in \overline{D}, \tag{6}$$

де $F = f + hu$, справедливе для будь-якого $h > 0$. Надалі будемо припускати, що кожна з функцій $w(x, u)$, $f(x, u)$ нерерервна і задовольняє умову Гельдера відносно обох змінних. Тоді з властивостей функції Гріна (4), вперше досліджених Жіро (див. [8]), та з відомих властивостей об'ємного потенціалу і потенціалу простого шару [5, 7] випливає еквівалентність рівняння (6) і крайової задачі

$$\Delta\, u(x) = -w(x, u), \quad x \in D; \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + hu = F(x, u), \quad x \in S, \tag{2$'$}$$

в сенсі класичних розв'язків $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$. Оскільки задачі (2) і (2$'$) еквівалентні, то можемо говорити про еквівалентність задачі (2) і рівняння (6).

Припустимо, що

$$f(x,u) = q(x) - f_1(x,u), \quad x \in S; \qquad w(x,u) = w_0(x) - w_1(x,u), \quad x \in D,$$

причому хоча б одна з функцій $q(x)$, $w_0(x)$ не є тотожним нулем. Введемо позначення

$$Q(x) = \int\limits_D G(x;y) w_0(y)\, dy + \int\limits_S G(x;y) q(y)\, dS_y$$

і розглянемо оператор

$$B\,u = \int\limits_D G(x;y) w_1\big(y, u(y)\big)\, dy + \int\limits_S G(x;y)\big[f_1\big(y,u(y)\big) - hu(y)\big] dS_y,$$

заданий на множині неперервних невід'ємних функцій $u \geq 0$. Запишемо рівняння (6) у вигляді

$$u(x) = Q(x) - B\,u(x), \qquad x \in \overline{D}. \tag{7}$$

Лема 3. *Якщо існує таке число $h > 0$, що виконуються умови*

$$Q(x) > 0, \;\; B\,Q \leq Q, \quad x \in \overline{D}; \qquad f_1(x,u) \geq hu, \quad x \in S; \qquad w_1(x,u) \geq 0, \quad x \in \overline{D}; \tag{8}$$

а функції $f_1(x,u) - hu$, $w_1(x,u)$ — неспадні по u, то для будь-якого розв'язку рівняння (7) виконуються нерівності $0 \leq u(x) \leq Q(x)$, $x \in \overline{D}$.

Доведення. При фіксованій функції u розглянемо функцію $H(x) = B\,u(x))$, $x \in \overline{D}$, яка є неперервною в $\overline{D}$. Оскільки $G(x;y) \geq 0$ для $(x,y) \in \overline{D} \times D$ (лема 2), і функція $G(x;y)$ симетрична $\big(G(x;y) = G(y;x)\big)$ [6], то $G(x;y) \geq 0$ також для $(x,y) \in D \times \overline{D}$. Отже, з урахуванням двох останніх нерівностей (8) одержимо, що $H(x) \geq 0$ для $x \in D$. Припустимо, що існує точка $x_0 \in S$, для якої $H(x_0) < 0$. Тоді з неперервності функції $H(x)$ в $\overline{D}$ випливає, що існує такий окіл точки x_0, що для всіх точок $x \in D$ з цього околу $H(x) < 0$. Одержана суперечність доводить, що $H(x) \geq 0$ для всіх $x \in \overline{D}$. З монотонності функцій $f_1(x,u) - hu$, $w_1(x,u)$ та з перших двох нерівностей (8) випливає невід'ємність та обмеженість зверху розв'язку рівняння (7). Лему доведено.

При виконанні умов леми 3 задача (2) може мати лише єдиний розв'язок (лема 1), а оператор

$$A\,u = Q - B\,u, \tag{9}$$

заданий на нормальному конусі [9] неперервних невід'ємних функцій $u(x)$, $x \in \overline{D}$, є монотонним на нормальному конусному відрізку

$$K_N = \{\, u(x) \in C(\overline{D}) : \, 0 \leq u(x) \leq Q(x), \; x \in \overline{D}\}$$

і перетворює його в себе.

Лема 4. *Оператор (9) є цілком неперервним на нормальному конусному відрізку K_N.*

Доведення. Досить довести, що множина функцій

$$A(K_N) = \{\, v(x) = A\,u(x), \, u(x) \in K_N \,\}$$

компактна. Оскільки $v(x) = A\,u(x) \le Q(X)$, то $v(x) \le M = \max\limits_{x\in\overline{D}} Q(X)$ для всіх $x \in \overline{D}$. Таким чином, множина $A(K_N)$ рівномірно обмежена. Розглянемо функції

$$H_D(x) = \int\limits_D G(x;y)\,dy, \qquad H_S(x) = \int\limits_S G(x;y)\,dS_y,$$

які є неперервними в $\overline{D}$, а отже, й рівномірно неперервними в D. Продовживши функцію $w(x,u)$ по неперервності для $x \in S$, можемо вказати такі числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, що $\max\limits_{x\in\overline{D}} w(x,u) \le C_1$, $\max\limits_{x\in S} f(x,u) \le C_2$ для всіх $u \in K_N$. Отже, використовуючи праву частину (6), одержуємо

$$|v(x_1) - v(x_2)| = C_1|H_D(x_1) - H_D(x_2)| + C_2|H_S(x_1) - H_S(x_2)| < C_1\varepsilon/(2C_1) + C_2\varepsilon/(2C_2) = \varepsilon$$

для будь-яких x_1, $x_2 \in \overline{D}$, як тільки $|x_1 - x_2| < \delta$, незалежно від вибору функції $v(x) \in A(K_N)$, що означає одностайну неперервність функцій $v(x) \in A(K_N)$, а отже, і компактність множини $A(K_N)$ (теорема Арцела). Лему доведено.

Отже, для оператора A, який є монотонним і цілком неперервним на K_N і перетворює нормальний конусний відрізок K_N в себе, справедлива теорема про існування на K_N хоча б однієї нерухомої точки $u \in K_N$ [9, с. 128] (теорема 4.1(в)), а це означає, що інтегральне рівняння (7) має хоча б один розв'язок $u(x) \in K_N$. Підсумовуючи викладені вище міркування, можемо сформулювати таке твердження.

Теорема 1. *Якщо S — поверхня Ляпунова (тобто поверхня класу $C^{1+\alpha}$ [4]); функція $w(x,u) = w_0(x) - w_1(x,u)$ неперервна і задовольняє умову Гельдера по обох змінних $x \in D$, $u \in U_+$; функція $f(x,u) = q(x) - f_1(x,u)$ неперервна і задовольняє умову Гельдера по обох змінних $x \in S$, $u \in U_+$; хоча б одна з функцій $w_0(x)$, $q(x)$ не є тотожним нулем; існує число $h > 0$ таке, що виконуються умови леми 3, то крайова задача (2) має єдиний розв'язок у класі функцій U_+, причому $0 \le u(x) \le Q(x)$, $x \in \overline{D}$.*

Для задачі Діріхле

$$\Delta\,u(x) = -w\big(x, u(x)\big), \quad x \in D; \qquad u(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{10}$$

де $w(x,u) = w_0(x) - w_1(x,u)$, введемо позначення

$$Q(x) = \int\limits_D G(x;y)w_0(y)\,dy - \int\limits_S \frac{\partial G}{\partial n_y}(x;y)f(y)\,dS_y,$$

$$B\,u = \int\limits_D G(x;y)w_1\big(y, u(y)\big)\,dy.$$

Тут $G(x;y)$ — функція Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа [7]. Для розв'язків $u(x) \in \widetilde{U}_+ = \{\,u(x),\ x \in \overline{D}:\ u \ge 0,\ u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})\,\}$ задачі (10) аналогічно доводиться таке твердження.

Теорема 2. *Якщо S — поверхня класу $C^{1+\alpha}$ [4]; функція $w(x,u) = w_0(x) - w_1(x,u)$ неперервна і задовольняє умову Гельдера по обох змінних $x \in D$, $u \in \widetilde{U}_+$; функція $f(x) \in C(S)$; хоча б одна з функцій $w_0(x)$, $f(x)$ не є тотожним нулем; виконуються умови*

$$w_1(x,u) \ge 0, \quad \partial w/\partial u \le 0, \quad Q(x) > 0, \quad B\,Q \le Q, \quad x \in \overline{D},$$

то крайова задача (10) має єдиний розв'язок у класі функцій $\widetilde{U}_+$ *, причому* $0 \le u(x) \le$ $\le Q(x)$, $x \in \overline{D}$.

Приклад виконання умов теореми 1. Розглянемо крайову задачу (2) у випадку, коли $f(x,u) = q_0 - f_1(u)$, $q_0 = const > 0$; $w(x,u) \equiv 0$. Тоді, використавши крайову умову (5) для функції $G(x;y)$, властивості потенціалу подвійного шару та неперервність функції $H_S(x)$ в $\overline{D}$, знайдемо

$$Q(x) = q_0 \int\limits_S G(x;y)\, dS_y = q_0/h; \qquad B\,Q = \big[f_1(q_0/h) - q_0\big] \int\limits_S G(x;y)\, dS_y,$$

і з умови $B\,Q \le Q$ одержимо умову на функцію $f_1(u)$: $f_1(q_0/h) \le 2q_0$. Будемо цікавитись розв'язками $0 \le u(x) \le u_*$. Покладемо $h = q_0/u_*$. Отже, необхідно, щоб $f_1(u_*) \le 2q_0$. Візьмемо $f_1(u) = (\alpha u + \beta)^\mu$, де α , β , $\mu > 0$. Умова $f_1(u) \ge hu$ виконується для всіх $h \le \beta^\mu/u_*$. Звідси випливає, що повинна виконуватись нерівність $q_0 \le \beta^\mu$. Отже, $(\alpha u_* + \beta)^\mu \le 2q_0 \le 2\beta^\mu$, звідки маємо $\beta \ge \alpha u_*/\big(2^{1/\mu} - 1\big)$. З вимоги, щоб функція $f_1(u) - hu$ була неспадною, одержимо нерівність $\mu\alpha(\alpha u + \beta)^{\mu-1} \ge q_0/u_*$, яка буде виконуватись, якщо $q_0 \le \mu\alpha\beta^{\mu-1}u_*$. З іншого боку, $(\alpha u_* + \beta)^\mu/2 \le q_0 \le \beta^\mu$. Тому будемо вимагати, щоб $q_{0\,\max} = \beta^\mu \le \mu\alpha\beta^{\mu-1}u_*$. Звідси одержимо нерівність $\beta \le \mu\alpha u_*$. Оскільки $\beta \ge \alpha u_*/\big(2^{1/\mu} - 1\big)$, то повинна виконуватись нерівність $\alpha u_*/\big(2^{1/\mu} - 1\big) \le \mu\alpha u_*$ або $\mu\big(2^{1/\mu} - 1\big) \ge 1$. Остання нерівність справедлива для $0 < \mu \le 1$.

Однак, якщо $\mu = 1$, то $\beta = q_0 = \alpha u_*$, $f(x,u) = -\alpha u$ і маємо випадок лінійної задачі для рівняння Лапласа з однорідною крайовою умовою третього роду, яка має лише тривіальний розв'язок $u \equiv 0$.

Отже, умови теореми 1 виконуються для функції $f_1(u) = (\alpha u + \beta)^\mu$, де $\alpha > 0$; $0 < \mu < 1$; $\alpha u_*/\big(2^{1/\mu} - 1\big) \le \beta \le \mu\alpha u_*$, якщо взяти $h = q_0/u_*$, $(\alpha u_* + \beta)^\mu/2 \le q_0 \le \beta^\mu$, $0 \le u(x) \le u_*$.

1. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики: В 2-х ч. – Киев.: Ин-т математики АН УССР, 1974. – Ч. 1. – 444 с.

2. *Березовский А. А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. – Киев.: Наук. думка, 1968. – 165 с.

3. *Березовский А. А., Жерновый Ю. В., Сайчук М. Т.* Математическое моделирование установившегося теплового режима в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Теплофизика высоких температур. – 1996. – **34**, № 1. – С. 125–133.

4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

5. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 424 с.

6. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 432 с.

7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 4-х т. – М.: Наука, 1981. – Т. 4, ч. 11. – 552 с.

8. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 256 с.

9. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.