ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія прикл. матем. інформ.
2009. Вип. 15. С. 234–239

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Appl. Math. Inform.
2009. Is. 15. P. 234–239

УДК 519.212

УНІВЕРСАЛЬНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ M/M/n/m З БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Я. Єлейко, Ю. Жерновий

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Для системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги і блокуванням вхідного потоку до досягнення деякого порогового рівня визначено ймовірності станів граничного стаціонарного процесу у випадку показникових розподілів часу між моментами надходження замовлень і часу обслуговування.

Ключові слова: система масового обслуговування з блокуванням вхідного потоку, граничний стаціонарний процес, розподіл імовірностей.

1. ВСТУП

Розглянемо *n*-канальну систему масового обслуговування, для якої довжина черги не може перевищувати числа *m*. Замовлення до системи надходять по одному, а проміжки часу між моментами надходження замовлень і тривалості обслуговування одного замовлення – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковими законами з параметрами λ і μ відповідно.

В [1, 4, 5] вивчено одноканальні системи типу M/G/1/m з обмеженою чергою та відновлюючим рівнем вхідного потоку. Якщо довжина черги досягає числа m, то надходження замовлень у систему блокується і відновлюється лише тоді, коли довжина черги зменшиться до деякого порогового рівня $l \in [0, m-1]$. В [1, 5] наведено алгоритми для визначення ергодичного розподілу довжини черги в такій системі, реалізація яких потребує досить громіздких обчислень.

Нижче для системи M/M/n/m з відновлюючим рівнем вхідного потоку виведено універсальні формули для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі та ергодичного розподілу довжини черги. Універсальність отриманих формул полягає в тому, що вони дають змогу швидко отримати ергодичний розподіл для довільних значень кількості каналів *n*, максимальної довжини черги *m* і порогового рівня блокування $l \in [0, m-1]$.

2. ВИВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ЕРГОДИЧНОГО РОЗПОДІЛУ

Розглянемо стандартну нумерацію станів системи: станові s_k $\left(k = \overline{0,\ n+m}\right)$ відповідає наявність у системі k замовлень. Через $s_{k,0}$ $\left(k = \overline{n+l+1,\ n+m-1}\right)$ окремо позначимо стани, які відповідають періоду блокування вхідного потоку до моменту зменшення довжини черги до числа l.

Нехай $p_k(t)$ $\left(p_{k,0}(t)\right)$ – імовірність того, що система в будь-який момент часу

t перебуває у стані s_k $\left(s_{k,0}\right)$. Очевидно (див., наприклад, [2, с.69; 3, с.61]), що існують границі

$$p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t) \quad \left(k = \overline{0,\, n+m}\right), \qquad p_{k,0} = \lim_{t\to\infty} p_{k,0}(t) \quad \left(k = \overline{n+l+1,\, n+m-1}\right).$$

Користуючись графом станів системи, запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_k, $p_{k,0}$:

$$\begin{gathered}
\mu p_1 - \lambda p_0 = 0; \quad \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} - (\lambda + k\mu) p_k = 0 \quad \left(k = \overline{1,\, n-1}\right); \\
\lambda p_{k-1} + n\mu p_{k+1} - (\lambda + n\mu) p_k = 0 \quad \left(k = \overline{n,\, n+l-1}\right); \\
\lambda p_{n+l-1} + n\mu (p_{n+l+1} + p_{n+l+1,0}) - (\lambda + n\mu) p_{n+l} = 0; \\
\lambda p_{k-1} + n\mu p_{k+1} - (\lambda + n\mu) p_k = 0 \quad \left(k = \overline{n+l+1,\, n+m-2}\right); \\
\lambda p_{n+m-2} - (\lambda + n\mu) p_{n+m-1} = 0; \qquad \lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m} = 0; \\
p_{n+m} = p_{k,0} \quad \left(k = \overline{n+l+1,\, n+m-1}\right).
\end{gathered} \tag{1}$$

Систему рівнянь (1) розв'язуватимемо разом з нормувальною умовою

$$\sum_{k=0}^{n+m-1} p_k + (m-l) p_{n+m} = 1. \tag{2}$$

Після введення позначень

$$u_k = k\mu p_k - \lambda p_{k-1} \quad \left(k = \overline{1,\, n}\right); \qquad u_k = n\mu p_k - \lambda p_{k-1} \quad \left(k = \overline{n+1,\, n+m}\right)$$

система (1) набуває вигляду, зручного для подальшого розв'язування,

$$\begin{gathered}
u_1 = 0; \quad u_{k+1} - u_k = 0 \quad \left(k = \overline{1,\, n+l-1}; \quad k = \overline{n+l+1,\, n+m-2}\right); \\
u_{n+l+1} - u_{n+l} + n\mu p_{n+m} = 0; \quad u_{n+m-1} + \lambda p_{n+m-1} = 0; \quad u_{n+m} = 0.
\end{gathered}$$

Отже,

$$u_k = 0 \quad \left(k = \overline{1,\, n+l}\right); \quad u_k = -n\mu p_{n+m} \quad \left(k = \overline{n+l+1,\, n+m-1}\right); \quad u_{n+m} = 0.$$

Звідси послідовно знаходимо

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad \left(k = \overline{1,\, n}\right); \qquad p_{n+k} = \frac{\alpha^n}{n!} \beta^k p_0 \quad \left(k = \overline{1,\, l}\right); \tag{3}$$

$$p_{n+k} = \frac{\alpha^n}{n!} \beta^k p_0 - \sum_{j=0}^{k-l-1} \beta^j p_{n+m} \quad \left(k = \overline{l+1,\, m-1}\right); \tag{4}$$

$$p_{n+m} = \frac{\alpha^n}{n!} \beta^m p_0 - \sum_{j=1}^{m-l-1} \beta^j p_{n+m}, \tag{5}$$

де $\alpha = \lambda / \mu; \quad \beta = \alpha / n.$

За допомогою рівняння (5) можна виразити p_{n+m} через p_0. Тоді, припустивши, що $\beta \neq 1$, одержимо

$$p_{n+m} = \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\beta^m}{\sum_{j=0}^{m-l-1} \beta^j} p_0 = \frac{\alpha^n}{n!} \frac{(1-\beta)\beta^m}{1-\beta^{m-l}} p_0. \tag{6}$$

Тепер рівняння (4) можемо записати у вигляді

$$p_{n+k} = \frac{\alpha^n}{n!}\beta^k p_0 - \frac{\alpha^n}{n!}\frac{(1-\beta)\beta^m}{1-\beta^{m-l}}\sum_{j=0}^{k-l-1}\beta^j p_0 = \\ = \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\beta^k-\beta^m}{1-\beta^{m-l}}p_0, \qquad \left(k=\overline{l+1,\, m-1}\right); \qquad \beta\neq 1. \tag{7}$$

Отже, всі ймовірності виражені через p_0. Щоб знайти p_0, використаємо нормувальну умову (2):

$$\frac{1}{p_0} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{l}\beta^k + \sum_{k=l+1}^{m-1}\frac{\beta^k-\beta^m}{1-\beta^{m-l}} + \frac{(m-l)(1-\beta)\beta^m}{1-\beta^{m-l}}\right) = \\ = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\beta(1-\beta^l)}{1-\beta} + \frac{\beta^{l+1}(1-\beta^{m-l-1})}{(1-\beta)(1-\beta^{m-l})}\right) + \\ + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{(m-l)(1-\beta)\beta^m - (m-l-1)\beta^m}{1-\beta^{m-l}}, \qquad \beta\neq 1.$$

Звідси

$$p_0 = \frac{1-\beta^{m-l}}{A_n(\alpha,\,\beta)}, \qquad \beta\neq 1, \tag{8}$$

$$A_n(\alpha,\,\beta) = (1-\beta^{m-l})\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\beta-\beta^{m-l+1}}{1-\beta} - (m-l)\beta^{m+1}\right).$$

Співвідношення (3), (6), (7) і (8) цілковито визначають ергодичний розподіл кількості замовлень у системі у випадку, коли $\beta\neq 1$:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!}p_0 = \frac{\alpha^k}{k!}\frac{1-\beta^{m-l}}{A_n(\alpha,\,\beta)} \qquad \left(k=\overline{1,\, n}\right);$$

$$p_{n+k} = \frac{\alpha^n}{n!}\beta^k p_0 = \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\beta^k(1-\beta^{m-l})}{A_n(\alpha,\,\beta)} \qquad \left(k=\overline{1,\, l}\right);$$

$$p_{n+k} = \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\beta^k-\beta^m}{1-\beta^{m-l}}p_0 = \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\beta^k-\beta^m}{A_n(\alpha,\,\beta)} \qquad \left(k=\overline{l+1,\, m-1}\right); \tag{9}$$

$$p_{n+m} = p_{k,0} = \frac{\alpha^n}{n!}\frac{(1-\beta)\beta^m}{1-\beta^{m-l}}p_0 = \frac{\alpha^n}{n!}\frac{(1-\beta)\beta^m}{A_n(\alpha,\,\beta)} \qquad \left(k=\overline{n+l+1,\, n+m-1}\right).$$

Якщо $\beta=1$, тобто $\alpha=n$, то з (3) – (6) одержимо

$$p_k = \frac{n^k}{k!}p_0 \quad \left(k=\overline{1,\, n}\right); \quad p_{n+k} = \frac{n^n}{k!}p_0 \quad \left(k=\overline{1,\, l}\right);$$

$$p_{n+m} = \frac{n^n}{n!}p_0 - (m-l-1)p_{n+m} \quad \Rightarrow \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad p_{n+m} = \frac{n^n}{n!(m-l)}p_0 = p_{k,0} \qquad \left(k=\overline{n+l+1,\, n+m-1}\right);$$

$$p_{n+k} = \frac{n^n}{n!}p_0 - (k-l)p_{n+m} = \frac{n^n}{n!}\frac{m-k}{m-l}p_0 \qquad \left(k=\overline{l+1,\, m-1}\right).$$

За допомогою нормувальної умови (2) знайдемо

$$p_0 = \frac{1}{B_n}, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \sum_{k=1}^{l} \frac{n^n}{k!} + \frac{n^n}{n!}\frac{m-l+1}{2}. \tag{11}$$

3. ОДНОКАНАЛЬНА СИСТЕМА

Для одноканальної системи $(n=1)$ формули (8), (9) набудуть вигляду (випадок $\alpha \neq 1$):

$$\begin{aligned}
&p_0 = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^{m-l})}{A_1(\alpha)}, \qquad A_1(\alpha) = 1-\alpha^{m-l} - (m-l)(1-\alpha)\alpha^{m+2};\\
&p_k = \alpha^k p_0 = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^{m-l})\alpha^k}{A_1(\alpha)} \quad \left(k = \overline{1,\, l+1}\right);\\
&p_k = \frac{(1-\alpha)(\alpha^k - \alpha^{m+1})}{A_1(\alpha)} \quad \left(k = \overline{l+2,\, m}\right);\\
&p_{m+1} = \frac{(1-\alpha)^2\alpha^{m+1}}{A_1(\alpha)} = p_{k,0} \quad \left(k = \overline{l+2,\, m}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Якщо $\alpha = 1,$ тобто $\lambda = \mu,$ то з (10) і (11) маємо:

$$\begin{aligned}
&p_0 = \frac{2}{m-l+5+2\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{k!}}; \qquad p_k = \frac{p_0}{(k-1)!} \quad \left(k = \overline{1,\, l+1}\right);\\
&p_k = \frac{m-k+1}{m-l} p_0 \quad \left(k = \overline{l+2,\, m}\right); \qquad p_{m+1} = \frac{p_0}{m-l} = p_{k,0} \quad \left(k = \overline{l+2,\, m}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Прийнявши $l=0$ у співвідношеннях (12) і (13), визначимо ергодичний розподіл кількості замовлень для системи, в якій блокування вхідного потоку знімається за умови відсутності черги,

$$\begin{aligned}
&p_k = \frac{(1-\alpha)(\alpha^k - \alpha^{m+1})}{1-\alpha^m - m(1-\alpha)\alpha^{m+2}} \quad \left(k = \overline{0,\, m}\right);\\
&p_{m+1} = \frac{\alpha^{m+1}(1-\alpha)^2}{1-\alpha^m - m(1-\alpha)\alpha^{m+2}} = p_{k,0} \quad \left(k = \overline{2,\, m}\right), \qquad \alpha \neq 1;\\
&p_0 = \frac{2}{m+5}; \qquad p_k = \frac{2(m-k+1)}{m(m+5)} \quad \left(k = \overline{1,\, m}\right);\\
&p_{m+1} = \frac{2}{m(m+5)} = p_{k,0} \quad \left(k = \overline{2,\, m}\right), \qquad \alpha = 1.
\end{aligned}$$

4. НЕОБМЕЖЕНЕ ЗРОСТАННЯ ДОВЖИНИ ЧЕРГИ

Якщо припустимо, що $\beta < 1,$ і перейдемо до границі при $m \to \infty$ у формулах (8), (9), то одержимо класичний ергодичний розподіл для *n*-канальної системи без обмежень на довжину черги (див. [2, с.112])

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!}+\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\alpha^n}{n!}} \qquad \left(k=\overline{0,\,n}\right); \qquad p_{n+k}=\frac{\alpha^n}{n!}\beta^k p_0 \quad (k=1,\,2,\ldots).$$

Для одноканальної системи відповідні формули (див. [2, с.113; 3, с.185]) отримуємо зі співвідношень (12), якщо в них прийняти $\alpha<1$, $m\to\infty$,

$$p_k=\alpha^k(1-\alpha) \qquad (k=0,\,1,\,2,\ldots).$$

5. ЕРГОДИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ДОВЖИНИ ЧЕРГИ

Позначимо через π_k $\left(k=\overline{0,\,m}\right)$ стаціонарну ймовірність того, що довжина черги в системі дорівнює k. Використовуючи співвідношення (8) і (9), можемо записати формули для ергодичного розподілу довжини черги в n-канальній системі з блокуванням вхідного потоку (випадок $\beta\neq 1$)

$$\pi_0=\sum_{j=0}^{n}p_j=\frac{1-\beta^{m-l}}{A_n(\alpha,\,\beta)}\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha^j}{j!}; \qquad \pi_k=p_{n+k}=\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\beta^k(1-\beta^{m-l})}{A_n(\alpha,\,\beta)} \quad \left(k=\overline{1,\,l}\right);$$

$$\pi_k=p_{n+k}+p_{n+m}=\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\beta^k-\beta^{m+1}}{A_n(\alpha,\,\beta)} \quad \left(k=\overline{l+1,\,m-1}\right); \qquad \pi_m=p_{n+m}=\frac{\alpha^n}{n!}\frac{(1-\beta)\beta^m}{A_n(\alpha,\,\beta)}.$$

Якщо $\beta=1$, то відповідні формули отримуємо зі співвідношень (10) і (11):

$$\pi_0=\frac{1}{B_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^j}{j!}; \qquad \pi_k=\frac{n^n}{k!B_n} \quad \left(k=\overline{1,\,l}\right); \qquad \pi_k=\frac{n^n}{n!}\frac{m-k+1}{(m-l)B_n} \quad \left(k=\overline{l+1,\,m}\right).$$

6. ВИСНОВКИ

Отже, у статті для марковської системи масового обслуговування з блокуванням вхідного потоку до досягнення порогового рівня l вдалося вивести максимально прості й універсальні формули для ергодичного розподілу кількості замовлень у системі та для ергодичного розподілу довжини черги. Отримані формули придатні для будь-яких значень кількості каналів обслуговування n, максимальної довжини черги m і порогового рівня блокування $l\in[0,m-1]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Братійчук А.М.* Граничні теореми для системи типу M^{θ}/G/1/b з відновлюючим рівнем вхідного потоку // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 7. – С. 884–889.
2. *Жерновий Ю.В.* Марковські моделі масового обслуговування. Львів, 2004.
3. *Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. М., 1969.
4. *Takagi H.* Analysis of finite-capacity M/G/1 queue with a resume level // Performance Evaluation. – 1985. – **5**, № 3. – P. 197–203.
5. *Takagi H.* Queueing analysis. Vol. 2. North Holland, 1993.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ M/M/n/m С БЛОКИРОВКОЙ ВХОДНОГО ПОТОКА

Я. Елейко, Ю. Жерновый

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Для системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди и блокировкой входного потока до достижения некоторого порогового уровня определены вероятности состояний предельного стационарного процесса в случае показательных распределений времени между моментами поступления заявок и времени обслуживания.

Ключевые слова: система массового обслуживания с блокировкой входного потока, предельный стационарный процесс, распределение вероятностей.

UNIVERSAL FORMULAS FOR QUEUEING SYSTEM WITH BLOCKING AN INPUT FLOW

Ya. Yeleyko, Yu. Zhernovyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Probabilities of states of limiting stationary process for queuing system with the limited queue and blocking an input flow before achievement of some threshold level in case of exponential distributions of time between the moments of arrival of customers and service time are obtained.

Key words: queuing system with blocking an input flow, limiting stationary process, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.2008
Прийнята до друку 04.11.2009