Вісник Львівського університету.
Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2004. – Вип.9. – С.63-73.

УДК 519.21:517.9

ГРАНИЧНІ РОЗПОДІЛИ ЧАСОВИХ СЕРЕДНІХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ, ПОБУДОВАНИХ НА РОЗВ'ЯЗКАХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Я. Єлейко, Ю. Жерновий, Н. Бугрій

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: mstat@franko.lviv.ua

Визначено умови існування граничних розподілів часових середніх випадкових еволюцій, побудованих на розв'язках задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на траєкторії напівмарковського процесу зі скінченною множиною станів і нескінченним середнім часом перебування у фіксованому стані.

Ключові слова: випадкова еволюція; граничний розподіл; напівмарковський процес; система звичайних диференціальних рівнянь; задача Коші.

1. ВСТУП

Часто на явища, описувані звичайними диференціальними рівняннями, впливає велика кількість зовнішніх випадкових факторів, які певним чином змінюють сам вигляд рівняння. З огляду на це актуальною є побудова випадкових еволюцій на розв'язках звичайних диференціальних рівнянь. Для дослідження реальних процесів важливо знайти асимптотику при $t \to \infty$ часових середніх значень головних параметрів процесу або принаймні визначити умови існування для них граничного розподілу.

За допомогою ергодичної теореми Скорохода [1, с.362] для процесів з марковським втручанням випадку у статтях [2, 3] вивчено асимптотичну поведінку часових середніх випадкових еволюцій, побудованих на розв'язках задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на траєкторії напівмарковського процесу зі скінченним середнім часом перебування у фіксованому стані. Нижче розглянуто випадок, коли середній час перебування у фіксованому стані нескінченний, а множина станів напівмарковського процесу скінченна.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ. ЗАГАЛЬНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ГРАНИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ

Розглянемо систему $S(t)$ довільної природи, параметри якої змінюються в часі, для якої існують m якісно різних станів, перебування в кожному з яких описує система звичайних диференціальних рівнянь

$$x_s'(t) = f_s(t, x_s), \qquad x_s(0) = x_{0s}, \qquad s = \overline{1, m}, \tag{1}$$

де $x_s(t) = \left(x_{1s}(t), \ldots, x_{ns}(t),\right)$ $f_s(t, x_s)$ – векторна функція, задана на множині

© Єлейко Я., Жерновий Ю., Бугрій Н., 2004

$\Omega = \{(t,x) : t \in [0,\infty),\ x \in D \subset R_+^n\}$; $x_{0s} \in D -$ задане початкове значення $x_s(t)$. Процес випадкових блукань системи $S(t)$ по заданій множині станів будемо вважати напівмарковським процесом $z(t)$ зі скінченною множиною станів $\{1,2,\ldots,m\}$ та неперервним часом. Позначимо через $\tau_0 = 0,\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$ моменти послідовних стрибків процесу, тобто

$$\tau = \inf\{t > 0 : z(t) \neq z(0)\}; \quad \tau_1 = \tau, \quad \tau_2 = \inf\{t > \tau_1 : z(t) \neq z(\tau_1)\}; \ldots;$$
$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : z(t) \neq z(\tau_{k-1})\}; \ldots.$$

Вкладений однорідний ланцюг Маркова $z(\tau_0), z(\tau_1), \ldots, z(\tau_k), \ldots$ вважатимемо нерозкладним з єдиним стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$, таким що

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i p_{ij} = p_j, \quad j = \overline{1,m},$$

де $p_{ij} = P\{z(\tau_1) = j / z(\tau_0) = i\} -$ перехідні ймовірності ланцюга Маркова $(i, j = \overline{1,m})$.

Позначимо

$$F_{is}(t) = P_i\{z(\tau_1) = s,\ \tau_1 < t\}, \quad F_i(t) = \sum_{s=1}^{m} F_{is}(t) = P_i\{\tau_1 < t\}, \quad \varphi_i(y) = \int_0^\infty e^{-yt} dF_i(t),$$

де $P_i -$ умовна ймовірність за умови, що $z(0) = i$.

Уважатимемо, що середній час перебування у фіксованому стані нескінченний, тобто [4]

$$\lim_{y \to 0} \frac{1 - \varphi_i(y)}{y^\alpha L(y)} = a_i, \qquad i = \overline{1,m}; \tag{2}$$

де

$$\sum_{i=1}^{m} a_i p_i > 0, \tag{3}$$

$\alpha \in [0,1)$, $L(y) -$ повільно змінна в нулі функція, тобто $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{L(yx)}{L(y)} = 1$ для довільного фіксованого значення x.

За умови існування єдиного розв'язку $x_s(t)$ кожної s-ї задачі (1) $(s = \overline{1,m})$ для $t \in [0,\infty)$ можемо описати поведінку системи $S(t)$ за допомогою випадкової еволюції, побудованої на траєкторії напівмарковського процесу $z(t)$ у вигляді

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x_i(t), & 0 \le t < \tau_1,\ z(0) = i; \\ x_j(t - \tau_1), & \tau_1 \le t < \tau_2,\ z(\tau_1) = j; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_s(t - \tau_k), & \tau_k \le t < \tau_{k+1},\ z(\tau_k) = s, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} \tag{4}$$

де $x_s(t)$ $(s = \overline{1,m}) -$ розв'язок s-ї задачі Коші (1). Очевидно, що випадкова еволюція

$\tilde{x}(t)$ є процесом з марковським втручанням випадку τ [1].

Позначимо k-у компоненту векторної функції (4) через $\tilde{x}_k(t)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, тоді $\tilde{x}(t)=\left(\tilde{x}_1(t),\ldots,\tilde{x}_n(t)\right)$. Нехай $f(x)$ – додатна вимірна функція, задана на $[0,\infty)$. З'ясуємо умови існування невироджених граничних розподілів при $t\to\infty$ для адитивних функціоналів $\frac{1}{t}\int_0^t f\left(\tilde{x}_k(u)\right)du$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Теорема 1. *Нехай існує єдиний розв'язок кожної s-ї задачі Коші (1)* $x_s(t)$ $(s=\overline{1,m})$, *визначений для всіх* $t\ge 0$, *для компонент якого виконуються умови:*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\left(\tilde{x}_{ks}(u)\right)du=b_{ks},\qquad k=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Нехай $z(t)$ – *напівмарковський процес з множиною станів* $\{1,2,\ldots,m\}$ *та неперервним часом, а відповідний ланцюг Маркова* $z(0)$, $z(\tau_1)$, $z(\tau_2),\ldots$ *нерозкладний з єдиним стаціонарним розподілом* $p_1,p_2,\ldots,p_m$, *і виконуються умови (2),(3). Якщо* $\tilde{x}(t)$ – *випадкова еволюція вигляду (4), побудована на траєкторії процесу* $z(t)$, *то для всіх* $i=\overline{1,m}$

$$\lim_{t\to\infty}P_i\left\{\frac{1}{t}\int_0^t f\left(\tilde{x}_k(u)\right)du<x\right\}=G_k(x),\qquad k=\overline{1,n}, \tag{6}$$

де

$$\int\frac{1}{\lambda+x}dG_k(x)=\frac{\sum_{i=1}^m a_i p_i(b_{ki}+\lambda)^{\alpha-1}}{\sum_{i=1}^m a_i p_i(b_{ki}+\lambda)^{\alpha}},\qquad k=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Доведення. Однозначна розв'язність кожної з задач (1) для $t\ge 0$ забезпечує коректну визначеність еволюції $\tilde{x}(t)$. У праці [4] для напівмарковського процесу $z(t)$ розглянуто процес з марковським втручанням випадку $g\left(z(t),t\right)$, де $g(x,y)$ – вимірна функція двох аргументів, яка набуває значень в $[0,\infty)$. Згідно з теоремою, доведеною в [4], виконання для $z(t)$ умов (2), (3) та умов

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\left(g(s,u)\right)du=b_s,\qquad s=\overline{1,m} \tag{8}$$

забезпечує виконання для всіх $i=\overline{1,m}$ граничних співвідношень

$$\lim_{t\to\infty}P_i\left\{\frac{1}{t}\int_0^t f\left(g(z(u),u)\right)du<x\right\}=G(x), \tag{9}$$

де

$$\int \frac{1}{\lambda + x} dG(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i p_i (b_i + \lambda)^{\alpha - 1}}{\sum_{i=1}^{m} a_i p_i (b_i + \lambda)^{\alpha}}.$$

Оскільки кожна компонента $\tilde{x}_k(t)$ випадкової еволюції $\tilde{x}(t)$ – це процес з марковським втручанням випадку, то прийнявши для кожного $k = \overline{1,n}$ в (9)

$$g\left(z(t), t\right) = x_{z(t)}(t) = \tilde{x}_k(t)$$

і в (8) $g(s,t) = x_{ks}(t)$, бачимо, що ці співвідношення збігаються, відповідно, з (6) і (5). Отже, правильність теореми 1 випливає безпосередньо з теореми статті [4], застосованої до кожної компоненти випадкової еволюції $\tilde{x}(t)$. Теорему доведено. □

Зазначимо, що твердження теореми 1 справджується, якщо умову обмеженості функції $f(x)$ замінити умовою обмеженості розв'язку кожної s-ї задачі Коші (1) $x_s(t)$ $(s = \overline{1,m})$ для всіх $t \geq 0$. Тоді у випадку $f(x) = x$ одержимо теорему.

Теорема 2. *Нехай існує єдиний розв'язок кожної s-ї задачі Коші (1)* $x_s(t)$ $(s = \overline{1,m})$, *визначений і обмежений для всіх* $t \geq 0$, *для компонент якого виконані умови*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_{ks}(u) du = b_{ks}, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Нехай $z(t)$ – *напівмарковський процес з множиною станів* $\{1, 2, \ldots, m\}$ *та неперервним часом, а відповідний ланцюг Маркова* $z(0)$, $z(\tau_1)$, $z(\tau_2), \ldots$ *нерозкладний з єдиним стаціонарним розподілом* $p_1, p_2, \ldots, p_m$, *і виконуються умови (2),(3). Якщо* $\tilde{x}(t)$ – *випадкова еволюція вигляду (4), побудована на траєкторії процесу* $z(t)$, *то для всіх* $i = \overline{1,m}$

$$\lim_{t \to \infty} P_i \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{x}_k(u) du < x \right\} = G_k(x), \qquad k = \overline{1,n},$$

де для $G_k(x)$ *справджуються рівності (7).*

Нижче розглянемо деякі випадки реалізації умов теореми 2 стосовно розв'язків звичайних диференціальних рівнянь.

3. УМОВИ ОБМЕЖЕНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Стосовно розв'язків задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку у формулюванні теореми 2 поставлена вимога їхнього існування, єдиності, обмеженості на проміжку $[0, \infty)$ і виконання граничних

співвідношень (10) для часових середніх. Умови єдиності розв'язку відомі [3]. Визначимо лише умови існування обмеженого розв'язку і випадки існування границі для часових середніх.

Спочатку з'ясуємо необхідні і достатні умови існування розв'язку на проміжку $[0,\infty)$. Розглянемо задачу Коші для системи

$$x_i'(t) = f_i\left(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right), \quad t \ge 0; \quad x_i(0) = x_{0i} \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{11}$$

де функції $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ вважатимемо неперервними для $(t, x_1, \ldots, x_n) \in R_+ \times R^n$; а $x_{0i} \in R \ \left(i = \overline{1,n}\right)-$ задані початкові значення $x_i(t)$.

Теорема 3. *Нехай вектор-функція* $f(t,x)$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінною* x *в області* $R_+ \times R^n$ *і*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in C(R_+ \times R^n), \quad x_{0i} \in (a_{0i}, b_{0i}) \subseteq R \ \left(i = \overline{1,n}\right).$$

Розв'язок $x_i(t) \ \left(i = \overline{1,n}\right)$ *задачі (11), визначений* $\forall\ t \ge 0$, *існує тоді і лише тоді, коли* $\forall\ x_{0i} \in (a_{0i}, b_{0i})$ *знайдуться функції* $\alpha_i(t),\ \beta_i(t) \in C^1[0,\infty) \ \left(i = \overline{1,n}\right)$ *такі, що*

$$\begin{aligned}
&\alpha_i(t) \le \beta_i(t), \quad \alpha_i'(t) \le f_i\left(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n\right),\\
&\beta_i'(t) \ge f_i\left(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \beta_i(t), x_{i+1}, \ldots, x_n\right),\\
&\forall\ (t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Omega_i = \{(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n):\\
&t \ge 0,\ \alpha_j(t) \le x_j \le \beta_j(t),\ j = \overline{1,n},\ j \ne i\} \ \left(i = \overline{1,n}\right);\\
&\alpha_i(0) \le x_{0i} \le \beta_i(0) \quad \left(i = \overline{1,n}\right).
\end{aligned}$$

Для розв'язку $x_i(t) \ \left(i = \overline{1,n}\right)$ *справджуються оцінки*

$$\alpha_i(t) \le x_i(t) \le \beta_i(t) \quad \forall\ t \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{12}$$

Доведення. Необхідність очевидна. Справді, нехай $x_i(t) \ \left(i = \overline{1,n}\right)-$ розв'язок задачі (11), визначений $\forall\ t \ge 0$. Тоді для функцій $\alpha_i(t) = \beta_i(t) = x_i(t) \ \left(i = \overline{1,n}\right)$, визначених $\forall\ t \ge 0$, виконуються всі умови теореми.

Доведемо достатність. Для $(t, x_1, \ldots, x_n) \in R_+ \times R^n$ визначимо функції

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_n) = f_i\left(t, \delta\left(\alpha_1(t), x_1, \beta_1(t)\right), \ldots, \delta\left(\alpha_n(t), x_n, \beta_n(t)\right)\right) \quad \left(i = \overline{1,n}\right),$$

де

$$\delta(x,y,z)=\begin{cases} x, & y<x; \\ y, & x\le y\le z; \\ z, & z<y. \end{cases}$$

Бачимо, що $F_i(t,x_1,\ldots,x_n)\in C(R_+\times R^n)$ і

$$|F_i(t,x_1,\ldots,x_n)|\le\lambda_i(t)\quad\forall\ t\ge 0,\ \ \forall\ x_1,\ldots,x_n\in R\quad\left(i=\overline{1,n}\right),$$

де

$$\lambda_i(t)=\max_{x_k\in[\alpha_k(t),\beta_k(t)],\ k=\overline{1,n}}|f_i(t,x_1,\ldots,x_n)|\qquad\left(i=\overline{1,n}\right).$$

Отже, виконується умова

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}F_i^2(t,x_1,\ldots,x_n)}\le\lambda(t)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(t)}\quad\forall\ t\ge 0,\ \ \forall\ x_1,\ldots,x_n\in R,$$

причому $\lambda(t)\in C(R_+)$, а це означає [5, с.25], що $\forall\ x_{0i}\in(a_{0i},b_{0i})$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ задача Коші

$$x_i'(t)=F_i\left(t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\right),\quad t\ge 0;\quad x_i(0)=x_{0i}\quad\left(i=\overline{1,n}\right)$$

має розв'язок $x_i=u_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, визначений $\forall\ t\ge 0$. Доведемо, що

$$\alpha_i(t)\le u_i(t)\le\beta_i(t)\quad\forall\ t\ge 0\quad\left(i=\overline{1,n}\right).$$

Справді, припустимо, що для деякого i $(1\le i\le n)$ умова $u_i(t)\le\beta_i(t)$ $\forall\ t\ge 0$ не виконується. Тоді, оскільки $u_i(0)=x_{0i}\le\beta_i(0)$, то знайдеться точка $t_0>0$, в якій для різниці $z_i(t)=u_i(t)-\beta_i(t)$ виконуються умови $z_i(t_0)>0$, $z_i'(t_0)>0$. Проте

$$\begin{aligned} z_i'(t_0)&=u_i'(t_0)-\beta_i'(t_0)=F_i\left(t_0,u_1(t_0),\ldots,u_n(t_0)\right)-\beta_i'(t_0)= \\ &=f_i\Big(t_0,\delta\left(\alpha_1(t_0),u_1(t_0),\beta_1(t_0)\right),\ldots,\delta\left(\alpha_{i-1}(t_0),u_{i-1}(t_0),\beta_{i-1}(t_0)\right),\beta_i(t_0), \\ &\delta\left(\alpha_{i+1}(t_0),u_{i+1}(t_0),\beta_{i+1}(t_0)\right),\ldots,\delta\left(\alpha_n(t_0),u_n(t_0),\beta_n(t_0)\right)\Big)-\beta_i'(t_0)\le 0. \end{aligned}$$

Одержана суперечність доводить оцінку $u_i(t)\le\beta_i(t)$ $\forall\ t\ge 0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Аналогічно доводять нерівність $\alpha_i(t)\le u_i(t)$ $\forall\ t\ge 0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Проте тоді з означення функцій $F_i(t,x_1,\ldots,x_n)$ випливає, що

$$F_i\left(t,u_1(t),\ldots,u_n(t)\right)=f_i\left(t,u_1(t),\ldots,u_n(t)\right)\quad\forall\ t\ge 0;\quad\left(i=\overline{1,n}\right).$$

А це означає, що $u_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – розв'язок задачі (11), визначений $\forall\ t \ge 0,$ причому для нього справджуються оцінки (12) Теорему доведено. □

Зауваження 1. *З оцінок (12) випливає, що для забезпечення обмеженості розв'язку задачі (11), умови існування якого на проміжку* $[0,\infty)$ *визначені теоремою 3, достатньо додатково домагатися обмеженості функцій* $\alpha_i(t)$ *і* $\beta_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. *Якщо функції* $\alpha_i(t),\ \beta_i(t)$ *(або хоча б деякі з них) обмежені, то умову теореми 3* $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)\in C(R_+\times R^n)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ *можна послабити, домагаючись лише, щоб* $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)\in C(R_+\times G)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, *де*

$$G=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n:\ \sup_{t\ge 0}\alpha_i(t)\le x_i\le \inf_{t\ge 0}\beta_i(t),\quad i=\overline{1,n}\ \}.$$

Умови обмеженості розв'язків задачі Коші (11) на проміжку $[0,\infty)$ визначає теорема.

Теорема 4. *Нехай вектор-функція* $f(t,x)$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінною* x *в області* $R_+\times R^n$ *і*

$$f_i(t,x_1,\ldots,x_n)\in C(R_+\times R^n)\ \left(i=\overline{1,n}\right);\quad \omega=\{1,2,\ldots,n\},\quad \omega=\omega_1\cup\omega_2\cup\omega_3,$$

де $\omega_i\subseteq\omega$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$. *Нехай* $\forall\ i\in\omega_1$ *знайдуться числа* $\delta_i\ge 0$ *такі що*

$$x_i f_i(t,x_1,\ldots,x_n)\le 0\quad \forall\ t\ge 0,\quad |\,x_i\,|\ge\delta_i,\quad x_j\in R\quad (j\ne i). \tag{13}$$

Нехай $\forall\ i\in\omega_2$ *функції* $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)$ *не зростають за змінною* x_i *на проміжку* (c_i,d_i) *для всіх* $t\ge 0,\ x_j\in R\ (j\ne i)$ *(*c_i *і* d_i *можуть бути скінченними або нескінченними),* x_{1i} *– найменше, а* x_{2i} *– найбільше число з проміжка* $[c_i,d_i]$ *(може бути й, що* $x_{1i}=x_{2i}$*; кінці проміжка включаються, якщо вони скінченні), такі, що*

$$\begin{gathered} f_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{1i},x_{i+1},\ldots,x_n)=f_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{2i},x_{i+1},\ldots,x_n)=0\\ \forall\ t\ge 0,\quad x_j\in R\ \ (j\ne i). \end{gathered} \tag{14}$$

Нехай $\forall\ i\in\omega_3$

$$\begin{gathered} f_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},b_{3i},x_{i+1},\ldots,x_n)\le 0\le f_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},a_{3i},x_{i+1},\ldots,x_n)\\ \forall\ t\ge 0,\quad x_j\in R\ \ (j\ne i), \end{gathered} \tag{15}$$

де $a_{3i}\le b_{3i}$. *Тоді* $\forall\ x_{0i}\in R\ (i\in\omega_1),\ x_{0i}\in[c_i,d_i]\ (i\in\omega_2),\ x_{0i}\in[a_{3i},b_{3i}]\ (i\in\omega_3)$ *існує єдиний розв'язок задачі (11), обмежений* $\forall\ t\ge 0$, *причому*

$$a_{1i} = \min\{-\delta_i; x_{0i}\} \le x_i(t) \le \max\{\delta_i; x_{0i}\} = b_{1i}, \quad i \in \omega_1;$$
$$a_{2i} = \min\{x_{0i}; x_{1i}\} \le x_i(t) \le \max\{x_{0i}; x_{2i}\} = b_{2i}, \quad i \in \omega_2;$$
$$a_{3i} \le x_i(t) \le b_{3i}, \quad i \in \omega_3.$$

Доведення. Умови теореми 3 виконуються, якщо взяти:

$$\alpha_i(t) = a_{ki}, \qquad \beta_i(t) = b_{ki}, \qquad i \in \omega_k, \qquad k = \overline{1,3}. \quad \square$$

Зауваження 2. *Деякі умови теореми 4 можна послабити. Наприклад, умову*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in C(R_+ \times R^n) \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

можна замінити такою:

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in C(R_+ \times \tilde{\Omega}) \quad i \in \omega_k, \quad k = \overline{1,3},$$

де $\tilde{\Omega} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \ x_i \in [a_{ki}, b_{ki}], \ i \in \omega_k, \ k = \overline{1,3}, \}$. *Виконання умов (13) - (15) і незростання функцій* $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ *за змінною* x_i *достатньо домагатися не для* $x_j \in R \ (j \ne i)$, *а для* $x_j \in [a_{kj}, b_{kj}], \ j \in \omega_k, \ k = \overline{1,3} \ (j \ne i)$.

Приклад 1. За допомогою теореми 4 можна отримати апріорні оцінки розв'язків задачі Коші

$$x_1'(t) = -x_1(t)x_2(t), \quad x_2'(t) = x_1(t)x_2(t), \quad t \ge 0; \quad x_i(0) = x_{0i} \quad i = 1, 2,$$

якщо $x_{01} \le 0, \ x_{02} \ge 0$. Справді, праві частини цієї системи $f_1(t, x_1, x_2) = -x_1 x_2$, $f_2(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$ не зростають, відповідно, за змінною x_1 при $x_2 \ge 0$ і за змінною x_2 при $x_1 \le 0$ і перетворюються на нуль, відповідно, при $x_1 = x_{11} = x_{21} = 0$ і $x_2 = x_{12} = x_{22} = 0$. Тому (в позначеннях теореми 4)

$$a_{21} = \min\{x_{01}; 0\} = x_{01}, \qquad b_{2i} = \max\{x_{01}; 0\} = 0;$$
$$a_{22} = \min\{x_{02}; 0\} = 0, \qquad b_{22} = \max\{x_{02}; 0\} = x_{02}.$$

Отже, $x_{01} \le x_1(t) \le 0; \ \ 0 \le x_2(t) \le x_{02} \ \ \forall \ t \ge 0$. Отримані оцінки справді виконуються, оскільки $\forall \ t \ge 0$

$$x_1(t) = \frac{x_{01}(x_{01} + x_{02})e^{-(x_{01} + x_{02})t}}{x_{02} + x_{01}e^{-(x_{01} + x_{02})t}}, \qquad x_2(t) = x_{01} + x_{02} - x_1(t) \quad \left(x_{01} + x_{02} \ne 0\right);$$

$$x_1(t) = \frac{x_{01}}{1 - x_{01}t}, \qquad x_2(t) = -x_1(t) \quad \left(x_{01} + x_{02} = 0\right);$$

$$x_1(t) = x_2(t) = 0 \quad \left(x_{01} = x_{02} = 0\right).$$

Посилання на інші умови обмеженості розв'язків звичайних диференціальних рівнянь можна знайти в [3].

4. ДЕЯКІ ВИПАДКИ ІСНУВАННЯ ГРАНИЦІ ДЛЯ ЧАСОВИХ СЕРЕДНІХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$x'(t) = g(x), \quad t \geq 0; \qquad x(0) = x_0. \tag{16}$$

Теорема 5. *Нехай* $g(x) \in C[c,d]$, *функція* $g(x)$ *не зростає на проміжку* $[c,d]$ *і перетворюється на нуль лише в одній точці* $x_1 \in [c,d]$. *Тоді* $\forall\ x_0 \in [c,d]$ *існує розв'язок* $x(t)$ *задачі (16), обмежений* $\forall\ t \geq 0$, *причому*

$$a = \min\{x_0; x_1\} \leq x(t) \leq \max\{x_0; x_1\} = b, \quad t \geq 0; \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_1. \tag{18}$$

Якщо, крім того,

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} \frac{xdx}{g(x)} \right| = \infty, \tag{19}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(u)du = \lim_{t\to\infty} x(t) = x_1.$$

Доведення. Якщо $x_0 = x_1$, то задача (16) має тривіальний розв'язок $x(t) \equiv x_1$. Нехай $x_0 \neq x_1$. Тоді твердження про існування обмеженого розв'язку задачі (16) і оцінки (17) одержимо з теореми 4 при $\omega = \omega_2 = \{1\}$. З оцінок (17) і того, що $x_1 -$ єдиний розв'язок рівняння $g(x) = 0$ на проміжку $[c,d]$, випливає, що $\forall\ t \geq 0$ функція $g\big(x(t)\big)$ не змінює знака, тобто функція $x(t)$ монотонна $\forall\ t \geq 0$. Застосуємо теорему про границю монотонної функції [6, с.111-112] та врахуємо обмеженість $x(t)$, тоді одержимо (18), оскільки $x_1 = \sup\limits_{t\geq 0} x(t)$, якщо $x(t)$ зростає, і $x_1 = \inf\limits_{t\geq 0} x(t)$, якщо $x(t)$ спадає. Проінтегруємо від 0 до t обидві частини рівняння (16), записаного у вигляді $\dfrac{xdx}{g(x)} = xdt$. Одержимо $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \frac{xdx}{g(x)} = \int_0^t x(u)du$ або $\displaystyle\frac{1}{t}\int_{x_0}^{x(t)} \frac{xdx}{g(x)} = \frac{1}{t}\int_0^t x(u)du$. Звідси з урахуванням співвідношень (18) і (19)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(u)du=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{xdx}{g(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{xdx}{g(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{x'(t)x(t)}{g\left(x(t)\right)}=\lim_{t\to\infty}x(t)=x_1.$$

Теорему доведено. □

Приклад 2. Для задачі Коші $x'(t)=-x^2(t),\ \ t\ge 0;\ \ x(0)=x_0$, при $x_0\ge 0$ виконуються умови теореми 5 (тут $c=0,\ d>0,\ x_1=0$). Отже, оцінки (17) повинні виконуватися для $a=0,\ b=x_0$, крім того має бути: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(u)du=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0.$

Легко перевірити, що це справді так, оскільки $x(t)=\dfrac{x_0}{1+x_0t},\ \ t\ge 0.$

Розглянемо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$x_i'(t)=f_i(x_i,x_{i+1})\ \left(i=\overline{1,n-1}\right),\ \ x_n'(t)=f_n(x_n,x_1),\ \ t\ge 0;\ \ x_i(0)=x_{0i}\ \left(i=\overline{1,n}\right),\qquad(20)$$

де

$$f_i(x_i,x_{i+1})=g_i(x_i)l_{i+1}(x_{i+1}),\ \ \left(i=\overline{1,n-1}\right);\qquad f_n(x_n,x_1)=g_n(x_n)l_1(x_1),$$

$l_i(x_i)=\alpha_i x_i+\beta_i\ \ \left(i=\overline{1,n}\right)$. Нехай $g_i(x_{1i})=0\ \ \left(i=\overline{1,n}\right)$. Уведемо позначення

$$a_i=\min\{x_{0i};x_{1i}\},\quad b_i=\max\{x_{0i};x_{1i}\},\quad \gamma_i=-\frac{\beta_i}{\alpha_i}\ \ \left(i=\overline{1,n}\right).$$

Теорема 6. *Нехай* $g_i(x_i)\in C[a_i,b_i]\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, *кожна з функцій* $f_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ *для* $x_i\in[a_i,b_i]\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ *не зростає за змінною* x_i, *кожна з функцій* $g_i(x_i)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ *для* $x_i\in[a_i,b_i]\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ *перетворюється на нуль лише в одній точці* x_{1i}, *і* $\gamma_i\notin[a_i,b_i]\ \left(i=\overline{1,n}\right)$. *Тоді* $\forall\ x_{0i}\in[a_i,b_i]\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ *існує розв'язок задачі (20), обмежений* $\forall\ t\ge 0$, *причому*

$$a_i\le x_i(t)\le b_i\quad\left(i=\overline{1,n}\right),\quad t\ge 0;\qquad(21)$$

$$\lim_{t\to\infty}x_i(t)=x_{1i}\quad\left(i=\overline{1,n}\right).\qquad(22)$$

Якщо, крім того,

$$\left|\int_{x_{0i}}^{x_{1i}}\frac{dx_i}{g_i(x_i)}\right|=\infty\qquad\left(i=\overline{1,n}\right),\qquad(23)$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_i(u)du=\lim_{t\to\infty}x_i(t)=x_{1i}\quad\left(i=\overline{1,n}\right).$$

Доведення. Немає сенсу розглядати тривіальний випадок $x_{0i}=x_{1i}\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, тому припустимо, що $x_{0i}\neq x_{1i}\ \left(i=\overline{1,n}\right)$. Тоді існування обмеженого розв'язку задачі (20) і оцінки (21) одержуємо з теореми 4 при $\omega=\omega_2$. З оцінок (21) і умов теореми 6 випливає, що $\forall\ t\geq 0$ кожна з функцій $f_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ не змінює знака, тобто функції $x_i(t)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ монотонні $\forall\ t\geq 0$. Тому існування границь (22) доводимо так само, як границі (18) у доведенні теореми 5. Далі проінтегруємо від 0 до t обидві частини кожного з рівнянь (20), записаного у вигляді

$$\frac{dx_i}{g_i(x_i)}=(\alpha_{i+1}x_{i+1}+\beta_{i+1})dt\quad\left(i=\overline{1,n-1}\right);\qquad \frac{dx_n}{g_n(x_n)}=(\alpha_1x_1+\beta_1)dt.$$

Одержимо

$$\frac{1}{t}\int_{x_{0i}}^{x_i(t)}\frac{dx_i}{g_i(x_i)}=\frac{1}{t}\int_0^t\left(\alpha_{i+1}x_{i+1}(u)+\beta_{i+1}\right)du\ \left(i=\overline{1,n-1}\right);\quad \frac{1}{t}\int_{x_{0n}}^{x_n(t)}\frac{dx_n}{g_n(x_n)}=\frac{1}{t}\int_0^t\left(\alpha_1x_1(u)+\beta_1\right)du.$$

Звідси з урахуванням співвідношення (22) і (23)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_{i+1}(u)du=\frac{1}{\alpha_{i+1}}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{x_{0i}}^{x_i(t)}\frac{dx_i}{g_i(x_i)}-\beta_{i+1}\right)=\frac{1}{\alpha_{i+1}}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}\int_{x_{0i}}^{x_i(t)}\frac{dx_i}{g_i(x_i)}-\beta_{i+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha_{i+1}}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{x_i'(t)}{g_i\left(x_i(t)\right)}-\beta_{i+1}\right)=\frac{1}{\alpha_{i+1}}\left(\lim_{t\to\infty}\alpha_{i+1}x_{i+1}(t)+\beta_{i+1}-\beta_{i+1}\right)=x_{1i+1}\quad\left(i=\overline{1,n-1}\right).$$

Аналогічно, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_1(u)du=x_{11}$. Теорему доведено. □

Приклад 3. Для задачі Коші

$$x_1'(t)=x_1(\beta-x_2),\quad x_2'(t)=x_2(\beta+x_1),\quad t\geq 0;\quad x_1(0)=x_0,\ x_2(0)=-x_0$$

при $\beta<0,\ |x_0|<-\beta$ виконуються умови теореми 6. У цьому випадку $x_{11}=x_{12}=0$, тому оцінки (21) повинні виконуватися для

$$a_1=\min\{x_0;0\},\quad b_1=\max\{x_0;0\},\quad a_2=\min\{-x_0;0\},\quad b_2=\max\{-x_0;0\},$$

причому $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_i(u)du=\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0,\quad i=1,\ 2.$ Легко перевірити, що це справді так,

оскільки $x_1(t) = \dfrac{x_0 \beta e^{\beta t}}{x_0 + \beta - x_0 e^{\beta t}}, \quad x_2(t) = -x_1(t), \quad t \geq 0.$

5. ВИСНОВКИ

Отже, випадкові еволюції, побудовані на траєкторії напівмарковського процесу з нескінченним середнім часом перебування у фіксованому стані, відповідають реальним процесам з нечастими перемиканнями станів. Ми з'ясували, що умовами існування граничних невироджених розподілів часових середніх таких еволюцій, побудованих на розв'язках задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, є обмеженість розв'язків на проміжку $[0,\infty)$ та існування границь для їхніх часових середніх при $t \to \infty$. Це накладає певні обмеження на праві частини диференціальних рівнянь, визначені умовами теорем 4-6 на підставі теореми 3, в якій задано необхідні й достатні умови існування розв'язку на проміжку $[0,\infty)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1973. Т.2.
2. *Єлейко Я.І., Жерновий Ю.В.* Асимптотичні властивості випадкових еволюцій, що описуються розв'язками звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних стосовно старших похідних// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2002. Вип. 60. С. 60-66.
3. *Єлейко Я.І., Жерновий Ю.В.* Асимптотична поведінка випадкових еволюцій, побудованих на основі розв'язків звичайних диференціальних рівнянь// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл матем. та інформ. 2003. Вип. 7. С. 41-52.
4. *Елейко Я.И.* Предельные распределения временных средних для процессов с марковским вмешательством случая// Укр. матем. журн. 1987. Т.39. № 6. С. 779-782.
5. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1985.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. М.: Высш. школа, 1981. Т.1.

LIMITING DISTRIBUTIONS OF THE TIME MEANS OF STOCHASTIC EVOLUTIONS CONSTRUCTED ON THE BASIS OF THE SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ya. Yeleyko, Yu. Zhernovyi, N. Buhriy
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: mstat@franko.lviv.ua

Conditions of existence of limiting distributions of the time means of stochastic evolutions constructed on the basis of the solutions of the Cauchy problems for systems of ordinary differential equations of the first order on the semi-Markov prosses trajectory with the finite set of the states and in the fixed state infinite mean response time are found.

Key words: stochastic evolution; limiting distribution; semi-Markov prosses; system of ordinary differential equations; Cauchy problem.

Стаття надійшла до редколегії .05.2004
Прийнята до друку