Вісник Львівського університету.
Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2003. – Вип.7. – С.41-52.

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ, ПОБУДОВАНИХ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Я. Єлейко, Ю. Жерновий

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: mstat@franko.lviv.ua

Вивчено асимптотичну поведінку випадкових еволюцій, побудованих на основі розв'язків задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, на траєкторії напівмарківського процесу зі скінченною та зліченною множинами станів.

Ключові слова: випадкова еволюція; асимптотична поведінка; напівмарківський процес; система звичайних диференціальних рівнянь; задача Коші

1. ВСТУП

Відомо, що загальна ергодична теорія визначає умови, за яких майже напевне часові середні випадкової еволюції збігаються при $t \to \infty$ до середніх просторових. Ергодичну теорему для процесів з дискретним втручанням випадку довів А.В.Скороход [3, с.362]. В.М.Шуренков довів ергодичну теорему для процесів з марківським втручанням випадку за мінімальних обмежень на випадковий процес [9, с.230]. Застосування цих ергодичних теорем для дослідження конкретних класів випадкових процесів потребує перевірки, чи вони є процесами з дискретним втручанням випадку, чи є іноді марківськими процесами і чи виконуються для них умови, за яких часові середні мають вироджений граничний розподіл. Ми дослідимо такі питання для випадкових еволюцій, описуваних розв'язками звичайних диференціальних рівнянь.

Дослідження багатьох складних явищ і процесів шляхом побудови і вивчення їхніх математичних моделей набуває щораз більшого поширення у фізиці, біології, економіці, соціології. Значне місце в такому підході посідають диференціальні рівняння.

Часто на явища, описувані звичайними диференціальними рівняннями, впливає велика кількість зовнішніх випадкових факторів, які певним чином змінюють сам вигляд рівняння. Щоб пояснити цю тезу, розглянемо, наприклад, роботу технічного пристрою, який може працювати в різних режимах, причому перемикання з одного режиму на інший відбувається у випадкові моменти часу. Якщо під час роботи в різних режимах задіяні різні вузли пристрою або після перемикання значно змінюються основні параметри, що характеризують його роботу, то очевидно, що динаміку цих параметрів в різних режимах описуватимуть системи звичайних диференціальних рівнянь (найчастіше першого або другого порядку) з різними правими частинами.

© Єлейко Я., Жерновий Ю., 2003

Для дослідження реальних процесів важливо знайти асимптотику при $t \to \infty$ часових середніх значень основних параметрів процесу. Ми вивчимо асимптотичну поведінку випадкових еволюцій, побудованих на основі розв'язків задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, на траєкторії напівмарківського процесу [3, с.336]. Коректна визначеність випадкової еволюції забезпечена розглядом лише таких систем диференціальних рівнянь, для яких виконуються умови однозначної розв'язності задачі Коші та продовжуваності розв'язку $x(t)$ на проміжок $t \in [0, \infty)$.

2. УМОВИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ КОШІ ТА ОБМЕЖЕНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ

Обмежимося розглядом задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$x'(t) = f(t, x), \qquad x(0) = x^{(0)}, \tag{1}$$

оскільки, як відомо, задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь вищого порядку, розв'язаних відносно старших похідних, завжди можна звести до вигляду (1). Векторну функцію $f = (f_{(1)}, f_{(2)}, \ldots, f_{(n)})$ вважатимемо визначеною для всіх значень $t \in [0, \infty)$ і значень змінної x з деякої області $D \subset R^n$; $x^{(0)} \in D$ – задане початкове значення $x(t) = (x_{(1)}(t), x_{(2)}(t), \ldots, x_{(n)}(t))$.

Будемо казати, що функція $f(t, x)$ належить до класу (C, Lip) в області $\Omega = \{(t, x) : t \in [0, \infty),\ x \in D\}$, якщо $f(t, x)$ неперервна для $(t, x) \in \Omega$ і задовольняє умову Ліпшиця за змінною x

$$| f(t, x) - f(t, \overline{x}) | \le L \, | x - \overline{x} | .$$

Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1) для $t \in [0, \infty)$ визначені теоремою [4, с.429].

Теорема 1. *Нехай* $f(t, x) \in (C, Lip)$ *у кожній обмеженій області* $G \subset R_+ \times R^n$ $\left(G = \{(t, x) : t \in [0, a),\ x \in D\}\right)$. *Якщо*

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{\sup\limits_{0 \le t \le \rho,\ |x - x^{(0)}| \le \rho} | f(t, x) |}{\rho} = 0,$$

то $\forall\ x^{(0)} \in D$ *існує єдиний розв'язок* $x(t)$ *задачі (1), визначений і неперервний* $\forall\ t \in [0, \infty)$.

Зазначимо, що теорема 1 не дає необхідної умови продовжуваності розв'язку задачі (1). Є інші умови існування єдиного розв'язку на проміжку $t \in [0, \infty)$ задачі Коші, записаної як у загальному вигляді (1) [6, с.16], так і для деяких окремих випадків задання функції $f(t, x)$ (див., наприклад, [6, с.16, 146; 2, с.16]).

Далі нас будуть цікавити лише обмежені розв'язки задачі (1). Доведемо таку теорему.

Теорема 2. *В кожному з випадків 1 і 2* $\forall\ x^{(0)} \in D$ *існує єдиний розв'язок* $x(t)$ *задачі (1), визначений і обмежений* $\forall\ t \in [0,\infty)$.

1. Функція $\varphi(t)$ *невід'ємна, і існує невласний інтеграл* $\int_0^\infty \varphi(t)dt$, *а функція* $f(t,x)$ *задовольняє умови теореми 1 і* $|f(t,x)| \le \varphi(t)$ *для* $t \in [0,\infty)$, $|x| < \infty$.

2. Функція $f(t,x) = \dfrac{g(t,x)}{(t+\beta)^\alpha}$, *де* $\alpha > 1$, $\beta > 0$, *а функція* $g(t,x) \in (C, Lip)$ *в кожній обмеженій області* $G \subset R_+ \times R^n$ *і обмежена для* $t \in [0,\infty)$, $|x| < \infty$.

3. Розглянемо задачу (1) для скалярного диференціального рівняння, в якому функція $f(t,x)$ *обмежена за змінною* t *і* $f(t,x) \in (C, Lip)$ *в кожній обмеженій області простору* $R_+ \times R$. *Для всіх* $x^{(0)} \in D \subset R$ *тоді і лише тоді існує єдиний розв'язок* $x(t)$ *задачі (1), визначений і обмежений* $\forall\ t \in [0,\infty)$, *коли* $\forall\ x^{(0)} \in D$ *знайдуться обмежені для* $t \ge 0$ *функції* $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C^1[0,\infty)$, *такі, що*

$$\alpha(t) \le \beta(t),\ \ \alpha'(t) \le f\left(t,\alpha(t)\right),\ \ \beta'(t) \ge f\left(t,\beta(t)\right)\ \ \forall\ t \ge 0;$$

$$\alpha(0) \le x^{(0)} \le \beta(0)\ \ \forall\ x^{(0)} \in D.$$

Доведення. 1. Оскільки функція $f(t,x)$ задовольняє умови теореми 1, то існує єдиний розв'язок $x(t)$ задачі (1), визначений і неперервний для всіх $t \ge 0$. Обмеженість розв'язку буде доведено, якщо ми визначимо, що $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) < \infty$. З умови 1 теореми випливає абсолютна збіжність інтеграла $\int_0^\infty f(t,x)dt$. Отже, $\int_0^\infty f(t,x)dt = M < \infty$, тому для розв'язку задачі (1) маємо

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^{(0)} + \int_0^\infty f(t,x)dt = x^{(0)} + M < \infty.$$

2. Якщо виконуються умови 2 теореми, то функція $f(t,x) \in (C, Lip)$ і обмежена, тому вона задовольняє умови теореми 1 і $|f(t,x)| \le \dfrac{K}{(t+\beta)^\alpha}$. Оскільки при $\alpha > 1$, $\beta > 0$ існує невласний інтеграл $\int_0^\infty \dfrac{dt}{(t+\beta)^\alpha}$, то абсолютно збігається інтеграл $\int_0^\infty f(t,x)dt$. Далі доведення таке, як у пункті 1.

3. Необхідність очевидна. Справді, нехай $x(t)$ – єдиний розв'язок задачі (1), обмежений $\forall\ t \ge 0$. Тоді для функцій $\alpha(t) = \beta(t) = x(t)$, визначених $\forall\ t \ge 0$, виконуються всі умови 3 теореми.

Доведемо достатність. Для $(t,x)\in R_+\times R$ визначимо функцію

$$F(t,x)=\begin{cases} f\left(t,\alpha(t)\right)+\dfrac{\alpha(t)-x}{1+\alpha(t)-x}, & x<\alpha(t);\\ f(t,x), & \alpha(t)\le x\le\beta(t);\\ f\left(t,\beta(t)\right)-\dfrac{x-\beta(t)}{1+x-\beta(t)}, & x>\beta(t).\end{cases}$$

Легко переконатися, що функція $F(t,x)\in(C,Lip)$ в кожній обмеженій області простору $R_+\times R$ і обмежена, отже, для задачі Коші

$$x'(t)=F(t,x),\qquad x(0)=x^{(0)}$$

виконуються умови теореми 1, тому $\forall\ x^{(0)}\in D$ ця задача має єдиний розв'язок, визначений $\forall\ t\ge 0$. Позначимо його через $u(t)$ і покажемо, що

$$\alpha(t)\le u(t)\le\beta(t)\quad\forall\ t\ge 0. \tag{2}$$

Справді, припустимо, що умова $u(t)\le\beta(t)\ \ \forall\ t\ge 0$ не виконується. Тоді, оскільки $u(0)=x^{(0)}\le\beta(0)$, то знайдеться точка $t_0>0$, в якій для різниці $z(t)=u(t)-\beta(t)$ виконуються умови $z(t_0)>0$, $z'(t_0)>0$. Але ж

$$z'(t_0)=u'(t_0)-\beta'(t_0)=F\left(t_0,u(t_0)\right)-\beta'(t_0)=f\left(t_0,\beta(t_0)\right)-\frac{u(t_0)-\beta(t_0)}{1+u(t_0)-\beta(t_0)}-\beta'(t_0)<0,$$

тому що $f\left(t_0,\beta(t_0)\right)-\beta'(t_0)\le 0$. Одержана суперечність доводить оцінку $u(t)\le\beta(t)$ $\forall\ t\ge 0$. Аналогічно доводять нерівність $\alpha(t)\le u(t)\ \forall\ t\ge 0$. Однак тоді з означення функції $F(t,x)$ випливає, що $F\left(t,u(t)\right)=f\left(t,u(t)\right)\ \forall\ t\ge 0$. А це означає, що $u(t)-$ розв'язок задачі (1), причому для нього виконується оцінка (2), яка забезпечує обмеженість розв'язку. Теорему доведено. □

Використовуючи пункт 3 теореми 2, можна отримати таке твердження.

Наслідок. *Нехай* $|g(t,x)|\le ha(t)$ $(h>0)$, *функція* $g(t,x)\in(C,Lip)$ *в кожній обмеженій області простору* $R_+\times R$, *а неперервна функція* $a(t)-$*невід'ємна й обмежена для всіх* $t\ge 0$. *Якщо, крім того,* $\int\limits_0^\infty a(t)dt\le+\infty$, *то* $\forall\ x^{(0)}\in R$ *задача Коші для скалярного диференціального рівняння*

$$x'(t)=g(t,x)-a(t)x(t),\qquad x(0)=x^{(0)}$$

має єдиний розв'язок $x(t)$, *обмежений* $\forall\ t\ge 0$, *причому* $\forall\ t\ge 0$ $\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)$, де

$$\alpha(t)=x^{(0)}e^{-\int\limits_0^t a(\tau)d\tau}-h,\quad \beta(t)=x^{(0)}e^{-\int\limits_0^t a(\tau)d\tau}+h.$$

Інші умови обмеженості розв'язків звичайних диференціальних рівнянь можна знайти, зокрема, в [2, с.16; 5, с.33, 39; 6, с.140].

3. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ СИСТЕМИ ДОВІЛЬНОЇ ПРИРОДИ ПО СКІНЧЕННІЙ МНОЖИНІ СТАНІВ

Розглянемо систему $S(t)$ довільної природи, параметри якої змінюються в часі, для якої існують m якісно різних станів, перебування в кожному з яких описує система звичайних диференціальних рівнянь

$$x_s'(t) = f_s(t, x_s), \qquad x_s(0) = x_s^{(0)}, \quad s = \overline{1,m}, \tag{3}$$

де $f_s(t, x_s)$ – векторна функція, задана на множині Ω; $x_s^{(0)} \in D \subset R^n$ – задане початкове значення $x_s(t)$. Процес випадкових блукань системи $S(t)$ по заданій множині станів будемо вважати напівмарківським процесом $z(t)$ зі скінченною множиною станів $\{1, 2, \ldots, m\}$ та неперервним часом. Позначимо через $\tau_0 = 0,\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$ моменти послідовних стрибків процесу, тобто

$$\tau = \inf\{t > 0 : z(t) \neq z(0)\}; \quad \tau_1 = \tau, \quad \tau_2 = \inf\{t > \tau_1 : z(t) \neq z(\tau_1)\}; \ldots;$$
$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : z(t) \neq z(\tau_{k-1})\}; \ldots.$$

Вкладений однорідний ланцюг Маркова $z(\tau_0), z(\tau_1), \ldots, z(\tau_k), \ldots$ вважатимемо нерозкладним [1, розділ 12] з єдиним стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$, таким що

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i p_{ij} = p_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

де $p_{ij} = P\{z(\tau_1) = j / z(\tau_0) = i\}$ – перехідні ймовірності ланцюга Маркова $(i, j = \overline{1,m})$.

Припускаючи, що існує єдиний розв'язок кожної s-ї задачі (3) $(s = \overline{1,m})$ для $t \in [0, \infty)$, можемо описати поведінку системи $S(t)$ за допомогою випадкової еволюції, побудованої на траєкторії напівмарківського процесу $z(t)$ у вигляді

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x_i(t), & 0 \le t < \tau_1,\ z(0) = i; \\ x_j(t - \tau_1), & \tau_1 \le t < \tau_2,\ z(\tau_1) = j; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_s(t - \tau_k), & \tau_k \le t < \tau_{k+1},\ z(\tau_k) = s; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} \tag{5}$$

де $x_s(t)$ $(s = \overline{1,m})$ – розв'язок s-ї задачі Коші (3). Очевидно, що випадкова еволюція $\tilde{x}(t)$ є процесом з марківським втручанням випадку τ [3].

Вивчимо поведінку при $t \to \infty$ адитивного функціонала $\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}(u)du$, який визначає середнє значення випадкової еволюції $\tilde{x}(u)$ на проміжку часу $[0, t]$.

Теорема 3. *Нехай існує єдиний розв'язок кожної s-ї задачі Коші (3)* $x_s(t)$

$(s=\overline{1,m})$, визначений і обмежений для всіх $t \ge 0$. Нехай $z(t)$ – напівмарківський процес з множиною станів $\{1,2,\ldots,m\}$ та неперервним часом, а відповідний ланцюг Маркова $z(0), z(\tau_1), z(\tau_2),\ldots$ – нерозкладний і має єдиний стаціонарний розподіл $p_1, p_2,\ldots,p_m$, для якого виконуються умови (4), причому

$$E_i\tau_1 < \infty, \qquad i=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Якщо $\tilde{x}(t)$ – випадкова еволюція вигляду (5), побудована на траєкторії процесу $z(t)$, то виконуються співвідношення

$$P_s\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}(u)du = \frac{\sum_{i=1}^m p_iE_i\int_0^{\tau_1} x_i(u)du}{\sum_{i=1}^m p_iE_i\tau_1}\right\}=1, \qquad s=\overline{1,m}, \tag{7}$$

де P_s – умовна ймовірність за умови, що $z(0)=s$, E_i – умовне математичне сподівання за умови, що $z(0)=i$.

Доведення. Однозначна розв'язність кожної з задач (3) для $t \ge 0$ забезпечує коректну визначеність еволюції $\tilde{x}(t)$. Для доведення теореми досить перевірити виконання умов загальної ергодичної теореми для процесів з марківським втручанням випадку (теорема 2 [3, с.362], далі: теорема Скорохода).

З (6) випливає, що $\sum_{i=1}^m p_iE_i\tau_1 < \infty$. Тому обмеженість розв'язків $x_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ для $t \ge 0$ дає змогу записати: $\sum_{i=1}^m p_iE_i\int_0^{\tau_1} x_i(u)du < C\sum_{i=1}^m p_iE_i\tau_1 < \infty$, $C=\max_{i=\overline{1,m}}\sup_{t\ge 0} x_i(t)$. Отже, всі умови теореми Скорохода виконуються, тому виконуються співвідношення (7). Теорему доведено. □

4. ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ 3: ЕЛЕКТРИЧНЕ КОЛО З ВИПАДКОВИМИ ЗМІНАМИ НАПРУГИ

Нехай в електричному колі зі сталими опором R і коефіцієнтом самоіндукції L у випадкові моменти часу може відбуватися миттєве перемикання джерела струму за наявності джерела струму з постійною електрорушійною силою (напругою) $U(t)=U_0$ та джерела зі змінною напругою з частотою ω $(U(t)=U_0\sin\omega t)$. В початковий момент часу та в моменти перемикань джерела струм у колі дорівнює нулю.

Множина станів такої системи складається з двох станів: 1) наявність у колі постійної напруги; 2) наявність змінної напруги. Процес зміни цих станів вважатимемо напівмарківським, а відповідні ймовірності стаціонарного розподілу ланцюга Маркова позначимо через p_1 і p_2. Якщо $x_1(t)$ і $x_2(t)$ – сила струму в колі в

момент часу t, відповідно, в станах 1 і 2, то рівняння (3) запишемо у вигляді [7, с.22]

$$x_s'(t) = f_s(t, x_s), \quad x_s(0) = 0, \quad s = 1, 2; \tag{8}$$

де $f_1(t, x_1) = \dfrac{U_0}{L} - \alpha x_1(t); \quad f_2(t, x_2) = \dfrac{U_0}{L}\sin\omega t - \alpha x_2(t); \quad \alpha = \dfrac{R}{L}.$

Розв'язки задач Коші (8)

$$x_1(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\alpha t}\right); \quad x_2(t) = \frac{\omega L U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\alpha t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \gamma); \quad tg\,\gamma = \frac{\omega L}{R},$$

визначені й обмежені для $t \geq 0$. Отже, умови теореми 3 виконуються, тому для випадкової еволюції $\tilde{x}(t)$, побудованої за схемою (5), з імовірністю 1 виконується співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}(u)du = \frac{\sum_{i=1}^{2} p_i E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du}{\sum_{i=1}^{2} p_i E_i \tau_1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2} p_i E_i \tau_1}\left(\frac{p_1 U_0}{R^2}\left(R \cdot E_1\tau_1 - L + L \cdot E_1\left(e^{-\alpha\tau_1}\right)\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sum_{i=1}^{2} p_i E_i \tau_1}\left(\frac{p_2 \omega L^2 U_0}{R(R^2 + \omega^2 L^2)}\left(1 - E_2\left(e^{-\alpha\tau_1}\right)\right) + \frac{p_2 U_0}{\omega\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left(\cos\gamma - E_2\left(\cos(\omega\tau_1 - \gamma)\right)\right)\right), \tag{9}$$

де E_i – умовне математичне сподівання за умови, що в початковий момент часу система перебуває в стані i (i=1, 2). Тому рівність (9) визначає асимптотичне середнє значення сили струму в колі незалежно від того, з якого стану починався процес $\tilde{x}(t)$. Зокрема, у випадку, коли час перебування в стані i (i=1, 2) розподілений рівномірно на проміжку $(0, T_i)$, одержимо $p_i = \dfrac{T_i}{T_1 + T_2}$, $(i = 1, 2)$;

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}(u)du = \frac{p_1 U_0}{R^2\alpha^2 T_1\left(p_1 T_1 + p_2 T_2\right)}\left(\alpha^2 T_1(RT_1 - 2L) + 2L\left(1 - (1 + \alpha T_1)e^{-\alpha T_1}\right)\right) +$$

$$+ \frac{2}{p_1 T_1 + p_2 T_2} \cdot \frac{p_2 \omega L^2 U_0}{R\alpha^2 T_2 (R^2 + \omega^2 L^2)}\left(\alpha^2 T_2 - 1 + (1 + \alpha T_2)e^{-\alpha T_2}\right) +$$

$$+ \frac{2}{p_1 T_1 + p_2 T_2} \cdot \frac{p_2 U_0}{\omega^3 T_2 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left((\omega^2 T_2 + 1)\cos\gamma - \cos(\omega T_2 - \gamma) - \omega T_2 \sin(\omega T_2 - \gamma)\right).$$

5. МЕТОД СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Якщо для кожної s-ї задачі (3) існує єдиний розв'язок

$$x_s(t) = (x_{(1)s}(t), x_{(2)s}(t), \ldots, x_{(n)s}(t)),$$

визначений для $t \geq 0$, а векторну функцію $f_s(t, x)$ можна розкласти в степеневий ряд

$$f_s(t, x) = \sum_{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n = 0}^{\infty} a^{(s)}_{\alpha\beta_1\ldots\beta_n} t^{\alpha}\left(x_{(1)} - x^{(0)}_{(1)s}\right)^{\beta_1}\left(x_{(2)} - x^{(0)}_{(2)s}\right)^{\beta_2}\ldots\left(x_{(n)} - x^{(0)}_{(n)s}\right)^{\beta_n}, \tag{10}$$

збіжний для $t \ge 0$, $\left|x_{(1)} - x_{(1)s}^{(0)}\right| < \infty, \ldots, \left|x_{(n)} - x_{(n)s}^{(0)}\right| < \infty$, то розв'язок $x_s(t)$ можна знайти у вигляді степеневого ряду

$$x_s(t) = x_s^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(s)} t^\nu, \tag{11}$$

який збігається для $t \ge 0$ [5, с.27]. Коефіцієнти $c_\nu^{(s)} = \left(c_{(1)\nu}^{(s)}, c_{(2)\nu}^{(s)}, \ldots, c_{(n)\nu}^{(s)}\right)$ обчислюють послідовно шляхом прирівнювання відповідних степенів t у рівності

$$\sum_{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_n=0}^{\infty} a_{\alpha\beta_1\ldots\beta_n}^{(s)} t^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{(1)\nu}^{(s)} t^\nu\right)^{\beta_1} \cdots \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{(n)\nu}^{(s)} t^\nu\right)^{\beta_n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu^{(s)} t^{\nu-1}. \tag{12}$$

Теорема 4. *Нехай існує єдиний розв'язок кожної s-ї задачі Коші (3)* $x_s(t)$ $(s = \overline{1,m})$, *визначений для всіх* $t \ge 0$, *векторні функції* $f_s(t,x)$ *можна розкласти в степеневі ряди (10), а для напівмарківського процесу* $z(t)$ *виконуються всі умови теореми 3. Якщо* $E_i \tau_1^\nu < \infty$ $(i = \overline{1,m},\ \nu = 1,2,\ldots)$, *і збігаються абсолютно числові ряди*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu^{(s)}}{\nu+1} E_i \tau_1^{\nu+1}, \quad i,s = \overline{1,m}, \tag{13}$$

де $c_\nu^{(s)}$ *– коефіцієнти степеневих рядів (11), які визначені з (12), то для випадкової еволюції* $\tilde{x}(t)$, *побудованої на траєкторії процесу* $z(t)$ *за схемою (5), виконуються співвідношення (7).*

Доведення. Для перевірки виконання умов теореми Скорохода досить довести, що

$$E_i \int_0^{\tau_1} x_s(t)dt < \infty, \quad i,s = \overline{1,m}.$$

Справді, розбивши проміжок $[0,\infty)$ на частини $\Delta t_j = [t_{j-1}, t_j)$, де $t_j - t_{j-1} \le \delta$, $j = 1,2,\ldots$, $t_0 = 0$, для всіх $i,s = \overline{1,m}$ можемо записати

$$E_i \int_0^{\tau_1} x_s(t)dt = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{\infty} P_i\left\{\tau_1 \in \Delta t_j\right\} \int_0^{t_j} \left(x_s^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(s)} t^\nu\right) dt =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{\infty} P_i\left\{\tau_1 \in \Delta t_j\right\} \left(x_s^{(0)} t_j + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu^{(s)}}{\nu+1} t_j^{\nu+1}\right) = x_s^{(0)} E_i \tau_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu^{(s)}}{\nu+1} E_i \tau_1^{\nu+1} < \infty.$$

Теорему доведено. □

Дослідимо збіжність рядів (13) у випадку, коли час τ_1 перебування в стані i $(i = \overline{1,m})$ має показниковий розподіл з параметром $\lambda_i > 0$. Тоді

$$E_i \tau_1^\nu = \int_0^{\infty} t^\nu \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt = \frac{\nu!}{\lambda_i^\nu} \qquad (i = \overline{1,m},\ \nu = 1,2,\ldots).$$

Увівши позначення $a_\nu^{(s)} = c_\nu^{(s)} E_i \tau_1^{\nu+1} \big/ (\nu+1)$, розглянемо

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}^{(s)}}{a_{\nu}^{(s)}}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{c_{\nu+1}^{(s)}(\nu+1)E_i\tau_1^{\nu+2}}{c_{\nu}^{(s)}(\nu+2)E_i\tau_1^{\nu+1}}\right| = \frac{1}{\lambda_i}\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{(\nu+1)c_{\nu+1}^{(s)}}{c_{\nu}^{(s)}}\right|.$$

Якщо $\lim_{\nu\to\infty}\left|a_{\nu+1}^{(s)}/a_{\nu}^{(s)}\right| < 1,$ то ряд (13) збігається абсолютно. Отже, для збіжності ряду (13) достатньо виконання нерівностей

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{(\nu+1)c_{\nu+1}^{(s)}}{c_{\nu}^{(s)}}\right| < \lambda_i, \qquad (i,s=\overline{1,m}). \tag{14}$$

Якщо, наприклад, $c_{\nu}^{(s)} = \frac{(b_s)^{\nu}}{\nu!}$, $\nu = 1,2,\ldots,$ де $b_s > 0,$ то $\frac{c_{\nu+1}^{(s)}}{c_{\nu}^{(s)}} = \frac{b_s}{\nu+1}$, і умови (14) набувають простого вигляду $\lambda_i > b_s \quad (i,s=\overline{1,m})$.

6. ВИПАДОК ЗЛІЧЕННОЇ МНОЖИНИ СТАНІВ

Як і вище, процес випадкових блукань системи $S(t)$ по множині станів будемо вважати напівмарківським процесом $z(t)$ з неперервним часом, але припустимо, що множина станів $\{1,2,3,\ldots\}$ зліченна, причому перебування системи в кожному зі станів s описує система звичайних диференціальних рівнянь

$$x_s'(t) = f_s(t,x_s), \qquad x_s(0) = x_s^{(0)}, \quad s = 1,2,3,\ldots \tag{15}$$

з заданими початковими значеннями $x_s^{(0)} \in D \subset R^n$ функцій $x_s(t)$.

Теорема 5. *Нехай існує єдиний розв'язок кожної s-ї задачі Коші (15)* $x_s(t)$ $(s=1,2,\ldots)$, *визначений для всіх* $t \ge 0$, *причому сім'я функцій* $x_s(t)$ $(s=1,2,\ldots)$ *рівномірно обмежена для всіх* $t \ge 0$. *Нехай* $z(t)$ *напівмарківський процес з неперервним часом, для якого зліченна множина станів* $\{1,2,3,\ldots\}$ *відповідного вкладеного ланцюга Маркова* $z(0), z(\tau_1), z(\tau_2),\ldots$ *складається з одного рекурентного додатного класу (істотних станів), причому*

$$\sup_{i=1,2,\ldots} E_i\tau_1 < M < \infty. \tag{16}$$

Якщо $\tilde{x}(t)$ *– випадкова еволюція вигляду (5), побудована на траєкторії процесу* $z(t)$, *то для неї виконуються співвідношення*

$$P_s\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}(u)du = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \tau_1}\right\} = 1 \qquad (s=1,2,\ldots), \tag{17}$$

де P_s *– умовна ймовірність за умови, що* $z(0)=s$, E_i *– умовне математичне сподівання за умови, що* $z(0)=i$, $p_1, p_2,\ldots$ *– єдиний стаціонарний розподіл ланцюга Маркова.*

Доведення. Для вкладеного ланцюга Маркова, зліченна множина станів якого

становить один рекурентний додатний клас, існує єдиний стаціонарний розподіл $p_1, p_2, \ldots$ (див. теорему 2 [8, с.612]). Використовуючи умову (16), одержимо

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \tau_1 < M \sum_{i=1}^{\infty} p_i = M < \infty.$$

Рівномірна обмеженість сім'ї розв'язків задач Коші (15) означає: існує таке число $K > 0$, що для всіх $t \geq 0$

$$|x_s(t)| < K, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Тому можемо записати

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du < K \sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \tau_1 < KM < \infty.$$

Отже, всі умови теореми Скорохода виконуються, тому виконуються співвідношення (17). Теорему доведено. □

7. ПРИКЛАД: ЕЛЕКТРИЧНЕ КОЛО З КОНДЕНСАТОРОМ І ВИПАДКОВИМИ ЗМІНАМИ ОПОРУ

Розглянемо електричне коло з конденсатором ємності C, коефіцієнтом самоіндукції L і опором R, який може змінюватися у випадкові моменти часу, набуваючи значень $R_s = \alpha^{s-1} R$ $(\alpha < 1)$, що відповідають станам $s = 1, 2, \ldots$ заданої системи. Припускаючи, що в колі є ще джерело струму з постійною електрорушійною силою E, для напруги $x(t)$ на обкладках конденсатора одержимо диференціальне рівняння [7, с.100]

$$LCx''(t) + RCx'(t) + x(t) = E.$$

Вважаючи, що в початковий момент часу та в моменти відразу після стрибкоподібних змін опору (перемикань станів) напруга $x(t)$ та сила струму в колі $I(t) = -Cx'(t)$ дорівнюють нулю (відбувається миттєве розряджання конденсатора), перебування системи в кожному з станів $s = 1, 2, \ldots$ опишемо розв'язками $x_s(t)$ задач Коші

$$x_s''(t) = H - 2h_s x_s'(t) - k^2 x_s(t), \qquad x_s(0) = x_s'(0) = 0, \tag{18}$$

$$H = \frac{E}{LC}, \quad k^2 = \frac{1}{LC}, \quad h_s = \frac{R_s}{2L}, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Припустимо, що $q_s^2 = k^2 - h_s^2 > 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Зазначимо, що за допомогою заміни $x_s(t) = u_s(t)$, $x_s'(t) = v_s(t)$ задача (18) зводиться до задачі Коші для системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Процес зміни станів заданої системи вважатимемо напівмарківським, а час перебування в стані s $(s = 1, 2, \ldots)$ – рівномірно розподіленим на проміжку $(0, T_s)$, де

$$T_1 = T, \quad T_s = \frac{T}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{s-2}, \quad s = 2, 3, \ldots; \quad T > 0; \quad 0 < p < q, \quad p + q = 1.$$

Такому процесу відповідає вкладений ланцюг Маркова з графом станів (біля стрілок

позначені ймовірності переходу в сусідні стани)

$$1 \underset{q}{\overset{1}{\square}} 2 \underset{q}{\overset{p}{\square}} 3 \underset{q}{\overset{p}{\square}} 4 \underset{q}{\overset{p}{\square}} \cdots$$

і єдиним стаціонарним розподілом вигляду

$$p_1 = \frac{q-p}{2q}, \quad p_s = \frac{q-p}{2q^2}\left(\frac{p}{q}\right)^{s-2}, \quad s = 2,3,\ldots; \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

З теореми 2 [8, с.612] випливає, що для заданого ланцюга Маркова множина станів становить один рекурентний додатний клас.

Оскільки

$$h_s \le \frac{R}{2L} \ (s = 1,2,\ldots), \quad h_s \underset{s\to\infty}{\to} 0, \quad \frac{\sqrt{4k^2L^2 - R^2}}{2L} \le q_s < k, \quad q_s \underset{s\to\infty}{\to} k,$$

то сім'я розв'язків задач Коші (18)

$$x_s(t) = \frac{H}{k^2}\left(1 - e^{-h_s t}\left(\cos(q_s t) + \frac{h_s}{q_s}\sin(q_s t)\right)\right), \quad s = 1,2,\ldots$$

рівномірно обмежена: $x_s(t) < \dfrac{H}{k^2}\left(2 + \dfrac{R}{\sqrt{4k^2L^2 - R^2}}\right)$.

Маємо:

$$E_i\tau_1 = \frac{T_i}{2} \quad (i = 1,2,\ldots); \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \tau_1 = \frac{q-p}{2q}\cdot\frac{T}{2}\left(1 + \frac{1}{q^2}\left(1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right)^4 + \cdots\right)\right) =$$

$$= \frac{(q-p)T}{4q}\left(1 + \frac{1}{q^2 - p^2}\right) = \frac{(q^2 - p^2)T}{4q} = \frac{T}{2};$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du < \frac{H}{k^2}\left(2 + \frac{R}{\sqrt{4k^2L^2 - R^2}}\right)\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \tau_1 = \frac{H}{k^2}\left(2 + \frac{R}{\sqrt{4k^2L^2 - R^2}}\right)\frac{T}{2} < \infty.$$

Отже, умови теореми 5 виконуються, тому для випадкової еволюції $\tilde{x}(t)$ вигляду (5), побудованої за розв'язками $x_s(t)$ задач Коші (18), з імовірністю 1 виконуються співвідношення

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{x}(u)du = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \tau_1} = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{\infty} p_i E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du, \tag{19}$$

де

$$E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du = \frac{H}{k^2}\left(\frac{T_i}{2} - \frac{2h_i}{k^2} + \frac{3h_i^2 - q_i^2}{k^4 T_i}\right) -$$

$$-\frac{H}{k^6 q_i T_i} e^{-h_i T_i}\left(h_i(h_i^2 - 3q_i^2)\sin(q_i T_i) + q_i(3h_i^2 - q_i^2)\cos(q_i T_i)\right), \quad i = 1,2,\ldots.$$

Рівність (19) визначає асимптотичне середнє значення напруги на обкладках конденсатора незалежно від того, з якого стану починався процес $\tilde{x}(t)$.

8. ВИСНОВКИ

Багато складних процесів можна змоделювати за допомогою випадкових еволюцій, побудованих на основі розв'язків звичайних диференціальних рівнянь. З'ясовано умови, що дають змогу визначити асимптотику при $t \to \infty$ часових середніх таких еволюцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
2. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т.2. М.: Наука, 1973.
4. *Еругин Н.П., Штокало И.З.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев: Вища школа, 1974.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.
6. *Павлюк І.А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. К. Видав-во Київськ. ун-ту, 1970.
7. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т.2. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
8. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
9. *Шуренков В.М.* Эргодические процессы Маркова. М.: Наука, 1989.

ASYMPTOTIC BEHAVOIR OF THE STOCHASTIC EVOLUTIONS CONSTRUCTED ON THE BASIS OF THE SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ya. Yeleyko, Yu. Zhernovyi
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: mstat@franko.lviv.ua

Asymptotic behavoir of the stochastic evolutions constructed on the basis of the solutions of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations of the first order on the semi-Markov prosses trajectory with the finite and denumerable sets of the states is investigated.

Key words: stochastic evolution; asymptotic behavoir; semi-Markov prosses; system of ordinary differential equations; Cauchy problem

Стаття надійшла до редколегії .05.2003
Прийнята до друку