Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 1981. – Вип. 18. — С. 18 – 21.

УДК 517.913

Ю. В. Жерновий, В. Г. Костенко

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ

Найдены асимптотические представления при $x \to \infty$ фундаментальной системы решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка.

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$y^{(\vee)} + p_1(x)y''' + \big(p_1(x) + r(x)\big)y'' + p_3(x)y' + p_4(x)y = 0$$

у вигляді

$$\begin{gathered} y^{(\vee)} + A(x)y''' + B(x)y'' + C(x)y' + D(x)y = \big(A(x) - p_1(x)\big)y''' + \\ + \left(\frac{3}{2}A'(x) - r(x)\right)y'' + \big(C(x) - p_3(x)\big)y' + \big(D(x) - p_4(x)\big)y, \end{gathered} \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'', \quad y'''(x_0) = y_0''', \quad y^{(I\vee)}(x_0) = y_0^{(I\vee)}, \tag{2}$$

де

$$\begin{gathered} A(x) = \xi^{-2}(x)\big[\mu - 10\xi''(x)\xi(x) + 5\xi'^2(x)\big], \quad B(x) = \lambda\xi^{-3}(x) + \frac{3}{2}A'(x); \\ C(x) = \big(\nu - 3\lambda\xi'(x)\big)\xi^{-4}(x) + 0,9A''(x) + \big(0,4A(x)\big)^2; \\ D(x) = \big[\kappa - 2\nu\xi'(x) + 4\lambda\xi'^2(x) - 2\lambda\xi''(x)\xi(x)\big]\xi^{-5}(x) + 0,2A'''(x) + 0,16A(x)A'(x); \end{gathered} \tag{3}$$

$\xi(x)$ – довільна неперервно диференційована функція до п'ятого порядку; μ, λ, ν, κ – довільні сталі; $p_2(x) = \lambda\xi^{-3}(x) \neq 0$.

Задача (1), (2) за допомогою праці [1] зведена до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерра, в результаті дослідження якого доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай функція $p_4(x)$ неперервна, $p_3(x)$, $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x) = \lambda\xi^{-3}(x) \neq 0$ неперервно диференційовані відповідно один, два, три і п'ять разів на інтервалі $x_0 \leq x < \infty$. Крім того, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ задовольняють умови (3), $\kappa^2 + \lambda^2\nu - \mu\lambda\kappa = 0$, $-\kappa/\lambda = a^2 > 0$, δ_1, δ_2, δ_3 – корені рівняння $\delta^3 + (\mu + a^2)\delta - \lambda = 0$, причому $\delta_2\delta_3 - \frac{1}{4}\delta_1^2 = -\tilde{a}^2 < 0$. Тоді за умов*

$$\xi(x) > 0, \qquad \tilde{a} > 0, \qquad \delta_1 > 0, \qquad a > \frac{\delta_1}{2} + \tilde{a},$$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x, x_0) = \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt < \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \mathcal{P}_i(x)\xi^2(x) = 0, \quad (i = \overline{2,5}),$$

або

$$\xi(x) < 0, \qquad \tilde{a} > 0, \qquad a > \delta_1 > 0, \qquad \frac{\delta_1}{2} - \tilde{a} > 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x, x_0) = -\infty, \quad \int\limits_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt < \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \mathcal{P}_i(x)\xi^2(x) = 0, \quad (i = 1,\, 3,\, 4,\, 5),$$

де

$$b(x) = 5|\xi(x)| \max\big[|\mathcal{P}_1(x)|, \ldots, |\mathcal{P}_5(x)|\big];$$

$$\mathcal{P}_1(x) = -P\big\{\big(6\xi''\xi'\xi + 2\xi'''\xi^2 + 2a\xi'^2 + 5a\xi''\xi + 3a^2\xi' + a^3\big)A_1 +$$
$$+\xi(2\xi'^2 + 2\xi''\xi + 3a\xi' + a^2)A_2 + \xi^2(2\xi' + a)A_3 + \xi^3 A_4\big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_2(x) = -Q\big\{\big(6\xi''\xi'\xi + 2\xi'''\xi^2 - 2a\xi'^2 - 5a\xi''\xi + 3a^2\xi' - a^3\big)A_1 +$$
$$+\xi(2\xi'^2 + 2\xi''\xi - 3a\xi' + a^2)A_2 + \xi^2(2\xi' - a)A_3 + \xi^3 A_4\big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_3(x) = -R\big\{\big[6\xi''\xi'\xi + 2\xi'''\xi^2 + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})(2\xi'^2 + 5a\xi''\xi) + 3(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})\xi' + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2\big]A_1 +$$
$$+\xi\big[2\xi'^2 + 2\xi''\xi + 3(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})\xi' + (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2\big]A_2 + \xi^2(2\xi' + \frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})A_3 + \xi^3 A_4\big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_4(x) = -S\big\{\big[6\xi''\xi'\xi + 2\xi'''\xi^2 + (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})(2\xi'^2 + 5a\xi''\xi) + 3(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})\xi' + (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2\big]A_1 +$$
$$+\xi\big[2\xi'^2 + 2\xi''\xi + 3(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})\xi' + (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2\big]A_2 + \xi^2(2\xi' + \frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})A_3 + \xi^3 A_4\big\}W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_5(x) = -T\big\{\big[6\xi''\xi'\xi + 2\xi'''\xi^2 - 2\delta_1\xi'^2 - 5\delta_1\xi''\xi + 3\delta_1^2\xi' - \delta_1^3\big]A_1 +$$
$$+\xi(2\xi'^2 + 2\xi''\xi - 3\delta_1\xi' + \delta_1^2)A_2 + \xi^2(2\xi' - \delta_1)A_3 + \xi^3 A_4\big\}W^{-1};$$

$$A_1 = A(x) - p_1(x); \quad A_2 = \frac{3}{2}A'(x) - 3p_1'(x) + r(x); \quad A_3 = C(x) + 2r'(x) -$$
$$-p_3(x) - 3p_1''(x); \quad A_4 = C'(x) + r''(x) + p_4(x) - D(x) - \frac{1}{2}A'''(x) - p_3'(x) - p_1'''(x),$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -a & \frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} & \frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a} & -\delta_1 \\ a^2 & a^2 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^2 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^2 & \delta_1^2 \\ a^3 & -a^3 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^3 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^3 & -\delta_1^3 \\ a^4 & a^4 & (\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a})^4 & (\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a})^4 & \delta_1^4 \end{vmatrix};$$

$$P = -2\tilde{a}(a - \delta_1)\big[\delta_1^2 a^2 + \big(\frac{1}{4}\delta_1^2 - \tilde{a}^2\big)^2\big] + \big(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} + a\big)\big(\tilde{a} - \frac{3}{2}\delta_1\big)\big[a^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)^2 +$$
$$+\delta_1^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a}\big)^2\big] + \big(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a} + a\big)\big(\frac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)\big[a^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)^2 + \delta_1^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a}\big)^2\big];$$

$$Q = -2\tilde{a}(a + \delta_1)\big[\delta_1^2 a^2 + \big(\frac{1}{4}\delta_1^2 - \tilde{a}^2\big)^2\big] + \big(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a} - a\big)\big(\frac{3}{2}\delta_1 - \tilde{a}\big)\big[a^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)^2 +$$
$$+\delta_1^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a}\big)^2\big] + \big(a - \frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)\big(\frac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)\big[a^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a}\big)^2 + \delta_1^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)^2\big];$$

$$R = 2a\big(\frac{3}{2}\delta_1 - \tilde{a}\big)\big[a^4 + \delta_1^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a}\big)^2\big] + a^2\big[\delta_1^2 + \big(\frac{1}{2}\delta_1 - \tilde{a}\big)^2\big](2\tilde{a} - 3\delta_1);$$

$$S = -2a\big(\frac{3}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)\big[a^4 + \delta_1^2\big(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)^2\big] + a^2\big[\delta_1^2 + \big(\frac{1}{2}\delta_1 + \tilde{a}\big)^2\big](2\tilde{a} + 3\delta_1);$$

$$T = 4a\tilde{a}\big[a^4 + \big(\frac{1}{4}\,\delta_1^2 - \tilde{a}^2\big)^2\big] - 8a^3\tilde{a}\big(\frac{1}{4}\,\delta_1^2 + \tilde{a}^2\big); \quad \varphi(x, x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \xi^{-1}(t)\,dt;$$

рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків, асимптотичне зображення яких при $x \to \infty$ дають формули:

$$\begin{aligned}
y_1(x, x_0) &= \xi^2(x)\exp\big[a\,\varphi(x, x_0)\big]\big(1 + \mathrm{O}(1)\big), \quad x \to \infty;\\
y_2(x, x_0) &= \xi^2(x)\exp\big[-a\,\varphi(x, x_0)\big]\big(1 + \mathrm{O}(1)\big), \quad x \to \infty;\\
y_3(x, x_0) &= \xi^2(x)\exp\big[\big(\frac{1}{2}\,\delta_1 + \tilde{a}\big)\varphi(x, x_0)\big]\big(1 + \mathrm{O}(1)\big), \quad x \to \infty;\\
y_4(x, x_0) &= \xi^2(x)\exp\big[\big(\frac{1}{2}\,\delta_1 - \tilde{a}\big)\varphi(x, x_0)\big]\big(1 + \mathrm{O}(1)\big), \quad x \to \infty;\\
y_5(x, x_0) &= \xi^2(x)\exp\big[-\delta_1\varphi(x, x_0)\big]\big(1 + \mathrm{O}(1)\big), \quad x \to \infty.
\end{aligned} \tag{4}$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для похідних першого та другого порядку фундаментальної системи розв'язків рівняння (1) одержують формальним диференціюванням головних частин формул (4).

Те ж саме справедливе для похідних третього і четвертого порядку цих розв'язків за додаткових умов

$$\lim_{x\to\infty}\big(A'(x) - p_1'(x)\big)\xi^2(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\big(\frac{5}{2}A''(x) + r'(x) - 4p_1''(x)\big)\xi^4(x) = 0.$$

1. *Жерновий Ю. В., Костенко В. Г.* Лінійні звичайні диференціальні рівняння п'ятого порядку, інтегровані у замкнутій формі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1979. – Вип. 14.

2. *Костенко Е. С.* Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10,** № 10.

3. *Павлюк І. А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970.